

Mathpedia

Matematika Itu Asyik!

39 lembar kerja inkuiri: satu untuk setiap bab, dengan bahan sederhana dan versi virtual, lengkap dengan kunci, contoh data, dan rubrik penilaian.



dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD

Editor: Abdullah Hanif Hidayat

Didukung oleh Aurumgen Academy

Tentang LKPD edisi guru

Setiap LKPD mengikuti alur Pembelajaran Mendalam: memahami masalah, mengeksplorasi, mengumpulkan dan menganalisis data, menemukan pola, menyimpulkan, lalu merefleksi. Kegiatan dirancang untuk kelompok 3–4 orang dengan bahan murah yang mudah dicari. Bila bahan tidak tersedia, gunakan versi virtual (Grafik Hidup atau Lab Mini) di aurumgen.my.id/mathpedia.

Edisi guru memuat kunci analisis, contoh data hasil percobaan, rubrik penilaian 4 tingkat, dan catatan pelaksanaan.

Mathpedia • Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026).

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD**

Editor: **Abdullah Hanif Hidayat**

Didukung oleh Aurumgen Academy.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Dokumen ini boleh dicetak dan diperbanyak untuk keperluan pembelajaran nonkomersial dengan tetap mencantumkan sumber.

Semua soal dan LKPD adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.

Versi interaktif dengan komik bergerak, Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, Adu Cepat, dan latihan berskor: aurumgen.my.id/mathpedia

Daftar isi

BAGIAN A • BILANGAN

1	Matematika Ada di Mana-mana	5
2	Bilangan Bulat & Garis Bilangan	10
3	Pecahan, Desimal & Persen	15
4	Faktor, Kelipatan & Bilangan Prima	20
5	Rasio, Proporsi & Laju	25
6	Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah	30

BAGIAN B • ALJABAR & FUNGSI

7	Bahasa Aljabar	35
8	Persamaan & Pertidaksamaan Linear	40
9	Garis Lurus & Fungsi Linear	45
10	Sistem Persamaan Linear	50
11	Persamaan Kuadrat	55
12	Fungsi Kuadrat & Parabola	60
13	Fungsi: Komposisi, Invers & Transformasi	65
14	Eksponen & Logaritma	70
15	Barisan & Deret	75
16	Polinomial	80

BAGIAN C • GEOMETRI & PENGUKURAN

17	Garis, Sudut & Segitiga	85
18	Teorema Pythagoras	90
19	Keliling & Luas Bangun Datar	94
20	Lingkaran	99
21	Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume	104

22	Kesebangunan & Transformasi Geometri	109
23	Geometri Koordinat & Vektor	114
BAGIAN D • TRIGONOMETRI		
24	Trigonometri Segitiga Siku-siku	119
25	Aturan Sinus, Kosinus & Luas Segitiga	124
26	Fungsi & Identitas Trigonometri	129
BAGIAN E • KALKULUS		
27	Limit: Seni Mendekati	134
28	Turunan: Laju Perubahan	139
29	Aplikasi Turunan: Optimasi & Grafik	144
30	Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga	149
BAGIAN F • DATA & PELUANG		
31	Statistika: Bercerita dengan Data	154
32	Kaidah Pencacahan	160
33	Peluang	165
34	Distribusi Peluang: Binomial & Normal	171
BAGIAN G • MATEMATIKA LANJUT & OLIMPIADE		
35	Logika & Pembuktian	176
36	Matriks	181
37	Bilangan Kompleks	187
38	Teori Bilangan Olimpiade	191
39	Strategi Olimpiade: Kombinatorika & Ketaksamaan	196

Biji Congklak yang Tumbuh: Rahasia Bilangan Segitiga dan Persegi

Bab 1 · Matematika Ada di Mana-mana

Eksplorasi kelompok (penemuan terbimbing) + permainan jabat tangan

SD kelas V–VI dan SMP kelas VII

2 × 35 menit (SD) atau 2 × 40 menit (SMP)

Model: Discovery learning: susun – hitung – temukan pola – buktikan dengan gambar

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menyusun pola titik bilangan segitiga dan bilangan persegi, lalu melanjutkannya tanpa menyusun ulang.
- Peserta didik dapat menemukan rumus $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ dengan menggabungkan dua susunan segitiga menjadi persegi panjang.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa jumlah n bilangan ganjil pertama selalu n^2 memakai lapisan siku pada susunan persegi.
- Peserta didik dapat membedakan menebak, menguji, dan membuktikan sebuah pola.

Cerita pemantik



Di warung Bu Sari, Ayu membantu menyusun kaleng susu di etalase: 1 kaleng di puncak, 2 di bawahnya, lalu 3, lalu 4, membentuk segitiga. Di teras sebelah, Dimas menata ubin menjadi persegi: 1, lalu 4, lalu 9. Ancil menghitung dengan jari dan mulai pusing: "Kalau tumpukannya 20 lapis, aku harus menghitung satu per satu?" Kak Lintang tersenyum dan menuang biji congklak ke meja: "Susun polanya, catat, lalu temukan jalan pintasnya. Matematikawan bukan orang yang paling cepat menghitung, tetapi orang yang pandai melihat pola."

Rumusan masalah

Bagaimana cara menghitung banyak butir pada bilangan segitiga dan bilangan persegi tahap ke- n tanpa menyusun dan menghitung satu per satu?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Biji congklak, kancing, atau kerikil kecil: 50 butir per kelompok (dua warna lebih baik, misalnya 25 putih dan 25 cokelat)
- Selembar kertas HVS atau karton sebagai alas menyusun
- Kertas berpetak 1 cm dan pensil warna untuk menggambar hasil susunan
- Pensil dan penggaris
- Kalkulator atau HP (opsional, untuk mengecek)

Keselamatan

Biji congklak dan kancing adalah benda kecil: jangan dimasukkan ke mulut, hidung, atau telinga, dan segera pungut yang jatuh agar tidak ada yang terpeleset. Saat permainan jabat tangan, bergerak pelan di dalam

kelas lalu cuci tangan sesudahnya. Kembalikan semua biji ke wadahnya.

Langkah kerja

1. Tulis dugaanmu dulu: berapa butir yang diperlukan untuk segitiga tahap ke-10? Untuk persegi tahap ke-10?
2. Susun bilangan segitiga: tahap 1 berisi 1 butir, tahap 2 menambahkan baris berisi 2 butir di bawahnya, tahap 3 menambahkan 3 butir, dan seterusnya sampai tahap 6. Catat banyak butir setiap tahap dan banyak butir yang ditambahkan.
3. Susun bilangan persegi: tahap 1 berisi 1 butir, tahap 2 menjadi persegi 2×2 , dan seterusnya sampai 6×6 . Setiap kali tumbuh, pakai warna lain untuk butir baru dan perhatikan bentuk lapisan barunya (seperti huruf L atau siku). Catat banyak butirnya.
4. Ambil dua susunan segitiga yang sama besar (misalnya dua segitiga tahap 4) dengan warna berbeda. Balik salah satunya dan tempelkan sehingga membentuk persegi panjang. Hitung baris dan kolomnya, lalu isi kolom $2 \times T$ dan $n \times (n + 1)$.
5. Gambar semua susunanmu di kertas berpetak (satu petak = satu butir) dan warnai lapisan sikunya.
6. Permainan jabat tangan: bentuk kelompok 2, 3, 4, lalu 5 orang. Setiap pasang anggota bersalaman tepat sekali. Hitung banyak jabat tangan pada setiap kelompok, lalu cari angka itu di tabelmu.
7. Bandingkan tabelmu dengan dugaan di langkah 1 dan perbaiki dugaanmu memakai pola yang kamu temukan.

Tabel pengamatan pola biji congklak

Tahap n	Butir segitiga T	Tambahan dari tahap sebelumnya	Butir persegi P	Butir lapisan siku baru	$2 \times$ T	$n \times (n +$ $1)$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Grafik

Buat diagram batang berdampingan: sumbu mendatar tahap $n = 1$ sampai 6, sumbu tegak banyak butir; satu batang untuk T dan satu untuk P . Batang mana yang tumbuh lebih cepat? Apakah tambahannya tetap atau makin besar?

Analisis

1. Lihat kolom "Tambahan" pada bilangan segitiga. Pola apa yang kamu lihat? Pakai pola itu untuk menebak T_7 dan T_8 tanpa menyusun biji.

Kunci: Tambahannya 1, 2, 3, 4, 5, 6: tahap ke- n menambah n butir (satu baris baru yang selalu satu lebih panjang). Jadi $T_7 = 21 + 7 = 28$ dan $T_8 = 28 + 8 = 36$.

2. Bandingkan kolom $2 \times T$ dan $n \times (n + 1)$. Jelaskan memakai susunan dua segitiga yang membentuk persegi panjang, lalu tuliskan rumus T_n . Hitung T_{10} dan T_{20} , lalu periksa dugaanmu di langkah 1.

Kunci: Kedua kolom selalu sama: 2, 6, 12, 20, 30, 42. Dua segitiga tahap n yang digabung membentuk persegi panjang n baris $\times (n + 1)$ kolom, jadi $2T_n = n(n + 1)$ dan $T_n = \frac{n(n + 1)}{2}$. Maka $T_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$ dan $T_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$. Persegi tahap 10 berisi $10^2 = 100$ butir.

3. Lapisan siku pada persegi berisi 1, 3, 5, 7, ... butir. Jelaskan mengapa jumlah n bilangan ganjil pertama selalu sama dengan n^2 . Berapa $1 + 3 + 5 + \dots + 19$?

Kunci: Persegi $n \times n$ tersusun dari lapisan siku berisi 1, 3, 5, ..., $2n - 1$ butir: setiap lapisan menambah satu baris dan satu kolom yang berbagi satu butir pojok, sehingga isinya selalu ganjil. Semua lapisan itu tepat menutup persegi $n \times n$, jadi jumlahnya n^2 . $1 + 3 + \dots + 19$ adalah 10 bilangan ganjil pertama, sehingga hasilnya $10^2 = 100$.

4. Gabungkan segitiga tahap 4 dan segitiga tahap 3 (dua warna). Bangun apa yang terbentuk? Tuliskan polanya untuk $T_n + T_{n-1}$.

Kunci: Terbentuk persegi 4×4 berisi $10 + 6 = 16$ butir. Polanya: $T_n + T_{n-1} = n^2$; dua bilangan segitiga berurutan selalu berjumlah bilangan persegi, misalnya $T_6 + T_5 = 21 + 15 = 36 = 6^2$.

5. Berapa jabat tangan dalam kelompok 5 orang? Apa hubungannya dengan bilangan segitiga? Berapa jabat tangan jika 30 siswa di kelasmu saling bersalaman tepat sekali?

Kunci: Kelompok 2, 3, 4, 5 orang menghasilkan 1, 3, 6, 10 jabat tangan, yaitu bilangan segitiga T_1, T_2, T_3, T_4 : orang yang baru datang bersalaman dengan semua orang yang sudah ada, persis seperti menambah satu baris. Untuk n orang banyaknya $T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$; untuk 30 siswa: $\frac{29 \times 30}{2} = 435$ jabat tangan.

6. Bu Sari punya 100 kaleng susu dan menyusunnya seperti Ayu (1, 2, 3, ... dari puncak). Paling banyak berapa lapis segitiga utuh yang dapat dibuat, dan berapa kaleng yang tersisa?

Kunci: $T_{13} = \frac{13 \times 14}{2} = 91 \leq 100$, sedangkan $T_{14} = 105 > 100$. Jadi paling banyak 13 lapis, dan tersisa $100 - 91 = 9$ kaleng.

7. Ancil berkata, "Aku sudah mengecek 6 tahap dan semuanya cocok, jadi rumusnya pasti benar." Apa bedanya menebak, menguji, dan membuktikan? Mengapa susunan dua segitiga yang menjadi persegi panjang adalah bukti untuk semua n ?

Kunci: Menebak: membuat dugaan dari beberapa contoh. Menguji: mencocokkan dugaan dengan contoh lain; lolos banyak uji belum menjamin selalu benar. Membuktikan: memberi alasan yang berlaku untuk setiap n . Mengecek 6 tahap baru menguji. Dua segitiga tahap n selalu membentuk persegi panjang $n \times (n + 1)$ berapa pun n -nya, sehingga alasan itu berlaku untuk semua tahap: itulah bukti.

✓ Kesimpulan

Tuliskan rumus bilangan segitiga dan bilangan persegi tahap ke- n , lalu jelaskan dengan kata-kata dan gambar susunan biji mengapa kedua rumus itu selalu benar.

💬 Refleksi

- Pola yang paling membuatku berseru "aha!" hari ini adalah ...

- Menyusun biji membantuku memahami rumus karena ...
- Di sekitarku, susunan bilangan segitiga atau persegi bisa kutemukan pada ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada biji congklak? Buka Lab Mini "Penumbuh pola: titik demi titik" di Bab 1 (subbab 1.2). Pilih jenis segitiga, lalu persegi, tekan ► Jalankan, dan catat baris "Tambahan" pada setiap tahap. Uji rumusmu dengan Rumus Hidup "Bilangan segitiga" (subbab 1.2) dan "Jumlah n bilangan ganjil pertama" (subbab 1.5), lalu latih mata pola dengan Adu Cepat "Tebak suku berikutnya" (subbab 1.2).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b1-2

Contoh data (hasil menyusun dan menghitung)

Tahap n	Butir segitiga T	Tambahan dari tahap sebelumnya	Butir persegi P	Butir lapisan siku baru	$2 \times T$	$n \times (n + 1)$
1	1	1	1	1	2	2
2	3	2	4	3	6	6
3	6	3	9	5	12	12
4	10	4	16	7	20	20
5	15	5	25	9	30	30
6	21	6	36	11	42	42

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketelitian menyusun & mencatat	Semua susunan tahap 1–6 tepat, tabel lengkap, dan tanpa salah hitung.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil yang tidak mengubah pola.	Beberapa susunan atau isian salah sehingga pola sulit terlihat.	Susunan dan tabel belum dapat dipakai.
Menemukan pola & rumus	Menemukan pola tambahan, rumus $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, dan jumlah bilangan ganjil $= n^2$, lalu memakainya untuk tahap besar.	Menemukan sebagian besar pola dan rumus dengan sedikit bantuan.	Hanya melanjutkan pola satu per satu tanpa rumus.	Belum menemukan pola.
Penalaran & bukti visual	Menjelaskan dengan susunan biji mengapa rumus berlaku untuk semua n dan dapat membedakan menguji dengan membuktikan.	Penjelasan visual benar tetapi kurang lengkap.	Hanya menyebut contoh tanpa alasan.	Belum ada penjelasan.
Kerja sama & keaktifan	Semua anggota menyusun, mencatat, dan ikut permainan dengan tertib; hasil disampaikan dengan jelas.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Untuk kelas SD, cukupkan sampai pertanyaan 1–6 dan biarkan siswa menghitung T_{10} dengan menambah terus: $36 + 9 + 10 = 55$. Untuk SMP, tantang kelompok cepat dengan bilangan segi lima 1, 5, 12, 22 atau jumlah Gauss $1 + 2 + \dots + 100 = 5.050$. Jika kelas sempit, permainan jabat tangan dapat diganti dengan menghitung garis penghubung antara titik-titik di lingkaran. Jangan menyebut rumus sebelum siswa menemukan susunan persegi panjangnya sendiri.

Nampan Koin Pasangan Nol: Mengapa Mengurangi Bisa Menambah?

Bab 2 · Bilangan Bulat & Garis Bilangan

Eksplorasi berpasangan dengan alat peraga (penemuan terbimbing)

SD kelas VI dan SMP kelas VII

2 x 40 menit

Model: Discovery learning: peragaan – catat – bandingkan – rumuskan aturan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat memperagakan penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan koin positif-negatif dan pasangan nol.
- Peserta didik dapat menemukan sendiri aturan $a - b = a + (-b)$ dari data peragaan.
- Peserta didik dapat memakai model koin untuk menjelaskan mengapa negatif $\times$ negatif = positif.
- Peserta didik dapat menerapkan pengurangan bilangan bulat pada konteks suhu dan utang.

Cerita pemantik



Ancil mencatat keuangannya di buku kecil: uang di celengan Rp3.000, tetapi ada utang Rp4.000 di warung Bu Sari. "Jadi nilai bersihku minus seribu," katanya lesu. Sore itu Bu Sari berbaik hati: "Utangmu yang empat ribu Ibu hapus, ya." Dimas menulis di papan: $(-1) - (-4)$. "Dikurangi kok malah untung? Bukankah dikurangi itu selalu berkurang?" tanyanya. Ayu menebak 3, Ancil menebak -5 . Kak Lintang membawa sekotak koin kuning dan merah: "Satu koin kuning dan satu koin merah saling meniadakan; itulah pasangan nol. Peragaan, lalu temukan sendiri siapa yang benar."

? Rumusan masalah

Bagaimana hubungan antara mengurangi sebuah bilangan bulat dan menambahkan lawannya?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Koin karton berdiameter ± 3 cm: 20 kuning bertanda $+$ (bernilai $+1$) dan 20 merah bertanda $-$ (bernilai -1) per pasangan, atau tutup botol dua warna
- Nampan, tutup kotak sepatu, atau selembar kertas HVS sebagai "nampan"
- Gunting dan spidol untuk membuat koin
- Pensil dan lembar kerja ini
- Dadu (opsional, untuk tantangan berpasangan)

⚠ Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati dan arahkan ujungnya menjauhi teman. Kumpulkan sisa potongan karton ke tempat sampah. Koin karton dan tutup botol jangan dimasukkan ke mulut.

Langkah kerja

1. Buat koin: gunting 20 lingkaran kuning dan 20 merah. Tulis + pada koin kuning (nilai +1) dan – pada koin merah (nilai –1). Satu kuning dan satu merah bersama-sama bernilai 0: itulah pasangan nol.
2. Tulis dugaanmu: berapa $(-1) - (-4)$? Siapa yang benar, Ayu atau Ancil?
3. Peragakan pengurangan $a - b$: letakkan koin senilai a di nampan, lalu ambil koin senilai b . Jika koin yang akan diambil tidak cukup, tambahkan dulu pasangan nol (1 kuning + 1 merah) secukupnya; nilai nampan tidak berubah. Hitung nilai koin yang tersisa.
4. Kerjakan keenam soal di tabel. Catat koin mula-mula (5K = lima kuning, 3M = tiga merah), banyak pasangan nol yang ditambahkan, koin yang tersisa, dan hasilnya.
5. Untuk setiap soal, peragakan juga penjumlahan kembarannya: letakkan koin senilai a , lalu tambahkan koin senilai lawan b (kuning diganti merah, merah diganti kuning). Buang semua pasangan nol dan catat hasilnya.
6. Perkalian dengan koin: $(+3) \times (-2)$ berarti "masukkan 3 kali dua koin merah". $(-3) \times (-2)$ berarti "ambil 3 kali dua koin merah" dari nampan kosong (nilainya 0). Karena tidak ada koin merah, tambahkan dulu 6 pasangan nol, lalu ambil 6 koin merah. Catat apa yang tersisa.
7. Tantangan berpasangan: satu siswa membuat soal pengurangan bilangan bulat antara –10 dan 10 (boleh memakai dadu), pasangannya menyelesaikan dengan koin lalu dengan aturan yang kalian temukan. Tukar peran tiga kali.

Tabel peragaan koin (K = kuning, +1; M = merah, –1)

Soal a – b	Koin mula-mula	Pasangan nol ditambahkan	Koin tersisa	Hasil	Penjumlahan kembaran $a + (-b)$	Hasil penjumlahan
5 – 2						
2 – 5						
(–3) – 2						
(–4) – (–1)						
(–1) – (–4)						
3 – (–4)						

Grafik

Gambar garis bilangan dari –8 sampai 8. Untuk soal 2 dan 6, gambar lompatan katak: mulai di a , lalu lompat ke arah lawan b sejauh $|b|$. Apakah katak mendarat di hasil yang sama dengan nampan koin?

Analisis

1. Pada soal mana saja kamu harus menambahkan pasangan nol? Mengapa menambahkan pasangan nol tidak mengubah nilai nampan?

Kunci: Soal 2, 3, 5, dan 6. Pada soal itu koin yang akan diambil tidak cukup (atau warnanya tidak ada) di nampan. Satu pasangan nol bernilai $(+1) + (-1) = 0$, jadi menambahkannya sama dengan menambah 0: nilai nampan tetap, tetapi koin yang diperlukan kini tersedia.

2. Bandingkan kolom "Hasil" dan "Hasil penjumlahan". Pola apa yang kamu temukan? Tuliskan aturannya dengan kata-kata dan dengan simbol.

Kunci: Kedua kolom selalu sama. Mengurangkan sebuah bilangan sama dengan menambahkan lawannya: $a - b = a + (-b)$. Contoh: $2 - 5 = 2 + (-5) = -3$ dan $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$.

3. Jawab pertanyaan Dimas: berapa $(-1) - (-4)$? Siapa yang benar, Ayu atau Ancil? Jelaskan dengan cerita utang yang dihapus.

Kunci: $(-1) - (-4) = (-1) + 4 = 3$, jadi Ayu benar: nilai bersih Ancil menjadi Rp3.000, sama dengan isi celengannya karena utangnya hilang. Menghapus (mengurangkan) utang empat ribu sama dengan menambah empat ribu. Tebakkan Ancil, -5 , adalah $(-1) + (-4)$: itu terjadi kalau ia malah berutang empat ribu lagi.

4. Tanpa koin, pakai aturanmu untuk menghitung $(-7) - 5$, $4 - 9$, dan $(-6) - (-10)$. Periksa salah satunya dengan koin.

Kunci: $(-7) - 5 = (-7) + (-5) = -12$; $4 - 9 = 4 + (-9) = -5$; $(-6) - (-10) = (-6) + 10 = 4$.

5. Apa yang tersisa di nampan pada percobaan $(-3) \times (-2)$? Berapa hasil $(+3) \times (-2)$? Jelaskan dengan koin mengapa negatif $\times$ negatif menghasilkan positif.

Kunci: Tersisa 6 koin kuning, jadi $(-3) \times (-2) = +6$. Sebaliknya $(+3) \times (-2)$ berarti memasukkan 3 kali dua koin merah: hasilnya 6 koin merah $= -6$. Tanda negatif pada bilangan pertama berarti "mengambil" (kebalikan dari memasukkan). Mengambil koin merah yang bernilai negatif membuat nilai nampan naik, sehingga negatif $\times$ negatif = positif.

6. Pukul 03.00 suhu di Puncak Jaya -8°C , dan pukul 12.00 menjadi 4°C . Berapa kenaikan suhunya? Tuliskan sebagai pengurangan bilangan bulat.

Kunci: Kenaikan suhu $= 4 - (-8) = 4 + 8 = 12^\circ\text{C}$.

7. Ancil menulis $(-5) - (-2) = -7$. Temukan kesalahannya, perbaiki, lalu peragakan dengan koin.

Kunci: Ancil memperlakukan "kurang negatif 2" seperti "tambah negatif 2". Yang benar $(-5) - (-2) = (-5) + 2 = -3$. Dengan koin: letakkan 5 koin merah, ambil 2 koin merah, tersisa 3 koin merah $= -3$; tidak perlu pasangan nol.

✓ Kesimpulan

Tuliskan aturan pengurangan bilangan bulat yang kamu temukan dalam kata-kata dan dalam simbol, beri dua contoh (salah satunya mengurangkan bilangan negatif), dan jelaskan dengan pasangan nol mengapa aturan itu masuk akal.

💡 Refleksi

- Sebelum kegiatan ini, aku mengira mengurangi bilangan selalu ...
- Pasangan nol membantuku memahami bahwa ...
- Dalam kehidupan sehari-hari, "mengurangkan bilangan negatif" terjadi saat ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak sempat membuat koin? Buka Lab Mini "Nampan koin: pasangan nol beraksi" di Bab 2 (subbab 2.2). Pilih a , operasi, dan b sesuai tabel, tekan ► Jalankan, dan perhatikan kapan pasangan nol ditambahkan. Bandingkan dengan Lab Mini "Katak pelompat di garis bilangan" (subbab 2.2). Untuk aturan tanda perkalian,

geser Grafik Hidup "Tabel perkalian yang berubah menjadi garis" (subbab 2.3), lalu uji kecepatanmu dengan Adu Cepat "Kurang kilat: ubah jadi tambah!" (subbab 2.2).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b2-2

Contoh data (hasil peragaan koin)

Soal a – b	Koin mula-mula	Pasangan nol ditambahkan	Koin tersisa	Hasil	Penjumlahan kembar a + (–b)	Hasil penjumlahan
5 – 2	5K	0	3K	3	$5 + (-2)$	3
2 – 5	2K	3	3M	–3	$2 + (-5)$	–3
(–3) – 2	3M	2	5M	–5	$(-3) + (-2)$	–5
(–4) – (–1)	4M	0	3M	–3	$(-4) + 1$	–3
(–1) – (–4)	1M	3	3K	3	$(-1) + 4$	3
3 – (–4)	3K	4	7K	7	$3 + 4$	7

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Peragaan dengan koin	Semua soal diperagakan dengan benar, termasuk banyak pasangan nol yang tepat.	Ada satu soal yang peragaannya keliru.	Sering bingung kapan dan berapa pasangan nol ditambahkan.	Belum dapat memakai koin.
Ketepatan tabel & hitungan	Semua isian tabel dan soal tanpa koin benar.	Ada 1–2 kesalahan tanda.	Banyak kesalahan tanda atau tabel tidak lengkap.	Tabel hampir kosong.
Menemukan & menjelaskan aturan	Merumuskan $a - b = a + (-b)$, memakainya tanpa koin, dan menjelaskan negatif × negatif dengan model koin.	Merumuskan aturan dengan penjelasan sebagian.	Hanya menghafal "min ketemu min jadi plus" tanpa alasan.	Belum menemukan aturan.
Kerja sama & komunikasi	Bergantian memperagakan dan mencatat; kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya satu anggota yang aktif.	Pasangan belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Koin dapat dibuat sebagai tugas sehari sebelumnya. Tekankan bahwa tanda "–" punya dua makna, yaitu operasi kurang dan tanda bilangan negatif; biasakan menulis tanda kurung, misalnya $3 - (-4)$. Siswa yang kesulitan dapat mulai dari soal 1 dan 4 yang tidak memerlukan pasangan nol. Siswa yang sudah lancar dapat membandingkan model koin dengan model katak di garis bilangan dan menjelaskan kelebihan masing-masing.

Dinding Pecahan dari Pita Kertas: Benarkah $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$?

Bab 3 · Pecahan, Desimal & Persen

Eksplorasi kelompok: melipat dan mengukur (penemuan terbimbing)

SD kelas V-VI dan SMP kelas VII

2 × 40 menit

Model: Discovery learning: lipat – ukur – bandingkan – simpulkan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat membuat dinding pecahan dari pita kertas dan menemukan pecahan-pecahan senilai.
- Peserta didik dapat menjelaskan dengan model pita mengapa $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, bukan $\frac{2}{7}$.
- Peserta didik dapat mengubah pecahan menjadi desimal dan persen, serta membedakan desimal berhenti dan desimal berulang.

Cerita pemantik



Malam Minggu, Ayah membawa pulang satu loyang martabak manis. Dimas mengambil $\frac{1}{3}$ bagian dan Ayu $\frac{1}{4}$ bagian. Ancil langsung berhitung: "Kalian berdua makan $\frac{2}{7}$ martabak! Satu tambah satu dua, tiga tambah empat tujuh." Ayu mengernyit: "Masa berdua makan lebih sedikit daripada Dimas sendirian?" Kak Lintang membagikan pita kertas sepanjang 24 cm kepada kelompokmu: "Anggap pita ini martabaknya. Lipat, ukur, dan buktikan sendiri siapa yang benar."

Rumusan masalah

Pecahan mana saja yang sama besar walaupun angkanya berbeda, dan bagaimana cara yang benar menjumlahkan pecahan yang penyebutnya berbeda?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- 8 pita kertas HVS bekas, masing-masing 24 cm × 3 cm (dipotong memanjang dari kertas A4)
- Penggaris 30 cm dan pensil
- Gunting
- Spidol atau pensil warna, 3 warna
- Kalkulator atau HP
- Lem atau selotip dan selembat karton untuk menempel dinding pecahan

Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati, menggunting menjauhi tubuh, dan arahkan ujungnya menjauhi teman. Tepi kertas bisa menggores jari, jadi lipat pelan-pelan. Kumpulkan sisa potongan ke tempat sampah.

Langkah kerja

1. Tulis dugaanmu: apakah $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$? Jika tidak, kira-kira berapa?
2. Siapkan 8 pita 24 cm. Pita pertama dibiarkan utuh dan diberi label 1. Lipat pita A menjadi 2 bagian sama panjang, B menjadi 3, C menjadi 4, D menjadi 6, E menjadi 8, dan F menjadi 12. Petunjuk: 4 = lipat 2 lalu lipat 2; 6 = lipat 3 lalu lipat 2; 12 = lipat 3, lalu 2, lalu 2. Pita kedelapan disimpan sebagai pita uji.
3. Buka lipatan, tebalkan garis lipat dengan pensil, dan tulis pecahan pada setiap bagian, misalnya $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

- Ukur panjang satu bagian setiap pita sampai 0,1 cm dan catat di tabel.
- Hitung desimalnya dengan kalkulator ($1 \div$ banyak bagian), lalu ubah ke persen (kali 100%, bulatkan satu angka di belakang koma).
- Tempel pita-pita bertumpuk di karton, dari pita utuh di atas sampai pita F di bawah, dengan ujung kiri tepat sejajar. Inilah dinding pecahan. Letakkan penggaris tegak di garis $\frac{1}{2}$ dan catat semua pecahan yang garis lipatnya tepat di situ. Ulangi untuk $\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{4}$.
- Uji tebakan Ancil: pada pita uji, tandai panjang $\frac{1}{3}$ dari ujung kiri (salin dari pita B), lalu sambung dengan panjang $\frac{1}{4}$ (salin dari pita C). Ukur panjang gabungannya, lalu cari pita di dinding pecahan yang garis lipatnya tepat di ujung itu.
- Dengan cara yang sama, cari hasil $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ dan $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ (untuk pengurangan, tandai $\frac{2}{3}$ lalu mundur sepanjang $\frac{1}{4}$).

Tabel pengamatan dinding pecahan (pita 24 cm)

Pita	Banyak bagian	Satu bagian (pecahan)	Panjang satu bagian (cm, ukur)	Desimal ($1 \div$ banyak bagian)	Persen	Senilai dengan $\frac{1}{2}$ di pita ini
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Grafik

Gambar garis bilangan dari 0 sampai 1 sepanjang 24 cm. Tandai semua pecahan dari dinding pecahanmu ($\frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \dots$). Titik mana yang ditempati lebih dari satu pecahan? Tandai juga $\frac{2}{7}$ (sekitar 6,9 cm) dan $\frac{7}{12}$ (14 cm).

Analisis

- Pecahan apa saja yang senilai dengan $\frac{1}{2}$ di dinding pecahanmu? Lakukan hal yang sama untuk $\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{4}$. Apa hubungan pembilang dan penyebutnya?

Kunci: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$. Pembilang dan penyebut dikali (atau dibagi) dengan bilangan yang sama: potongannya makin kecil, tetapi banyaknya bertambah sama kali lipat, sehingga besarnya tetap.

- Semakin banyak bagian, semakin ... satu bagian. Urutkan $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$ dari yang terkecil. Mengapa $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$ padahal $8 > 6$?

Kunci: Semakin banyak bagian, semakin kecil (pendek) satu bagian. Urutannya $\frac{1}{12} < \frac{1}{8} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Pita yang sama dibagi menjadi 8 bagian menghasilkan potongan yang lebih pendek daripada dibagi 6 (3 cm melawan 4 cm), jadi $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$.

3. Berapa panjang gabungan $\frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{4}$ pada pita uji? Pecahan apa yang garis lipatnya tepat di ujung itu? Siapa yang benar, Ancil atau Ayu? Jelaskan juga dengan menyamakan penyebut.

Kunci: Panjangnya $8 + 6 = 14 \text{ cm} = 7 \times 2 \text{ cm}$, tepat di garis lipat $\frac{7}{12}$ pada pita F. Jadi $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$, dan Ayu benar. Tebakan Ancil $\frac{2}{7}$ hanya $\frac{2}{7} \times 24 \approx 6,9 \text{ cm}$, bahkan lebih pendek daripada $\frac{1}{3}$ (8 cm). Penyebut tidak boleh dijumlahkan karena penyebut menunjukkan ukuran potongan, bukan banyaknya potongan.

4. Tuliskan hasil $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ dan $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ dari pitamu, lalu periksa dengan menyamakan penyebut.

Kunci: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}: 12 + 8 = 20 \text{ cm} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$; dengan penyebut sama $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}: 16 - 6 = 10 \text{ cm} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$; dengan penyebut sama $\frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$.

5. Pecahan satu bagian mana yang desimalnya berhenti dan mana yang berulang? Lihat penyebutnya: apa bedanya? Tiga potong $\frac{1}{3}$ tepat menutup pita utuh, padahal $3 \times 0,333 \dots = 0,999 \dots$. Apa artinya?

Kunci: Berhenti: $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{1}{8} = 0,125$; penyebutnya hanya memuat faktor 2. Berulang: $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$, $\frac{1}{6} = 0,1666 \dots$, $\frac{1}{12} = 0,08333 \dots$; penyebutnya memuat faktor 3. Karena tiga potong $\frac{1}{3}$ tepat menutup pita utuh, $0,999 \dots$ (angka 9 yang tidak pernah berhenti) sama dengan 1, bukan sedikit kurang dari 1.

6. Berapa persen martabak yang dimakan Dimas dan Ayu bersama-sama, dan berapa persen yang tersisa untuk Ancil?

Kunci: Yang dimakan $\frac{7}{12} \approx 58,3\%$; sisanya $\frac{5}{12} \approx 41,7\%$ untuk Ancil. Jumlahnya 100%.

7. Mengapa Kak Lintang memilih pita sepanjang 24 cm, bukan 20 cm atau 30 cm?

Kunci: Karena 24 habis dibagi 2, 3, 4, 6, 8, dan 12, setiap bagian panjangnya bilangan bulat (12, 8, 6, 4, 3, 2 cm) sehingga mudah diukur dan diperiksa. 20 cm tidak habis dibagi 3, 6, 8, dan 12, sedangkan 30 cm tidak habis dibagi 4, 8, dan 12. Bilangan 24 adalah KPK dari 2, 3, 4, 6, 8, dan 12 (lihat Bab 4).

✓ Kesimpulan

Tuliskan cara mengenali dua pecahan yang senilai dan cara yang benar menjumlahkan dua pecahan berpenyebut berbeda, lalu jelaskan dengan gambar pita mengapa penyebutnya tidak boleh dijumlahkan begitu saja.

💡 Refleksi

- Sebelum melipat pita, aku mengira $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ sama dengan ... karena ...
- Dinding pecahan membantuku melihat bahwa ...
- Saat berbagi makanan atau membaca diskon, pecahan senilai berguna untuk ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada kertas? Buka Lab Mini "Pemotong martabak ajaib" di Bab 3 (subbab 3.2). Ambil potongan martabak untuk membuat $\frac{1}{2}$, lalu geser "Potong lagi" dan catat pecahan-pecahan yang titiknya tidak bergeser di garis bilangan. Periksa $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ dengan Rumus Hidup "Penjumlah pecahan" (subbab 3.3), amati desimal berulang di Lab Mini "Mesin desimal & jam sisa" (subbab 3.4), dan latih konversi dengan Adu Cepat "Pecahan → persen kilat" (subbab 3.5).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b3-2

 Contoh data (pita dilipat, diukur dengan penggaris sampai 0,1 cm)

Pita	Banyak bagian	Satu bagian (pecahan)	Panjang satu bagian (cm, ukur)	Desimal ($1 \div$ banyak bagian)	Persen	Senilai dengan $1/2$ di pita ini
A	2	$1/2$	12,0	0,5	50%	$1/2$
B	3	$1/3$	8,1	0,333...	33,3%	tidak ada
C	4	$1/4$	6,0	0,25	25%	$2/4$
D	6	$1/6$	3,9	0,1666...	16,7%	$3/6$
E	8	$1/8$	3,0	0,125	12,5%	$4/8$
F	12	$1/12$	2,0	0,08333...	8,3%	$6/12$

 Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketelitian melipat & mengukur	Semua pita terlipat sama besar, garis lipat jelas, dan panjang terukur sampai 0,1 cm dengan selisih paling banyak 0,2 cm.	Satu pita kurang rapi; pengukuran lainnya teliti.	Beberapa pita tidak sama besar sehingga dinding pecahan tidak sejajar.	Pita dan pengukuran belum dapat dipakai.
Pecahan senilai & operasi	Menemukan semua pecahan senilai dan menjumlah serta mengurangi pecahan dengan menyamakan penyebut secara benar.	Sebagian besar benar, dengan 1-2 kesalahan kecil.	Masih menjumlahkan penyebut, atau pecahan senilai baru sebagian.	Belum dapat menemukan pecahan senilai.
Desimal & persen	Semua desimal dan persen benar, serta dapat membedakan desimal berhenti dan berulang dengan alasan penyebut.	Desimal dan persen benar, tetapi alasan berhenti/berulang belum lengkap.	Beberapa konversi salah.	Belum dapat mengubah pecahan ke desimal atau persen.
Penalaran & komunikasi	Menjelaskan dengan pita dan dengan hitungan mengapa $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \neq \frac{2}{7}$; kesimpulan jelas dan runtut.	Penjelasan benar tetapi hanya dengan salah satu cara.	Penjelasan kurang tepat atau hanya menyebut hasil.	Belum ada penjelasan.

Nilai akhir = (jumlah skor $\div$ 16) $\times$ 100.

 Catatan guru

Lipatan menjadi 3 paling sulit: gulung pita seperti huruf S, geser sampai ketiga lapisan tepat sama, baru tekan. Jika waktu sempit, siswa boleh menandai dengan penggaris (24 cm mudah dibagi). Siswa SD cukup mengerjakan pertanyaan 1–4 dan 6; siswa SMP mengerjakan semuanya, termasuk $0,999 \dots = 1$. Tantangan untuk kelompok cepat: buat pita 60 cm untuk menyelidiki $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{10}$, atau perhatikan bahwa $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ adalah pecahan Mesir (subbab 3.7).

Menata Nastar Lebaran: Persegi Panjang, Faktor, dan Bilangan Prima

Bab 4 · Faktor, Kelipatan & Bilangan Prima

Eksplorasi kelompok: menyusun ubin (penemuan terbimbing)

SD kelas V–VI dan SMP kelas VII

2 × 40 menit

Model: Discovery learning: susun – daftar – kelompokkan – temukan pola

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menemukan semua faktor sebuah bilangan dengan menyusun persegi panjang dari ubin.
- Peserta didik dapat mengenali bilangan prima sebagai bilangan lebih dari 1 yang hanya dapat disusun menjadi satu persegi panjang $1 \times p$.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa faktor muncul berpasangan dan mengapa hanya bilangan kuadrat yang banyak faktornya ganjil.
- Peserta didik dapat memakai faktor sekutu untuk menyelesaikan masalah membagi rata (FPB).

Cerita pemantik



Dua hari menjelang Lebaran, Ayu dan Ibu memanggang nastar. Ayu ingin menata 24 nastar di nampan dalam baris dan kolom yang rapi: bisa 4 baris isi 6, bisa 3 baris isi 8, dan masih ada cara lain. Diam-diam Ancil memakan satu nastar. Tinggal 23! Ayu mencoba lagi dan lagi, tetapi 23 nastar hanya mau berbaris memanjang dalam satu baris. "Kenapa 23 keras kepala sekali?" gerutu Ancil. Kak Lintang tertawa: "Ada bilangan yang memang hanya punya satu cara. Susun ubinmu dan temukan siapa saja mereka."

? Rumusan masalah

Bilangan mana yang dapat disusun menjadi banyak persegi panjang, mana yang hanya menjadi satu, dan apa hubungannya dengan faktor bilangan itu?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- 36 ubin persegi 2 cm × 2 cm dari karton bekas (atau 36 kancing/tutup botol) per kelompok
- Kertas berpetak 1 cm, 2 lembar per kelompok
- Gunting, penggaris, dan pensil warna
- Pensil dan lembar kerja ini

! Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati dan arahkan ujungnya menjauhi teman. Ubin dan kancing adalah benda kecil: jangan dimasukkan ke mulut. Bereskan potongan karton setelah selesai.

Langkah kerja

1. Tulis dugaanmu: bilangan antara 1 dan 24 mana saja yang menurutmu hanya bisa disusun menjadi satu baris panjang?

2. Untuk setiap bilangan n di tabel, ambil n ubin dan susun menjadi persegi panjang penuh, tanpa lubang dan tanpa sisa. Coba semua kemungkinan banyak baris: 1, 2, 3, Persegi panjang 2×3 dan 3×2 dihitung satu karena tinggal diputar.
3. Gambar setiap persegi panjang yang berhasil di kertas berpetak dan tulis ukurannya, misalnya 3×4 .
4. Dari ukuran-ukuran itu, daftar semua faktor n (setiap sisi persegi panjang adalah faktor) dan hitung banyaknya.
5. Tandai apakah n ubin dapat disusun menjadi persegi (panjang sisi sama).
6. Kelompokkan bilangan: yang hanya punya satu persegi panjang $1 \times n$ dengan $n > 1$, yang punya lebih dari satu, dan bilangan 1. Tulis jenisnya: prima, komposit, atau bukan keduanya.
7. Kembali ke cerita: susun 23 ubin. Benarkah hanya ada satu cara?

Tabel pengamatan susun ubin

n (banyak ubin)	Persegi panjang yang bisa disusun	Semua faktor n	Banyak faktor	Ada persegi?	Jenis bilangan
1					
2					
3					
4					
6					
7					
9					
11					
12					
16					
18					
24					

Grafik

Buat diagram batang: sumbu mendatar n , sumbu tegak banyak faktor. Warnai merah batang bilangan prima dan biru batang bilangan kuadrat. Setinggi berapa semua batang merah? Apa yang sama dari tinggi batang biru?

Analisis

1. Bilangan mana saja di tabel yang hanya dapat disusun menjadi satu persegi panjang $1 \times n$? Berapa banyak faktornya? Apa nama bilangan seperti itu? Apakah dugaanmu di langkah 1 benar?

Kunci: 2, 3, 7, dan 11 hanya punya persegi panjang $1 \times n$, sehingga faktornya tepat dua: 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan seperti ini disebut bilangan prima. 23 juga prima; itulah sebabnya nastar Ayu hanya bisa berbaris satu.

2. Mengapa faktor selalu muncul berpasangan? Bilangan mana yang banyak faktornya ganjil, dan apa istimewanya bilangan itu?

Kunci: Setiap persegi panjang $a \times b$ memberikan dua faktor sekaligus, a dan b , dengan $a \times b = n$. Hanya jika persegi panjangnya berupa persegi ($a = b$) kedua faktor itu sama sehingga dihitung sekali. Karena itu bilangan kuadrat (1, 4, 9, 16, juga 36) banyak faktornya ganjil, sedangkan bilangan lain banyak faktornya genap.

3. Mengapa 1 tidak termasuk bilangan prima?

Kunci: Bilangan 1 hanya punya satu faktor, padahal bilangan prima harus punya tepat dua faktor yang berbeda. Jika 1 dianggap prima, faktorisasi prima tidak lagi tunggal, misalnya $6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 3$.

4. Tanpa menyusun ubin, tentukan semua faktor 36 dan banyaknya. Apakah 23 bilangan prima? Jelaskan cara cepat memeriksanya.

Kunci: Faktor 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, sebanyak 9 (ganjil karena $36 = 6 \times 6$). Untuk 23 cukup diuji pembagi prima yang kuadratnya tidak lebih dari 23, yaitu 2 dan 3, karena $5^2 = 25 > 23$. 23 tidak habis dibagi 2 maupun 3, jadi 23 prima.

5. Tuliskan faktorisasi prima 12, 18, dan 24. Bandingkan pangkat-pangkatnya dengan banyak faktor di tabel. Temukan aturan untuk menghitung banyak faktor tanpa mendaftarnya.

Kunci: $12 = 2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $24 = 2^3 \times 3$. Banyak faktornya 6, 6, dan 8, yaitu $(2+1)(1+1) = 6$, $(1+1)(2+1) = 6$, dan $(3+1)(1+1) = 8$. Aturannya: tambah 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan.

6. Ibu punya 24 nastar dan 18 kastengel. Kue akan dibagi ke beberapa toples sehingga setiap toples berisi nastar sama banyak dan kastengel sama banyak, tanpa sisa. Paling banyak berapa toples? Apa isi setiap toples? Gunakan daftar faktor di tabelmu.

Kunci: Faktor sekutu 24 dan 18 adalah 1, 2, 3, dan 6; yang terbesar 6 (FPB). Jadi paling banyak 6 toples, masing-masing berisi $24 \div 6 = 4$ nastar dan $18 \div 6 = 3$ kastengel.

✓ Kesimpulan

Tuliskan hubungan antara persegi panjang yang dapat disusun dan faktor sebuah bilangan, ciri bilangan prima, serta ciri bilangan yang banyak faktornya ganjil.

💡 Refleksi

- Bilangan yang paling "keras kepala" yang kutemukan hari ini adalah ... karena ...
- Menyusun ubin membuatku mengerti bahwa faktor ...
- Di rumah, aku bisa memakai faktor saat ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada ubin? Buka Lab Mini "Susun ubin: setiap sisi adalah faktor" di Bab 4 (subbab 4.1). Geser banyak ubin sesuai tabel dan catat semua persegi panjang yang muncul, atau tekan ► Jalankan untuk parade bilangan 1–60. Saring bilangan prima dengan Lab Mini "Saringan Eratosthenes: menangkap semua prima" (subbab 4.2), lalu bandingkan diagram batangmu dengan Grafik Hidup "Grafik banyak faktor: prima selalu di lantai 2" (subbab 4.3).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b4-1

Contoh data (hasil menyusun ubin)

n (banyak ubin)	Persegi panjang yang bisa disusun	Semua faktor n	Banyak faktor	Ada persegi?	Jenis bilangan
1	1×1	1	1	ya	bukan keduanya
2	1×2	1, 2	2	tidak	prima
3	1×3	1, 3	2	tidak	prima
4	$1 \times 4, 2 \times 2$	1, 2, 4	3	ya	komposit
6	$1 \times 6, 2 \times 3$	1, 2, 3, 6	4	tidak	komposit
7	1×7	1, 7	2	tidak	prima
9	$1 \times 9, 3 \times 3$	1, 3, 9	3	ya	komposit
11	1×11	1, 11	2	tidak	prima
12	$1 \times 12, 2 \times 6, 3 \times 4$	1, 2, 3, 4, 6, 12	6	tidak	komposit
16	$1 \times 16, 2 \times 8, 4 \times 4$	1, 2, 4, 8, 16	5	ya	komposit
18	$1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6$	1, 2, 3, 6, 9, 18	6	tidak	komposit
24	$1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8	tidak	komposit

Rubrik penilaian

Aspek	4 - Sangat baik	3 - Baik	2 - Cukup	1 - Perlu bimbingan
Ketelitian menyusun & mendaftar faktor	Semua persegi panjang ditemukan dan semua faktor terdaftar benar.	Ada 1-2 persegi panjang atau faktor yang terlewat.	Banyak faktor yang terlewat sehingga pola kabur.	Tabel belum dapat dipakai.
Menemukan pola	Menemukan sendiri ciri bilangan prima, pasangan faktor, dan bilangan kuadrat dengan faktor ganjil.	Menemukan dua dari tiga pola.	Menemukan satu pola dengan bantuan.	Belum menemukan pola.
Penalaran & penerapan	Menjelaskan alasan setiap pola, memakai aturan banyak faktor, dan menyelesaikan masalah toples dengan FPB secara tepat.	Penerapan benar, alasan kurang lengkap.	Penerapan sebagian benar tanpa alasan.	Belum dapat menerapkan.
Kerja sama & komunikasi	Tugas bilangan dibagi rata, hasil disatukan dengan rapi, dan kesimpulan disampaikan jelas.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Bagi bilangan di tabel kepada anggota kelompok agar cepat, lalu satukan hasilnya. Hindari menyebut kata "prima" sebelum siswa menemukan sendiri kelompok bilangan yang "keras kepala". Kelompok cepat dapat melanjutkan sampai 36 atau mencari bilangan terkecil yang tepat punya 6 faktor (12). Untuk SD, pertanyaan 5 boleh dilewati.

Mathpedia · LKPD Bab 4 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Penggaris di Kakimu: Denah Sekolah dari Hitungan Langkah

Bab 5 • Rasio, Proporsi & Laju

Eksplorasi lapangan berkelompok + proyek mini denah

SMP kelas VII

2 × 40 menit

Model: Inkuiri terbimbing: ukur – catat – temukan rasio tetap – terapkan pada skala dan laju

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengumpulkan data jarak dan banyak langkah, lalu menemukan bahwa keduanya berbanding senilai dengan rasio tetap.
- Peserta didik dapat memakai panjang langkah untuk menaksir jarak dan menghitung persentase galat taksirannya.
- Peserta didik dapat memilih skala yang tepat dan menggambar denah ruang kelas atau lapangan.
- Peserta didik dapat membedakan perbandingan senilai dan berbalik nilai dalam konteks langkah kaki.

Cerita pemantik



Regu Pramuka Dimas dan Ayu mendapat tugas dari Kak Lintang: "Buatlah denah sekolah kita untuk lomba Jelajah, tetapi meteran kita hanya satu dan pendek!" Dimas mengeluh, "Kalau lapangan diukur dengan meteran 1,5 m, bisa sampai sore." Kak Lintang menunjuk sepatu Dimas: "Para penjelajah zaman dulu mengukur jarak dengan langkah. Kalian membawa penggaris di kaki masing-masing. Tinggal cari tahu: satu meter itu berapa langkahmu?" Ancil, yang langkahnya paling pendek, langsung khawatir hasil regunya akan berbeda.

Rumusan masalah

Bagaimana hubungan antara jarak yang ditempuh dan banyak langkah seseorang, dan bagaimana hubungan itu dipakai untuk menaksir jarak serta membuat denah berskala?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Jarak lintasan (5, 10, 15, dan 20 m)	Banyak langkah	Orang yang berjalan sama, cara berjalan biasa (tidak dibuat-buat), alas kaki dan permukaan lantai sama

Alat dan bahan

- Meteran gulung (minimal 5 m) atau meteran jahit 1,5 m per kelompok
- Tali rafia 20 m yang diberi tanda setiap 5 m, atau kapur tulis untuk menandai lintasan
- Stopwatch di HP
- Kertas berpetak atau HVS A4, penggaris 30 cm, dan pensil
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Lakukan pengukuran di halaman atau koridor yang tidak dilalui kendaraan. Berjalanlah biasa, jangan berlari, dan perhatikan teman di sekitarmu. Pita meteran gulung dari logam bertepi tajam: tarik dan gulung kembali pelan-pelan, jangan dilepas mendadak. Pakai topi bila di bawah terik matahari dan minum yang cukup.

Langkah kerja

1. Tulis dugaanmu: jika jaraknya menjadi dua kali lipat, apa yang terjadi pada banyak langkah? Berapa kira-kira panjang satu langkahmu?
2. Dengan meteran, tandai lintasan lurus 5 m, 10 m, 15 m, dan 20 m dari satu garis start (pakai tali rafia bertanda atau kapur).
3. Pilih satu anggota sebagai pejalan. Ia berjalan biasa dari start ke setiap tanda, sementara dua teman menghitung langkahnya. Ulangi tiga kali untuk setiap jarak dan hitung rata-ratanya (satu angka di belakang koma).
4. Hitung $\text{langkah} \div \text{jarak}$ untuk setiap lintasan. Lalu hitung panjang satu langkah = $\text{total jarak} \div \text{total rata-rata langkah}$ (bulatkan dua angka di belakang koma).
5. Pejalan yang sama menghitung langkah untuk panjang kelas, lebar kelas, dan panjang lapangan upacara (tiga kali, ambil rata-ratanya). Taksir jaraknya: $\text{rata-rata langkah} \times \text{panjang satu langkah}$.
6. Ukur panjang kelas dengan meteran sebagai pembanding, lalu hitung persentase galat taksiranmu.
7. Hitung panjang di denah dengan skala 1 : 100 (1 cm di kertas mewakili 1 m). Jika ada yang tidak muat di kertas A4, pilih skala lain. Gambar denah kelasmu lengkap dengan pintu, jendela, dan papan tulis, lalu tuliskan skalanya.

Tabel pengamatan langkah (nama pejalan:)

Lintasan / benda	Jarak sebenarnya (m)	Langkah (coba 1, 2, 3)	Rata-rata langkah	Langkah $\div$ jarak	Di denah skala 1 : 100 (cm)
Lintasan 5 m					
Lintasan 10 m					
Lintasan 15 m					
Lintasan 20 m					
Panjang kelas					
Lebar kelas					
Panjang lapangan upacara					

Grafik

Gambar diagram titik di kertas berpetak: sumbu mendatar jarak (0–20 m), sumbu tegak rata-rata langkah (0–45). Tarik garis lurus yang paling dekat dengan keempat titik lintasan. Apakah garis itu melewati titik $O(0, 0)$? Pakai grafikmu untuk menaksir banyak langkah untuk jarak 12 m.

Analisis

1. Perhatikan kolom langkah ÷ jarak. Apa yang kamu temukan? Jenis perbandingan apakah antara jarak dan banyak langkah? Berapa panjang satu langkah pejalanmu? Apakah dugaanmu terbukti?

Kunci: Langkah ÷ jarak hampir tetap, sekitar 2 langkah per meter (2,00; 2,03; 1,98; 2,02). Jika jarak menjadi dua kali lipat, langkahnya juga dua kali lipat: jarak dan banyak langkah berbanding senilai, banyak langkah $\approx 2 \times$ jarak (dalam meter). Panjang satu langkah $\approx 50 \div 100,3 \approx 0,50$ m.

2. Apakah titik-titik pada grafikmu membentuk garis lurus yang melewati $O(0, 0)$? Mengapa garis itu harus melewati O ? Berapa langkah untuk 12 m menurut grafik?

Kunci: Ya, titik-titiknya hampir segaris dan garisnya melewati $O(0, 0)$, karena jarak 0 m berarti 0 langkah. Grafik perbandingan senilai selalu berupa garis lurus melalui titik asal. Untuk 12 m: $2 \times 12 = 24$ langkah.

3. Bandingkan taksiran panjang kelas dari langkah dengan hasil meteran. Hitung persentase galatnya dan sebutkan dua penyebabnya.

Kunci: Taksiran $16,3 \times 0,50 \approx 8,2$ m; misalnya meteran menunjukkan 8,0 m. Galat = $\frac{8,2 - 8,0}{8,0} \times 100\% = 2,5\%$. Penyebab: langkah tidak selalu sama panjang (lebih pendek dekat dinding atau saat ragu-ragu), langkah terakhir tidak penuh, salah hitung langkah, dan pembulatan.

4. Ancil (panjang langkah 0,4 m), Dimas (0,5 m), dan Kak Lintang (0,8 m) masing-masing berjalan 20 m. Hitung banyak langkah setiap orang. Bagaimana hubungan antara panjang langkah dan banyak langkah: senilai atau berbalik nilai? Jelaskan.

Kunci: Ancil $20 \div 0,4 = 50$ langkah, Dimas $20 \div 0,5 = 40$ langkah, Kak Lintang $20 \div 0,8 = 25$ langkah. Makin panjang langkahnya, makin sedikit banyak langkahnya, dan hasil kalinya selalu tetap: $0,4 \times 50 = 0,5 \times 40 = 0,8 \times 25 = 20$. Ini perbandingan berbalik nilai; grafiknya hiperbola, bukan garis lurus.

5. Panjang lapangan upacara tidak muat di kertas A4 (29,7 cm × 21 cm) dengan skala 1 : 100. Skala berapa yang sebaiknya dipakai, dan berapa panjang lapangan di denah?

Kunci: Dengan 1 : 100 panjangnya 30,2 cm, lebih panjang daripada 29,7 cm. Dengan skala 1 : 200 panjangnya $3.020 \div 200 = 15,1$ cm dan muat dengan baik. Skala 1 : 500 juga muat (sekitar 6,0 cm), tetapi gambarnya kecil.

6. Pada peta berskala 1 : 25.000, jarak rumah Dimas ke sekolah 4,8 cm. Berapa jarak sebenarnya? Kira-kira berapa langkah Dimas (panjang langkah 0,5 m) untuk menempuhnya?

Kunci: $4,8 \times 25.000 = 120.000$ cm = 1.200 m = 1,2 km. Banyak langkah $\approx 1.200 \div 0,5 = 2.400$ langkah.

7. Dimas berjalan dengan irama 2 langkah per detik. Berapa lajunya dalam m/s? Berapa menit ia berjalan dari rumah ke sekolah?

Kunci: Laju = $2 \times 0,5 = 1$ m/s. Waktu = $1.200 \div 1 = 1.200$ detik = 20 menit.

Kesimpulan

Tuliskan hubungan antara jarak dan banyak langkah (jenis perbandingannya, rasio tetapnya, dan bentuk grafiknya), lalu jelaskan bagaimana kamu memakainya untuk membuat denah berskala.

Refleksi

- Hal yang paling mengejutkanku saat menghitung langkah adalah ...

- Rasio tetap membantuku menaksir jarak karena ...
- Lain kali, aku bisa memakai "penggaris di kaki" untuk ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Jika tidak bisa keluar kelas, buka Lab Mini "Angkot di peta: ganti skalanya!" di Bab 5 (subbab 5.2): seret pin A dan B, ganti skala, dan perhatikan bahwa jarak di peta berubah tetapi jarak sebenarnya tetap. Untuk ciri perbandingan senilai, geser Grafik Hidup "Ongkos kirim paket: kapan senilai?" (subbab 5.3) dan amati kapan nilai $y \div m$ menjadi tetap. Bandingkan dengan perbandingan berbalik nilai di Lab Mini "Tukang dan tembok: catat, lalu lihat polanya" (subbab 5.4), lalu latih skala dengan Adu Cepat "Skala kilat: dari peta ke km" (subbab 5.2).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b5-3

Contoh data (pejalan: Dimas; panjang langkah $\approx 0,50$ m)

Lintasan / benda	Jarak sebenarnya (m)	Langkah (coba 1, 2, 3)	Rata-rata langkah	Langkah $\div$ jarak	Di denah skala 1 : 100 (cm)
Lintasan 5 m	5	10, 10, 10	10,0	2,00	5,0
Lintasan 10 m	10	20, 21, 20	20,3	2,03	10,0
Lintasan 15 m	15	30, 29, 30	29,7	1,98	15,0
Lintasan 20 m	20	40, 41, 40	40,3	2,02	20,0
Panjang kelas	$\approx 8,2$ (taksiran)	16, 16, 17	16,3	—	8,2
Lebar kelas	$\approx 7,0$ (taksiran)	14, 14, 14	14,0	—	7,0
Panjang lapangan upacara	$\approx 30,2$ (taksiran)	60, 61, 60	60,3	—	30,2 (tidak muat!)

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Pengumpulan data di lapangan	Lintasan diukur tepat, setiap jarak diulang tiga kali, dan rata-rata dihitung benar.	Data lengkap dengan 1–2 kesalahan hitung kecil.	Pengulangan tidak lengkap atau lintasan tidak diukur dengan teliti.	Data belum dapat dipakai.
Rasio & jenis perbandingan	Menemukan rasio tetap sekitar 2 langkah per meter, menyimpulkan senilai dari tabel dan grafik lewat O, serta membedakannya dari berbalik nilai.	Menemukan rasio tetap dan senilai, tetapi perbedaan dengan berbalik nilai kurang tepat.	Menghitung rasio tanpa menyimpulkan jenis perbandingan.	Belum menemukan rasio tetap.
Skala & denah	Memilih skala yang tepat, menghitung panjang di denah dengan benar, dan denah rapi lengkap dengan skala.	Skala dan perhitungan benar, denah kurang rapi.	Ada kesalahan mengubah satuan atau skala.	Denah belum dibuat.
Kerja sama & keselamatan	Semua anggota berperan (pejalan, penghitung, pencatat) dan bekerja tertib serta aman di luar kelas.	Kerja sama baik, sesekali perlu diingatkan.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = $(\text{jumlah skor} \div 16) \times 100$.

Catatan guru

Siapkan lintasan sebelum pelajaran agar waktu cukup. Biarkan setiap kelompok memakai pejalan yang berbeda; saat diskusi kelas, bandingkan langkah per meter antarkelompok: rasionya berbeda-beda, tetapi setiap kelompok tetap mendapat garis lurus yang melalui O. Jika hujan, ukur di koridor atau gunakan versi virtual. Tantangan: hitung langkah keliling halaman sekolah, lalu bandingkan taksiranmu dengan jarak pada peta digital di HP.

Lipat Sampai ke Bulan? Menguji Kekuatan Pangkat dengan Selebar Kertas

Bab 6 · Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah

Eksplorasi kelompok (penemuan terbimbing)

SMP kelas IX (juga pemanasan SMA kelas X)

2 × 40 menit

Model: Discovery learning: lipat – hitung – ukur – temukan pola – taksir

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menemukan dari kegiatan melipat bahwa banyak lapisan setelah n lipatan adalah 2^n .
- Peserta didik dapat menjelaskan makna $2^0 = 1$ dan $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ dari pola luas satu lapisan.
- Peserta didik dapat menemukan sifat $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ dengan menghitung banyak faktor.
- Peserta didik dapat menghitung tebal kertas setelah banyak lipatan dalam notasi ilmiah dan membandingkannya dengan jarak nyata.

Cerita pemantik



Ancil membaca di internet: "Kertas yang dilipat 42 kali tebalnya sampai ke Bulan!" Dimas tertawa, "Mustahil! Selebar kertas kan tipis sekali." Ayu ragu, "Tapi setiap lipatan membuatnya dua kali lebih tebal..." Kak Lintang tersenyum dan membagikan kertas HVS bekas: "Jangan langsung percaya, jangan juga langsung menolak. Lipat, hitung, ukur, lalu buktikan sendiri!"

Rumusan masalah

Bagaimana banyak lapisan, tebal tumpukan, dan luas satu lapisan berubah setiap kali kertas dilipat dua, dan benarkah 42 lipatan cukup untuk mencapai Bulan?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak lipatan n	Banyak lapisan, tebal tumpukan, dan luas satu lapisan	Jenis dan ukuran kertas (HVS A4), setiap lipatan tepat membagi dua sama besar, cara mengukur yang sama

Alat dan bahan

- Kertas HVS A4 bekas yang masih rata, 3 lembar per kelompok
- Satu rim kertas HVS (500 lembar) untuk diukur bersama, atau sebuah buku tebal
- Penggaris 30 cm dengan skala milimeter
- Dua buku tulis untuk menekan tumpukan lipatan
- Kalkulator atau HP
- Kertas berpetak 1 lembar dan pensil warna

Keselamatan

Tepi kertas HVS bisa menggores jari, jadi tekan lipatan dengan kuku atau penggaris, bukan dengan menggeser jari di sepanjang tepi kertas. Rim kertas cukup berat: angkat dengan dua tangan dan letakkan di

tengah meja. Kumpulkan kertas bekas ke tempat daur ulang setelah selesai.

Langkah kerja

1. Ukur tebal satu rim kertas (500 lembar) dalam milimeter. Hitung tebal selembarnya: $t_0 = \text{tebal rim} \div 500$. Jika memakai buku, bagi tebalnya dengan banyak lembar (banyak halaman $\div 2$).
2. Tulis dugaanmu: setelah 42 lipatan, kira-kira setebal apa kertas itu? Setebal buku? Setinggi Monas? Sejauh Bulan?
3. Lipat selembarnya HVS menjadi dua bagian sama besar dan tekan lipatannya. Hitung lapisan di tepi yang terbuka, lalu catat pada baris $n = 1$. Baris $n = 0$ adalah kertas sebelum dilipat.
4. Letakkan tumpukan di meja, tekan dengan buku, lalu ukur tebalnya dari samping dengan penggaris. Catat di kolom "tebal terukur".
5. Terus lipat dua (bergantian arah) dan ulangi langkah 3–4 sampai kertas tidak bisa dilipat lagi. Jika lapisan sudah terlalu banyak untuk dihitung, cari polanya dari baris-baris sebelumnya.
6. Buka kertasmu. Garis-garis lipatan membagi kertas menjadi persegi panjang kecil yang sama besar. Untuk setiap n , tulis luas satu lapisan sebagai bagian dari kertas utuh (pecahan), lalu sebagai pangkat dari 2.
7. Isi kolom "tebal hitungan" dengan $t_0 \times$ banyak lapisan, lalu bandingkan dengan tebal terukur.
8. Dengan kalkulator, hitung tebal setelah 42 lipatan dan tuliskan dalam notasi ilmiah.

Tabel pengamatan (tebal selembarnya $t_0 \approx 0,1 \text{ mm}$)

Lipatan ke- (n)	Banyak lapisan	Lapisan sebagai pangkat 2	Tebal hitungan (mm)	Tebal terukur (mm)	Luas satu lapisan (bagian kertas utuh)	Luas sebagai pangkat 2
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Grafik

Pada kertas berpetak, gambar titik (n , banyak lapisan) untuk $n = 0$ sampai 6 lalu hubungkan dengan kurva mulus. Di sebelahnya, gambar titik (n , luas satu lapisan). Apakah salah satunya berupa garis lurus? Bagaimana bentuk masing-masing kurva?

Analisis

1. Apa yang terjadi pada banyak lapisan setiap kali kertas dilipat? Tulis rumus banyak lapisan setelah n lipatan, lalu ramalkan banyak lapisan setelah 10 lipatan.

Kunci: Setiap lipatan menggandakan banyak lapisan: 1, 2, 4, 8, 16, Setelah n lipatan banyak lapisannya 2^n , yaitu 2 dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali. Setelah 10 lipatan: $2^{10} = 1.024$ lapisan.

2. Bandingkan kolom tebal terukur dengan tebal hitungan. Mengapa hasil ukur cenderung lebih besar?

Mengapa kertas A4 hampir mustahil dilipat lebih dari 7 kali?

Kunci: Di antara lapisan ada udara, kertas melenting di bagian lipatan, dan penggaris hanya teliti sampai sekitar 0,5 mm, sehingga hasil ukur biasanya sedikit lebih besar. Setiap lipatan menggandakan tebal tetapi membagi dua panjang sisi. Setelah 7 lipatan, A4 tinggal sekitar $1,9 \text{ cm} \times 2,6 \text{ cm}$ dengan tebal $128 \times 0,1 = 12,8 \text{ mm}$, hampir seperti kubus kecil, sehingga hampir tidak bisa ditekuk lagi.

3. Perhatikan kolom luas satu lapisan. Pola apa yang kamu lihat? Gunakan pola itu untuk menjelaskan mengapa $2^0 = 1$ dan $2^{-3} = \frac{1}{8}$. Berapa hasil kali banyak lapisan dan luas satu lapisan pada setiap baris? Mengapa?

Kunci: Setiap baris ke bawah, luas satu lapisan menjadi setengahnya: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, yaitu $2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \dots$. Sebelum dilipat ($n = 0$) hanya ada 1 lapisan berupa kertas utuh, jadi $2^0 = 1$. Jika pola $2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ (setiap langkah dibagi 2) diteruskan, diperoleh $2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^{-2} = \frac{1}{4}, 2^{-3} = \frac{1}{8}$. Hasil kali banyak lapisan dan luas satu lapisan selalu 1, karena semua lapisan bersama-sama tetap selebar kertas utuh: $2^n \cdot 2^{-n} = 2^0 = 1$.

4. Ayu melipat kertas 3 kali, lalu Dimas melipat tumpukan itu 4 kali lagi. Berapa banyak lapisannya? Tulis jawabanmu sebagai perkalian dua bilangan berpangkat, lalu temukan aturan umum untuk $a^m \cdot a^n$.

Kunci: Setelah 3 lipatan ada $2^3 = 8$ lapisan. Setiap lipatan Dimas menggandakannya lagi sebanyak 4 kali, jadi $8 \times 16 = 128$ lapisan. Dalam pangkat: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$, karena ada 3 faktor 2 ditambah 4 faktor 2, total 7 faktor. Aturan umumnya $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

5. Hitung tebal kertas setelah 42 lipatan dalam meter dan kilometer, tulis dalam notasi ilmiah, lalu bandingkan dengan jarak rata-rata Bumi-Bulan, 384.400 km. Benarkah kabar yang dibaca Ancil? Taksir juga tanpa kalkulator dengan $2^{10} \approx 10^3$.

Kunci: Tebal = $0,1 \text{ mm} \times 2^{42} = 0,1 \times 4.398.046.511.104 \text{ mm} \approx 4,40 \times 10^{11} \text{ mm} = 4,40 \times 10^8 \text{ m} = 4,40 \times 10^5 \text{ km}$, yaitu sekitar 440.000 km. Angka ini lebih besar daripada 384.400 km, jadi secara hitungan kabar itu benar (41 lipatan baru mencapai sekitar 220.000 km). Taksiran tanpa kalkulator: $2^{42} = 2^2 \cdot (2^{10})^4 \approx 4 \times 10^{12}$, sehingga tebalnya $\approx 4 \times 10^{11} \text{ mm} = 400.000 \text{ km}$.

6. Puncak Jaya, gunung tertinggi di Indonesia, tingginya 4.884 m. Minimal berapa lipatan agar tebal kertas melebihi tinggi Puncak Jaya? Tunjukkan perhitungannya.

Kunci: Syaratnya $0,1 \times 2^n \text{ mm} > 4.884.000 \text{ mm}$, atau $2^n > 48.840.000$. Karena $2^{25} = 33.554.432$ (tebal $\approx 3.355 \text{ m}$, belum cukup) dan $2^{26} = 67.108.864$ (tebal $\approx 6.711 \text{ m}$), minimal diperlukan 26 lipatan.

7. Kak Lintang melipat kertas menjadi tiga bagian sama besar setiap kali, seperti brosur. Tulis rumus banyak lapisan setelah n lipatan tiga. Berapa lipatan tiga dan berapa lipatan dua yang diperlukan agar tumpukan lebih tebal dari 1 cm?

Kunci: Setiap lipatan tiga membuat banyak lapisan menjadi tiga kali lipat, jadi banyak lapisannya 3^n dan tebalnya $0,1 \times 3^n \text{ mm}$. Untuk lebih dari 10 mm: $3^4 \cdot 0,1 = 8,1 \text{ mm}$ (belum) dan $3^5 \cdot 0,1 = 24,3 \text{ mm}$, jadi perlu 5 lipatan tiga. Dengan lipatan dua: $2^6 \cdot 0,1 = 6,4 \text{ mm}$ (belum) dan $2^7 \cdot 0,1 = 12,8 \text{ mm}$, jadi perlu 7 lipatan. Basis yang lebih besar membuat pertumbuhan lebih cepat.

✓ Kesimpulan

Tuliskan dengan kata-katamu sendiri apa arti 2^n , 2^0 , dan 2^{-n} pada kegiatan melipat kertas, tuliskan aturan $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, lalu jelaskan mengapa pertumbuhan pangkat terasa "meledak".

Refleksi

- Saat melihat hasil 42 lipatan, aku merasa ... karena ...
- Pola yang paling membantuku memahami pangkat nol dan pangkat negatif adalah ...
- Hal lain di sekitarku yang tumbuh berlipat seperti lipatan kertas adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya kertas atau penggaris? Buka Lab Mini "Lipat kertas sampai ke Bulan" di Bab 6 (subbab 6.1): jalankan lipatannya, nyalakan skala logaritma, dan catat lipatan ke berapa tumpukan melewati Puncak Jaya dan Bulan. Pakai Rumus Hidup "Tebal kertas terlipat" (subbab 6.1) dengan t_0 hasil ukurmu untuk mengisi kolom tebal hitungan. Untuk kolom luas, atur basis $a = 2$ pada Grafik Hidup "Kurva $y = a^x$: ke kanan berlipat, ke kiri menjadi pecahan" (subbab 6.3) dan geser pangkatnya ke bilangan negatif. Lab Mini "Penggaris alam semesta: dari atom sampai galaksi" (subbab 6.6) membantu membandingkan hasil notasi ilmiahmu.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b6-1

Contoh data (HVS A4, rim 500 lembar setebal 5 cm, jadi $t_0 = 0,1$ mm)

Lipatan ke- (n)	Banyak lapisan	Lapisan sebagai pangkat 2	Tebal hitungan (mm)	Tebal terukur (mm)	Luas satu lapisan (bagian kertas utuh)	Luas sebagai pangkat 2
0	1	2^0	0,1	< 0,5	1	2^0
1	2	2^1	0,2	< 0,5	1/2	2^{-1}
2	4	2^2	0,4	0,5	1/4	2^{-2}
3	8	2^3	0,8	1	1/8	2^{-3}
4	16	2^4	1,6	2	1/16	2^{-4}
5	32	2^5	3,2	3,5	1/32	2^{-5}
6	64	2^6	6,4	7	1/64	2^{-6}

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian melipat, menghitung, dan mengukur	Setiap lipatan tepat dua bagian sama besar, lapisan dihitung benar, dan tebal diukur dengan cara yang sama setiap kali.	Sebagian besar lipatan dan pengukuran rapi, ada satu data yang kurang teliti.	Beberapa lipatan tidak sama besar atau pengukuran tidak konsisten.	Data belum dapat dipakai.
Penemuan pola pangkat	Menemukan 2^n , menjelaskan $2^0 = 1$ dan $2^{-n} = 1/2^n$ dari pola luas, serta menemukan $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ dengan alasan banyak faktor.	Menemukan sebagian besar pola dengan penjelasan yang cukup tepat.	Menyebut pola tanpa alasan atau ada miskonsepsi (mis. $2^0 = 0$, $2^{-1} = -2$).	Belum menemukan pola.
Perhitungan pangkat besar dan notasi ilmiah	Tebal 42 lipatan, lipatan untuk Puncak Jaya, dan perbandingan lipat dua-lipat tiga dihitung benar dan ditulis dalam notasi ilmiah yang tepat.	Ada 1–2 kesalahan kecil dalam hitungan atau penulisan notasi ilmiah.	Banyak kesalahan satuan atau notasi ilmiah.	Perhitungan belum dikerjakan.
Kerja sama dan komunikasi	Semua anggota berperan (pelipat, pengukur, pencatat); kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah pangkat yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Ukur satu rim di meja guru bila tidak setiap kelompok memilikinya (rim HVS 70 gram setebal sekitar 5 cm, jadi $t_0 \approx 0,1$ mm). Kertas koran yang lebar biasanya bisa dilipat satu atau dua kali lebih banyak, sehingga bagus untuk kelompok yang penasaran. Ceritakan bahwa pada tahun 2002 Britney Gallivan, siswi SMA di Amerika Serikat, berhasil melipat tisu gulung sepanjang sekitar 1,2 km sebanyak 12 kali, lalu diskusikan mengapa kertas A4 berhenti di sekitar 7 lipatan. Diferensiasi: siswa yang kesulitan boleh memakai kalkulator untuk 2^n , sedangkan siswa yang cepat menaksir 2^{42} tanpa kalkulator dan mengerjakan nomor 7.

Ubin Aljabar dari Kardus Bekas: Membongkar Luas Kebun Ibu Ayu

Bab 7 • Bahasa Aljabar

Eksplorasi kelompok dengan alat peraga (penemuan terbimbing)

SMP kelas VII–VIII

2 × 40 menit

Model: Discovery learning dengan tahapan konkret – gambar – simbol (CPA)

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menyusun ubin aljabar menjadi persegi panjang dan menuliskan luasnya sebagai jumlah suku-suku.
- Peserta didik dapat menemukan pola $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ dari data banyak ubin.
- Peserta didik dapat memeriksa kesetaraan dua ekspresi dengan substitusi dan menemukan kesalahan seperti $(x + 3)^2 = x^2 + 9$.
- Peserta didik dapat membungkus kembali sekumpulan ubin menjadi bentuk perkalian (faktorisasi sederhana).

Cerita pemantik



Ibu Ayu punya kebun sayur berbentuk persegi bersisi x meter di belakang rumah. Beliau ingin menambah panjangnya 3 m dan lebarnya 2 m untuk menanam cabai dan kangkung. Dimas langsung menjawab, "Gampang! Luas barunya $x^2 + 6$." Ayu merasa ada yang hilang, tetapi tidak tahu apa. Kak Lintang membawa setumpuk kardus bekas, "Ayo buat ubin aljabar. Kalau disusun, ubin tidak bisa berbohong!" Ancil siap menghitung ubinnya.

Rumusan masalah

Bagaimana menuliskan luas persegi panjang $(x + a)(x + b)$ sebagai jumlah suku-suku, dan pola apa yang menghubungkan a dan b dengan banyak setiap jenis ubin?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Kardus bekas atau karton tebal, $\pm 30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ per kelompok
- Spidol atau krayon 3 warna: biru, hijau, kuning
- Penggaris 30 cm, pensil, dan gunting (cutter hanya dipakai guru)
- Kertas berpetak 1 lembar untuk sketsa
- Kalkulator atau HP (opsional, untuk uji $x = 10$)

Keselamatan

Gunting kardus di atas meja dengan ujung gunting menjauhi tubuh dan teman. Kardus tebal yang sulit dipotong diserahkan kepada guru untuk dipotong dengan cutter, jangan memakai cutter sendiri. Kumpulkan sisa potongan kardus ke tempat sampah daur ulang agar lantai tidak licin.

Langkah kerja

1. Gambar lalu gunting ubin dari kardus: 2 persegi besar $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ (ubin x^2), 8 batang $7\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ (batang x), dan 12 persegi kecil $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ (kotak satuan, luasnya 1). Warnai biru, hijau, dan kuning, lalu tulis nama setiap ubin.
2. Perhatikan bahwa panjang 7 cm sengaja tidak sama dengan kelipatan 2 cm. Jadi x adalah panjang misteri yang tidak bisa diganti kotak satuan. Letakkan sebatang x di sisi ubin x^2 untuk memeriksa bahwa panjangnya sama.
3. Sebelum menyusun, tulis dugaanmu: luas persegi panjang $(x + 2)(x + 3)$ sama dengan ...
4. Susun persegi panjang bersisi tegak $x + 2$ dan sisi mendatar $x + 3$. Mulailah dengan ubin x^2 di pojok kiri atas, lalu lengkapi dengan batang x dan kotak satuan sampai terbentuk persegi panjang yang rapat, tanpa celah dan tanpa tumpang tindih.
5. Hitung banyak ubin setiap jenis, lalu tulis luasnya sebagai jumlah ubin, misalnya $x^2 + \dots x + \dots$. Catat di tabel.
6. Ulangi untuk baris-baris lain. Untuk $(2x + 1)(x + 2)$, sisi $2x + 1$ dibentuk dari dua sisi ubin x ditambah satu sisi kotak satuan.
7. Uji setiap baris dengan $x = 10$: hitung panjang $\times$ lebar, lalu hitung nilai ekspresimu. Apakah hasilnya selalu sama?
8. Tantangan membungkus kembali: ambil 1 ubin x^2 , 7 batang x , dan 12 kotak satuan, lalu susun semuanya menjadi satu persegi panjang. Tulis panjang dan lebarnya. Coba juga dengan 1 ubin x^2 , 4 batang, dan 5 kotak satuan.

Tabel pengamatan ubin aljabar

Persegi panjang	Ubin x^2	Batang x	Kotak satuan	Luas (jumlah ubin)	Uji $x = 10$: panjang $\times$ lebar	Uji $x = 10$: nilai ekspresi
$(x + 2)(x + 3)$						
$(x + 1)(x + 4)$						
$(x + 3)(x + 3)$						
$(x + 2)(x + 5)$						
$x(x + 4)$						
$(2x + 1)(x + 2)$						

Grafik

Gambar sketsa susunan ubin untuk $(x + 2)(x + 3)$ dan $(2x + 1)(x + 2)$ di kertas berpetak. Warnai setiap jenis ubin seperti aslinya dan tulis panjang sisi serta luas setiap bagian (model luas).

Analisis

1. Bandingkan banyak batang x dan banyak kotak satuan dengan bilangan a dan b pada $(x + a)(x + b)$. Pola apa yang kamu temukan? Tulis rumus umumnya.

Kunci: Banyak batang x selalu $a + b$ dan banyak kotak satuan selalu $a \times b$, sedangkan ubin x^2 hanya satu. Rumus umumnya $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$. Contoh: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$.

2. Dimas menulis luas kebun baru Ibu Ayu sebagai $x^2 + 6$. Dengan susunan ubinmu, tunjukkan bagian mana yang terlupakan dan tulis luas yang benar. Berapa selisih kedua jawaban jika $x = 6$ m?

Kunci: Dimas hanya menghitung ubin x^2 ($x \cdot x$) dan kotak satuan di pojok ($3 \cdot 2 = 6$). Ia melupakan dua pita batang: $3x$ di satu sisi dan $2x$ di sisi lain. Luas yang benar $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$. Jika $x = 6$: luas benar $9 \times 8 = 72 \text{ m}^2$, jawaban Dimas $36 + 6 = 42 \text{ m}^2$, jadi selisihnya $5x = 30 \text{ m}^2$.

3. Pada baris $(x + 3)(x + 3)$, mengapa suku tengahnya $6x$, bukan $3x$, dan suku terakhirnya 9, bukan 6? Ancil menulis $(x + 5)^2 = x^2 + 25$. Buktikan bahwa ia keliru dengan ubin atau dengan $x = 10$, lalu tulis bentuk yang benar.

Kunci: Ada dua pita batang yang masing-masing berisi 3 batang x , yaitu $3x + 3x = 6x$, dan pojok kotak satuannya berukuran $3 \times 3 = 9$. Inilah pola $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Untuk Ancil, dengan $x = 10$: $(10 + 5)^2 = 225$, sedangkan $10^2 + 25 = 125$, jadi keliru. Bentuk yang benar $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.

4. Kolom uji $x = 10$ memperlihatkan cara berhitung kilat. Pakai polamu untuk menghitung 103×104 (ambil $x = 100$) dan 21×25 tanpa kalkulator.

Kunci: $103 \times 104 = (100 + 3)(100 + 4) = 10.000 + 7 \times 100 + 12 = 10.712$. $21 \times 25 = (20 + 1)(20 + 5) = 400 + 6 \times 20 + 5 = 525$.

5. Pada tantangan membungkus kembali, persegi panjang apa yang terbentuk dari 1 ubin x^2 , 7 batang, dan 12 kotak satuan? Mengapa 1 ubin x^2 , 4 batang, dan 5 kotak satuan tidak bisa membentuk persegi panjang?

Kunci: Persegi panjang $(x + 3)(x + 4)$, karena dibutuhkan dua bilangan yang jumlahnya 7 (banyak batang) dan hasil kalinya 12 (banyak kotak), yaitu 3 dan 4. Untuk 4 batang dan 5 kotak dibutuhkan dua bilangan cacah berjumlah 4 dan berhasil kali 5. Pasangan yang hasil kalinya 5 hanya 1 dan 5, padahal jumlahnya 6, jadi selalu ada ubin yang tersisa atau ada celah.

6. Susun 3 batang x dan 6 kotak satuan menjadi persegi panjang, lalu tulis $3x + 6$ sebagai perkalian. Dengan cara yang sama, tulis $x^2 + 4x$ dan $2x^2 + 6x$ sebagai perkalian. Apa yang dimaksud faktor persekutuan pada susunan ubin?

Kunci: Tiga batang dan enam kotak membentuk persegi panjang bersisi 3 dan $x + 2$, jadi $3x + 6 = 3(x + 2)$. Lalu $x^2 + 4x = x(x + 4)$ dan $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$. Faktor persekutuan adalah sisi yang sama-sama dimiliki semua ubin dalam susunan itu, sehingga semua ubin bisa dijabarkan di sepanjang sisi tersebut.

✓ Kesimpulan

Tuliskan cara mengubah $(x + a)(x + b)$ menjadi jumlah suku-suku (ekspansi) dan cara mengubahnya kembali menjadi perkalian (faktorisasi), dalam kata-kata dan dalam rumus. Sertakan satu contoh dari kebun Ibu Ayu.

💬 Refleksi

- Kesalahan yang dulu sering kubuat dan sekarang bisa kuhindari adalah ...
- Menyusun ubin membantuku memahami aljabar karena ...
- Benda di sekitarku yang luasnya bisa kupecah seperti ubin aljabar adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak sempat membuat ubin kardus? Buka Lab Mini "Ubin aljabar: kotak misteri yang bisa melar" di Bab 7 (subbab 7.4). Atur a dan b sesuai setiap baris tabel, catat banyak ubin x^2 , batang, dan kotak satuan, lalu geser x untuk melihat bahwa polanya tetap berlaku untuk x berapa pun. Untuk pertanyaan 3, pakai Rumus

Hidup "Model luas $(a + b)^2$ " dan uji klaim Ancil dengan Grafik Hidup "Kembar atau bukan? Uji dua ekspresi" (subbab 7.4). Latih kelancaranmu dengan Adu Cepat "Ekspansi kilat: isi kotaknya".

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b7-4

Contoh data (ubin kardus, $x = 7$ cm, kotak satuan 2 cm)

Persegi panjang	Ubin x^2	Batang x	Kotak satuan	Luas (jumlah ubin)	Uji $x = 10$: panjang $\times$ lebar	Uji $x = 10$: nilai ekspresi
$(x + 2)(x + 3)$	1	5	6	$x^2 + 5x + 6$	$12 \times 13 = 156$	$100 + 50 + 6 = 156$
$(x + 1)(x + 4)$	1	5	4	$x^2 + 5x + 4$	$11 \times 14 = 154$	$100 + 50 + 4 = 154$
$(x + 3)(x + 3)$	1	6	9	$x^2 + 6x + 9$	$13 \times 13 = 169$	$100 + 60 + 9 = 169$
$(x + 2)(x + 5)$	1	7	10	$x^2 + 7x + 10$	$12 \times 15 = 180$	$100 + 70 + 10 = 180$
$x(x + 4)$	1	4	0	$x^2 + 4x$	$10 \times 14 = 140$	$100 + 40 = 140$
$(2x + 1)(x + 2)$	2	5	2	$2x^2 + 5x + 2$	$21 \times 12 = 252$	$200 + 50 + 2 = 252$

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Membuat dan menyusun ubin	Ubin dipotong rapi dengan ukuran tepat; semua persegi panjang tersusun rapat tanpa celah atau tumpang tindih.	Ubin cukup rapi; ada satu susunan yang perlu dibetulkan.	Ukuran ubin tidak konsisten atau beberapa susunan tidak berbentuk persegi panjang.	Ubin dan susunan belum dapat dipakai.
Penemuan pola dan generalisasi	Menemukan $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, menjelaskan suku $2ab$ pada kuadrat, dan memakainya untuk faktorisasi.	Menemukan pola dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan atau masih menulis $(x + a)^2 = x^2 + a^2$.	Belum menemukan pola.
Perhitungan dan uji substitusi	Semua kolom uji $x = 10$ dan hitung kilat benar serta dipakai untuk memeriksa jawaban.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan atau uji substitusi tidak dikerjakan.	Tabel hampir kosong.
Kerja sama dan komunikasi	Semua anggota berperan; penjelasan tentang kesalahan Dimas dan Ancil jelas dan memakai istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = $(\text{jumlah skor} \div 16) \times 100$.



Catatan guru

Agar hemat waktu, ubin dapat dipotong pada pertemuan sebelumnya atau dicetak di kertas lalu ditempel ke kardus. Tekankan bahwa panjang x sengaja bukan kelipatan sisi kotak satuan, supaya siswa tidak menghitung x sebagai bilangan tertentu. Kelompok yang cepat dapat menyelidiki $(x + 2)(x - 1)$ dengan ubin merah sebagai ubin negatif, atau mencari semua susunan persegi panjang untuk 1 ubin x^2 , 6 batang, dan 8 kotak satuan. Siswa yang kesulitan cukup mengerjakan tiga baris pertama dengan bantuan Lab Mini.

Timbangan Gantungan Baju: Membongkar Kantong Misteri Tanpa Membukanya

Bab 8 • Persamaan & Pertidaksamaan Linear

Eksplorasi kelompok dengan alat peraga (penemuan terbimbing)

SMP kelas VII

2 x 40 menit

Model: Inkuiri terbimbing: susun – seimbangkan – catat – sederhanakan – periksa

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat memodelkan keadaan timbangan seimbang sebagai persamaan linear satu variabel.
- Peserta didik dapat menemukan bahwa melakukan operasi yang sama pada kedua ruas menjaga persamaan tetap benar, lalu menggunakannya untuk menentukan nilai x .
- Peserta didik dapat menuliskan keadaan timbangan yang miring sebagai pertidaksamaan dan menggambar penyelesaiannya di garis bilangan.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa tanda pertidaksamaan berbalik ketika kedua ruas dikalikan bilangan negatif.

Cerita pemantik



Di pasar dekat rumah Dimas, Bu Sari menimbang beras dengan timbangan dua lengan. Satu sisi berisi anak timbangan, sisi lain berisi beras, dan ia menambah atau mengurangi beras sampai jarumnya tegak. Keesokan harinya Ancil menemukan tiga kantong kecil yang tertutup rapat dengan pesan dari Kak Lintang: "Isi setiap kantong sama banyak. Temukan isinya tanpa membuka kantong!" Ayu mengusulkan membuat timbangan dari gantungan baju. Dimas penasaran: bisakah kita "mengakali" timbangan agar kantong itu membuka rahasianya sendiri?

Rumusan masalah

Bagaimana timbangan yang seimbang atau miring dapat dipakai untuk menentukan isi kantong misteri (x), dan langkah apa saja yang boleh dilakukan tanpa merusak keseimbangannya?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Isi kedua gelas (banyak kantong dan kelereng yang dimasukkan)	Keadaan timbangan: seimbang, gelas kiri turun, atau gelas kanan turun	Semua kantong berisi sama banyak, kelereng sejenis, kedua gelas dan talinya sama

Alat dan bahan

- 1 gantungan baju plastik yang punya lekukan di kedua ujungnya
- 2 gelas plastik bekas air mineral yang sama, tali rafia ± 1 m, dan selotip
- ± 25 kelereng yang sama besar per kelompok (atau koin Rp500 yang sejenis)
- 3 kantong misteri dari guru: plastik klip kecil berisi kelereng dalam jumlah yang sama, dibungkus kertas agar isinya tidak terlihat

- Kertas berpetak untuk garis bilangan dan pensil

Keselamatan

Kelereng yang jatuh membuat lantai licin: kerjakan di atas meja beralas nampan atau kardus dan segera pungut kelereng yang terjatuh. Jangan memasukkan kelereng ke mulut. Gantung timbangan di tempat yang kokoh (gagang pintu atau gagang sapu yang ditopang dua kursi), jangan di dekat jalan lalu-lalang, dan jangan mengayun-ayunkannya.

Langkah kerja

1. Rakit timbangan: ikat setiap gelas dengan tali yang sama panjang, lalu gantungkan pada kedua ujung gantungan baju. Gantung timbangan di tempat yang kokoh. Kedua gelas kosong harus seimbang; jika miring, tempel selotip kecil di sisi yang lebih ringan.
2. Timang kantong misteri di telapak tangan, lalu tulis dugaanmu tentang isi satu kantong (x kelereng). Jangan dibuka!
3. Percobaan 1: masukkan 1 kantong dan 2 kelereng ke gelas kiri. Tambahkan kelereng satu per satu ke gelas kanan sampai timbangan seimbang. Catat isi gelas kanan dan tulis persamaannya.
4. Masih pada percobaan 1, ambil kelereng yang sama banyak dari kedua gelas sampai gelas kiri hanya berisi kantong. Apakah timbangan tetap seimbang? Catat langkahmu dan nilai x .
5. Lakukan percobaan 2–4 sesuai tabel. Pada percobaan 4, masukkan dulu 1 kantong ke gelas kanan, lalu tambahkan kelereng sampai seimbang. Cari langkah "sama di kedua gelas" sampai tersisa satu kantong di satu sisi.
6. Percobaan 5 dan 6: isi gelas kiri dengan 2 kantong, lalu isi gelas kanan dengan tepat 10 kelereng (percobaan 5) dan tepat 6 kelereng (percobaan 6). Catat gelas mana yang turun dan tulis pertidaksamaannya.
7. Terakhir, buka satu kantong dan hitung isinya. Cocokkan dengan semua hasilmu.

Tabel pengamatan timbangan (x = banyak kelereng dalam satu kantong)

Isi gelas kiri	Isi gelas kanan	Keadaan timbangan	Kalimat matematika	Langkah yang sama di kedua gelas	Hasil
1 kantong + 2 kelereng					
2 kantong					
2 kantong + 3 kelereng					
3 kantong + 1 kelereng					
2 kantong					
2 kantong					

Grafik

Gambar penyelesaian percobaan 5 dan percobaan 6 pada satu garis bilangan dari 0 sampai 8. Pakai bulatan kosong untuk tanda $<$ dan $>$, lalu arsir bagian yang memenuhi keduanya.

Analisis

1. Pada percobaan 1–4, aturan apa yang selalu menjaga timbangan tetap seimbang? Tuliskan aturan itu untuk persamaan.

Kunci: Apa pun yang dilakukan pada satu gelas (menambah, mengambil, atau membagi menjadi beberapa bagian sama) harus juga dilakukan pada gelas lain. Untuk persamaan: kedua ruas boleh ditambah, dikurangi, dikali, atau dibagi dengan bilangan yang sama (bukan nol), dan persamaannya tetap benar.

2. Pada percobaan 4, mengapa kita boleh mengambil satu kantong dari kedua gelas walaupun isinya belum diketahui? Tuliskan penyelesaian $3x + 1 = x + 9$ langkah demi langkah.

Kunci: Kedua kantong berisi sama banyak, jadi mengambil satu kantong dari setiap gelas berarti mengurangi kedua ruas dengan x yang sama, sehingga keseimbangannya tetap. $3x + 1 = x + 9 \Rightarrow 2x + 1 = 9$ (kurangi x) $\Rightarrow 2x = 8$ (kurangi 1) $\Rightarrow x = 4$ (bagi 2).

3. Jika gelas kiri berisi a kantong dan b kelereng, lalu seimbang dengan c kelereng di gelas kanan, tulis rumus x . Periksa rumusmu dengan data percobaan 3.

Kunci: $ax + b = c \Rightarrow ax = c - b \Rightarrow x = \frac{c - b}{a}$. Percobaan 3: $a = 2$, $b = 3$, $c = 11$, jadi $x = \frac{11 - 3}{2} = 4$. Cocok.

4. Dari percobaan 5 dan 6, nilai x berapa saja yang memenuhi keduanya? Jika x harus bilangan cacah, apakah hasilnya cocok dengan isi kantong yang kamu buka?

Kunci: Percobaan 5: $2x < 10$, jadi $x < 5$. Percobaan 6: $2x > 6$, jadi $x > 3$. Keduanya terpenuhi oleh $3 < x < 5$. Bilangan cacah satu-satunya di sana adalah 4, sama dengan isi kantong. (Jika guru memakai isi lain, irisannya juga menunjuk tepat ke isi kantong itu.)

5. Ayu berkata, "Kalau $2x < 10$ berarti $x < 5$, maka $-2x < -10$ juga berarti $x < 5$." Uji pendapat Ayu dengan $x = 4$ dan $x = 6$. Apa penyelesaian yang benar, dan mengapa tandanya harus dibalik?

Kunci: Untuk $x = 4$: $-8 < -10$ salah. Untuk $x = 6$: $-12 < -10$ benar. Jadi Ayu keliru. Penyelesaian yang benar adalah $x > 5$. Mengalikan atau membagi dengan bilangan negatif mencerminkan garis bilangan terhadap 0: bilangan yang tadinya lebih kecil menjadi lebih besar (contoh: $3 < 5$, tetapi $-3 > -5$), sehingga tandanya harus dibalik.

6. Bisakah timbangan memodelkan $x + 5 = 2$? Bagaimana dengan $2x + 3 = 2x + 5$? Jelaskan apa yang terjadi pada timbangan dan apa artinya bagi penyelesaian persamaan.

Kunci: $x + 5 = 2$ tidak dapat diperagakan karena penyelesaiannya $x = -3$, sedangkan kantong tidak bisa berisi -3 kelereng. Ini batas model timbangan, bukan batas aljabar. Pada $2x + 3 = 2x + 5$, setelah 2 kantong diambil dari kedua sisi tersisa $3 = 5$, sehingga gelas kanan selalu lebih berat berapa pun isi kantongnya. Persamaan ini tidak punya penyelesaian.

7. Ayu punya tabungan Rp20.000 dan menabung Rp5.000 setiap minggu. Ia ingin membeli buku cerita seharga Rp65.000. Tulis pertidaksamaannya dan tentukan paling sedikit berapa minggu ia harus menabung.

Kunci: Misalkan x = banyak minggu: $20.000 + 5.000x \geq 65.000 \Rightarrow 5.000x \geq 45.000 \Rightarrow x \geq 9$. Paling sedikit 9 minggu (setelah 8 minggu tabungannya baru Rp60.000).

✓ Kesimpulan

Tuliskan aturan "timbangan" untuk menyelesaikan persamaan linear dan aturan untuk pertidaksamaan, termasuk kapan tanda pertidaksamaan harus dibalik. Beri satu contoh dari percobaanmu.

💡 Refleksi

- Saat timbangan tetap seimbang setelah kelereng diambil dari kedua sisi, aku menyadari bahwa ...
- Bagian yang paling menantang dalam kegiatan ini adalah ... dan cara aku mengatasinya adalah ...
- Keputusan sehari-hari yang bisa kuhitung dengan pertidaksamaan adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya kelereng atau gantungan baju? Buka Lab Mini "Timbangan dua lengan: jaga supaya tetap seimbang!" di Bab 8 (subbab 8.1). Susun kantong dan kelereng sesuai percobaan 1–4, lalu tambah atau ambil isi kedua lengan sampai tersisa satu kantong. Untuk percobaan 5–6, pakai Lab Mini "Garis bilangan: siapa yang lolos uji?" (subbab 8.5) untuk menguji nilai x dan melihat tanda yang berbalik. Periksa rumusmu di pertanyaan 3 dengan Rumus Hidup "Kunci persamaan linear" dan latih kecepatanmu dengan Adu Cepat "Selesaikan $ax + b = c$ " (subbab 8.2).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b8-1

📊 Contoh data (setiap kantong berisi 4 kelereng)

Isi gelas kiri	Isi gelas kanan	Keadaan timbangan	Kalimat matematika	Langkah yang sama di kedua gelas	Hasil
1 kantong + 2 kelereng	6 kelereng	seimbang	$x + 2 = 6$	ambil 2 kelereng dari kedua gelas	$x = 4$
2 kantong	8 kelereng	seimbang	$2x = 8$	bagi isi kedua gelas menjadi 2 bagian sama	$x = 4$
2 kantong + 3 kelereng	11 kelereng	seimbang	$2x + 3 = 11$	ambil 3 kelereng dari kedua gelas, lalu bagi 2	$x = 4$
3 kantong + 1 kelereng	1 kantong + 9 kelereng	seimbang	$3x + 1 = x + 9$	ambil 1 kantong dan 1 kelereng dari kedua gelas, lalu bagi 2	$x = 4$
2 kantong	10 kelereng	gelas kanan turun	$2x < 10$	bagi 2	$x < 5$
2 kantong	6 kelereng	gelas kiri turun	$2x > 6$	bagi 2	$x > 3$

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Merakit dan memakai timbangan	Timbangan dikalibrasi seimbang, kelereng ditambah satu per satu, dan setiap keadaan dicatat dengan jujur.	Timbangan berfungsi baik, ada satu pengamatan yang kurang teliti.	Timbangan belum seimbang saat kosong atau beberapa data tidak masuk akal.	Percobaan belum dapat dipakai.
Menyusun kalimat matematika	Semua keadaan timbangan ditulis sebagai persamaan atau pertidaksamaan yang tepat, termasuk arah tandanya.	Ada satu kalimat matematika yang keliru.	Beberapa kalimat keliru atau tanda pertidaksamaan terbalik.	Belum dapat menuliskan kalimat matematika.
Penalaran langkah penyelesaian	Menjelaskan aturan "sama di kedua ruas", menurunkan rumus $x = (c - b)/a$, dan menjelaskan pembalikan tanda dengan contoh.	Langkah benar dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Langkah benar tanpa alasan, atau ada miskonsepsi (mis. tanda tidak dibalik).	Belum ada penalaran.
Kerja sama dan komunikasi	Semua anggota berperan (perakit, penimbang, pencatat); temuan disampaikan jelas dengan istilah ruas, persamaan, dan pertidaksamaan.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Siapkan kantong misteri sebelum pelajaran dan beri isi berbeda untuk kelompok yang berdekatan (mis. 3, 4, atau 5 kelereng) supaya jawaban tidak saling disalin. Kantong dan pembungkusnya harus jauh lebih ringan daripada satu kelereng. Jika timbangan kurang peka, ganti gelas plastik dengan tutup botol yang lebih ringan. Kelompok yang cepat dapat merancang sendiri susunan yang menghasilkan persamaan dengan kurung, mis. $2(x + 1) = x + 7$. Siswa yang kesulitan dapat menggambar timbangan di kertas sebelum menulis persamaannya.

Kelereng si Gagak Haus: Menemukan Garis Lurus di Dalam Gelas

Bab 9 • Garis Lurus & Fungsi Linear

Percobaan kelompok dan pemodelan data

SMP kelas VIII (juga SMA kelas X untuk pemodelan)

2 x 40 menit

Model: Inkuiri terbimbing: amati – ukur – plot – modelkan – ramalkan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur, mencatat, dan memplot pasangan data (banyak kelereng, tinggi air) pada bidang Kartesius.
- Peserta didik dapat menghitung gradien dari data dan menjelaskan maknanya sebagai kenaikan tinggi air untuk setiap kelereng.
- Peserta didik dapat menyusun model $y = mx + c$, menafsirkan m dan c , serta mengenali garis sejajar dari gradien yang sama.
- Peserta didik dapat memakai model untuk meramal dan menyebutkan batas berlakunya model.

Cerita pemantik



Ancil teringat dongeng burung gagak yang kehausan: air di dalam kendi terlalu rendah, lalu si gagak menjatuhkan batu kerikil satu per satu sampai airnya naik dan bisa diminum. "Apakah setiap batu menaikkan air sama banyak?" tanya Dimas. Ayu mengusulkan memakai kelereng karena ukurannya seragam. Kak Lintang menambahkan tantangan: "Kalau polanya teratur, kalian bisa meramal kapan airnya tumpah tanpa mencobanya!"

? Rumusan masalah

Bagaimana hubungan antara banyak kelereng (x) dan tinggi air (y) di dalam gelas, dan apa arti gradien serta titik potong sumbu- y pada hubungan itu?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak kelereng yang dimasukkan (x)	Tinggi permukaan air (y , dalam cm)	Ukuran kelereng, wadah yang sama untuk percobaan A dan B, cara membaca tinggi air (mata sejajar permukaan air)

Alat dan bahan

- 2 wadah bening berbentuk tabung: sempit (diameter dalam ± 5 cm) dan lebar (diameter dalam ± 7 cm), mis. botol air mineral yang sudah dipotong guru
- 25 kelereng yang sama besar per kelompok
- Penggaris 30 cm atau pita ukur kertas yang ditempel tegak di sisi wadah
- Air secukupnya, sendok makan, lap, dan nampan
- Kertas berpetak, pensil, dan 3 pensil warna
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Kerjakan di atas nampan dan segera lap air yang tumpah agar lantai tidak licin. Jauhkan HP dan kabel listrik dari air. Tepi botol yang dipotong bisa tajam, jadi pastikan guru sudah melapisinya dengan selotip. Jangan memasukkan kelereng ke mulut, dan kumpulkan kembali semua kelereng setelah selesai.

Langkah kerja

1. Tempel pita ukur atau penggaris tegak di sisi luar wadah sempit dengan angka 0 tepat di dasar bagian dalam. Isi air sampai tinggi 8,0 cm. Ini percobaan A.
2. Tulis dugaanmu: jika kelereng dimasukkan 5 butir setiap kali, bagaimana tinggi air berubah? Apakah kenaikannya selalu sama?
3. Masukkan 5 kelereng dengan sendok secara perlahan agar air tidak memercik. Tunggu permukaan air tenang, lalu baca tingginya dengan mata sejajar permukaan air. Catat di tabel. Ulangi sampai 25 kelereng.
4. Keluarkan semua kelereng, atur air di wadah yang sama menjadi 5,0 cm, lalu ulangi langkah 3. Ini percobaan B.
5. Pindah ke wadah lebar. Isi air sampai 5,0 cm, lalu ulangi langkah 3. Ini percobaan C. Pastikan semua kelereng selalu terendam air.
6. Hitung kenaikan tinggi air percobaan A untuk setiap tambahan 5 kelereng. Ukur juga diameter dalam kedua wadah.
7. Plot ketiga data pada satu bidang Kartesius, lalu tarik garis lurus terbaik untuk setiap percobaan dengan penggaris.

Tabel pengamatan tinggi air (cm)

Banyak kelereng (x)	A: wadah sempit, awal 8 cm	B: wadah sempit, awal 5 cm	C: wadah lebar, awal 5 cm	Kenaikan A per 5 kelereng
0				
5				
10				
15				
20				
25				

Grafik

Pada satu bidang Kartesius (sumbu mendatar: banyak kelereng 0–30; sumbu tegak: tinggi air 0–12 cm), plot data A, B, dan C dengan tiga warna berbeda. Tarik garis lurus terbaik untuk setiap percobaan sehingga titik-titik data tersebar dekat garis di kedua sisinya.

Analisis

1. Perhatikan kolom kenaikan A. Apa yang kamu temukan? Bagaimana bentuk grafik ketiga percobaan? Apakah dugaanmu terbukti?

Kunci: Kenaikan tinggi air hampir tetap, sekitar 0,5–0,6 cm untuk setiap 5 kelereng. Selisih kecil berasal dari galat membaca skala. Karena kenaikannya tetap, titik-titik setiap percobaan hampir segaris, jadi hubungannya linear. Dugaan bahwa setiap kelereng menaikkan air sama banyak terbukti.

2. Hitung gradien setiap garis memakai titik pertama dan titik terakhir. Apa arti gradien itu dalam percobaan ini? Sertakan satuannya.

Kunci: A: $m = \frac{10,7 - 8,0}{25 - 0} = 0,108$. B: $m = \frac{7,7 - 5,0}{25} = 0,108$. C: $m = \frac{6,4 - 5,0}{25} = 0,056$. Gradien adalah kenaikan tinggi air untuk setiap satu kelereng, yaitu sekitar 0,11 cm (1,1 mm) per kelereng di wadah sempit dan 0,056 cm per kelereng di wadah lebar.

3. Tulis persamaan garis $y = mx + c$ untuk A, B, dan C. Apa arti c dalam percobaan ini?

Kunci: A: $y = 0,108x + 8$. B: $y = 0,108x + 5$. C: $y = 0,056x + 5$. Nilai c adalah tinggi air awal sebelum ada kelereng ($x = 0$), yaitu titik potong garis dengan sumbu- y .

4. Garis A dan B tampak sejajar, sedangkan garis B dan C berpotongan di sumbu- y . Jelaskan mengapa. Mengapa garis C lebih landai? Bandingkan perbandingan gradien B dan C dengan perbandingan luas alas kedua wadah.

Kunci: A dan B memakai wadah dan kelereng yang sama, jadi kenaikan per kelereng (gradien) sama; yang berbeda hanya tinggi awal, sehingga garisnya sejajar. B dan C sama-sama mulai dari 5 cm, jadi berpotongan di $(0, 5)$. Di wadah lebar, volume kelereng yang sama tersebar ke alas yang lebih luas sehingga airnya naik lebih sedikit. Perbandingan gradien $0,108 : 0,056 \approx 1,93$, hampir sama dengan perbandingan luas alas $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = 1,96$.

5. Wadah sempit pada percobaan A tingginya 15 cm. Kelereng ke berapa yang akan membuat air mulai tumpah? Tunjukkan perhitunganmu dengan model A.

Kunci: $0,108x + 8 = 15 \Rightarrow x = \frac{7}{0,108} \approx 64,8$. Setelah 64 kelereng tinggi air sekitar 14,9 cm, jadi kelereng ke-65 membuat air mulai tumpah. Jawaban sekitar 63–66 dapat diterima karena galat pengukuran.

6. Ancil diam-diam memasukkan sejumlah kelereng ke wadah A yang berisi air 8,0 cm. Tinggi air menjadi 9,9 cm. Taksirlah berapa kelereng yang ia masukkan.

Kunci: $x = \frac{9,9 - 8,0}{0,108} \approx 17,6$, jadi sekitar 18 kelereng. Karena tinggi air hanya terbaca sampai 0,1 cm, jawaban 17 atau 18 masuk akal.

7. Apakah hubungan antara banyak kelereng dan tinggi air termasuk fungsi? Untuk nilai x berapa saja model A masuk akal? Apa yang terjadi jika kita memasukkan 100 kelereng?

Kunci: Ya, termasuk fungsi, karena setiap banyak kelereng memberikan tepat satu tinggi air. Model A hanya masuk akal untuk x bilangan cacah dari 0 sampai sekitar 64: kelereng tidak bisa negatif atau pecahan, dan setelah air mencapai bibir wadah, air tumpah sehingga tingginya tetap 15 cm. Dengan 100 kelereng, model meramalkan 18,8 cm, padahal wadahnya hanya 15 cm.

✓ Kesimpulan

Tuliskan hubungan antara banyak kelereng dan tinggi air dalam kata-kata dan dalam bentuk $y = mx + c$. Jelaskan arti m dan c , kapan dua garis sejajar, dan batas berlakunya model.

💬 Refleksi

- Saat titik-titik dataku ternyata hampir segaris, aku merasa ...
- Kesalahan pengukuran terbesar dalam percobaanku kemungkinan berasal dari ... dan lain kali aku akan ...
- Kejadian lain di sekitarku yang bisa dimodelkan dengan garis lurus adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak bisa membawa air ke kelas? Pakai contoh data di LKPD ini, lalu buka Grafik Hidup " $y = mx + c$: dua tombol ajaib" di Bab 9 (subbab 9.4): putar tombol m dan geser tombol c untuk melihat mengapa garis A dan B sejajar, sedangkan garis B dan C berbagi titik potong sumbu- y . Latih cara menarik garis lurus terbaik dengan Grafik Hidup "Garis kecocokan terbaik: kecambah kacang hijau" (subbab 9.6), lalu periksa garis sejajar dengan "Sejajar dan tegak lurus lewat titik P" (subbab 9.5).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b9-6

📊 Contoh data (kelereng berdiameter 1,6 cm; wadah sempit 5 cm, wadah lebar 7 cm)

Banyak kelereng (x)	A: wadah sempit, awal 8 cm	B: wadah sempit, awal 5 cm	C: wadah lebar, awal 5 cm	Kenaikan A per 5 kelereng
0	8,0	5,0	5,0	—
5	8,5	5,6	5,3	0,5
10	9,1	6,1	5,6	0,6
15	9,6	6,6	5,8	0,5
20	10,2	7,2	6,1	0,6
25	10,7	7,7	6,4	0,5

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketelitian pengukuran dan tabel	Semua tinggi air dibaca dengan mata sejajar permukaan air sampai 0,1 cm dan tercatat lengkap untuk tiga percobaan.	Data lengkap, ada satu atau dua pembacaan yang kurang teliti.	Data kurang lengkap atau cara membaca tidak konsisten.	Data belum dapat dipakai.
Grafik dan gradien	Sumbu berskala dan berlabel, titik diplot tepat, garis terbaik wajar, gradien dihitung benar dengan satuannya.	Grafik dan gradien sebagian besar benar.	Skala salah, titik salah plot, atau gradien dihitung terbalik ($\Delta x / \Delta y$).	Grafik belum dibuat.
Model dan ramalan	Persamaan A, B, C tepat; arti m dan c dijelaskan; ramalan tumpah dan taksiran kelereng Ancil benar.	Model benar, satu ramalan kurang tepat.	Model hanya sebagian benar atau tafsiran m dan c tertukar.	Belum menyusun model.
Penalaran dan komunikasi	Menjelaskan garis sejajar, pengaruh luas alas, dan batas model dengan alasan yang runtut; semua anggota berperan.	Penjelasan cukup runtut, kerja sama baik.	Penjelasan tanpa alasan atau hanya sebagian anggota yang aktif.	Belum ada penjelasan.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Potong botol sebelum pelajaran dan lapiasi tepinya dengan selotip. Gelas kaca bening berbentuk tabung juga bisa dipakai. Kelereng berdiameter 1,6 cm bervolume $\frac{4}{3}\pi(0,8)^3 \approx 2,1 \text{ cm}^3$, sehingga di wadah berdiameter 5 cm setiap kelereng menaikkan air sekitar 0,11 cm. Tantangan SMA: hitung volume satu kelereng dari gradien, yaitu $m \times \text{luas alas} \approx 0,108 \times \pi \cdot 2,5^2 \approx 2,1 \text{ cm}^3$, lalu bandingkan dengan rumus volume bola. Siswa yang kesulitan cukup mengerjakan percobaan A dan B.

Celengan Kakek: Teka-teki Koin Rp500 dan Rp1.000

Bab 10 • Sistem Persamaan Linear

Permainan matematika + diskusi (teka-teki antarkelompok)

SMP kelas VIII (pertanyaan 7 untuk SMA kelas X)

2 x 40 menit

Model: Problem-based learning: tebak – periksa – perbaiki – modelkan – buat soal sendiri

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menemukan strategi "tukar satu koin" dari tabel tebakan dan menghubungkannya dengan metode eliminasi.
- Peserta didik dapat menyusun SPLDV dari teka-teki koin dan menyelesaikannya dengan metode grafik, substitusi, dan eliminasi.
- Peserta didik dapat menentukan apakah sebuah teka-teki punya satu jawaban, tidak punya jawaban, atau punya banyak jawaban, serta menafsirkan jawaban yang tidak masuk akal.
- Peserta didik dapat merancang teka-teki sistem persamaan sendiri dan memeriksa jawabannya.

Cerita pemantik



Saat liburan di rumah Kakek di Yogyakarta, Ancil menemukan celengan bambu. Kakek tersenyum, "Isinya hanya koin Rp500 dan Rp1.000. Ada 9 koin, nilainya Rp6.000. Tebak dulu berapa koin masing-masing, baru boleh dibuka!" Dimas langsung menebak asal-asalan, sedangkan Ayu mulai membuat tabel. Kak Lintang menantang, "Setelah memecahkannya, buat teka-teki celengan kalian sendiri untuk kelompok lain!"

Rumusan masalah

Jika hanya diketahui banyak koin dan nilai totalnya, bagaimana cara menentukan banyak koin setiap jenis? Kapan teka-teki seperti ini punya tepat satu jawaban, tidak punya jawaban, atau punya banyak jawaban?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Koin Rp500 dan Rp1.000, masing-masing ± 10 keping per kelompok, atau koin mainan dari tutup botol dua warna (merah = Rp500, biru = Rp1.000)
- 2 amplop atau kantong kertas yang tidak tembus pandang per kelompok
- Potongan kertas untuk kartu petunjuk dan spidol
- Kertas berpetak, penggaris, dan pensil
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Koin adalah benda kecil: jangan dimasukkan ke mulut atau hidung, dan cuci tangan setelah memegang uang logam. Catat jumlah koin milik setiap orang sebelum kegiatan dan kembalikan semuanya setelah selesai. Kegiatan ini bukan taruhan, jadi tidak ada uang yang berpindah tangan. Saat menukar amplop dengan kelompok lain, berjalanlah dengan tertib.

Langkah kerja

1. Teka-teki Kakek (dikerjakan semua kelompok): 9 koin bernilai Rp6.000. Tulis dulu dugaanmu tentang banyak koin setiap jenis.
2. Peragakan dengan koin sungguhan: mulai dari 9 koin Rp500. Hitung banyak koin, nilai total, dan selisihnya dengan Rp6.000, lalu catat sebagai tebakan 1.
3. Tukar satu koin Rp500 dengan satu koin Rp1.000, lalu hitung lagi dan catat. Ulangi sampai selisihnya nol, kemudian lakukan satu tukaran lagi.
4. Tulis dua persamaan dari teka-teki itu (banyak koin dan nilai total), lalu selesaikan dengan substitusi dan dengan eliminasi.
5. Gambar kedua garis pada kertas berpetak dan tandai titik potongnya.
6. Buat teka-teki: secara rahasia, masukkan 5–15 koin campuran ke amplop. Tulis kartu petunjuk berisi banyak koin dan nilai totalnya. Tukarkan amplop dengan kelompok lain.
7. Pecahkan teka-teki kelompok lain dengan dua cara (tabel tukar koin dan eliminasi), lalu buka amplop untuk memeriksa.
8. Tantangan: buat kartu petunjuk yang tidak punya jawaban atau yang punya banyak jawaban, lalu uji kepada kelompok lain.

Tabel tebakan teka-teki Kakek (9 koin, Rp6.000)

Tebakan ke-	Koin Rp500 (x)	Koin Rp1.000 (y)	Banyak koin $x + y$	Nilai total (Rp)	Selisih dengan Rp6.000
1					
2					
3					
4					
5					

Grafik

Pada kertas berpetak (sumbu mendatar x = banyak koin Rp500, sumbu tegak y = banyak koin Rp1.000, keduanya 0 sampai 12), gambar garis $x + y = 9$ dan $500x + 1.000y = 6.000$. Tandai juga titik-titik dari tabel tebakanmu. Di garis mana semua titik tebakan berada?

Analisis

1. Apa yang berubah dan apa yang tetap setiap kali satu koin Rp500 ditukar dengan satu koin Rp1.000? Dari tebakan 1 (semua koin Rp500), bagaimana kamu bisa langsung menghitung banyak koin Rp1.000 tanpa mencoba satu per satu?

Kunci: Banyak koin tetap 9, tetapi nilai total bertambah Rp500 setiap kali satu koin ditukar. Pada tebakan 1 nilainya Rp4.500, jadi kurang Rp1.500. Setiap koin Rp1.000 menambah Rp500, sehingga diperlukan $1.500 \div 500 = 3$ koin Rp1.000 dan $9 - 3 = 6$ koin Rp500.

2. Tulis teka-teki Kakek sebagai SPLDV. Selesaikan dengan substitusi dan dengan eliminasi. Apa hubungan cara eliminasi dengan strategi tukar koin di pertanyaan 1?

Kunci: $x + y = 9$ dan $500x + 1.000y = 6.000$, atau setelah dibagi 500: $x + 2y = 12$. Substitusi: $x = 9 - y \Rightarrow 9 - y + 2y = 12 \Rightarrow y = 3, x = 6$. Eliminasi: $(x + 2y) - (x + y) = 12 - 9 \Rightarrow y = 3$, lalu $x = 6$. Mengurangkan persamaan sama dengan strategi tukar koin: kita membuang "semua koin dianggap Rp500" sehingga yang tersisa hanya kelebihan dari koin Rp1.000.

3. Di titik mana kedua garismu berpotongan? Mengapa semua titik dari tabel tebakan terletak pada satu garis yang sama? Apa istimewanya titik potong itu?

Kunci: Kedua garis berpotongan di $(6, 3)$. Semua tebakan memakai tepat 9 koin, jadi semuanya terletak pada garis $x + y = 9$. Titik potong adalah satu-satunya titik yang juga terletak pada garis nilai $x + 2y = 12$, sehingga memenuhi kedua petunjuk sekaligus. Di titik itu selisih pada tabel bernilai nol.

4. Untuk teka-teki dengan n koin bernilai V rupiah, tulis rumus banyak koin Rp1.000 (y) dan koin Rp500 (x). Periksa rumusmu dengan teka-teki yang kamu terima dari kelompok lain.

Kunci: $y = \frac{V - 500n}{500}$ dan $x = n - y$. Untuk teka-teki Kakek: $y = \frac{6.000 - 4.500}{500} = 3$ dan $x = 6$. Jawabannya masuk akal hanya jika V kelipatan 500 dan $500n \leq V \leq 1.000n$.

5. Dimas membuat kartu petunjuk: "10 koin, nilainya Rp4.000." Selesaikan sistemnya. Apa arti jawaban yang kamu peroleh? Mengapa Ayu berkata teka-teki itu mustahil?

Kunci: $x + y = 10$ dan $x + 2y = 8$ menghasilkan $y = -2$ dan $x = 12$. Secara aljabar sistemnya punya penyelesaian, tetapi banyak koin tidak mungkin negatif, jadi teka-teki itu mustahil. Sepuluh koin paling sedikit bernilai $10 \times 500 = \text{Rp}5.000$, lebih dari Rp4.000.

6. Ayu memberi dua petunjuk untuk celengannya: "Ada 9 koin" dan "Jika banyak setiap jenis koin digandakan, jumlah koinnya menjadi 18." Mengapa petunjuk kedua tidak menolong? Seperti apa kedua garisnya, dan ada berapa kemungkinan isi celengan?

Kunci: Petunjuk kedua menghasilkan $2x + 2y = 18$, yang hanya kelipatan dari $x + y = 9$. Kedua garis berimpit, sehingga sistemnya punya tak hingga banyak penyelesaian. Dalam konteks koin ada 10 kemungkinan, yaitu $y = 0, 1, \dots, 9$ dengan $x = 9 - y$. Agar jawabannya tunggal, garis kedua harus punya gradien yang berbeda.

7. Tantangan SMA: Celengan Kak Lintang berisi 15 koin Rp200, Rp500, dan Rp1.000 bernilai Rp8.300. Banyak koin Rp200 sama dengan banyak koin Rp1.000. Tentukan banyak koin setiap jenis.

Kunci: Misalkan a, b, c = banyak koin Rp200, Rp500, Rp1.000. Maka $a + b + c = 15$, $200a + 500b + 1.000c = 8.300$, dan $a = c$. Substitusi $c = a$: $2a + b = 15$ dan $1.200a + 500b = 8.300$, atau $12a + 5b = 83$. Dari $b = 15 - 2a$: $12a + 75 - 10a = 83 \Rightarrow a = 4$. Jadi ada 4 koin Rp200, 7 koin Rp500, dan 4 koin Rp1.000. Cek: $800 + 3.500 + 4.000 = 8.300$.

✓ Kesimpulan

Tuliskan langkah-langkah menyelesaikan teka-teki koin dengan metode eliminasi dan metode grafik. Jelaskan juga ciri teka-teki yang punya tepat satu jawaban, yang tidak punya jawaban, dan yang punya banyak jawaban.

💡 Refleksi

- Saat strategi tukar koin berhasil, aku merasa ... karena ...
- Membuat teka-teki sendiri ternyata lebih ... daripada memecahkannya, sebab ...

- Masalah di sekitarku yang bisa diselesaikan dengan dua persamaan adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya koin? Buka Lab Mini "Kandang Ancil: peluit ajaib" di Bab 10 (subbab 10.3). Gagasannya sama dengan strategi tukar koin: anggap semuanya jenis yang paling kecil dulu, lalu hitung kelebihanannya. Lanjutkan dengan Lab Mini "Mesin eliminasi: model batang" (subbab 10.4) untuk melihat satu variabel lenyap. Pada Grafik Hidup "Dua garis, tiga nasib" (subbab 10.5), atur $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 9$ dan $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $c_2 = 12$ (persamaan nilai dibagi 500) untuk melihat titik potong (6, 3). Ubah garis kedua menjadi $a_2 = 1$, $b_2 = 1$ dengan $c_2 = 9$ atau $c_2 \neq 9$ untuk melihat teka-teki dengan banyak jawaban atau tanpa jawaban.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b10-3

Contoh data teka-teki Kakek (tebakan dimulai dari semua koin Rp500)

Tebakan ke-	Koin Rp500 (x)	Koin Rp1.000 (y)	Banyak koin x + y	Nilai total (Rp)	Selisih dengan Rp6.000
1	9	0	9	4.500	-1.500
2	8	1	9	5.000	-1.000
3	7	2	9	5.500	-500
4	6	3	9	6.000	0
5	5	4	9	6.500	+500

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Tabel tebakan dan ketelitian hitung	Tabel lengkap dan benar; pola "+Rp500 setiap tukaran" ditemukan dan dipakai untuk melompat langsung ke jawaban.	Tabel benar, pola disebut tetapi belum dipakai.	Ada beberapa kesalahan hitung nilai atau selisih.	Tabel hampir kosong.
Menyusun dan menyelesaikan SPLDV	Sistem disusun tepat dan diselesaikan dengan grafik, substitusi, dan eliminasi dengan hasil yang sama.	Dua metode benar, satu metode belum tuntas.	Sistem benar tetapi penyelesaiannya banyak salah, atau sistemnya keliru.	Belum menyusun sistem.
Merancang dan menafsirkan teka-teki	Teka-teki buatan sendiri dapat dipecahkan; mampu menjelaskan teka-teki mustahil (jawaban negatif) dan teka-teki dengan banyak jawaban (garis berimpit).	Teka-teki buatan sendiri benar, tafsiran kasus khusus kurang lengkap.	Teka-teki buatan sendiri tidak konsisten dengan isi amplop.	Belum membuat teka-teki.
Kerja sama dan komunikasi	Semua anggota berperan; strategi dijelaskan kepada kelompok lain dengan istilah persamaan, eliminasi, dan titik potong.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Jika tidak semua siswa membawa koin, siapkan koin mainan dari tutup botol dua warna atau potongan kertas bertuliskan Rp500 dan Rp1.000. Periksa kartu petunjuk sebelum ditukar agar banyak koin dan nilai totalnya cocok dengan isi amplop. Kelompok yang cepat dapat membuat teka-teki tiga jenis koin (SPLTV) atau mengganti koin dengan ayam dan kambing (kepala dan kaki). Siswa yang kesulitan boleh tetap memakai tabel tukar koin dan menulis persamaannya di akhir.

Mathpedia · LKPD Bab 10 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Ubin Aljabar Kertas: Menyusun Sawah, Menambal Pojok

Bab 11 • Persamaan Kuadrat

Eksplorasi kelompok dengan manipulatif (penemuan terbimbing)

SMP kelas IX – SMA kelas X

2 x 40 menit

Model: Discovery learning: susun – amati – temukan pola – rumuskan (dari benda konkret ke gambar ke simbol)

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menyusun ubin x^2 , x , dan 1 menjadi persegi panjang, lalu menemukan bahwa $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ tepat ketika $m + n = b$ dan $mn = c$.
- Peserta didik dapat melengkapi kuadrat dengan menambal pojok persegi dan menuliskan $x^2 + bx + c$ dalam bentuk $(x + p)^2 + q$.
- Peserta didik dapat menyelesaikan persamaan kuadrat dengan dua cara (pemfaktoran dan melengkapi kuadrat) dan menjelaskan mengapa ada persamaan kuadrat yang tidak punya akar real.

Cerita pemantik



Pak Darto punya sepetak sawah berbentuk persegi dan beberapa petak sempit di sampingnya. Ia ingin menyatukan semuanya menjadi satu sawah persegi panjang tanpa sisa. Di rumah, Ayu dan Dimas meniru masalah itu dengan potongan kertas: satu persegi besar yang sisinya belum diketahui (x), beberapa batang panjang x selebar 1 satuan, dan ubin kecil 1×1 . Kak Lintang tersenyum: "Ada aturan rahasia kapan potongan-potongan ini bisa menjadi persegi panjang. Kalau tidak bisa, kalian tinggal menambal pojoknya." Ancil sudah memegang gunting. Ayo temukan aturan rahasia itu!

? Rumusan masalah

Kapan ubin $x^2 + bx + c$ dapat disusun menjadi persegi panjang, dan berapa ubin yang dibutuhkan untuk menambal pojoknya agar menjadi persegi sempurna?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Karton atau kertas manila, 2 lembar A4 berbeda warna per kelompok (boleh kertas berpetak yang ditempel pada kardus bekas)
- Penggaris 30 cm, pensil, dan spidol
- Gunting, 1-2 buah per kelompok
- Amplop atau plastik klip untuk menyimpan ubin
- Kalkulator atau HP (untuk pertanyaan terakhir)

! Keselamatan

Menggunting dilakukan sambil duduk dengan ujung gunting mengarah menjauhi badan dan teman; serahkan gunting dengan pegangan lebih dulu. Kumpulkan potongan kertas kecil ke kantong sampah agar lantai tidak licin, dan simpan ubin di amplop supaya tidak tercecer.

Langkah kerja

1. Buat ubin: gunting 1 persegi $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ (ubin x^2), 8 batang $7\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ (ubin x), dan 20 persegi kecil $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ (ubin 1). Beri label. Panjang 7 cm sengaja bukan kelipatan 2 cm , sehingga x tidak bisa diganti dengan ubin satuan.
2. Tulis dugaanmu: ekspresi $x^2 + bx + c$ dapat disusun menjadi persegi panjang jika ...
3. Bagian A (pabrik persegi panjang). Ambil ubin untuk $x^2 + 6x + 8$: 1 ubin x^2 , 6 batang, dan 8 ubin satuan. Susun semuanya menjadi satu persegi panjang utuh tanpa celah, tanpa tumpang tindih, dan tanpa sisa. Batang harus menempel sejajar sisi ubin x^2 .
4. Baca ukuran persegi panjangmu sebagai $(x + m)$ kali $(x + n)$, lalu catat $m + n$ dan $m \times n$ di tabel.
5. Ulangi untuk setiap ekspresi di tabel. Jika setelah mencoba beberapa susunan tetap tidak bisa, tulis "tidak bisa" dan sebutkan susunan yang sudah dicoba.
6. Bagian B (tambal pojok). Letakkan lagi ubin x^2 dan bagi b batang sama banyak: separuh di sisi kanan, separuh di sisi bawah. Terbentuk persegi yang pojok kanan-bawahnya bolong. Hitung ubin satuan yang dibutuhkan untuk menambal pojok itu.
7. Isi pojok dengan c ubin satuan milikmu. Jika masih ada lubang, kamu kekurangan; jika ada ubin yang tidak muat, kamu kelebihan. Tulis hasilnya sebagai $(x + p)^2 + q$, dengan q negatif bila kekurangan.
8. Bandingkan hasil Bagian A dan Bagian B, lalu jawab pertanyaan analisis.

Tabel pengamatan ubin aljabar

Ekspresi	b	c	Persegi panjang $(x + m)(x + n)$	$m + n$	$m \times n$	Ubin penambal pojok	Bentuk $(x + p)^2 + q$
$x^2 + 6x + 8$							
$x^2 + 4x + 3$							
$x^2 + 6x + 9$							
$x^2 + 8x + 12$							
$x^2 + 8x + 15$							
$x^2 + 4x + 7$							

null

Analisis

1. Bandingkan kolom $m + n$ dan $m \times n$ dengan b dan c . Aturan rahasia apa yang kamu temukan? Apakah dugaanmu benar?

Kunci: Persegi panjang terbentuk tepat ketika ada pasangan bilangan bulat m, n dengan $m + n = b$ dan $mn = c$; hasilnya $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$. Alasannya: m batang menempel di satu sisi ubin x^2 , n batang di sisi lain, dan ubin satuan mengisi pojok berukuran $m \times n$.

2. Mengapa $x^2 + 4x + 7$ tidak bisa disusun menjadi persegi panjang? Jelaskan dengan aturan dari pertanyaan 1.

Kunci: Pasangan faktor 7 hanya 1×7 , yang jumlahnya 8. Tidak ada pasangan bilangan bulat dengan hasil kali 7 dan jumlah 4, sehingga 4 batang dan 7 ubin satuan tidak bisa membentuk pojok persegi panjang.

3. Selesaikan $x^2 + 6x + 8 = 0$ dengan dua cara: (a) dari bentuk faktor dan sifat perkalian nol, (b) dari bentuk $(x + 3)^2 - 1 = 0$. Apakah hasilnya sama?

Kunci: (a) $(x + 2)(x + 4) = 0$, sehingga $x = -2$ atau $x = -4$. (b) $(x + 3)^2 = 1$, jadi $x + 3 = 1$ atau $x + 3 = -1$, sehingga $x = -2$ atau $x = -4$. Hasilnya sama.

4. Banyak ubin penambal pojok selalu $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Jelaskan alasannya dari susunan ubinmu, lalu tunjukkan bahwa $q = c - \frac{b^2}{4}$.

Kunci: Batang dibagi dua sama banyak, jadi tiap sisi mendapat $\frac{b}{2}$ batang dan pojok yang bolong berukuran $\frac{b}{2} \times \frac{b}{2}$, yaitu $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ubin. Susunan lengkapnya persegi $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$, padahal ubin satuan kita hanya c . Jadi $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$, sehingga $p = \frac{b}{2}$ dan $q = c - \frac{b^2}{4}$.

5. Untuk $x^2 + 4x + 7$ kamu mendapat $(x + 2)^2 + 3$. Mengapa persamaan $x^2 + 4x + 7 = 0$ tidak punya penyelesaian real? Hubungkan tanda q dengan diskriminan $D = b^2 - 4c$.

Kunci: $(x + 2)^2 \geq 0$ untuk setiap bilangan real x , jadi $(x + 2)^2 + 3 \geq 3$ dan tidak pernah nol. Karena $q = c - \frac{b^2}{4} = -\frac{D}{4}$: ubin berlebih ($q > 0$) berarti $D < 0$, tidak ada akar real; pas ($q = 0$) berarti $D = 0$, akar kembar; kurang ($q < 0$) berarti $D > 0$, dua akar real. Untuk $x^2 + 4x + 7$: $D = 16 - 28 = -12$ dan $q = 3 = \frac{12}{4}$.

6. Sawah Pak Darto berbentuk persegi panjang; panjangnya 6 m lebih dari lebarnya dan luasnya 40 m^2 . Dengan ubin atau gambar, susun $x^2 + 6x = 40$, tambal pojoknya, lalu tentukan ukuran sawah.

Kunci: Lebar x , panjang $x + 6$: $x(x + 6) = 40$, yaitu $x^2 + 6x = 40$. Tiga batang di kanan, tiga di bawah, pojok butuh 9 ubin: $(x + 3)^2 = 49$, jadi $x + 3 = 7$ (panjang sisi tidak mungkin negatif) dan $x = 4$. Sawah berukuran $4 \text{ m} \times 10 \text{ m}$; periksa: $4 \times 10 = 40 \checkmark$.

7. Tantangan: lakukan langkah tambal pojok untuk $x^2 + bx + c = 0$ secara umum dan tunjukkan bahwa $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$. Periksa rumusmu dengan $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Kunci: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c \Rightarrow x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$. Untuk $b = 8, c = 15$: $x = -4 \pm \sqrt{16 - 15} = -4 \pm 1$, yaitu -3 atau -5 , cocok dengan $(x + 3)(x + 5) = 0$. Inilah rumus abc untuk $a = 1$ (subbab 11.4).

✓ Kesimpulan

Tuliskan (1) aturan kapan $x^2 + bx + c$ dapat difaktorkan, (2) langkah melengkapi kuadrat dalam kata-kata dan simbol, dan (3) cara meramal ada atau tidaknya akar real dari ubin yang kurang atau berlebih.

💡 Refleksi

- Saat ubin tidak mau menjadi persegi panjang, perasaanku ... dan yang akhirnya membantuku adalah ...
- Ubin membuatku memahami bahwa

(

$\frac{b}{2}$

)

itu ...

- Lain kali bertemu persamaan kuadrat, cara yang akan kucoba lebih dulu adalah ... karena ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak sempat menggunting? Untuk Bagian A, buka Lab Mini "Pabrik persegi panjang: cari jodoh bilangan" di Bab 11 (subbab 11.2): pilih pasangan faktor dan lihat ubin tersusun menjadi $(x + m)(x + n)$. Untuk Bagian B, pakai Lab Mini "Ubin aljabar: tambal pojok yang hilang" (subbab 11.3): atur b dan c pada $x^2 + bx = c$, tekan ► Jalankan, dan amati pojok yang ditambal. Periksa pertanyaan 5 dengan Grafik Hidup "Akar = titik potong dengan sumbu- x " (subbab 11.5): atur $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$ dan lihat parabola yang tidak menyentuh sumbu- x .
Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b11-3

Contoh hasil kelompok (semua susunan diperiksa dengan perkalian)

Ekspresi	b	c	Persegi panjang $(x + m)(x + n)$	$m + n$	$m \times n$	Ubin penambal pojok	Bentuk $(x + p)^2 + q$
$x^2 + 6x + 8$	6	8	$(x + 2)(x + 4)$	6	8	9	$(x + 3)^2 - 1$
$x^2 + 4x + 3$	4	3	$(x + 1)(x + 3)$	4	3	4	$(x + 2)^2 - 1$
$x^2 + 6x + 9$	6	9	$(x + 3)(x + 3)$ (persegi)	6	9	9	$(x + 3)^2$
$x^2 + 8x + 12$	8	12	$(x + 2)(x + 6)$	8	12	16	$(x + 4)^2 - 4$
$x^2 + 8x + 15$	8	15	$(x + 3)(x + 5)$	8	15	16	$(x + 4)^2 - 1$
$x^2 + 4x + 7$	4	7	tidak bisa	-	-	4	$(x + 2)^2 + 3$

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Membuat & menyusun ubin	Ubin berukuran tepat; semua susunan rapi tanpa celah, tumpang tindih, atau sisa.	Ubin cukup tepat; ada satu susunan yang perlu dibantu.	Beberapa susunan salah atau ubin tidak sesuai ukuran.	Ubin belum dibuat atau belum disusun.
Tabel & perhitungan	Semua kolom benar, termasuk bentuk $(x + p)^2 + q$ dengan tanda q yang tepat.	Ada 1–2 kesalahan kecil.	Banyak kolom kosong atau salah.	Tabel hampir kosong.
Penemuan pola & penalaran	Menemukan aturan $m + n = b$, $mn = c$, menjelaskan $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, dan mengaitkan tanda q dengan diskriminan.	Menemukan kedua pola dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan atau ada miskonsepsi (mis. $m \times n = b$).	Belum menemukan pola.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota berperan; kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Agar menggunting tidak menyita waktu (± 10 menit), cetak pola ubin di kertas berpetak atau siapkan satu set contoh. Tekankan bahwa batang x tidak boleh dipotong dan bahwa ubin memodelkan ekspresi sebagai luas (dengan x positif); akar persamaan diperoleh secara aljabar dan boleh negatif. Untuk siswa yang kesulitan, mulai dari $x^2 + 4x + 3$ dan $x^2 + 6x + 9$. Kelompok yang cepat dapat memakai ubin negatif (warna lain) untuk $x^2 - 5x + 6$, atau mencoba b ganjil yang memaksa batang dibelah dua sehingga muncul pecahan $\frac{b}{2}$.

Mathpedia · LKPD Bab 11 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Kandang Ayam Pak RT: Berburu Luas Terbesar dengan Benang 24 Petak

Bab 12 • Fungsi Kuadrat & Parabola

Eksplorasi kelompok dan pemodelan data (penemuan terbimbing)

SMA kelas X (juga pengayaan SMP kelas IX)

2 x 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing: coba – catat – grafikkan – modelkan – optimalkan

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengumpulkan data luas kandang untuk berbagai lebar dan menemukan bahwa titik-titiknya membentuk parabola yang simetris.
- Peserta didik dapat menyusun fungsi luas $L(x) = x(24 - 2x)$, mengubahnya ke bentuk puncak, dan menentukan lebar yang memberi luas maksimum.
- Peserta didik dapat memakai selisih kedua yang tetap untuk mengenali pola kuadrat dan menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dengan membaca grafik.

Cerita pemantik



Pak RT ingin membuat kandang ayam di samping tembok pos ronda. Ia hanya punya 24 m kawat ram untuk tiga sisi, karena sisi keempat memakai tembok. Dimas langsung mengusulkan, "Bikin persegi saja, Pak, 8 m x 8 m! Persegi kan selalu paling luas." Ayu ragu: "Kalau lebarnya 6 m, sisi depannya jadi 12 m. Jangan-jangan lebih luas?" Kak Lintang membagikan seutas benang 24 petak dan selembar kertas berpetak kepada tiap kelompok: "Jangan berdebat, mari kita uji!" Ancil langsung menyiapkan tabel.

Rumusan masalah

Bagaimana luas kandang berubah ketika lebarnya diubah, dan lebar berapa yang menghasilkan luas terbesar jika panjang pagar tetap 24 m?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Lebar kandang x (sisi yang tegak lurus tembok)	Luas kandang L	Panjang pagar tetap 24 m (24 petak), tembok sebagai sisi keempat, semua sudut siku-siku

Alat dan bahan

- Kertas berpetak 1 cm, 2 lembar per kelompok (1 petak mewakili 1 m)
- Benang kasur atau tali rafia sepanjang 24 cm yang diberi tanda tiap 1 cm (sisakan ± 5 cm di tiap ujung sebagai pegangan)
- Penggaris 30 cm sebagai "tembok", ditempel di tepi kertas dengan selotip kertas
- Pensil warna, pensil, dan selotip kertas
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Potong benang dengan gunting secara hati-hati dan jangan melilitkan benang di jari atau leher. Jika mencoba versi lapangan dengan 24 m tali rafia di sepanjang tembok sekolah, berjalanlah pelan, jangan menarik tali saat ada teman yang melintas, dan gulung kembali tali agar tidak membuat orang tersandung.

Langkah kerja

1. Tempel penggaris di tepi kertas berpetak sebagai tembok. Satu petak mewakili 1 m.
2. Bentuk benang 24 petak menjadi tiga sisi kandang: naik x petak dari tembok, mendatar $24 - 2x$ petak, lalu turun x petak kembali ke tembok. Ikuti garis petak dan tahan pojoknya dengan selotip.
3. Mulai dengan $x = 1$. Hitung petak di dalam kandang (luasnya), arsir tipis dengan pensil warna, dan tulis luasnya di tabel.
4. Ulangi untuk $x = 2, 3, \dots, 11$. Bagi tugas: tiap anggota mengerjakan beberapa lebar, lalu saling memeriksa dengan perkalian lebar $\times$ sisi depan.
5. Hitung selisih pertama $\Delta L = L(x) - L(x - 1)$, lalu selisih kedua, yaitu selisih dua ΔL yang berurutan.
6. Gambar titik (x, L) pada kertas berpetak kedua dan hubungkan dengan kurva mulus. Tandai titik tertinggi dan garis simetrinya.
7. Uji dugaan Dimas: bentuk kandang 8×8 (lebar 8, sisi depan 8). Bandingkan luasnya dengan luas terbesar di tabel.

Tabel data kandang (1 petak = 1 m)

Lebar x (m)	Sisi depan $24 - 2x$ (m)	Luas L (m^2)	Selisih pertama ΔL	Selisih kedua
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

Grafik

Gambar diagram titik (x, L) dengan sumbu mendatar lebar x (0 sampai 12) dan sumbu tegak luas L (0 sampai 80). Tambahkan titik $(0, 0)$ dan $(12, 0)$, hubungkan semua titik dengan kurva mulus, lalu gambar garis putus-putus $L = 64$ untuk pertanyaan 5.

Analisis

1. Lebar berapa yang memberi luas terbesar, dan berapa luasnya? Apakah dugaan Dimas (persegi 8×8) benar?

Kunci: Lebar 6 m (sisi depan 12 m) memberi luas terbesar, 72 m^2 . Persegi 8×8 hanya 64 m^2 , jadi dugaan Dimas keliru: dengan tembok, kandang terbaik sisi depannya dua kali lebarnya.

2. Cari pasangan lebar yang luasnya sama (misalnya $x = 2$ dan $x = 10$). Di mana garis simetri grafismu? Hubungkan dengan dua lebar yang membuat luasnya nol.

Kunci: $L(1) = L(11) = 22$, $L(2) = L(10) = 40$, $L(3) = L(9) = 54$, $L(4) = L(8) = 64$, $L(5) = L(7) = 70$. Garis simetrinya $x = 6$, tepat di tengah $x = 0$ dan $x = 12$, yaitu dua lebar yang membuat luas nol (akar-akar $L(x) = 0$).

3. Selisih kedua di tabelmu selalu sama. Berapa nilainya? Tunjukkan bahwa $L(x) = x(24 - 2x)$, tuliskan dalam bentuk umum $ax^2 + bx + c$, dan bandingkan a dengan selisih kedua.

Kunci: Selisih kedua selalu -4 . $L(x) = x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x$, jadi $a = -2$, $b = 24$, $c = 0$. Selisih kedua sama dengan $2a = -4$; tanda negatif berarti parabola terbuka ke bawah sehingga punya titik tertinggi.

4. Ubah $L(x)$ ke bentuk puncak $a(x - h)^2 + k$ dengan melengkapkan kuadrat, lalu periksa dengan $x_p = -\frac{b}{2a}$. Mengapa bentuk puncak langsung menunjukkan luas maksimum?

Kunci: $L(x) = -2(x^2 - 12x) = -2[(x - 6)^2 - 36] = -2(x - 6)^2 + 72$. Cek: $x_p = -\frac{24}{2(-2)} = 6$ dan $L(6) = 72$. Karena $-2(x - 6)^2 \leq 0$, luas tidak pernah melebihi 72 dan tepat 72 hanya ketika $x = 6$.

5. Pak RT ingin luas kandang paling sedikit 64 m^2 . Tuliskan pertidaksamaannya, selesaikan, dan cocokkan dengan bagian grafik yang berada di atas garis $L = 64$.

Kunci: $-2x^2 + 24x \geq 64 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 8) \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8$. Pada grafik, bagian parabola dari $x = 4$ sampai $x = 8$ berada di atas atau tepat pada garis $L = 64$.

6. Seandainya tidak ada tembok sehingga 24 m kawat dipakai untuk keempat sisi, berapa luas terbesar dan bagaimana bentuk kandangnya? Mengapa tembok membuat kandang jauh lebih luas?

Kunci: Dengan keliling 24 m: lebar x , panjang $12 - x$, $L = x(12 - x) = -(x - 6)^2 + 36$. Luas terbesar 36 m^2 (persegi 6×6). Tembok memberi satu sisi "gratis", sehingga 24 m kawat cukup untuk 72 m^2 , dua kali lipat.

7. Generalisasi: jika panjang kawat P meter dan satu sisi memakai tembok, tentukan lebar terbaik dan luas maksimumnya dalam P . Periksa dengan $P = 24$.

Kunci: $L(x) = x(P - 2x) = -2x^2 + Px$, sehingga $x_p = \frac{P}{4}$, sisi depan $\frac{P}{2}$, dan luas maksimum $\frac{P}{4} \cdot \frac{P}{2} = \frac{P^2}{8}$. Untuk $P = 24$: lebar 6 m dan luas $\frac{576}{8} = 72 \text{ m}^2 \checkmark$.

Kesimpulan

Tuliskan fungsi luas kandang, bentuk grafiknya, titik puncak beserta artinya, dan aturan umum memilih ukuran kandang terbaik bila satu sisinya tembok.

Refleksi

- Hal yang paling mengejutkan dari data kandang adalah ...
- Grafik membantuku melihat ... yang tidak terlihat dari tabel saja.

- Masalah lain di sekitarku yang mencari nilai terbesar atau terkecil adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Buka Lab Mini "Kandang ayam Pak RT: cari luas terbesar" di Bab 12 (subbab 12.5). Atur panjang kawat 24 m, lalu geser slider lebar (atau seret pojok kandang) untuk setiap x di tabel; setiap ukuran muncul sebagai titik di grafik kanan. Tekan ► Jalankan untuk menyapu semua ukuran, matikan "Menempel tembok" untuk pertanyaan 6, dan ubah panjang kawat untuk pertanyaan 7. Latih cara membaca pertidaksamaan dari grafik dengan Grafik Hidup "Hijau di atas, merah di bawah" (subbab 12.6).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b12-5

Contoh data (luas dihitung dari petak, diperiksa dengan perkalian)

Lebar x (m)	Sisi depan $24 - 2x$ (m)	Luas L (m^2)	Selisih pertama ΔL	Selisih kedua
1	22	22	—	—
2	20	40	18	—
3	18	54	14	-4
4	16	64	10	-4
5	14	70	6	-4
6	12	72	2	-4
7	10	70	-2	-4
8	8	64	-6	-4
9	6	54	-10	-4
10	4	40	-14	-4
11	2	22	-18	-4

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Membentuk kandang & menghitung luas	Semua kandang memakai tepat 24 petak pagar, sudutnya siku-siku, dan luasnya benar.	Satu atau dua luas keliru tetapi segera diperbaiki.	Beberapa kandang tidak memakai 24 petak atau luasnya salah.	Data belum dapat dipakai.
Tabel, selisih & grafik	Tabel lengkap, selisih kedua benar, grafik rapi dengan puncak dan sumbu simetri.	Tabel dan grafik hampir lengkap dengan 1-2 kekeliruan kecil.	Selisih atau grafik banyak yang salah.	Tabel atau grafik hampir kosong.
Pemodelan & penalaran	Menyusun $L(x)$, bentuk puncak, dan pertidaksamaan dengan benar serta menjelaskan mengapa 6 m terbaik.	Model benar, penjelasan sebagian kurang lengkap.	Menemukan luas terbesar dari tabel tanpa model aljabar.	Belum dapat menentukan luas terbesar.
Kerja sama & komunikasi	Tugas terbagi adil; argumen terhadap dugaan Dimas disampaikan dengan data.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Benang lebih mudah dibentuk bila kedua ujungnya ditempel selotip pada penggaris "tembok". Bagi lebar 1–11 di antara anggota agar data terkumpul dalam ± 15 menit. Versi lapangan dengan 24 m tali rafia di sepanjang tembok kelas memberi pengalaman nyata. Kelompok yang cepat dapat mencoba lebar pecahan (5,5 m dan 6,5 m sama-sama memberi 71,5 m²) untuk meyakinkan diri bahwa 6 m benar-benar puncaknya, atau kandang bersekat di tengah (pagar $3x + y = 24$). Waspada! miskonsepsi "persegi selalu paling luas": itu benar hanya bila keempat sisi dipagari.

Lipat Cermin $y = x$: Menemukan Mesin Mundur dengan Selebar Kertas

Bab 13 • Fungsi: Komposisi, Invers & Transformasi

Eksplorasi kelompok: menggambar, melipat, dan mengukur (penemuan terbimbing)

SMA kelas X–XI

2 x 45 menit

Model: Discovery learning: gambar – lipat – amati – rumuskan – uji

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menemukan bahwa melipat bidang Kartesius sepanjang garis $y = x$ menukar koordinat setiap titik (a, b) menjadi (b, a) .
- Peserta didik dapat menyusun rumus fungsi invers dari titik-titik bayangan dan memeriksanya dengan komposisi $f(f^{-1}(x)) = x$.
- Peserta didik dapat menjelaskan dengan uji garis mengapa $y = x^2$ tidak punya invers pada seluruh bilangan real dan bagaimana membatasi domainnya.

Cerita pemantik



Di lomba tujuh belasan, Kak Lintang menjaga pos "Mesin Ajaib": setiap angka yang dimasukkan dikali 2, lalu ditambah 1. Ancil hanya melihat mesin mengeluarkan angka 9 dan bertanya, "Tadi angka berapa yang dimasukkan?" Dimas menebak-nebak, sedangkan Ayu berseru, "Jalankan mesinnya mundur!" Kak Lintang tertawa sambil mengambil selebar kertas berpetak: "Grafik mesin mundur bisa kalian dapatkan hanya dengan satu lipatan. Tapi hati-hati, ada mesin yang tidak bisa dimundurkan."

Rumusan masalah

Apa yang terjadi pada koordinat titik-titik sebuah grafik ketika kertas dilipat sepanjang garis $y = x$, dan apakah bayangannya selalu merupakan grafik sebuah fungsi?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Kertas berpetak 1 cm yang cukup tipis (atau HVS 70 gram yang diberi petak), 2 lembar per kelompok
- Penggaris 30 cm, pensil, dan pulpen dua warna
- Jarum pentul atau ujung jangka, dengan alas kardus bekas untuk menusuk
- Kaca jendela yang terang sebagai "meja cahaya" untuk menjiplak (opsional)
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Jarum pentul dan jangka itu tajam: tusuk kertas hanya di atas alas kardus yang diletakkan di meja, jangan menusuk sambil memegang kertas di telapak tangan, dan kembalikan jarum ke wadahnya setelah dipakai. Jangan bercanda dengan benda tajam. Bila menjiplak di jendela, jangan menekan atau bersandar pada kaca.

Langkah kerja

1. Gambar sumbu- x dan sumbu- y dari -3 sampai 10 dengan skala yang sama (1 petak = 1 satuan). Gambar garis $y = x$ sebagai garis putus-putus yang melewati pojok-pojok petak.
2. Mesin pertama $f(x) = 2x + 1$: hitung dan gambar titik A sampai E untuk $x = 0, 1, 2, 3, 4$ dengan pulpen warna pertama, lalu hubungkan dengan penggaris.
3. Mesin kedua $g(x) = x^2$: gambar titik F sampai J untuk $x = -2, -1, 0, 1, 2$ dan hubungkan dengan kurva mulus.
4. Lipat kertas tepat sepanjang garis $y = x$ sehingga sumbu- x menempa sumbu- y . Tekan lipatannya, lalu tusuk setiap titik dengan jarum di atas alas kardus (atau jiplak titiknya dengan bantuan cahaya jendela).
5. Buka lipatan. Lingkari setiap bekas tusukan dengan pulpen warna kedua, beri nama A' sampai J', baca koordinatnya, dan catat di tabel.
6. Ukur jarak setiap titik asli ke garis lipat dan jarak bayangannya ke garis lipat, tegak lurus terhadap garis, sampai ketelitian $0,1$ cm.
7. Hubungkan bayangan A'-E' dan bayangan F'-J'. Uji keduanya dengan garis tegak: adakah garis tegak yang memotong lebih dari sekali?

Tabel titik dan bayangannya (1 petak = 1 cm)

Titik (mesin)	Titik asli (x, y)	Bayangan (x', y')	Jarak titik asli ke lipatan (cm)	Jarak bayangan ke lipatan (cm)
A (f)				
B (f)				
C (f)				
D (f)				
E (f)				
F (g)				
G (g)				
H (g)				
I (g)				
J (g)				

Grafik

Pada kertas yang sama, hubungkan bayangan A'-E' (sebuah garis lurus) dan F'-J' (parabola yang "tidur"). Tandai dengan warna lain titik-titik yang tidak berpindah ketika kertas dilipat.

Analisis

1. Bandingkan koordinat setiap titik asli dengan bayangannya. Pola apa yang kamu temukan? Apakah dugaanmu benar?

Kunci: Setiap titik (a, b) berpindah menjadi (b, a) : koordinat x dan y bertukar tempat. Contoh: A(0, 1) menjadi A'(1, 0) dan F(-2, 4) menjadi F'(4, -2).

2. Titik-titik A' sampai E' terletak pada satu garis. Tentukan rumusnya, lalu jelaskan rumus itu sebagai "mesin mundur" dari $f(x) = 2x + 1$. Angka berapa yang dimasukkan jika mesin mengeluarkan 9?

Kunci: Bayangannya $(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3), (9, 4)$: setiap kali x naik 2, y naik 1, dan $y = 0$ saat $x = 1$. Jadi $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$: mesin mundur membatalkan langkah terakhir lebih dulu (kurangi 1), lalu langkah pertama (bagi 2). Untuk keluaran 9: $\frac{9-1}{2} = 4$.

3. Jarak titik asli dan bayangannya ke garis lipat selalu (hampir) sama. Apa artinya garis $y = x$ bagi ruas garis yang menghubungkan sebuah titik dengan bayangannya?

Kunci: Garis $y = x$ adalah sumbu cermin: ia tegak lurus ruas garis titik-bayangan dan membaginya sama panjang (garis sumbu ruas garis). Secara teori jaraknya $\frac{|y-x|}{\sqrt{2}}$; misalnya A dan A' masing-masing $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ cm, F dan F' masing-masing $\frac{6}{\sqrt{2}} \approx 4,2$ cm. Selisih 0,1 cm berasal dari galat ukur.

4. Periksa rumus pertanyaan 2 dengan komposisi: hitung $f(f^{-1}(7))$ dan $f^{-1}(f(3))$, lalu $(f \circ f^{-1})(x)$ secara umum.

Kunci: $f(f^{-1}(7)) = f(3) = 7$ dan $f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(7) = 3$. Secara umum $f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1 = x$: mesin maju setelah mesin mundur mengembalikan angka semula (fungsi identitas).

5. Apakah bayangan $F'-J'$ merupakan grafik fungsi? Lakukan uji garis tegak di $x = 1$ dan $x = 4$. Lalu jelaskan dengan uji garis mendatar pada grafik g mengapa $g(x) = x^2$ tidak bisa dibalik.

Kunci: Bukan. Garis tegak $x = 1$ memotong bayangan di $(1, 1)$ dan $(1, -1)$, dan $x = 4$ di $(4, 2)$ dan $(4, -2)$; satu masukan punya dua keluaran. Penyebabnya, garis mendatar $y = 1$ memotong grafik g di $x = -1$ dan $x = 1$ (g bukan fungsi satu-satu), sehingga mesin mundur tidak tahu harus mengeluarkan -1 atau 1 .

6. Bagaimana membatasi domain g agar inversnya ada? Tuliskan rumus inversnya beserta domain dan range-nya.

Kunci: Batasi domain g menjadi $x \geq 0$ (separuh kanan parabola). Inversnya $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ dengan domain $x \geq 0$ dan range $y \geq 0$. (Bisa juga domain $x \leq 0$ dengan invers $-\sqrt{x}$.)

7. Titik mana saja yang tidak berpindah ketika kertas dilipat? Cari titik potong garis f dengan garis $y = x$ secara aljabar (perpanjang garisnya bila perlu) dan periksa pada kertasmu.

Kunci: Titik yang terletak pada garis lipat tidak berpindah: untuk g , titik $H(0, 0)$ dan $I(1, 1)$. Untuk $f: 2x + 1 = x \Rightarrow x = -1$, jadi titik $(-1, -1)$; garis f dan f^{-1} berpotongan tepat di sana, pada garis $y = x$.

8. Konversi suhu memakai $F = 1,8C + 32$. Tentukan mesin mundurnya, lalu ubah $98,6^\circ\text{F}$ ke $^\circ\text{C}$.

Kunci: $C = \frac{F-32}{1,8}$ (kurangi 32 dulu, baru bagi 1,8). Untuk $98,6^\circ\text{F}$: $\frac{98,6-32}{1,8} = \frac{66,6}{1,8} = 37^\circ\text{C}$, suhu tubuh normal.

✓ Kesimpulan

Tuliskan dengan kata-kata dan simbol hubungan antara grafik sebuah fungsi dan grafik inversnya, cara mencari rumus invers, serta syarat sebuah fungsi agar mempunyai invers.

💡 Refleksi

- Saat membuka lipatan dan melihat bayangannya, aku menyadari bahwa ...
- Mesin mundur harus membatalkan langkah dengan urutan terbalik karena ...
- Contoh "mesin mundur" di kehidupanmu sehari-hari adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Buka Grafik Hidup "Cermin ajaib: grafik fungsi dan inversnya" di Bab 13 (subbab 13.3). Pilih f nomor 1 dengan $m = 2$ (itulah $f(x) = 2x + 1$), geser titik P ke $x = 0, 1, 2, 3, 4$, dan catat P serta bayangannya P'. Pilih nomor 4 ($x^2 - 2$ tanpa batasan) untuk melihat bayangan yang gagal menjadi fungsi, lalu nomor 3 ($x \geq 0$) untuk versi yang bisa dibalik. Uji garis tegak dan garis mendatar dengan Lab Mini "Senter domain & range: siapa yang lolos uji garis?" (subbab 13.1), dan latih kecepatan dengan Adu Cepat "Mesin mundur kilat" (subbab 13.3).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b13-3

Contoh data (jarak diukur dengan penggaris, ketelitian 0,1 cm)

Titik (mesin)	Titik asli (x, y)	Bayangan (x', y')	Jarak titik asli ke lipatan (cm)	Jarak bayangan ke lipatan (cm)
A (f)	(0, 1)	(1, 0)	0,7	0,7
B (f)	(1, 3)	(3, 1)	1,4	1,4
C (f)	(2, 5)	(5, 2)	2,1	2,1
D (f)	(3, 7)	(7, 3)	2,8	2,9
E (f)	(4, 9)	(9, 4)	3,5	3,5
F (g)	(-2, 4)	(4, -2)	4,2	4,3
G (g)	(-1, 1)	(1, -1)	1,4	1,4
H (g)	(0, 0)	(0, 0)	0,0	0,0
I (g)	(1, 1)	(1, 1)	0,0	0,0
J (g)	(2, 4)	(4, 2)	1,4	1,4

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Menggambar, melipat & mengukur	Semua titik tepat, lipatan tepat pada $y = x$, dan jarak diukur tegak lurus sampai 0,1 cm.	Sebagian besar tepat; ada satu titik atau ukuran yang meleset.	Lipatan miring atau banyak titik yang salah tempat.	Gambar dan bayangan belum dapat dipakai.
Tabel & rumus invers	Tabel lengkap, rumus f^{-1} benar dan diperiksa dengan komposisi.	Rumus benar, pemeriksaan kurang lengkap.	Tabel sebagian benar, rumus invers salah (mis. $\frac{1}{2x+1}$).	Tabel hampir kosong.
Penalaran (uji garis & domain)	Menjelaskan dengan uji garis mengapa x^2 tidak bisa dibalik dan membatasi domainnya dengan tepat.	Menjelaskan uji garis, tetapi pembatasan domain kurang tepat.	Menyebut "tidak bisa dibalik" tanpa alasan.	Belum dapat menjelaskan.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota berperan; temuan disampaikan jelas dengan istilah domain, range, dan invers.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Lipatan harus tepat melewati pojok-pojok petak pada garis $y = x$; minta siswa menimpakan sumbu- x pada sumbu- y sebelum menekan lipatan. Kertas HVS 70 gram cukup tembus cahaya untuk dijiplak di jendela. Tegaskan bahwa $f^{-1}(x)$ bukan $\frac{1}{f(x)}$. Kelompok yang cepat dapat melipat grafik $y = 2^x$ untuk "menemukan" grafik logaritma (jembatan ke Bab 14), atau grafik $y = \frac{1}{x}$ yang tidak berubah setelah dilipat karena inversnya adalah dirinya sendiri.

Koin yang Meluruh: Menemukan Waktu Paruh di Atas Meja

Bab 14 • Eksponen & Logaritma

Percobaan simulasi peluang dan analisis data kelompok

SMA kelas X

2 x 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing: duga – lempar – catat – modelkan dengan eksponen dan logaritma

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengumpulkan data peluruhan dari pelemparan 64 koin dan menemukan bahwa banyak koin yang tersisa berkurang dengan faktor pengali yang hampir tetap.
- Peserta didik dapat memodelkan data dengan $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ dan menjelaskan arti waktu paruh.
- Peserta didik dapat memakai logaritma untuk meluruskan grafik dan menghitung berapa lemparan sampai sisa koin turun di bawah batas tertentu.

Cerita pemantik



Ibu Ayu mendapat obat yang harus diminum lagi setiap 6 jam karena, kata dokter, kadarnya di dalam tubuh tinggal separuh. Ayu bingung: "Kalau separuhnya hilang dalam 6 jam, berarti habis dalam 12 jam, dong?" Dimas tidak yakin. Kak Lintang membawa sekantong uang logam: "Anggap setiap koin satu molekul obat atau satu atom radioaktif. Kalau koin jatuh dengan sisi Garuda di atas, ia meluruh dan keluar dari permainan. Tak ada yang tahu koin mana yang keluar berikutnya, tetapi lihat apa yang terjadi pada jumlahnya!" Ancil bertaruh semua koin habis dalam dua lemparan.

? Rumusan masalah

Bagaimana banyak koin yang tersisa berubah dari lemparan ke lemparan, dan berapa lemparan sampai koin tinggal separuh atau hampir habis?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak lemparan t	Banyak koin yang tersisa N	Banyak koin awal 64, cara mengocok dan menuang yang sama, aturan "sisi Garuda (atau X) di atas berarti meluruh"

Alat dan bahan

- 64 uang logam per kelompok (atau kepingan karton berdiameter ± 2 cm yang diberi tanda X pada satu sisi)
- Kotak bekas tertutup (misalnya kotak sepatu) untuk mengocok
- Nampan atau alas kain agar koin tidak menggelinding jauh
- Kertas berpetak 1 cm, penggaris, dan pensil untuk grafik
- Kalkulator ilmiah atau HP (untuk menghitung log)

Keselamatan

Koin dan kepingan kecil tidak boleh dimasukkan ke mulut. Kocok di dalam kotak tertutup dan tuang pelan ke nampan agar koin tidak berhamburan ke lantai dan membuat orang terpeleket. Hitung ulang koin di akhir kegiatan, kembalikan kepada pemiliknya, lalu cuci tangan setelah memegang uang logam.

Langkah kerja

1. Tulis dugaanmu: setelah 1, 2, dan 3 lemparan, kira-kira berapa koin yang tersisa? Kapan semua koin habis?
2. Masukkan 64 koin ke kotak, tutup, kocok 5 kali, lalu tuang pelan ke nampan. Ini lemparan ke-1.
3. Pisahkan koin yang sisi Garuda-nya (atau sisi X) di atas: koin itu meluruh. Hitung dan catat banyak koin yang meluruh dan yang tersisa.
4. Masukkan hanya koin yang tersisa ke kotak, lalu ulangi. Lanjutkan sampai semua koin meluruh atau sampai lemparan ke-8.
5. Hitung rasio $\frac{N(t)}{N(t-1)}$ untuk setiap lemparan dan nilai model $64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
6. Hitung $\log N$ dengan kalkulator untuk setiap data yang tidak nol.
7. Gabungkan data seluruh kelompok di papan tulis (jumlahkan sisa koin semua kelompok pada tiap lemparan) dan bandingkan rasionya dengan data kelompokmu.

Tabel peluruhan koin ($N_0 = 64$)

Lemparan ke- t	Meluruh pada lemparan ini	Sisa N (data)	Rasio $N(t) : N(t - 1)$	Model $64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$	$\log N$ (data)
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Grafik

Buat dua grafik pada kertas berpetak: (1) N terhadap t beserta kurva model $64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$; (2) $\log N$ terhadap t . Tarik garis lurus yang paling dekat dengan titik-titik pada grafik kedua dan hitung kemiringannya.

Analisis

1. Lihat kolom rasio. Kira-kira berapa bagian koin yang tersisa setiap lemparan? Apakah dugaan Ayu (habis setelah dua kali "separuh") dan taruhan Ancil terbukti?

Kunci: Rasio berkisar di sekitar 0,5 (pada contoh data 0,52; 0,52; 0,53; 0,56; ...): setiap lemparan kira-kira separuh koin tersisa, jadi pengalinya tetap, bukan pengurangnya. Dugaan "habis setelah dua kali separuh" keliru karena separuh dari separuh adalah seperempat, bukan nol. Taruhan Ancil juga kalah; pada contoh data koin baru habis pada lemparan ke-8.

2. Setelah berapa lemparan koin tinggal sekitar separuh? Seperempat? Seperdelapan? Apa arti "waktu paruh" dalam percobaan ini?

Kunci: Sekitar 32 koin setelah 1 lemparan, 16 setelah 2, dan 8 setelah 3 (contoh data: 33, 17, 9). Waktu paruh adalah waktu yang dibutuhkan agar sisanya tinggal separuh, di sini 1 lemparan; setiap waktu paruh berikutnya mengalikan sisa dengan $\frac{1}{2}$ lagi.

3. Data kelompokmu tidak tepat sama dengan model. Mengapa? Apa yang terjadi ketika data seluruh kelas digabung?

Kunci: Setiap koin acak, sehingga banyak yang meluruh pada satu lemparan bisa lebih atau kurang dari separuh, terutama saat koin tinggal sedikit. Makin banyak koin (data kelas digabung), makin dekat rasio ke 0,5 dan data ke model (hukum bilangan besar). Atom sungguhan jumlahnya sangat besar, sehingga peluruhannya sangat teratur.

4. Grafik N terhadap t melengkung, tetapi grafik $\log N$ terhadap t hampir lurus. Jelaskan dengan sifat logaritma mengapa demikian dan berapa kemiringan yang seharusnya.

Kunci: Dari $N = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$: $\log N = \log 64 + t \log \frac{1}{2} \approx 1,806 - 0,301t$, persamaan garis lurus dengan kemiringan $\log \frac{1}{2} \approx -0,301$. Logaritma mengubah perkalian berulang menjadi penjumlahan berulang. Pada contoh data, garis dari (0; 1,806) ke (4; 0,699) berkemiringan $\approx -0,28$, cukup dekat.

5. Gunakan logaritma: jika mulai dengan 1.000 koin, setelah berapa lemparan sisanya pertama kali kurang dari 10?

Kunci: $1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t < 10 \Leftrightarrow 2^t > 100 \Leftrightarrow t > \frac{\log 100}{\log 2} = \frac{2}{0,301} \approx 6,64$. Jadi setelah 7 lemparan (model: $\frac{1000}{128} \approx 7,8$ koin).

6. Pada dadu, "meluruh" berarti muncul mata 6, sehingga setiap lemparan tersisa sekitar $\frac{5}{6}$ bagian. Hitung waktu paruh dadu dengan logaritma. Lebih cepat atau lebih lambat daripada koin?

Kunci: $\left(\frac{5}{6}\right)^T = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \frac{\log 2}{\log 1,2} \approx \frac{0,301}{0,079} \approx 3,8$ lemparan. Dadu meluruh lebih lambat (waktu paruh hampir 4 lemparan) karena peluang meluruh tiap lemparan hanya $\frac{1}{6}$, bukan $\frac{1}{2}$.

7. Kembali ke obat ibu Ayu: dosis 400 mg dengan waktu paruh 6 jam. Berapa mg yang tersisa setelah 24 jam? Mengapa obatnya tidak habis setelah 12 jam?

Kunci: 24 jam = 4 waktu paruh: $400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 25$ mg. Setelah 12 jam masih tersisa $400 \cdot \frac{1}{4} = 100$ mg, bukan 0, karena setiap 6 jam yang hilang adalah separuh dari sisa saat itu, bukan separuh dosis awal.

✓ Kesimpulan

Tuliskan pola banyak koin yang tersisa dalam kata-kata dan dalam rumus $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$, jelaskan arti waktu paruh T , dan jelaskan peran logaritma untuk mencari waktu.

💡 Refleksi

- Dugaan awalku tentang kapan koin habis adalah ... dan ternyata ...
- Logaritma terasa berguna ketika ...
- Setelah kegiatan ini, caraku memandang aturan minum obat atau berita tentang zat radioaktif menjadi ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Buka Lab Mini "Atom-atom pelempar koin" di Bab 14 (subbab 14.2). Pilih 100 atom dan peluang 1/2, tekan ►► Satu putaran berulang kali, dan catat atom yang tersisa setelah setiap putaran untuk mengisi tabel (kolom model menjadi $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$). Ganti peluang menjadi 1/6 untuk pertanyaan 6 dan bandingkan dengan waktu paruh teori yang ditampilkan. Bentuk kurvanya dapat dicocokkan dengan Grafik Hidup "Keluarga fungsi eksponen $y = a \cdot b^x$ " (subbab 14.1) dengan $a = 1$ (seluruh atom) dan $b = 0,5$; latih hitungan sisa dengan Adu Cepat "Sisa setelah beberapa waktu paruh" (subbab 14.2).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b14-2

📊 Contoh data satu kelompok (uang logam Rp500)

Lemparan ke- t	Meluruh pada lemparan ini	Sisa N (data)	Rasio $N(t) : N(t - 1)$	Model $64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$	log N (data)
0	—	64	—	64	1,806
1	31	33	0,52	32	1,519
2	16	17	0,52	16	1,230
3	8	9	0,53	8	0,954
4	4	5	0,56	4	0,699
5	2	3	0,60	2	0,477
6	1	2	0,67	1	0,301
7	1	1	0,50	0,5	0,000
8	1	0	0,00	0,25	tak terdefinisi

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Pelaksanaan percobaan & pencatatan	Prosedur diikuti dengan konsisten, koin dihitung ulang, dan semua lemparan tercatat rapi.	Prosedur diikuti; ada satu pencatatan yang perlu diperbaiki.	Cara mengocok berubah-ubah atau data tidak lengkap.	Data belum dapat dipakai.
Perhitungan rasio, model & log	Semua rasio, nilai model, dan log benar dengan pembulatan yang wajar.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan atau kolom kosong.	Perhitungan hampir tidak ada.
Grafik & pemodelan	Kedua grafik benar; menjelaskan mengapa grafik log N lurus dan menafsirkan kemiringannya.	Grafik benar, penjelasan kemiringan kurang lengkap.	Hanya satu grafik atau skala tidak tepat.	Grafik belum dibuat.
Penalaran & komunikasi	Membedakan pertumbuhan linear dan eksponensial dengan tepat, memakai log untuk menghitung waktu, dan menjelaskan peran keacakan.	Penalaran sebagian besar tepat.	Masih menganggap "separuh" berarti berkurang tetap.	Belum dapat menarik kesimpulan.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Uang logam Rp500 atau Rp1.000 bekerja baik; tutup botol tidak cocok karena tidak seimbang (peluangnya bukan $\frac{1}{2}$), dan justru bisa menjadi bahan diskusi. Siapkan tabel gabungan kelas di papan tulis; dengan 6–8 kelompok (± 450 koin) rasionya biasanya sangat dekat 0,5. Kelompok yang cepat dapat mengulang dengan dadu (meluruh jika muncul mata 6) dan membaca waktu paruhnya dari grafik. Kaitkan dengan penanggalan karbon-14 (waktu paruh ± 5.730 tahun) dan subbab 14.4 tentang logaritma.

Bola Bekel yang Tak Pernah Berhenti? Menyelidiki Tinggi Pantulan

Bab 15 • Barisan & Deret

Percobaan pengukuran dan pemodelan data (kelompok)

SMA kelas X

2 x 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing: duga – ukur dengan video HP – uji pola – modelkan dengan deret geometri

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur tinggi pantulan bola dan menguji apakah barisan tingginya aritmetika (selisih tetap) atau geometri (rasio tetap).
- Peserta didik dapat memodelkan tinggi pantulan dengan $h_n = h_0 \cdot r^n$ dan memakai model itu untuk meramal pantulan berikutnya.
- Peserta didik dapat menghitung panjang lintasan total bola dengan notasi sigma dan jumlah deret geometri tak hingga, serta menjelaskan mengapa jumlah tak hingga banyak suku bisa bernilai terbatas.

Cerita pemantik



Saat istirahat, Ayu bermain bekel di teras kelas. Ancil memperhatikan bolanya: "Pantulannya makin rendah, tetapi tidak pernah benar-benar berhenti. Kalau bolanya memantul tak hingga kali, jarak tempuhnya pasti tak hingga juga!" Dimas tidak setuju: "Tingginya turun sama banyak setiap kali, jadi sebentar lagi pasti habis." Kak Lintang mengeluarkan meteran dan HP: "Ayo rekam dalam gerak lambat dan ukur. Biar data yang menentukan siapa yang benar."

Rumusan masalah

Bagaimana pola tinggi pantulan bola dari satu pantulan ke pantulan berikutnya, dan berapa panjang lintasan total bola sampai berhenti?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Urutan pantulan n (dan jenis bola pada percobaan lanjutan)	Tinggi puncak pantulan h_n	Tinggi jatuh awal $h_0 = 100$ cm, bola dilepas tanpa didorong, lantai yang sama, posisi kamera tetap

Alat dan bahan

- Bola bekel atau bola pingpong, 1-2 jenis per kelompok
- Meteran jahit atau meteran gulung 150 cm, ditempel tegak di dinding dengan selotip kertas
- HP dengan fitur video gerak lambat (slow motion) dan penyangga dari tumpukan buku
- Lantai keras dan rata (keramik atau semen) di dekat dinding
- Kalkulator atau HP, kertas berpetak, dan penggaris untuk grafik

Keselamatan

Jatuhkan bola sambil berdiri di lantai; jangan naik ke kursi atau meja. Pilih area yang tidak dilewati teman dan jauh dari jendela kaca, dan jangan melempar bola ke arah orang. Rekam video hanya untuk kegiatan ini dan jangan menyebarkan rekaman yang memperlihatkan wajah teman tanpa izin.

Langkah kerja

1. Tempel meteran tegak di dinding dengan angka 0 menyentuh lantai. Letakkan HP sekitar 2 m dari dinding, setinggi ± 50 cm, dan siapkan mode gerak lambat.
2. Tulis dugaanmu: apakah tinggi pantulan berkurang dengan selisih yang sama atau dengan perbandingan yang sama?
3. Pegang bola di depan meteran sehingga bagian bawahnya tepat di angka 100 cm. Lepaskan tanpa didorong dan rekam paling sedikit 5 pantulan.
4. Putar ulang video, hentikan di setiap puncak pantulan, dan baca tinggi bagian bawah bola (ketelitian 1 cm). Ulangi percobaan 3 kali dan pakai rata-ratanya.
5. Hitung selisih $h_{n-1} - h_n$ dan rasio $\frac{h_n}{h_{n-1}}$ untuk setiap pantulan.
6. Tentukan rasio rata-rata r , lalu hitung tinggi model $100 \cdot r^n$ dan lintasan naik-turun setiap pantulan, yaitu $2h_n$.
7. Gambar grafik h_n terhadap n dari data dan dari model. (Lanjutan: ulangi dengan jenis bola lain.)

Tabel tinggi pantulan ($h_0 = 100$ cm)

Pantulan ke- n	Tinggi puncak h_n (cm)	Selisih $h_{n-1} - h_n$ (cm)	Rasio $h_n :$ h_{n-1}	Model $100 \cdot r^n$ (cm)	Lintasan naik-turun $2h_n$ (cm)
0 (dilepas)					
1					
2					
3					
4					
5					

Grafik

Gambar titik (n, h_n) dari data dan kurva model $100 \cdot r^n$ pada sumbu yang sama. Pada grafik kedua, gambar jarak tempuh kumulatif S_n terhadap n beserta garis mendatar S_∞ dari pertanyaan 4.

Analisis

1. Bandingkan kolom selisih dan kolom rasio. Mana yang (hampir) tetap? Jadi, tinggi pantulan membentuk barisan aritmetika atau geometri? Apakah dugaanmu, dan dugaan Dimas, terbukti?

Kunci: Selisihnya terus mengecil (contoh data: 27, 21, 14, 11, 8 cm), sedangkan rasionya hampir tetap, sekitar 0,72. Jadi tinggi pantulan membentuk barisan geometri, bukan aritmetika, dan dugaan Dimas keliru. Ancil benar bahwa (dalam model) bola memantul tak hingga kali, tetapi lihat pertanyaan 5.

2. Tentukan rasio rata-rata r dan tuliskan $h_n = 100 \cdot r^n$. Ramalkan tinggi pantulan ke-8, lalu tentukan pantulan ke berapa yang pertama kali lebih rendah dari 1 cm.

Kunci: Rata-rata rasio $\approx 0,72$, jadi $h_n = 100 \cdot 0,72^n$. $h_8 = 100 \cdot 0,72^8 \approx 7,2$ cm. $100 \cdot 0,72^n < 1 \Leftrightarrow n > \frac{\log 0,01}{\log 0,72} \approx 14,02$, jadi pantulan ke-15 ($h_{14} \approx 1,01$ cm, $h_{15} \approx 0,72$ cm).

3. Dari datamu, hitung jarak tempuh bola sejak dilepas sampai menyentuh lantai lagi setelah pantulan ke-5.

Kunci: Jatuh 100 cm, lalu setiap pantulan naik dan turun: $100 + 2(73 + 52 + 38 + 27 + 19) = 100 + 2 \cdot 209 = 518$ cm.

4. Tulis lintasan total bola dengan notasi sigma, lalu hitung jumlahnya sampai tak hingga dengan $S_\infty = \frac{a}{1-r}$. Berapa sisa lintasan setelah pantulan ke-5?

Kunci: $S = 100 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 100 \cdot 0,72^n$. Deret di belakang tanda tambah adalah deret geometri dengan $a = 144$ dan $r = 0,72$: $\frac{144}{0,28} \approx 514,3$, sehingga $S \approx 614,3$ cm (sama dengan $\frac{100(1+r)}{1-r}$). Sisa setelah pantulan ke-5 menurut model: $\frac{2 \cdot 100 \cdot 0,72^6}{1 - 0,72} \approx 99,5$ cm (dari data: $614 - 518 \approx 96$ cm).

5. Ancil berkata pantulan tak hingga kali pasti menempuh jarak tak hingga. Jelaskan dengan deret geometri dan paradoks Zeno mengapa itu tidak benar. Kapan deret geometri tak hingga tidak punya jumlah?

Kunci: Jumlah parsial S_n terus bertambah, tetapi tambahannya mengecil secara geometri dan tidak pernah melewati ± 614 cm, karena $|r| < 1$ membuat deret konvergen. Sama seperti Zeno: tak hingga banyak langkah yang makin pendek dapat berjumlah terbatas, misalnya $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$. Deret geometri tak hingga tidak punya jumlah (divergen) jika $|r| \geq 1$.

6. Jika memakai bola lain dengan $r = 0,8$, berapa lintasan totalnya? Bagaimana pengaruh r terhadap lintasan total?

Kunci: $100 + \frac{2 \cdot 80}{1 - 0,8} = 100 + 800 = 900$ cm. Makin dekat r ke 1, makin panjang lintasannya, dan pertambahannya makin cepat karena faktor $\frac{1}{1-r}$ membesar tajam ($r = 0,72$: 614 cm; $r = 0,8$: 900 cm; $r = 0,9$: 1.900 cm).

7. Kenyataannya bola berhenti setelah belasan pantulan. Sebutkan dua hal yang tidak diperhitungkan model dan jelaskan apakah model tetap berguna.

Kunci: Model mengabaikan, misalnya, hambatan udara, energi yang berubah menjadi bunyi, panas, dan putaran yang tidak selalu sebanding, ukuran bola (pantulan di bawah ± 1 cm tidak teramati dan bola akhirnya hanya bergetar lalu diam), serta galat membaca video. Model tetap berguna karena meramal pantulan-pantulan awal dengan baik dan memberi batas lintasan total yang masuk akal.

✓ Kesimpulan

Tuliskan jenis barisan tinggi pantulan beserta rumusnya, rumus lintasan total dalam notasi sigma dan bentuk S_∞ , serta syarat sebuah deret geometri tak hingga mempunyai jumlah.

💡 Refleksi

- Saat melihat video gerak lambat, hal yang paling menarik bagiku adalah ...
- Aku sekarang yakin bahwa tak hingga banyak suku bisa berjumlah terbatas karena ...
- Pola "berkurang dengan rasio tetap" yang mungkin ada di sekitarku adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Buka Lab Mini "Bola yang memantul tanpa henti" di Bab 15 (subbab 15.5). Atur tinggi awal 1 m dan rasio pantul 0,70 atau 0,75 (yang paling dekat dengan rasiomu), tekan ► Jalankan, lalu catat tinggi setiap pantulan dan jarak tempuhnya untuk mengisi tabel; bandingkan dengan batas $\frac{h(1+r)}{1-r}$ yang ditampilkan. Lihat jumlah parsial merayap ke batasnya dengan Grafik Hidup "Jumlah parsial merayap ke batas" (subbab 15.5), dan bandingkan barisan aritmetika dengan geometri lewat Grafik Hidup "Lomba lari: aritmetika melawan geometri" (subbab 15.4).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b15-5

Contoh data bola bekel di lantai keramik (rata-rata 3 percobaan, $r \approx 0,72$)

Pantulan ke- n	Tinggi puncak h_n (cm)	Selisih $h_{n-1} - h_n$ (cm)	Rasio $h_n : h_{n-1}$	Model $100 \cdot r^n$ (cm)	Lintasan naik-turun $2h_n$ (cm)
0 (dilepas)	100	—	—	100	100 (turun saja)
1	73	27	0,73	72,0	146
2	52	21	0,71	51,8	104
3	38	14	0,73	37,3	76
4	27	11	0,71	26,9	54
5	19	8	0,70	19,3	38

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Pelaksanaan pengukuran	Bola dilepas tepat dari 100 cm tanpa didorong, video dibaca di puncak dengan hati-hati, dan percobaan diulang 3 kali.	Pengukuran cukup teliti, tetapi diulang kurang dari 3 kali.	Pembacaan tidak konsisten (bukan di puncak atau paralaks besar).	Data belum dapat dipakai.
Tabel & perhitungan	Selisih, rasio, model, dan lintasan dihitung benar dan rapi.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kolom salah atau kosong.	Tabel hampir kosong.
Pemodelan barisan & deret	Menyimpulkan barisan geometri dari data, menulis notasi sigma, dan menghitung S_∞ dengan benar.	Model benar, tetapi notasi sigma atau S_∞ kurang tepat.	Salah memilih jenis barisan atau lupa lintasan naik-turun (faktor 2).	Belum dapat membuat model.
Penalaran & komunikasi	Menjelaskan paradoks Zeno, syarat konvergen, dan keterbatasan model dengan jelas.	Penjelasan sebagian besar tepat.	Penjelasan hanya menyebut hasil hitungan.	Belum dapat menjelaskan.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Bola bekel dan bola pingpong di lantai keramik memberi rasio sekitar 0,6–0,85, sedangkan bola plastik yang kempis jauh lebih kecil. Pembacaan paling mudah bila meteran tepat di belakang lintasan bola dan kamera

sejajar dengan puncak pantulan (mengurangi paralaks). Tanpa fitur gerak lambat, rekam video biasa lalu maju per bingkai. Bagi peran: pelepas bola, perekam, pembaca, dan pencatat. Kelompok yang cepat dapat membandingkan beberapa jenis bola dalam satu grafik, atau menghitung waktu total pantulan yang juga deret geometri dengan rasio $\sqrt{r}$.

Mathpedia · LKPD Bab 15 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Pabrik Kotak Kue: Polinomial yang Bersembunyi di Selambar Kertas

Bab 16 • Polinomial

Eksplorasi kelompok (membuat model dan penemuan terbimbing)

SMA kelas XI (Matematika Tingkat Lanjut)

2 × 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing: buat model – ukur – modelkan dengan polinomial – analisis akar dan grafik

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat membuat kotak tanpa tutup dari kertas persegi, mengukurnya, dan menyatakan volumenya sebagai polinomial $V(x) = x(20 - 2x)^2$.
- Peserta didik dapat membaca tabel dan grafik volume untuk menaksir letak volume terbesar serta menjelaskan arti akar dan akar kembar.
- Peserta didik dapat memakai teorema faktor, metode Horner, dan rumus Vieta untuk menemukan dua ukuran kotak yang volumenya sama.
- Peserta didik dapat membedakan domain rumus dengan domain masalah nyata.

Cerita pemantik



Bu Sari, pemilik kantin sekolah, ingin membuat wadah kue lapis tanpa tutup dari kertas persegi 20 cm × 20 cm. Dimas memotong persegi 1 cm di setiap pojok lalu melipatnya: kotaknya ceper sekali. Ayu memotong 8 cm: kotaknya tinggi, tetapi alasnya sempit. "Pasti ada potongan yang paling lega!" seru Ancil. Kak Lintang tersenyum, "Volume kotak itu ternyata sebuah polinomial. Buatlah kotak-kotaknya, ukur, lalu biarkan polinomial itu bercerita: di mana puncaknya, kapan volumenya nol, dan adakah dua kotak berbeda yang isinya sama persis?"

Rumusan masalah

Bagaimana volume kotak V bergantung pada ukuran potongan pojok x , dan apa yang dapat diceritakan akar serta grafik polinomial $V(x)$ tentang kotak-kotak itu?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Ukuran sisi persegi yang dipotong di setiap pojok, x	Volume kotak V (cm^3)	Ukuran dan jenis kertas (20 cm × 20 cm), cara melipat, dan alat ukur yang sama

Alat dan bahan

- Kertas HVS 80 gram atau karton tipis yang dipotong persegi 20 cm × 20 cm, 8 lembar per kelompok
- Penggaris 30 cm, pensil, dan gunting (1 set per 2 anak)
- Selotip kertas 1 gulung per kelompok
- Kertas grafik 1 lembar dan kalkulator atau HP
- (Opsional) beras ±1 kg dan gelas ukur dapur 500 mL untuk memeriksa volume

Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati, arahkan ujungnya menjauhi teman, dan jangan berjalan sambil membawa gunting terbuka. Kumpulkan potongan pojok kertas ke tempat sampah. Bila memakai beras, bekerjalah di atas nampan dan kembalikan berasnya ke wadah.

Langkah kerja

1. Bagi tugas: setiap anggota membuat 2 kotak. Pada setiap pojok kertas, gambar persegi kecil bersisi $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, atau 8 cm (satu nilai x untuk satu kertas).
2. Gunting keempat persegi pojok, lipat keempat sisinya ke atas sepanjang garis, lalu rekatkan pojok-pojoknya dengan selotip sehingga menjadi kotak tanpa tutup.
3. Ukur sisi alas dan tinggi setiap kotak sampai ketelitian $0,1$ cm, lalu hitung V ukur = sisi² × tinggi. (Opsional: isi kotak dengan beras sampai rata, tuang ke gelas ukur, dan ingat $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$.)
4. Isi kolom rumus: sisi alas $20 - 2x$ dan volume $V(x) = x(20 - 2x)^2$.
5. Jajarkan ketujuh kotak dari yang paling ceper sampai yang paling tinggi. Tebak dulu mana yang paling lega, lalu cocokkan dengan tabel.
6. Tentukan di antara dua nilai x mana volume terbesar berada. Buat kotak kedelapan dengan potongan pilihanmu di antara kedua nilai itu (misalnya $3,5$ cm) untuk menguji dugaanmu.
7. Gambar grafik sesuai petunjuk, lalu kerjakan pertanyaan analisis secara berkelompok.

Tabel pengamatan kotak (kertas $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$)

Potongan x (cm)	Sisi alas diukur (cm)	Tinggi diukur (cm)	V ukur = sisi ² × tinggi (cm ³)	Sisi alas rumus 20 – $2x$ (cm)	V rumus $x(20 -$ $2x)^2$ (cm ³)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
8					
Pilihanmu: ...					

Grafik

Pada kertas grafik, gambar titik-titik (x, V) dari kolom V ukur dan V rumus untuk $0 \leq x \leq 10$. Tambahkan $V(0) = 0$ dan $V(10) = 0$ dari rumus, lalu hubungkan titik-titik rumus dengan kurva mulus. Tandai puncaknya dan perhatikan bentuk kurva di dekat $x = 10$.

Analisis

1. Bagaimana volume berubah ketika x makin besar? Pada potongan berapa volume terbesar di tabelmu, dan di antara nilai x berapa puncak sebenarnya berada?

Kunci: Volume naik lalu turun. Di tabel, volume terbesar ada pada $x = 3,5$ ($591,5 \text{ cm}^3$), lebih besar daripada $V(3) = 588$ dan $V(4) = 576$. Jadi puncaknya di antara 3 dan 4 cm; tepatnya di $x = \frac{10}{3} \approx 3,33$ cm dengan $V \approx 592,6 \text{ cm}^3$ (pembuktiannya memakai turunan di Bab 29). Potongan kecil membuat kotak ceper, potongan besar membuat alasnya sempit.

2. Jabarkan $V(x) = x(20 - 2x)^2$ menjadi bentuk baku. Sebutkan derajat, koefisien pemimpin, dan suku tetapnya.

Kunci: $V(x) = x(400 - 80x + 4x^2) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$. Derajatnya 3, koefisien pemimpinnya 4, dan suku tetapnya 0 (karena setiap suku memuat faktor x).

3. Untuk nilai x berapa saja $V(x) = 0$? Apa arti fisiknya? Mengapa grafik hanya menyentuh sumbu- x lalu berbalik di $x = 10$?

Kunci: $V(x) = 4x(10 - x)^2 = 0$ untuk $x = 0$ dan $x = 10$ (akar kembar). Untuk $x = 0$ kotak tidak punya tinggi; untuk $x = 10$ alasnya habis terpotong. Karena faktor $(10 - x)^2$ tidak pernah negatif, $V(x)$ bertanda sama di kiri dan kanan $x = 10$, sehingga grafik hanya menyentuh sumbu- x lalu memantul.

4. Bu Sari ingin kotak bervolume tepat 512 cm^3 , dan kotak dengan $x = 2$ sudah memenuhinya. Pakai teorema faktor dan metode Horner pada $V(x) - 512 = 0$ untuk mencari potongan lain yang juga menghasilkan 512 cm^3 .

Kunci: $V(x) - 512 = 4(x^3 - 20x^2 + 100x - 128)$. Karena $V(2) = 512$, menurut teorema faktor $(x - 2)$ adalah faktor. Horner dengan $a = 2$ pada koefisien 1, -20 , 100 , -128 menghasilkan 1, -18 , 64 , sisa 0. Jadi $x^2 - 18x + 64 = 0$, sehingga $x = 9 \pm \sqrt{17}$, yaitu $x \approx 4,88$ cm atau $x \approx 13,12$ cm. Yang mungkin hanya $x \approx 4,88$ cm (harus kurang dari 10). Cek: $4,88 \times 10,24^2 \approx 512 \text{ cm}^3$.

5. Periksa ketiga akar persamaan $x^3 - 20x^2 + 100x - 128 = 0$ dari pertanyaan 4 dengan rumus Vieta (jumlah akar, jumlah hasil kali dua akar, dan hasil kali ketiga akar).

Kunci: Akarnya 2, $9 + \sqrt{17}$, dan $9 - \sqrt{17}$. Jumlah: $2 + 18 = 20 = -\frac{-20}{1}$. Jumlah hasil kali dua akar: $2 \times 18 + (81 - 17) = 36 + 64 = 100 = -\frac{-100}{1}$. Hasil kali: $2 \times 64 = 128 = -\frac{-128}{1}$. Ketiganya cocok dengan koefisien persamaan.

6. Rumus memberi $V(12) = 12 \times (-4)^2 = 192$. Adakah kotak dengan potongan 12 cm? Jelaskan perbedaan domain rumus dan domain masalah, lalu kaitkan dengan perilaku ujung grafik.

Kunci: Tidak ada. Potongan 12 cm di kedua ujung sisi 20 cm saling bertumpuk ($2x > 20$), jadi kertasnya habis. Rumus $V(x)$ terdefinisi untuk semua bilangan real, tetapi masalah nyata hanya berlaku untuk $0 < x < 10$. Karena suku pemimpin $4x^3$ berkuasa di ujung, $V(x) \rightarrow +\infty$ untuk $x \rightarrow +\infty$ dan $V(x) \rightarrow -\infty$ untuk $x \rightarrow -\infty$; bagian grafik itu tidak bermakna untuk kotak.

7. Kak Lintang menduga potongan terbaik selalu seperenam sisi kertas. Uji dugaan itu pada kertas $24 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ dengan menghitung $V(3)$, $V(4)$, dan $V(5)$, lalu cocokkan dengan hasil kertas 20 cm.

Kunci: Untuk kertas 24 cm, $V(x) = x(24 - 2x)^2$: $V(3) = 972$, $V(4) = 1.024$, $V(5) = 980 \text{ cm}^3$. Terbesar di $x = 4 = \frac{24}{6}$. Untuk kertas 20 cm puncaknya di sekitar $\frac{20}{6} \approx 3,33$, cocok dengan tabel. Data mendukung dugaan Kak Lintang; buktinya untuk semua ukuran memakai turunan (Bab 29).

✓ Kesimpulan

Tuliskan polinomial volume kotakmu, letak taksiran volume terbesar, arti akar dan akar kembarnya, serta cara teorema faktor dan Horner membantumu menemukan dua kotak yang isinya sama.

💬 Refleksi

- Aku tidak menyangka selembar kertas bisa menyimpan polinomial karena ...
- Langkah yang paling membantuku memahami akar polinomial adalah ...
- Kemasan lain di sekitarku yang ukurannya mungkin dihitung dengan cara serupa adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak sempat membuat kotak? Buka Rumus Hidup "Volume kotak dari karton" di subbab 16.1, atur panjang dan lebar karton 20 cm, lalu geser x dari 1 sampai 8 dan catat V untuk mengisi tabel. Lanjutkan dengan Lab Mini "Pabrik kardus: potong, lipat, ukur volumenya" di subbab 16.6 (ubah ukuran kartonnya menjadi 20 cm $\times$ 20 cm) untuk melihat kertas dilipat dan mencari puncak grafik $V(x)$. Untuk pertanyaan 4, bagi polinomialnya dengan Lab Mini "Mesin Horner: bagi polinomial dalam hitungan detik" (subbab 16.3), dan pakai Grafik Hidup "Kubik dengan akar yang bisa diseret" (subbab 16.6) untuk melihat pantulan grafik di akar kembar.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b16-6

📊 Contoh data (kertas HVS 80 gram, penggaris dengan ketelitian 0,1 cm)

Potongan x (cm)	Sisi alas diukur (cm)	Tinggi diukur (cm)	V ukur = sisi ² $\times$ tinggi (cm ³)	Sisi alas rumus 20 – $2x$ (cm)	V rumus $x(20 - 2x)^2$ (cm ³)
1	17,8	1,0	316,8	18	324
2	15,9	2,0	505,6	16	512
3	13,8	3,0	571,3	14	588
4	11,9	4,0	566,4	12	576
5	9,9	5,0	490,1	10	500
6	7,8	6,0	365,0	8	384
8	3,9	8,0	121,7	4	128
3,5 (pilihan)	12,9	3,5	582,4	13	591,5

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian membuat & mengukur kotak	Semua kotak terlipat rapi, potongan pojok tepat, dan diukur sampai 0,1 cm.	Sebagian besar kotak rapi; ada satu atau dua ukuran yang kurang teliti.	Beberapa kotak miring atau potongannya tidak sama, sehingga datanya meragukan.	Kotak dan pengukuran belum dapat dipakai.
Pemodelan polinomial & tabel	Menyusun $V(x)$, menjabarkannya dengan benar, dan mengisi tabel serta grafik lengkap tanpa salah hitung.	Model dan tabel benar dengan 1–2 kesalahan hitung kecil.	Model kurang tepat atau tabel dan grafik tidak lengkap.	Belum dapat menyusun model volume.
Analisis akar, Horner & Vieta	Menjelaskan arti akar dan akar kembar, menemukan $x \approx 4,88$ dengan teorema faktor dan Horner, memeriksa dengan Vieta, dan menolak akar di luar domain.	Sebagian besar analisis benar; ada satu langkah yang kurang lengkap.	Dapat membagi dengan Horner tetapi belum menafsirkan hasilnya.	Belum memakai teorema faktor atau Horner.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota membuat kotak dan ikut berdiskusi; temuan disampaikan jelas dengan istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Potong kertas A4 menjadi persegi 20 cm × 20 cm sebelum pelajaran (satu lembar A4 menghasilkan satu persegi). Ingatkan bahwa lipatan dan selotip membuat sisi alas sedikit lebih pendek daripada $20 - 2x$, sehingga V ukur sedikit lebih kecil daripada V rumus. Kelompok cepat dapat memakai kertas persegi panjang 30 cm × 20 cm seperti di subbab 16.1 (akarnya 0, 10, dan 15, tanpa akar kembar). Kelompok yang memerlukan bantuan cukup menyelesaikan tabel, grafik, serta pertanyaan 1–3, lalu mengerjakan pertanyaan 4 bersama guru.

Robek Tiga Pojok: Rahasia 180° dan Ubin Segi Enam di Serambi Masjid

Bab 17 • Garis, Sudut & Segitiga

Eksplorasi kelompok (penemuan terbimbing)

SMP kelas VII (bagian segitiga cocok juga untuk SD kelas V–VI)

2 x 40 menit

Model: Discovery learning: ukur – robek dan jajarkan – temukan pola – generalisasi

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur sudut-sudut segitiga dengan busur derajat dan menunjukkan dengan merobek pojok bahwa jumlahnya 180°.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa jumlah sudut segitiga 180° dengan memakai garis sejajar dan sudut berseberangan.
- Peserta didik dapat menemukan rumus jumlah sudut dalam segi- n , yaitu $(n - 2) \times 180^\circ$, dengan membagi poligon menjadi segitiga.
- Peserta didik dapat memakai besar sudut segi- n beraturan untuk menjelaskan mengapa ubin segi enam menutup lantai tanpa celah, sedangkan segi lima tidak.

Cerita pemantik



Selepas salat Jumat, Ancil terpesona memandangi lantai serambi masjid di kampungnya: ubin segi enam saling merapat tanpa celah sedikit pun, seperti sarang lebah. Di rumah, Ayu mencoba menyusun potongan karton segi lima beraturan untuk hiasan dinding, tetapi selalu tersisa celah. "Kok segi enam bisa, segi lima tidak?" tanyanya. Dimas mengangkat bahu. Kak Lintang memberi petunjuk: "Mulailah dari bangun yang paling sederhana, yaitu segitiga. Ukur sudutnya, robek pojoknya, lalu naik ke segi empat, segi lima, dan segi enam. Rahasia ubin itu akan muncul sendiri!"

Rumusan masalah

Berapa jumlah sudut dalam sebuah segitiga, dan bagaimana jumlah sudut dalam segi- n berubah ketika banyak sisinya bertambah?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak sisi bangun (n) dan bentuk bangun	Jumlah sudut dalam bangun	Busur yang sama, cara membaca busur yang sama, dan bangun yang digambar cembung

Alat dan bahan

- Kertas HVS bekas atau kertas lipat warna, 3 lembar per anak
- Penggaris, pensil, dan busur derajat (1 per anak)
- Spidol atau krayon 3 warna
- Gunting (opsional, pojok boleh dirobek dengan tangan), lem kertas, dan 1 lembar kertas folio per kelompok untuk menempel hasil

- Cetakan karton: 6 segi enam beraturan dan 4 segi lima beraturan bersisi 5 cm per kelompok

Keselamatan

Robek kertas dengan tangan atau gunting dengan hati-hati, arahkan ujung gunting menjauhi teman. Kumpulkan sobekan kertas yang tidak dipakai ke tempat sampah agar lantai tidak licin. Busur dan penggaris dipakai untuk mengukur, bukan untuk bermain pedang-pedangan.

Langkah kerja

1. Setiap anggota menggambar satu segitiga sembarang dengan penggaris: dalam satu kelompok harus ada segitiga lancip, siku-siku, dan tumpul. Warnai ketiga pojoknya dengan warna berbeda, lalu gunting segitiganya.
2. Ukur ketiga sudut dengan busur: pusat busur tepat di titik sudut dan garis 0° berimpit dengan salah satu sisi. Catat hasilnya, lalu jumlahkan.
3. Robek ketiga pojok berwarna. Di kertas folio, gambar garis lurus dan tandai satu titik di atasnya. Jajarkan ketiga pojok sehingga ujung-ujungnya bertemu di titik itu tanpa celah dan tanpa tumpang tindih. Amati, lalu tempelkan.
4. Gambar segi empat, segi lima, dan segi enam sembarang (tidak perlu beraturan, tetapi cembung). Ukur semua sudut dalamnya dan jumlahkan. Perpanjang sisinya dengan penggaris bila terlalu pendek untuk dibaca.
5. Dari satu titik sudut setiap bangun, tarik diagonal ke semua titik sudut yang tidak bersebelahan. Hitung banyak segitiga yang terbentuk dan isi dua kolom terakhir.
6. Bandingkan kolom jumlah sudut ukur dengan kolom banyak segitiga $\times 180^\circ$. Tuliskan polanya sebagai rumus dalam n .
7. Tantangan ubin: susun segi enam beraturan di sekeliling satu titik, lalu coba dengan segi lima beraturan. Ukur satu sudut setiap ubin dan catat berapa ubin yang dapat bertemu di satu titik tanpa celah.

Tabel pengamatan sudut dalam

Bangun	Banyak sisi n	Sudut-sudut hasil ukur	Jumlah sudut ukur	Banyak segitiga dari satu titik sudut	Banyak segitiga $\times 180^\circ$
Segitiga lancip					
Segitiga tumpul					
Segi empat					
Segi lima					
Segi enam					

Grafik

Buat diagram titik dengan sumbu mendatar banyak sisi n (3 sampai 6) dan sumbu tegak jumlah sudut ukur. Hubungkan titik-titiknya. Berapa kenaikan jumlah sudut setiap kali n bertambah 1?

Analisis

1. Bandingkan jumlah sudut segitiga lancip, tumpul, dan siku-siku di kelompokmu. Apa yang kamu temukan? Mengapa hasil busur kadang 179° atau 181° , sedangkan robekan pojok selalu tepat membentuk garis lurus?

Kunci: Jumlahnya selalu sekitar 180° , apa pun bentuk segitiganya. Hasil busur bisa meleset $1-2^\circ$ karena garis pensil tebal, pusat busur tidak tepat di titik sudut, atau salah membaca skala. Robekan pojok tidak bergantung pada membaca skala: ketiga sudut yang dijabarkan membentuk sudut lurus, yaitu tepat 180° .

2. Robekan hanya meyakinkan untuk segitiga yang kamu robek. Untuk segitiga ABC mana pun, tarik garis melalui C yang sejajar AB . Sudut-sudut mana yang sama besar? Buktikan bahwa $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Kunci: Misalkan garis ℓ melalui C sejajar AB . Sudut antara ℓ dan CA sama dengan $\angle A$, dan sudut antara ℓ dan CB sama dengan $\angle B$ (sudut dalam berseberangan pada garis sejajar). Kedua sudut itu bersama $\angle C$ mengisi sudut lurus pada ℓ , jadi $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ untuk setiap segitiga.

3. Lihat kolom banyak segitiga. Bagaimana hubungannya dengan n ? Tuliskan rumus jumlah sudut dalam segi- n dan cocokkan dengan datamu.

Kunci: Banyak segitiga $= n - 2$ (dari satu titik sudut ditarik $n - 3$ diagonal). Jadi jumlah sudut dalam $= (n - 2) \times 180^\circ$: $180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, 720^\circ$ untuk $n = 3, 4, 5, 6$. Data ukur $179^\circ, 181^\circ, 359^\circ, 541^\circ, 718^\circ$ hanya berselisih paling banyak 2° .

4. Pakai rumusmu untuk segi delapan dan segi dua belas. Berapa besar satu sudut dalam segi delapan beraturan?

Kunci: Segi delapan: $(8 - 2) \times 180^\circ = 1.080^\circ$; satu sudut segi delapan beraturan $1.080^\circ : 8 = 135^\circ$. Segi dua belas: $(12 - 2) \times 180^\circ = 1.800^\circ$.

5. Hitung sudut luar di setiap pojok segi lima dan segi enammu (sudut luar $= 180^\circ -$ sudut dalam), lalu jumlahkan. Apa yang kamu temukan? Kaitkan dengan Ancil yang berjalan mengelilingi lapangan dan kembali menghadap arah semula.

Kunci: Segi lima: $5 \times 180^\circ - 541^\circ = 359^\circ$. Segi enam: $6 \times 180^\circ - 718^\circ = 362^\circ$. Keduanya hampir 360° . Memang jumlah sudut luar $= n \times 180^\circ - (n - 2) \times 180^\circ = 360^\circ$ untuk setiap segi- n cembung: berjalan mengelilingi lapangan dan kembali menghadap arah semula berarti berbelok tepat satu putaran penuh.

6. Rahasia ubin: berapa besar satu sudut segi enam beraturan dan segi lima beraturan? Mengapa segi enam menutup lantai tanpa celah, sedangkan segi lima tidak? Segi- n beraturan mana lagi yang bisa?

Kunci: Segi enam beraturan: $720^\circ : 6 = 120^\circ$, dan $3 \times 120^\circ = 360^\circ$, jadi tiga ubin pas mengelilingi satu titik. Segi lima beraturan: $540^\circ : 5 = 108^\circ$; tiga ubin memberi 324° (celah 36°) dan empat ubin 432° (bertumpuk), karena 360° tidak habis dibagi 108° . Selain segi enam, hanya segitiga sama sisi (60° , 6 ubin) dan persegi (90° , 4 ubin) yang bisa.

7. Dimas mengaku menggambar segi empat dengan sudut $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$, dan 100° . Mungkinkah? Jelaskan.

Kunci: Tidak mungkin. Jumlah sudut segi empat harus $(4 - 2) \times 180^\circ = 360^\circ$, sedangkan $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 100^\circ = 370^\circ$. Jika tiga sudutnya siku-siku, sudut keempat pasti 90° .

Kesimpulan

Tuliskan jumlah sudut segitiga beserta alasannya, rumus jumlah sudut dalam segi- n , dan jelaskan dengan kata-katamu sendiri mengapa ubin segi enam dapat menutup lantai tanpa celah.

Refleksi

- Saat pojok-pojok robekan membentuk garis lurus, aku merasa ...
- Cara yang paling meyakinkanku bahwa jumlah sudut segitiga selalu 180° adalah ...
- Pola ubin atau anyaman di sekitarku yang sekarang bisa kujelaskan dengan sudut adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada busur atau kertas? Buka Lab Mini "Segitiga ajaib: seret, robek, jajarkan" di subbab 17.4: seret titik-titik sudut untuk membuat segitiga lancip, siku-siku, dan tumpul, catat ketiga sudutnya, lalu jalankan animasi robek-jajarkan. Untuk segi-n, pakai Lab Mini "Segi-n: potong jadi segitiga, lalu kelilingi" dan Rumus Hidup "Jumlah sudut dalam segi-n" di subbab 17.6; kegiatan Ancil keliling di Lab Mini itu menjawab pertanyaan 5. Latih ketepatan membaca sudut dengan Lab Mini "Mata Elang: tebak besar sudutnya!" di subbab 17.1.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b17-4

Contoh data (busur derajat, ketelitian 1°)

Bangun	Banyak sisi n	Sudut-sudut hasil ukur	Jumlah sudut ukur	Banyak segitiga dari satu titik sudut	Banyak segitiga $\times 180^\circ$
Segitiga lancip	3	$58^\circ, 67^\circ, 54^\circ$	179°	1	180°
Segitiga tumpul	3	$112^\circ, 41^\circ, 28^\circ$	181°	1	180°
Segi empat	4	$95^\circ, 78^\circ, 104^\circ, 82^\circ$	359°	2	360°
Segi lima	5	$100^\circ, 118^\circ, 96^\circ, 121^\circ, 106^\circ$	541°	3	540°
Segi enam	6	$125^\circ, 110^\circ, 132^\circ, 118^\circ, 121^\circ, 112^\circ$	718°	4	720°

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian mengukur sudut	Semua sudut diukur dengan posisi busur yang benar; jumlah setiap bangun berselisih paling banyak 3° dari nilai teori.	Sebagian besar pengukuran tepat; ada satu bangun yang selisihnya agak besar.	Banyak salah baca skala (mis. tertukar skala dalam dan luar).	Pengukuran belum dapat dipakai.
Bukti robek kertas & penalaran garis sejajar	Robekan tersusun rapi membentuk garis lurus dan bukti dengan garis sejajar dijelaskan lengkap.	Robekan benar; bukti garis sejajar sebagian besar tepat.	Robekan benar tetapi belum dapat menjelaskan alasannya.	Belum menunjukkan bahwa jumlahnya 180° .
Menemukan pola & rumus segi-n	Menemukan $(n - 2) \times 180^\circ$, memakainya untuk segi-n lain, serta menjelaskan sudut luar dan rahasia ubin.	Menemukan rumus dan memakainya dengan sedikit kekeliruan.	Melihat pola pada tabel tetapi belum dapat menuliskannya sebagai rumus.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota mengukur dan berdiskusi; hasil tempelan rapi dan dipresentasikan dengan jelas.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Ingatkan cara membaca busur (skala dalam atau luar dimulai dari 0° pada sisi yang dipakai). Pastikan setiap kelompok punya segitiga lancip, siku-siku, dan tumpul agar terlihat bahwa jumlahnya tidak bergantung pada bentuk. Cetakan segi enam dan segi lima beraturan dapat digambar dengan jangka dan busur (sudut pusat 60° dan 72°). Kelompok cepat dapat menyelidiki segi empat cekung berbentuk mata panah: apakah jumlah sudutnya tetap 360° bila sudut refleksnya diukur? (Ya.) Untuk siswa SD, cukup bagian segitiga dan segi empat.

Detektif Siku-siku: Menemukan Rahasia Tali 3–4–5

Bab 18 • Teorema Pythagoras

Eksplorasi kelompok (penemuan terbimbing)

SMP kelas VIII–IX (juga pemanasan SMA kelas X)

2 × 40 menit

Model: Discovery learning: amati – ukur – temukan pola – buktikan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur sisi-sisi segitiga siku-siku dan menemukan hubungan $a^2 + b^2 = c^2$ dari data.
- Peserta didik dapat memakai kebalikan Teorema Pythagoras untuk memeriksa apakah sebuah pojok siku-siku.
- Peserta didik dapat menjelaskan sumber galat pengukuran dan membandingkan hasil ukur dengan hasil hitungan.

Cerita pemantik



Pak Darto, tukang yang membangun pos ronda di kampung Dimas, tidak membawa penggaris siku. Ia hanya membawa seutas tali dengan 12 simpul. Ayu penasaran: "Bagaimana seutas tali bisa memastikan pojok bangunan benar-benar siku-siku?" Kak Lintang menantang kelompokmu: ukur beberapa segitiga, temukan polanya, lalu buktikan sendiri rahasia tali 3–4–5. Ancil sudah siap mencatat!

Rumusan masalah

Bagaimana hubungan antara panjang kedua kaki (a , b) dan panjang sisi miring (c) pada segitiga siku-siku?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Panjang kaki a dan b yang digambar	Panjang sisi miring c hasil pengukuran	Sudut di antara kedua kaki selalu 90° , penggaris dan cara mengukur yang sama

Alat dan bahan

- Kertas berpetak 1 cm, 2 lembar per kelompok
- Penggaris 30 cm dan pensil runcing
- Busur derajat atau benda bersudut siku (pojok buku)
- Tali rafia $\pm 1,5$ m dengan 12 simpul berjarak 10 cm (buat sendiri)
- Kalkulator atau HP
- Gunting dan lem (opsional, untuk bukti potong-tempel)

Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati dan arahkan ujungnya menjauhi teman. Saat merentangkan tali di lantai, pastikan tidak ada yang tersandung. Kembalikan semua alat ke tempatnya.

Langkah kerja

1. Pada kertas berpetak, gambar segitiga siku-siku dengan kaki $a = 3$ cm (tegak) dan $b = 4$ cm (mendatar). Ikuti garis petak agar sudutnya tepat 90° .
2. Ukur sisi miring c dengan penggaris sampai ketelitian $0,1$ cm. Catat di tabel.
3. Ulangi untuk pasangan kaki (6, 8), (5, 12), (2, 5), dan (4, 7) cm. Pakai kertas kedua bila perlu.
4. Hitung a^2 , b^2 , $a^2 + b^2$, dan c^2 (dari c hasil ukur), lalu selisih $c^2 - (a^2 + b^2)$.
5. Untuk segitiga 3–4, gambar persegi di setiap sisi. Hitung petak pada persegi kedua kaki, lalu coba potong dan susun petak-petak itu untuk menutupi persegi sisi miring.
6. Rentangkan tali 12 simpul di lantai menjadi segitiga 3–4–5 ruas. Periksa sudut di antara sisi 3 dan 4 dengan pojok buku.
7. Ulangi dengan segitiga tali 4–4–4 dan 2–5–5 ruas. Catat apakah ada sudut siku-siku.

Tabel pengamatan (satuan cm)

Segitiga	a	b	c (ukur)	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2	$c^2 - (a^2 + b^2)$
1								
2								
3								
4								
5								

Grafik

Buat diagram titik dengan sumbu mendatar $a^2 + b^2$ dan sumbu tegak c^2 . Gambar juga garis $y = x$. Seberapa dekat titik-titikmu dengan garis itu?

Analisis

1. Bandingkan nilai $a^2 + b^2$ dan c^2 pada setiap baris. Pola apa yang kamu temukan? Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Pada setiap baris $a^2 + b^2 \approx c^2$; selisih kecil berasal dari galat ukur. Polanya: jumlah kuadrat kedua kaki sama dengan kuadrat sisi miring. Hipotesis yang menyatakan hubungan ini terbukti.

2. Segitiga mana saja yang sisi miringnya bilangan bulat? Apa istimewanya pasangan bilangan itu?

Kunci: Segitiga 3–4–5, 6–8–10, dan 5–12–13. Ketiganya tripel Pythagoras: $a^2 + b^2$ adalah bilangan kuadrat sempurna. Segitiga 6–8–10 adalah 3–4–5 yang dikali 2.

3. Selisih pada kolom terakhir jarang tepat nol. Sebutkan dua sumber galat pengukuran dan cara menguranginya.

Kunci: Contoh: ketebalan garis pensil, ujung penggaris tidak tepat di titik sudut, sudut gambar tidak tepat 90° , salah membaca skala (paralaks). Kurangi dengan pensil runcing, mengikuti garis petak, mengukur dua kali, dan membaca tegak lurus.

4. Hitung panjang sisi miring segitiga berkaki 4 cm dan 7 cm memakai rumus. Bandingkan dengan hasil ukurmu dan hitung persentase galatnya.

Kunci: $c = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \approx 8,06$ cm. Jika terukur 8,1 cm, galatnya $\frac{8,1 - 8,06}{8,06} \times 100\% \approx 0,5\%$.

5. Pada percobaan tali, mengapa segitiga 3–4–5 ruas menghasilkan sudut siku-siku, sedangkan 2–5–5 ruas tidak? Jelaskan dengan kebalikan Teorema Pythagoras.

Kunci: Untuk 3–4–5: $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$, jadi menurut kebalikan teorema sudut di antara sisi 3 dan 4 pasti 90° . Untuk 2–5–5: sisi terpanjang 5 dan $2^2 + 5^2 = 29 \neq 25$; karena $29 > 25$, segitiganya lancip dan tidak punya sudut siku-siku. (Segitiga 4–4–4 sama sisi: semua sudutnya 60° .)

6. Pak Darto ingin membuat pojok siku-siku untuk fondasi rumah yang lebih besar. Usulkan ukuran tali (dalam meter) yang praktis dan jelaskan alasannya.

Kunci: Contoh: 3 m – 4 m – 5 m (total 12 m), atau 60–80–100 cm untuk pojok kecil. Kelipatan 3–4–5 mudah diukur dengan meteran dan menjamin sudut siku-siku; sisi yang lebih panjang membuat galat sudut lebih kecil.

✓ Kesimpulan

Tuliskan hubungan antara kaki dan sisi miring segitiga siku-siku dalam kata-kata dan dalam rumus, lalu jelaskan satu cara memakainya untuk memeriksa pojok siku-siku.

💡 Refleksi

- Bagian yang paling membuatku terkejut adalah ...
- Cara yang paling meyakinkanku bahwa rumus ini benar adalah ...
- Tempat di sekitarku yang mungkin memakai trik tali 3–4–5 adalah ...

📱 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya kertas berpetak? Buka Lab Mini "Persegi di tiap sisi: tuang airnya!" di Bab 18 (subbab 18.2). Atur kaki a dan b sesuai tabel, catat c yang ditampilkan, lalu tuang air untuk melihat bahwa $a^2 + b^2$ tepat mengisi c^2 . Untuk percobaan tali, pakai Lab Mini "Penguji sudut" di subbab 18.4.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b18-2

📊 Contoh data (penggaris, ketelitian 0,1 cm)

Segitiga	a	b	c (ukur)	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2	$c^2 - (a^2 + b^2)$
1	3	4	5,0	9	16	25	25,00	0,00
2	6	8	10,0	36	64	100	100,00	0,00
3	5	12	13,1	25	144	169	171,61	2,61
4	2	5	5,4	4	25	29	29,16	0,16
5	4	7	8,1	16	49	65	65,61	0,61

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian menggambar & mengukur	Semua segitiga digambar tepat siku-siku dan diukur sampai 0,1 cm dengan hati-hati.	Sebagian besar tepat, ada satu pengukuran yang kurang teliti.	Beberapa segitiga tidak siku-siku atau pengukurannya tidak konsisten.	Gambar dan pengukuran belum dapat dipakai.
Perhitungan & tabel	Semua kuadrat, jumlah, dan selisih benar dan tertata rapi.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan hitung atau tabel tidak lengkap.	Tabel hampir kosong.
Penemuan pola & penalaran	Menemukan $a^2 + b^2 = c^2$, menjelaskan galat, dan memakai kebalikan teorema dengan alasan tepat.	Menemukan pola dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan, atau ada miskonsepsi (mis. $a + b = c$).	Belum menemukan pola.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota berperan; kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Siapkan tali 12 simpul sebelum pelajaran (simpul tiap 10 cm). Kelompok yang cepat dapat mencoba segitiga 8–15–17 atau bukti potong-tempel dengan persegi di tiap sisi. Tekankan bahwa data hanya mendukung dugaan; buktinya untuk semua segitiga siku-siku ada di subbab 18.2.

Gunting, Geser, Tempel: Semua Bangun Ingin Menjadi Persegi Panjang

Bab 19 • Keliling & Luas Bangun Datar

Eksplorasi kelompok (penemuan terbimbing)

SD kelas V–VI dan SMP kelas VII

2 × 40 menit

Model: Discovery learning: hitung petak – potong-geser-tempel – temukan rumus – terapkan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menentukan luas bangun datar dengan menghitung petak satuan (cm^2).
- Peserta didik dapat menurunkan rumus luas jajargenjang, segitiga, trapesium, dan layang-layang dengan memotong, menggeser, dan menempel menjadi bangun yang sudah dikenal.
- Peserta didik dapat menjelaskan bahwa potong-geser-tempel tidak mengubah luas, tetapi dapat mengubah keliling.
- Peserta didik dapat memakai rumus luas untuk menyelesaikan masalah sawah dan layangan.

Cerita pemantik



Pak Darto punya tiga petak sawah: satu berbentuk persegi panjang, satu jajargenjang karena mengikuti jalan desa yang miring, dan satu trapesium di tepi sungai. Ia ingin membagi pupuk sesuai luas setiap petak, tetapi bingung. "Kalau persegi panjang, saya tahu: panjang kali lebar. Kalau yang mencong begini?" Dimas mengusulkan menghitung kotak-kotak, sedangkan Ayu ingin memotong sawahnya, eh, maksudnya gambarnya! Kak Lintang mengangguk, "Gunting bangunnya, geser potongannya, susun menjadi bangun yang sudah kalian kenal. Tenang saja, luasnya tidak akan kabur ke mana-mana." Ancil sudah menyiapkan kertas berpetak.

? Rumusan masalah

Bagaimana rumus luas jajargenjang, segitiga, trapesium, dan layang-layang dapat ditemukan dari luas persegi panjang?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Kertas berpetak 1 cm, 3 lembar per kelompok (kertas buku tulis kotak-kotak juga bisa)
- Penggaris 30 cm, pensil, dan spidol 2 warna
- Gunting 2 buah per kelompok, lem kertas, atau selotip
- Kertas folio atau karton bekas 1 lembar per kelompok untuk menempel hasil
- Benang 50 cm (untuk mengukur keliling) dan kalkulator atau HP

! Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati: menggunting menjauhi tubuh dan ujung gunting tidak diarahkan ke teman. Jangan berjalan sambil membawa gunting terbuka. Kumpulkan sisa potongan kertas ke tempat sampah dan tutup lem setelah dipakai.

Langkah kerja

1. Pemanasan: pada kertas berpetak, gambar persegi panjang 8 cm × 5 cm. Hitung petaknya dan cocokkan dengan panjang × lebar.
2. Gambar jajargenjang beralas 8 cm dan bertinggi 5 cm dengan sisi atas bergeser 3 petak ke kanan. Hitung luasnya dengan menghitung petak (pasangkan petak-petak sebagian menjadi petak utuh). Gunting jajargenjangnya, potong segitiga siku-siku di sisi kiri sepanjang garis tinggi, lalu tempelkan di sisi kanan. Bangun apa yang terbentuk? Ukur panjang dan lebarnya.
3. Gambar dua segitiga yang sama persis dengan alas 8 cm dan tinggi 6 cm (puncaknya tepat 2 cm di sebelah kanan ujung kiri alas). Hitung petak salah satunya. Gunting keduanya, putar satu segitiga 180°, lalu rapatkan sehingga menjadi jajargenjang. Hitung luas jajargenjang itu dengan temuan langkah 2.
4. Gambar dua trapesium yang sama persis dengan sisi sejajar 5 cm dan 9 cm serta tinggi 4 cm. Hitung petak satu trapesium. Gunting keduanya, putar satu trapesium 180°, lalu rapatkan menjadi jajargenjang. Ukur alas dan tingginya.
5. Gambar persegi panjang 6 cm × 10 cm (tegak). Di dalamnya gambar layang-layang dengan titik sudut di tengah sisi atas, di tengah sisi bawah, serta di sisi kiri dan kanan 3 cm dari atas, sehingga diagonalnya 6 cm dan 10 cm. Hitung petak layang-layang. Gunting persegi panjangnya, potong keempat segitiga pojok di luar layang-layang, lalu tumpuk di atas layang-layang. Apa yang terjadi?
6. Isi tabel. Pada kolom terakhir, tuliskan dugaan rumus luas setiap bangun memakai ukuran awalnya.
7. Sebelum jajargenjang di langkah 2 digunting, ukur kelilingnya dengan benang dan penggaris. Ukur juga keliling persegi panjang hasil susunannya. Catat keduanya untuk pertanyaan 5.

Tabel potong-geser-tempel (satuan cm dan cm²)

Bangun	Ukuran awal (cm)	Luas hitung petak (cm ²)	Disusun menjadi	Ukuran bangun baru (cm)	Luas bangun baru (cm ²)	Dugaan rumus luas
Persegi panjang						
Jajargenjang						
Segitiga						
Trapesium						
Layang-layang						

null

Analisis

1. Jajargenjang berubah menjadi bangun apa setelah segitiganya dipindahkan? Mengapa luas jajargenjang adalah alas × tinggi, bukan alas × sisi miring? Hitung keduanya dari datamu.

Kunci: Menjadi persegi panjang 8 cm × 5 cm, luasnya 40 cm², sama dengan hitungan petak. Lebar persegi panjang itu adalah tinggi jajargenjang (jarak tegak lurus antara kedua alas), bukan sisi miringnya. Sisi miring $\sqrt{3^2 + 5^2} \approx 5,83$ cm sehingga alas × sisi miring $\approx 8 \times 5,83 \approx 46,6$ cm², terlalu besar. Jadi $L = a \times t$.

2. Dua segitiga yang sama persis membentuk satu jajargenjang. Turunkan rumus luas segitiga dari temuan itu. Apakah cara ini juga berlaku untuk segitiga tumpul?

Kunci: Dua segitiga membentuk jajargenjang beralas 8 cm dan bertinggi 6 cm, luasnya 48 cm^2 . Satu segitiga $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24 \text{ cm}^2$, cocok dengan hitungan petak. Jadi $L = \frac{1}{2} \times a \times t$. Untuk segitiga tumpul, dua salinannya tetap membentuk jajargenjang dengan alas dan tinggi yang sama (garis tingginya jatuh di perpanjangan alas), jadi rumusnya tetap berlaku.

3. Dua trapesium yang sama persis membentuk jajargenjang dengan alas $a + b$. Turunkan rumus luas trapesium dan cocokkan dengan hitungan petakmu.

Kunci: Jajargenjangnya beralas $5 + 9 = 14 \text{ cm}$ dan bertinggi 4 cm, luasnya 56 cm^2 . Satu trapesium $= \frac{1}{2} \times (5 + 9) \times 4 = 28 \text{ cm}^2$, cocok dengan hitungan petak. Jadi $L = \frac{1}{2} \times (a + b) \times t$.

4. Mengapa keempat segitiga pojok tepat menutupi layang-layang? Turunkan rumus luas layang-layang. Apakah rumus itu juga berlaku untuk belah ketupat?

Kunci: Kedua diagonal membagi persegi panjang 6×10 menjadi empat persegi panjang kecil. Setiap sisi layang-layang adalah diagonal persegi panjang kecil, sehingga membaginya menjadi dua segitiga yang sama persis: satu di dalam layang-layang dan satu di pojok luar. Jadi luas layang-layang $= \frac{1}{2} \times 6 \times 10 = 30 \text{ cm}^2$, atau $L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$. Belah ketupat juga punya diagonal yang saling tegak lurus, jadi rumusnya sama.

5. Bandingkan luas dan keliling jajargenjang sebelum digunting dengan persegi panjang hasil susunannya. Apa yang tetap dan apa yang berubah? Apa kesimpulanmu tentang keliling dan luas?

Kunci: Luas tetap 40 cm^2 karena tidak ada kertas yang ditambah atau dibuang. Keliling berubah: jajargenjang $2 \times (8 + 5,83) \approx 27,7 \text{ cm}$, persegi panjang $2 \times (8 + 5) = 26 \text{ cm}$. Potong-geser-tempel menjaga luas, tetapi tidak menjaga keliling; keliling (cm) dan luas (cm^2) adalah dua ukuran yang berbeda.

6. Petak sawah trapesium Pak Darto memiliki sisi sejajar 30 m dan 50 m yang berjarak 20 m. Jika setiap 100 m^2 memerlukan 3 kg pupuk, berapa kilogram pupuk yang diperlukan?

Kunci: $L = \frac{1}{2} \times (30 + 50) \times 20 = 800 \text{ m}^2$. Pupuk $= \frac{800}{100} \times 3 = 24 \text{ kg}$.

7. Dimas membuat layangan berbentuk layang-layang dengan rangka bambu (diagonal) 40 cm dan 50 cm. Berapa luas kertas minyak minimal yang ia perlukan?

Kunci: $L = \frac{1}{2} \times 40 \times 50 = 1.000 \text{ cm}^2$. Dalam praktik Dimas perlu sedikit lebih banyak untuk lipatan tepi.

✓ Kesimpulan

Tuliskan rumus luas jajargenjang, segitiga, trapesium, dan layang-layang, masing-masing disertai satu kalimat tentang cara kamu menemukannya dari persegi panjang. Tambahkan satu kalimat tentang perbedaan keliling dan luas.

💡 Refleksi

- Rumus luas yang paling mengejutkanku setelah digunting adalah ... karena ...
- Sekarang aku tidak perlu menghafal rumus luas karena ...
- Benda di rumahku yang bisa kuhitung luasnya dengan cara potong-geser-tempel adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada kertas berpetak atau gunting? Buka Lab Mini "Mesin potong-geser-tempel" di subbab 19.4: pilih bentuknya (jajargenjang, segitiga, trapesium, layang-layang), tekan ► Jalankan, hitung kotak satuannya sebelum dan sesudah dipotong, lalu catat ukuran bangun barunya di tabel. Grafik Hidup "Puncak di atas rel: luas yang keras kepala" di subbab 19.3 menunjukkan luas segitiga tidak berubah saat puncaknya digeser sejajar alas, dan Grafik Hidup "Layangan Dimas: geser ujung-ujungnya" di subbab 19.4 menguji rumus layang-layang. Untuk pertanyaan 5, pakai Lab Mini "Kebun petak: luas sama, keliling berbeda?" di subbab 19.1.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b19-4

Contoh data (kertas berpetak 1 cm)

Bangun	Ukuran awal (cm)	Luas hitung petak (cm ²)	Disusun menjadi	Ukuran bangun baru (cm)	Luas bangun baru (cm ²)	Dugaan rumus luas
Persegi panjang	$p = 8, l = 5$	40 (semua petak penuh)	Tetap persegi panjang	8×5	40	$p \times l$
Jajargenjang	alas 8, tinggi 5, sisi miring 5,8	33 penuh + 14 sebagian ≈ 40	Persegi panjang	8×5	40	alas $\times$ tinggi
Segitiga	alas 8, tinggi 6	18 penuh + 12 sebagian ≈ 24	Jajargenjang (dari 2 segitiga)	alas 8, tinggi 6	48 (= 2 segitiga)	$\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$
Trapesium	sisi sejajar 5 dan 9, tinggi 4	24 penuh + 8 sebagian ≈ 28	Jajargenjang (dari 2 trapesium)	alas $5 + 9 = 14$, tinggi 4	56 (= 2 trapesium)	$\frac{1}{2} \times (a + b) \times t$
Layang-layang	$d_1 = 6, d_2 = 10$	18 penuh + 24 sebagian ≈ 30	4 segitiga pojok menutupi layang-layang	persegi panjang 6×10	60 (= 2 layang-layang)	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian menggambar & menggunting	Semua bangun digambar tepat di garis petak, digunting rapi, dan tersusun tanpa celah.	Sebagian besar rapi; ada satu potongan yang kurang tepat.	Beberapa bangun salah ukuran atau susunannya bercelah.	Gambar dan potongan belum dapat dipakai.
Penurunan rumus (penalaran)	Keempat rumus diturunkan dari potong-geser-tempel dengan alasan yang jelas, termasuk peran tinggi tegak lurus.	Tiga rumus diturunkan dengan benar.	Menulis rumus dari hafalan tanpa mengaitkan dengan potongan.	Belum dapat menuliskan rumus.
Perhitungan, tabel & penerapan	Tabel lengkap, hitungan petak masuk akal, dan soal sawah serta layangan dijawab benar dengan satuan.	Ada 1–2 kesalahan kecil atau satuan terlupa.	Banyak kesalahan hitung atau tabel tidak lengkap.	Tabel hampir kosong.
Kerja sama & presentasi	Semua anggota terlibat; tempelan hasil rapi dan dijelaskan dengan istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penjelasan cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Tekankan bahwa tinggi selalu tegak lurus alas: minta siswa menggambar garis tinggi dengan bantuan pojok buku sebelum menggunting. Untuk SD, cukup jajargenjang, segitiga, dan trapesium; layang-layang menjadi tantangan. Kelompok cepat dapat menggambar segi lima tak beraturan dengan titik sudut di titik-titik petak, lalu menguji teorema Pick $L = I + \frac{B}{2} - 1$ dari subbab 19.6. Pajang hasil tempelan semua kelompok sebagai "pohon rumus luas" yang berakar pada persegi panjang.

Berburu π : Benang, Tutup Toples, dan Martabak Kertas

Bab 20 • Lingkaran

Eksplorasi kelompok (pengukuran dan penemuan terbimbing)

SMP kelas VIII (juga SD kelas VI)

2 x 40 menit

Model: Discovery learning: ukur – hitung rasio – temukan konstanta – buktikan dengan potong-susun

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur diameter dan keliling benda berbentuk lingkaran dan menemukan bahwa $K : d$ selalu mendekati 3,14 (bilangan π).
- Peserta didik dapat menyatakan $K = \pi d$ dan menggunakannya untuk menghitung banyak putaran roda.
- Peserta didik dapat menunjukkan dengan memotong dan menyusun juring bahwa luas lingkaran $L = \pi r^2$.
- Peserta didik dapat menjelaskan sumber galat pengukuran dan mengapa $\frac{22}{7}$ hanya pendekatan untuk π .

Cerita pemantik



Minggu pagi, Dimas menemani ayahnya mengganti ban motor di bengkel dekat rumah. "Ban ini sudah berputar puluhan ribu kali sejak dipasang," kata montir. Dimas heran: bagaimana orang bisa tahu tanpa menghitung satu per satu? Sore harinya, Ayu membantu ibunya memotong martabak manis yang bulat menjadi 16 potong. Kak Lintang datang membawa seutas benang. "Semua benda bulat menyimpan bilangan rahasia yang sama, dari koin seribuan sampai tampah nenek. Ukurlah, dan temukan sendiri bilangan itu!" Ancil sudah mengumpulkan enam benda bulat dari dapur.

Rumusan masalah

Bagaimana hubungan antara keliling dan diameter benda berbentuk lingkaran, dan bagaimana hubungan itu membantu kita menghitung luas lingkaran?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Diameter benda bulat (d)	Keliling benda (K) dan perbandingan $K \div d$	Cara mengukur yang sama: benang tidak ditarik terlalu kencang, tepat satu putaran, dan diameter melalui pusat

Alat dan bahan

- 6 benda bulat dari rumah: koin Rp1.000, gelas, kaleng susu, tutup toples, piring, dan tampah atau ember
- Benang jahit atau tali rafia ± 2 m dan spidol untuk menandai
- Penggaris 30 cm dan meteran jahit (pita ukur 150 cm)
- Jangka, kertas HVS atau karton tipis 2 lembar, gunting, dan lem
- Kalkulator atau HP dan kertas grafik 1 lembar

Keselamatan

Ujung jangka tajam: arahkan ke bawah saat dipakai dan simpan setelah selesai. Pilih kaleng yang bibirnya sudah rata agar tangan tidak tergores. Letakkan gelas dan piring di tengah meja, bukan di tepi. Gunakan gunting dengan hati-hati.

Langkah kerja

1. Ukur diameter setiap benda: letakkan penggaris melintasi lingkaran dan geser-geser sampai diperoleh jarak terpanjang (itulah diameter, yang melalui pusat). Catat sampai 0,1 cm.
2. Lilitkan benang tepat satu kali mengelilingi tepi benda, tandai titik pertemuannya dengan spidol, lalu rentangkan benang di sepanjang penggaris atau meteran untuk mendapat keliling K . Untuk koin, gelindingkan satu putaran penuh di atas kertas dan ukur jejaknya.
3. Hitung $K \div d$ (dua angka di belakang koma) dan sisa $K - 3d$ untuk setiap benda.
4. Potong benang sepanjang diameter piring, lalu bantangkan berulang-ulang di sepanjang tepi piring. Berapa kali benang itu muat? Berapa panjang sisanya?
5. Kumpulkan rata-rata $K \div d$ setiap kelompok di papan tulis dan hitung rata-rata kelas.
6. Martabak kertas: gambar lingkaran berjari-jari 7 cm dengan jangka, warnai setengah lingkaran atasnya, lalu gunting. Lipat empat kali untuk membaginya menjadi 16 juring sama besar dan gunting juring-juringnya.
7. Susun ke-16 juring berselang-seling (ujung lancip naik, turun, naik, ...) di atas kertas sehingga menyerupai jajargenjang. Ukur panjang dan tingginya, lalu hitung luasnya.

Tabel pengukuran benda bulat

Benda	Diameter d (cm)	Keliling K (cm)	$K \div d$	Sisa $K - 3d$ (cm)
Koin Rp1.000				
Gelas				
Kaleng susu				
Tutup toples				
Piring				
Tampah atau ember				

Grafik

Buat diagram titik dengan sumbu mendatar diameter d dan sumbu tegak keliling K (pakai skala yang memuat tampah, misalnya 1 cm untuk 10 cm). Tarik satu garis lurus melalui $(0, 0)$ yang paling dekat dengan titik-titikmu, lalu hitung gradiennya.

Analisis

1. Amati kolom $K \div d$. Apa yang kamu temukan? Hitung rata-ratanya dan bandingkan dengan rata-rata kelas.

Kunci: Semua hasil berada di antara 3,14 dan 3,17, rata-ratanya $\approx 3,15$, padahal ukuran bendanya sangat berbeda. Perbandingan keliling dan diameter selalu sama untuk semua lingkaran. Bilangan tetap itu disebut $\pi \approx 3,14$. Rata-rata kelas biasanya lebih dekat ke 3,14 karena galat acak saling menutupi.

2. Benda mana yang hasil $K \div d$ -nya paling jauh dari 3,14? Mengapa? Sebutkan dua sumber galat pengukuran dan cara menguranginya.

Kunci: Koin ($7,6 : 2,4 \approx 3,17$). Benda kecil membuat galat 0,1 cm menjadi besar secara relatif: 0,1 cm adalah sekitar 1,3% dari keliling koin, tetapi hanya sekitar 0,05% dari keliling tampah. Sumber galat lain: benang mulur atau kendur, tanda spidol tebal, dan penggaris tidak melalui pusat (diameter terukur terlalu kecil). Kurangi dengan mengukur benda besar, memakai benang yang tidak mulur, mengukur dua kali, dan mencari jarak terpanjang untuk diameter.

3. Bagaimana bentuk grafik K terhadap d ? Berapa gradiennya? Tuliskan rumus keliling lingkaran dalam d dan dalam r (jari-jari).

Kunci: Titik-titiknya hampir segaris lurus yang melalui $(0, 0)$; gradiennya sekitar 3,14. Jadi $K = \pi d = 2\pi r$. Keliling sebanding dengan diameter: diameter dua kali lipat, keliling juga dua kali lipat.

4. Bandingkan sisa $K - 3d$ dengan diameternya. Kira-kira berapa bagian dari d ? Ayu menyimpulkan $\pi = \frac{22}{7}$ tepat. Benarkah?

Kunci: Sisa $K - 3d$ sekitar 0,14 kali diameter, kira-kira $\frac{1}{7}d$. Jadi $K \approx 3\frac{1}{7}d = \frac{22}{7}d$. Namun $\frac{22}{7} = 3,142857 \dots$, sedangkan $\pi = 3,141592 \dots$; keduanya berbeda mulai angka ketiga di belakang koma. π adalah bilangan irasional (tidak dapat ditulis sebagai pecahan), jadi $\frac{22}{7}$ hanya pendekatan yang praktis. Archimedes membuktikan $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

5. Roda motor Dimas (dengan ban) berdiameter 60 cm. Berapa meter jarak yang ditempuh dalam satu putaran? Kira-kira berapa kali roda itu berputar dari Jakarta ke Bandung yang berjarak ± 150 km?

Kunci: Satu putaran $= \pi \times 0,6 \approx 1,885$ m. Banyak putaran $\approx 150.000 : 1,885 \approx 79.600$, jadi sekitar 80 ribu putaran.

6. Susunan martabak kertasmu menyerupai bangun apa? Mengapa panjangnya hampir setengah keliling dan tingginya hampir jari-jari? Turunkan rumus luas lingkaran dan bandingkan dengan hasil ukurmu. Apa yang terjadi jika juringnya dibuat lebih banyak?

Kunci: Menyerupai jajargenjang, hampir persegi panjang. Delapan juring menghadap ke bawah dan delapan ke atas, sehingga panjangnya setengah busur seluruh lingkaran, $\frac{1}{2}K = \pi r \approx 22$ cm (terukur $\pm 21,9$ cm), dan tingginya jari-jari 7 cm (terukur $\pm 6,9$ cm). Jadi $L = \pi r \times r = \pi r^2 \approx 154$ cm² (hasil ukur $21,9 \times 6,9 \approx 151$ cm²). Makin banyak juring, tepi bergelombangnya makin lurus dan bangunnya makin mendekati persegi panjang $\pi r \times r$.

7. Ibu Ayu ragu memilih satu martabak berdiameter 30 cm atau dua martabak berdiameter 20 cm dengan harga sama. Mana yang lebih banyak? Tunjukkan perhitungannya.

Kunci: Satu martabak besar: $\pi \times 15^2 \approx 706,9$ cm². Dua martabak kecil: $2 \times \pi \times 10^2 \approx 628,3$ cm². Satu martabak besar lebih banyak sekitar 79 cm², karena luas sebanding dengan kuadrat jari-jari.

✓ Kesimpulan

Tuliskan dengan kata-katamu sendiri apa itu π , rumus keliling dan luas lingkaran, serta cara kegiatan hari ini menunjukkan kedua rumus itu.

💬 Refleksi

- Aku terkejut bahwa koin kecil dan tampah besar sama-sama ...
- Bagian kegiatan yang paling membuatku paham asal rumus luas lingkaran adalah ...

- Benda bulat lain di sekitarku yang ingin kuukur adalah ... karena ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya benda bulat atau benang? Buka Lab Mini "Gelindingkan, lalu ukur!" di subbab 20.2: pilih benda, jalankan satu putaran, lalu catat diameter dan panjang jejaknya untuk mengisi tabel; tongkat sepanjang diameter yang diijarkan di atas jejak menjawab pertanyaan 4. Lab Mini "Mengepung π ala Archimedes" di subbab yang sama menunjukkan cara Archimedes memburu π . Untuk bagian martabak, pakai Lab Mini "Potong martabaknya, susun ulang!" di subbab 20.3 dan coba 8, 16, lalu 48 potong. Pertanyaan 5 dapat diperiksa dengan Rumus Hidup "Penghitung putaran roda" (subbab 20.3).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b20-2

Contoh data (meteran jahit dan penggaris, ketelitian 0,1 cm)

Benda	Diameter d (cm)	Keliling K (cm)	$K \div d$	Sisa $K - 3d$ (cm)
Koin Rp1.000	2,4	7,6	3,17	0,4
Gelas	7,0	22,1	3,16	1,1
Kaleng susu	7,4	23,2	3,14	1,0
Tutup toples	10,5	33,1	3,15	1,6
Piring	22,0	69,2	3,15	3,2
Tampah atau ember	60,0	188,7	3,15	8,7

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian mengukur	Diameter diukur melalui pusat dan keliling diukur tepat satu putaran untuk keenam benda, sampai 0,1 cm.	Sebagian besar pengukuran teliti; ada satu benda yang kurang tepat.	Beberapa pengukuran jelas keliru (mis. $K \div d$ jauh dari 3).	Pengukuran belum dapat dipakai.
Perhitungan, tabel & grafik	Semua rasio dan sisa benar; grafik berskala rapi dengan garis melalui (0, 0) dan gradien terhitung.	Ada 1–2 kesalahan kecil pada hitungan atau grafik.	Tabel atau grafik tidak lengkap.	Tabel dan grafik hampir kosong.
Penemuan pola & penalaran	Menemukan $K = \pi d$, menjelaskan galat, membedakan π dan $\frac{22}{7}$, dan menurunkan $L = \pi r^2$ dari susunan juring.	Menemukan kedua rumus dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut rumus tanpa mengaitkannya dengan data atau susunan juring.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota mengukur dan berdiskusi; temuan disampaikan jelas dengan istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor $\div$ 16) $\times$ 100.

Catatan guru

Minta siswa membawa benda bulat dari rumah sehari sebelumnya; makin besar bendanya (tampah, ember, ban sepeda), makin teliti nilai π yang didapat. Tuliskan $K \div d$ setiap kelompok di papan dan hitung rata-rata kelas bersama-sama. Ingatkan bahwa diameter adalah tali busur terpanjang. Kelompok cepat dapat membuat martabak kertas 32 juring dan membandingkan hasilnya dengan 16 juring. Kegiatan ini cocok dilaksanakan pada Hari Pi, 14 Maret.

Mathpedia · LKPD Bab 20 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Misteri Sepertiga: Berapa Tumpeng Mini untuk Memenuhi Dandang?

Bab 21 • Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume

Eksplorasi kelompok (percobaan dan penemuan terbimbing)

SMP kelas VIII–IX

2 × 40 menit (pembuatan model boleh dicicil di rumah)

Model: Inkuiri terbimbing: buat model – tuang dan ukur – temukan perbandingan – terapkan

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat membuat model tabung, kerucut, prisma, dan limas dari jaring-jaring karton.
- Peserta didik dapat menemukan melalui percobaan menuang beras bahwa volume kerucut dan limas sepertiga volume tabung dan prisma yang alas dan tingginya sama.
- Peserta didik dapat menghitung volume dengan rumus dan membandingkannya dengan hasil ukur dalam mililiter ($1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$).
- Peserta didik dapat memakai rumus volume kerucut dan faktor skala k^3 pada konteks tumpeng.

Cerita pemantik



Keluarga Ayu menyiapkan syukuran. Nenek mencetak tumpeng nasi kuning dengan kukusan bambu berbentuk kerucut, sedangkan nasinya dimasak dalam dandang berbentuk tabung. "Mulut dandang ini persis selebar kukusan dan tingginya sama. Satu dandang cukup untuk berapa tumpeng, ya?" gumam Ibu. Dimas menebak dua, Ancil yakin empat. Kak Lintang mengambil karton dan sekantong beras. "Daripada menebak, kita buat tumpeng mini dan dandang mini, lalu kita tuang!"

? Rumusan masalah

Bagaimana hubungan volume kerucut dengan volume tabung, dan volume limas dengan volume prisma, jika alas dan tingginya sama?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Jenis bangun (kerucut/limas lawan tabung/prisma) dan ukuran alasnya	Isi bangun (mL) dan banyak tuangan sampai penuh	Alas yang sama dan tinggi yang sama dalam setiap pasangan, beras yang sama, dan cara meratakan isi

Alat dan bahan

- Karton manila atau kardus tipis bekas, 2 lembar per kelompok, beserta cetakan jaring-jaring dari guru
- Gunting, penggaris, jangka, busur derajat, dan pensil
- Selotip bening 1 gulung dan lem kertas
- Beras atau pasir kering $\pm 1 \text{ kg}$ dalam wadah, dan nampan untuk menampung tumpahan
- Gelas ukur dapur 500 mL
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Gunakan gunting dan jangka dengan hati-hati; arahkan ujungnya menjauhi teman. Bekerjalah di atas nampan agar beras tidak tercecer: butiran beras di lantai membuat licin, jadi segera sapu bila tumpah. Beras percobaan tidak untuk dimakan; kembalikan ke wadahnya setelah selesai.

Langkah kerja

1. Buat jaring-jaring dari cetakan, lalu rekatkan semua sambungan dengan selotip agar beras tidak bocor. Pasangan A: tabung tanpa tutup $r = 4$ cm, $t = 9$ cm dan kerucut tanpa alas $r = 4$ cm, $t = 9$ cm (juring berjari-jari 9,8 cm dengan sudut $\pm 146^\circ$). Pasangan B: prisma tanpa tutup ber alas persegi 6 cm, $t = 8$ cm dan limas tanpa alas dari 4 segitiga sama kaki ber alas 6 cm dan bertinggi 8,5 cm. Pasangan C: tabung $r = 5$ cm, $t = 6$ cm dan kerucut $r = 5$ cm, $t = 6$ cm (juring 7,8 cm, $\pm 230^\circ$).
2. Periksa setiap pasangan: letakkan mulut kerucut atau limas di atas alas pasangannya. Keduanya harus tepat berimpit, dan tingginya harus sama.
3. Tulis dugaanmu: berapa kali kerucut penuh beras harus dituang untuk memenuhi tabung pasangannya?
4. Pegang kerucut terbalik di atas nampan, isi beras sampai penuh, ratakan dengan penggaris, lalu tuang ke tabung. Ulangi sampai tabung penuh rata. Catat banyak tuangan beserta keterangan (pas, kurang sedikit, atau meluap sedikit).
5. Tuang isi satu kerucut penuh ke gelas ukur dan baca isinya dalam mL. Lakukan juga untuk tabung penuh. Ulangi langkah 4–5 untuk pasangan B dan C.
6. Hitung volume tabung dan prisma dengan rumus luas alas $\times$ tinggi, lalu hitung perbandingan isi besar $\div$ isi kecil dari hasil ukur.
7. Kembalikan beras ke wadah dan bersihkan meja sebelum mengerjakan pertanyaan analisis.

Tabel percobaan tuang beras

Pasangan bangun	Alas (cm)	Tinggi t (cm)	Volume tabung/prisma dihitung (cm^3)	Isi tabung/prisma diukur (mL)	Isi kerucut/limas diukur (mL)	Banyak tuangan sampai penuh	Isi besar $\div$ isi kecil
A: tabung & kerucut							
B: prisma & limas persegi							
C: tabung & kerucut pendek							

null

Analisis

1. Amati kolom banyak tuangan dan perbandingan isi untuk ketiga pasangan. Pola apa yang kamu temukan? Apakah dugaanmu terbukti?

Kunci: Ketiga pasangan memerlukan sekitar 3 tuangan, dan perbandingan isinya 2,91–3,00. Jadi volume kerucut sepertiga volume tabung dan volume limas sepertiga volume prisma, asalkan alas dan tingginya sama. Pola ini tidak bergantung pada bentuk alas (lingkaran atau persegi).

2. Tuliskan rumus volume kerucut dan limas dari temuanmu. Hitung volume kerucut A dan limas B dengan rumus itu, lalu hitung persentase galat hasil ukurmu.

Kunci: $V = \frac{1}{3} \times L_{\text{alas}} \times t$. Kerucut A: $\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9 = 48\pi \approx 150,8 \text{ cm}^3$; hasil ukur 150 mL, galat $\approx 0,5\%$. Limas B: $\frac{1}{3} \times 6^2 \times 8 = 96 \text{ cm}^3$; hasil ukur 98 mL, galat $\approx 2,1\%$.

3. Perbandingan hasil ukurmu tidak tepat 3. Sebutkan tiga sumber galat dalam percobaan ini dan cara memperbaikinya.

Kunci: Contoh: rongga di antara butir beras dan cara meratakan yang berbeda-beda; karton punya ketebalan dan sambungan selotip membuat bangun sedikit penyok; puncak kerucut tidak tepat runcing; salah membaca skala gelas ukur. Perbaikan: pakai pasir halus atau beras yang sama, ratakan dengan penggaris, perkuat model dengan karton tebal, baca gelas ukur sejajar mata, dan ulangi percobaan lalu ambil rata-rata.

4. Pasangan C lebih lebar tetapi lebih pendek daripada pasangan A. Apakah perbandingannya tetap sepertiga? Apa syarat agar volume kerucut tepat sepertiga volume tabung?

Kunci: Ya, pasangan C juga sekitar 3 ($465 : 155 = 3,00$). Syaratnya: alas kerucut kongruen dengan alas tabung dan tingginya sama. Jika tingginya berbeda, perbandingannya berubah; misalnya kerucut yang tingginya dua kali tinggi tabung bervolume $\frac{2}{3}$ tabung.

5. Kak Lintang menunjukkan bahwa kubus bersisi 6 cm dapat dibelah menjadi 3 limas yang sama persis: puncak ketiganya di satu titik sudut kubus, dan alasnya tiga sisi kubus yang tidak memuat titik itu. Tunjukkan bahwa fakta ini cocok dengan temuanmu.

Kunci: Setiap limas beralas sisi kubus ($6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$) dan bertinggi 6 cm (jarak puncak ke sisi di seberangnya). Tiga limas yang sama persis mengisi kubus, jadi volume satu limas $= \frac{1}{3} \times 6^3 = 72 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \times 36 \times 6$. Ini sama dengan temuan percobaan: limas sepertiga prisma (di sini kubus) yang alas dan tingginya sama.

6. Bagian dalam kukusan Nenek berbentuk kerucut berjari-jari 15 cm dan bertinggi 30 cm. Berapa liter nasi untuk satu tumpeng? Jika dandangnya tabung berjari-jari 15 cm dan bertinggi 30 cm, cukup untuk berapa tumpeng?

Kunci: Satu tumpeng $= \frac{1}{3} \times \pi \times 15^2 \times 30 = 2.250\pi \approx 7.069 \text{ cm}^3 \approx 7,1 \text{ liter}$. Dandang $= \pi \times 15^2 \times 30 \approx 21,2 \text{ liter} = 3 \text{ kali tumpeng}$, jadi cukup untuk 3 tumpeng (bila kepadatan nasinya sama).

7. Jika jari-jari dan tinggi kerucut A sama-sama dikalikan 2, berapa kali volumenya? Berapa kali luas karton selimutnya? Jelaskan dengan faktor skala.

Kunci: Semua ukuran panjang dikali $k = 2$. Volume menjadi $k^3 = 8$ kali: $\frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times 18 = 384\pi \approx 1.206,4 \text{ cm}^3 = 8 \times 150,8 \text{ cm}^3$. Luas selimut (πrs) menjadi $k^2 = 4$ kali, karena r dan garis pelukis s sama-sama menjadi 2 kali.

✓ Kesimpulan

Tuliskan hubungan volume kerucut dengan tabung dan volume limas dengan prisma (dalam kata-kata dan rumus), syaratnya, serta satu contoh pemakaiannya di dapur atau di sekitarmu.

💡 Refleksi

- Dugaanku sebelum menuang adalah ... dan ternyata ...
- Bagian percobaan yang paling meyakinkanku tentang sepertiga adalah ...
- Wadah berbentuk kerucut atau limas lain di rumahku adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada beras atau karton? Buka Lab Mini "Tuang kerucut ke tabung" di subbab 21.3: atur jari-jari dan tinggi sesuai pasangan A dan C, tekan ► Jalankan, dan hitung berapa kali kerucut dituang sampai tabung penuh. Hitung volumenya dengan Rumus Hidup "Volume tabung (tandon air)" di subbab 21.2 dan "Volume kerucut (tumpeng)" di subbab 21.3. Untuk pertanyaan 7, pakai Rumus Hidup "Perbesaran: luas $\times k^2$, volume $\times k^3$ " di subbab 21.5.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b21-3

📊 Contoh data (beras, gelas ukur dengan skala 5 mL)

Pasangan bangun	Alas (cm)	Tinggi t (cm)	Volume tabung/prisma dihitung (cm^3)	Isi tabung/prisma diukur (mL)	Isi kerucut/limas diukur (mL)	Banyak tuangan sampai penuh	Isi besar ÷ isi kecil
A: tabung & kerucut	lingkaran $r = 4$	9	452,4	445	150	3 (meluap sedikit)	2,97
B: prisma & limas persegi	persegi $s = 6$	8	288,0	285	98	3 (meluap sedikit)	2,91
C: tabung & kerucut pendek	lingkaran $r = 5$	6	471,2	465	155	3 (pas)	3,00

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian membuat model	Keenam bangun dibuat tepat ukuran, sambungan rapat, dan setiap pasangan alasnya berimpit tepat.	Sebagian besar model tepat; ada satu yang sedikit penyok atau bocor.	Beberapa model salah ukuran sehingga pasangannya tidak cocok.	Model belum dapat dipakai untuk percobaan.
Percobaan & pengukuran	Isi diratakan dengan cermat, banyak tuangan dan isi (mL) dicatat lengkap untuk ketiga pasangan.	Data lengkap dengan sedikit ketidaktelitian.	Data hanya untuk satu atau dua pasangan atau kurang cermat.	Tidak ada data yang dapat dipakai.
Perhitungan & penalaran	Menemukan $V = \frac{1}{3}L_{\text{alas}}t$, menghitung galat, menjelaskan bukti kubus, dan memakai k^3 dengan benar.	Menemukan pola sepertiga dan sebagian besar perhitungan benar.	Melihat pola tetapi perhitungan atau alasannya banyak keliru.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & kebersihan	Semua anggota berperan, meja dan lantai bersih, beras dikembalikan utuh.	Kerja sama baik; ada sedikit beras tercecer.	Hanya sebagian anggota yang aktif atau tempat kerja berantakan.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Siapkan cetakan jaring-jaring sebelum pelajaran; membuat model dapat menjadi tugas rumah sehari sebelumnya. Juring kerucut A berjari-jari 9,8 cm dengan sudut $\pm 146^\circ$, juring kerucut C berjari-jari 7,8 cm dengan sudut $\pm 230^\circ$ (sudut = $\frac{r}{s} \times 360^\circ$); beri lidah lem 1 cm. Pasir kering lebih rata daripada beras; air hanya bisa dipakai bila model dilapisi kantong plastik. Kelompok cepat dapat merakit 3 limas penyusun kubus 6 cm untuk pertanyaan 5. Kelompok yang memerlukan bantuan cukup mengerjakan pasangan A dan B.

Matahari Jadi Penggaris: Mengukur Tinggi Tiang Bendera dengan Bayangan

Bab 22 • Kesebangunan & Transformasi Geometri

Eksplorasi lapangan berkelompok (penemuan terbimbing)

SMP kelas IX (juga SMA kelas X)

2 × 40 menit

Model: Discovery learning: amati – ukur – temukan pola – terapkan

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur tinggi dan panjang bayangan beberapa benda, lalu menemukan bahwa perbandingan tinggi : bayangan sama untuk semua benda pada saat yang sama.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa segitiga benda–bayangan–sinar matahari sebangun memakai syarat sudut-sudut (Sd-Sd).
- Peserta didik dapat menghitung tinggi benda yang tak terjangkau dengan faktor skala dan menilai sumber galat pengukurannya.

Cerita pemantik



Senin pagi selesai upacara, Dimas memperhatikan bayangan tiang bendera membentang jauh melintasi lapangan, sementara bayangan Ayu jauh lebih pendek. Pak Joko, penjaga sekolah, ingin mengganti tali bendera yang sudah lapuk, tetapi ia perlu tahu tinggi tiangnya, dan tangga sekolah terlalu pendek untuk mengukurnya. Kak Lintang tersenyum: "Matahari bisa jadi penggaris kalian, asal kalian tahu rahasianya." Ancil sudah menyiapkan sebatang tongkat tepat 1 meter. Bisakah kelompokmu menemukan tinggi tiang itu tanpa memanjat?

? Rumusan masalah

Bagaimana hubungan antara tinggi benda dan panjang bayangannya pada saat yang sama, dan bagaimana hubungan itu dipakai untuk mengukur tinggi tiang bendera tanpa memanjatnya?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Tinggi benda (tongkat, gagang sapu, siswa, tiang, pohon) dan waktu pengukuran	Panjang bayangan dan perbandingan tinggi : bayangan	Tanah datar, benda berdiri tegak, semua bayangan pada satu waktu diukur dalam selang 5 menit, cara mengukur sama

Alat dan bahan

- Tongkat atau bilah bambu lurus tepat 100 cm, 1 buah per kelompok
- Kapur tulis atau batu kecil untuk menandai ujung bayangan
- Meteran gulung 5 m dan meteran kain atau tali rafia
- Cermin kecil berbingkai (cermin bedak) dan selotip
- Bersimpul tiap 1 m sepanjang ± 12 m
- Kalkulator atau HP, papan jalan, dan pensil
- Benang 50 cm dengan mur sebagai unting-unting (untuk memastikan tongkat tegak)

Keselamatan

Jangan pernah menatap matahari secara langsung, juga tidak lewat cermin; cukup amati bayangannya di tanah. Jangan memantulkan cahaya matahari dari cermin ke mata teman. Pakai topi dan bawa air minum. Ukur hanya di halaman sekolah, jauh dari jalan raya dan tempat parkir. Hati-hati dengan meteran gulung yang menutup cepat (bisa menjepit jari) dan ujung tongkat saat dibawa berjalan.

Langkah kerja

1. Pilih pagi yang cerah (sekitar pukul 08.00–09.00) atau sore (sekitar pukul 15.00). Tulis hipotesismu: apakah benda yang dua kali lebih tinggi bayangannya juga dua kali lebih panjang?
2. Waktu 1: tegakkan tongkat 1 m di tanah datar. Periksa dengan unting-unting bahwa tongkat benar-benar tegak. Ukur bayangannya dari kaki tongkat sampai ujung bayangan (s_1), tandai ujungnya dengan kapur, dan catat jam pengukuran.
3. Dalam 5 menit berikutnya, ukur juga bayangan gagang sapu, dua anggota kelompok (berdiri tegak tanpa topi), tiang bendera, dan sebuah pohon atau gedung. Ukur tinggi benda yang bisa dijangkau (gagang sapu dan temanmu).
4. Hitung perbandingan $h : s_1$ untuk benda yang tingginya diketahui (dua desimal).
5. Hitung faktor $k_1 = 100 : s_1$ (tongkat), lalu tinggi hitungan setiap benda = $k_1 \times s_1$. Untuk gagang sapu dan temanmu, bandingkan dengan tinggi aslinya; untuk tiang dan pohon, inilah tinggi yang dicari.
6. Sambil menunggu, coba cara cermin: letakkan cermin mendatar di tanah beberapa meter dari tiang. Mundurlah perlahan (dipandu teman) sampai puncak tiang tampak tepat di tengah cermin. Ukur tinggi matamu, jarakmu ke cermin, dan jarak cermin ke kaki tiang.
7. Waktu 2: sekitar 40 menit setelah waktu 1, ulangi pengukuran semua bayangan (s_2). Hitung $h : s_2$, k_2 , dan tinggi hitungan dari s_2 .

Tabel pengamatan (satuan cm)

Benda	Tinggi diukur h	Bayangan s_1 (waktu 1)	$h : s_1$	Bayangan s_2 (waktu 2)	$h : s_2$	Tinggi hitungan dari s_1 / dari s_2
Tongkat 1 m (pembanding)						
Gagang sapu						
Anggota A						
Anggota B						
Tiang bendera						
Pohon/gedung pilihanmu						

Grafik

Buat diagram titik dengan sumbu mendatar panjang bayangan s_1 dan sumbu tegak tinggi h untuk empat benda yang tingginya diketahui. Tarik garis lurus melalui $(0, 0)$ yang paling dekat dengan titik-titikmu, lalu perpanjang garis itu untuk membaca tinggi tiang dari bayangannya. Ulangi dengan warna lain untuk waktu 2.

Analisis

1. Amati kolom $h : s_1$ untuk benda yang tingginya diketahui. Apa yang kamu temukan? Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Semua nilai $h : s_1$ hampir sama, sekitar 0,75 (contoh: 0,75; 0,75; 0,75). Pada saat yang sama, perbandingan tinggi : bayangan sama untuk semua benda, berapa pun tingginya. Benda dua kali lebih tinggi bayangannya dua kali lebih panjang, jadi hipotesis itu terbukti.

2. Gambar segitiga tongkat–bayangan–sinar matahari dan segitiga tiang–bayangan–sinar matahari. Jelaskan mengapa keduanya sebangun dengan menyebut pasangan sudut yang sama besar.

Kunci: Kedua segitiga punya sudut siku-siku di tanah (benda tegak lurus tanah). Sinar matahari datang sejajar, sehingga sudut antara sinar dan tanah (sudut elevasi matahari) sama besar pada kedua segitiga. Dua pasang sudut sama besar (Sd-Sd), jadi segitiganya sebangun dan sisi-sisi bersesuaian sebanding:

$$\frac{h_{\text{tiang}}}{h_{\text{tongkat}}} = \frac{s_{\text{tiang}}}{s_{\text{tongkat}}}.$$

3. Bandingkan kolom $h : s_1$ dengan $h : s_2$. Mengapa perbandingannya berubah, padahal tinggi tiang hasil hitungan waktu 1 dan waktu 2 hampir sama?

Kunci: Pada waktu 2 matahari lebih tinggi, bayangan lebih pendek, sehingga $h : s$ naik dari sekitar 0,75 menjadi sekitar 1,07. Namun pada setiap waktu semua segitiga tetap sebangun satu sama lain, dan tinggi tiang tidak berubah. Karena itu hitungan waktu 1 (706,8 cm) dan waktu 2 (705,4 cm) hampir sama: dua pengukuran yang saling bebas memberi hasil sama, tanda bahwa caranya dapat dipercaya.

4. Hitung tinggi tiang bendera dari data kelompokmu memakai faktor skala $k = s_{\text{tiang}} : s_{\text{tongkat}}$. Tuliskan langkahnya.

Kunci: Contoh: $k = 940 : 133 \approx 7,07$, jadi $h_{\text{tiang}} \approx 7,07 \times 100 \approx 707 \text{ cm} \approx 7,1 \text{ m}$. Dari waktu 2: $656 : 93 \approx 7,05$, jadi $h \approx 705 \text{ cm}$. Tinggi tiang sekitar 7,1 m.

5. Dimas mengukur bayangan tongkat pada waktu 1, tetapi baru mengukur bayangan tiang pada waktu 2. Dengan contoh data, berapa tinggi tiang menurut Dimas? Apa pelajarannya?

Kunci: Dimas menghitung $100 \times \frac{656}{133} \approx 493 \text{ cm} \approx 4,9 \text{ m}$, meleset sekitar 2,1 m ($\pm 30\%$). Segitiga hanya sebangun bila sudut matahari sama, jadi semua bayangan harus diukur pada waktu yang hampir bersamaan (selisih beberapa menit).

6. Mengapa pengukuran sebaiknya dilakukan pagi atau sore, bukan sekitar pukul 12 siang?

Kunci: Di Indonesia yang dekat khatulistiwa, sekitar tengah hari matahari hampir tegak di atas kepala sehingga bayangan sangat pendek (kadang hanya beberapa sentimeter). Galat ukur 1 cm pada bayangan sependek itu menjadi galat persentase yang sangat besar. Pagi atau sore bayangan cukup panjang sehingga galat relatifnya kecil (tetapi jangan terlalu sore agar ujung bayangan tidak terlalu kabur).

7. Saat mendung, bayangan tidak tampak. Jelaskan mengapa cara cermin juga menghasilkan dua segitiga sebangun. Jika tinggi mata Ayu 148 cm, jaraknya ke cermin 1,9 m, dan jarak cermin ke kaki tiang 9,0 m, berapa tinggi tiang?

Kunci: Sudut datang sama dengan sudut pantul, dan tiang serta tubuh Ayu sama-sama tegak lurus tanah, jadi segitiga mata–kaki Ayu–cermin dan segitiga puncak–kaki tiang–cermin sebangun (Sd-Sd). $\frac{h}{148} = \frac{9,0}{1,9}$, sehingga $h \approx 701 \text{ cm} \approx 7,0 \text{ m}$, cocok dengan cara bayangan.

✓ Kesimpulan

Tuliskan aturan yang kamu temukan tentang tinggi dan bayangan benda pada saat yang sama, alasan kesebangunannya, serta rumus untuk menghitung tinggi benda dari bayangannya. Sertakan tinggi tiang bendera menurut kelompokmu dan seberapa yakin kamu dengan hasil itu.

💡 Refleksi

- Hal yang paling mengejutkanku dari bayangan-bayangan hari ini adalah ...
- Bagian pengukuran yang paling sulit dibuat teliti adalah ... karena ...
- Benda tinggi lain di sekitar rumahku yang ingin kuukur dengan cara ini adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Langit mendung atau tidak bisa ke lapangan? Buka Lab Mini "Pengukur tinggi tanpa memanjat" di Bab 22 (subbab 22.3). Seret matahari ke dua kedudukan berbeda sebagai pengganti waktu 1 dan waktu 2, catat panjang bayangan tongkat dan benda, isi tabel, hitung tingginya, lalu matikan "Rahasiakan" untuk mengecek. Rumus Hidup "Tinggi benda dari bayangannya" di subbab yang sama membantu memeriksa hitunganmu, dan Adu Cepat "Sisi bersesuaian kilat" (subbab 22.2) melatih kelancaran mencari sisi yang bersesuaian.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b22-3

📊 Contoh data (waktu 1 pukul 08.15, waktu 2 pukul 08.55; $k_1 \approx 0,752$, $k_2 \approx 1,075$)

Benda	Tinggi diukur h	Bayangan s_1 (waktu 1)	$h : s_1$	Bayangan s_2 (waktu 2)	$h : s_2$	Tinggi hitungan dari s_1 / dari s_2
Tongkat 1 m (pemanding)	100	133	0,75	93	1,08	— (pemanding)
Gagang sapu	120	160	0,75	112	1,07	120,3 / 120,4
Anggota A (Dimas)	158	211	0,75	147	1,07	158,6 / 158,1
Anggota B (Ayu)	150	200	0,75	140	1,07	150,4 / 150,5
Tiang bendera	? (tak terjangkau)	940	—	656	—	706,8 / 705,4
Pohon mangga	? (tak terjangkau)	574	—	400	—	431,6 / 430,1

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketelitian mengukur di lapangan	Tongkat dipastikan tegak, semua bayangan pada satu waktu diukur dalam 5 menit dan dicatat sampai 1 cm.	Pengukuran umumnya teliti, ada satu bayangan yang diukur terlambat atau kurang cermat.	Beberapa pengukuran tidak konsisten (tongkat miring atau waktu berjauhan).	Data tidak lengkap atau tidak dapat dipakai.
Perhitungan perbandingan & tinggi	Semua perbandingan, faktor k , dan tinggi hitungan benar dan tabel rapi.	Ada 1-2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan hitung atau tertukar antara $h : s$ dan $s : h$.	Tabel hampir kosong.
Penalaran kesebangunan	Menjelaskan Sd-Sd dengan sinar sejajar dan sudut siku-siku, serta alasan pengukuran harus serentak.	Menyebut segitiga sebangun dengan alasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan kesebangunan.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & keselamatan	Semua anggota berperan, aturan keselamatan dipatuhi (tidak menatap matahari, cermin tidak diarahkan ke mata).	Kerja sama baik dengan sedikit pengingat.	Hanya sebagian anggota aktif atau perlu sering ditegur.	Kelompok tidak bekerja sama atau mengabaikan keselamatan.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Cek prakiraan cuaca dan rencanakan waktu 1 di awal pelajaran serta waktu 2 di akhir (selisih minimal 35 menit agar perubahan perbandingannya terlihat). Bayangan tiang bisa lebih dari 9 m, jadi siapkan meteran panjang atau tali rafia bersimpul tiap meter. Ujung bayangan tiang tampak kabur; sepakati untuk menandai bagian tengah daerah kabur itu. Diferensiasi: kelompok yang cepat mengerjakan cara cermin dan menggambar grafik kedua waktu; kelompok yang perlu bantuan cukup memakai tongkat, satu teman, dan tiang. Kaitkan dengan contoh "Bayangan Monas" di subbab 22.3.

Harta Karun di Lantai Ubin: Menjumlah Vektor dengan Melangkah

Bab 23 • Geometri Koordinat & Vektor

Permainan matematika + eksplorasi berkelompok

SMA kelas X-XI

2 x 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing: melangkah – mencatat – menemukan aturan – menguji

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menyatakan perpindahan di lantai ubin sebagai vektor dan menemukan bahwa resultan dua vektor diperoleh dengan menjumlahkan komponennya, serta $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Peserta didik dapat menghitung panjang vektor dengan $\sqrt{x^2 + y^2}$, membandingkannya dengan hasil ukur, dan membedakannya dari jarak taksi.
- Peserta didik dapat memakai kombinasi linear dua vektor untuk mencapai titik sasaran.

Cerita pemantik



Ancil menyembunyikan sebungkus permen di bawah salah satu ubin aula sekolah. Petunjuknya hanya: "Dari pojok pintu, jalankan (3, 1), lalu (0, 3)." Dimas melangkah sesuai urutan, sedangkan Ayu sengaja membalik urutannya. Anehnya, mereka tiba di ubin yang sama! Kak Lintang lalu bertanya: "Berapa jauh harta itu dari pintu kalau ditarik garis lurus? Dan berapa jauh kalau kalian hanya boleh berjalan mengikuti garis-garis ubin, seperti ojek di kota yang jalannya kotak-kotak?"

? Rumusan masalah

Bagaimana cara menentukan titik ujung dan panjang perpindahan bila dua vektor dijalankan berturut-turut, dan apakah urutan menjalankannya berpengaruh?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Lantai ubin persegi di kelas, koridor, atau aula (atau petak kapur 50 cm x 50 cm di lapangan)
- 2 koin atau tutup botol sebagai penanda titik ujung
- Tali rafia ±3 m dan meteran gulung 3–5 m
- Selotip kertas untuk menandai titik asal O dan arah sumbu
- Kertas berpetak, pensil warna, dan kalkulator

! Keselamatan

Geser meja dan kursi bersama-sama dengan hati-hati, jangan diseret sendirian. Melangkahlah perlahan, jangan berlari atau berjalan mundur tanpa melihat. Pastikan lantai kering karena ubin basah licin. Jaga jarak dari kelompok lain saat merentangkan tali, dan lepaskan semua selotip setelah selesai.

Langkah kerja

1. Sepakati satu sisi ubin sebagai satuan, lalu ukur sisi ubin dalam cm. Tandai sebuah pojok ubin sebagai titik asal O dengan selotip, dan tandai arah sumbu x positif serta sumbu y positif (tegak lurus, berlawanan arah jarum jam dari sumbu x).

2. Tulis hipotesismu: apakah urutan menjalankan dua vektor mengubah titik akhirnya?
3. Percobaan 1: berdiri di O, jalankan $\vec{a} = (3, 1)$ (3 ubin searah sumbu x , lalu 1 ubin searah sumbu y), kemudian dari situ jalankan $\vec{b} = (0, 3)$. Letakkan koin di titik akhir dan catat koordinatnya.
4. Kembali ke O, jalankan $\vec{b}$ dulu, baru $\vec{a}$. Letakkan koin kedua dan catat titik akhirnya.
5. Rentangkan tali rafia lurus dari O ke koin, ukur panjangnya dengan meteran (cm), lalu bagi dengan sisi ubin untuk mendapat jarak lurus dalam satuan ubin.
6. Hitung $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan jarak taksi $|x| + |y|$ dari koordinat titik akhir.
7. Ulangi untuk percobaan 2: $(4, -1)$ dan $(2, 1)$; percobaan 3: $(2, 5)$ dan $(3, -1)$; percobaan 4: $(-2, 3)$ dan $(6, 1)$; percobaan 5: $(1, 2)$ dan $(2, 4)$.
8. Gambar semua rute pada kertas berpetak sesuai petunjuk grafik.

Tabel pengamatan (satuan: ubin, kecuali disebutkan)

No	Vektor a	Vektor b	Ujung: a lalu b	Ujung: b lalu a	Jarak lurus diukur (cm)	Jarak lurus (ubin)	$\sqrt{x^2 + y^2}$	Jarak taksi $ x + y $
1								
2								
3								
4								
5								

Grafik

Pada kertas berpetak, gambar untuk setiap percobaan panah $\vec{a}$ yang disambung panah $\vec{b}$ (satu warna) dan panah $\vec{b}$ yang disambung panah $\vec{a}$ (warna lain), keduanya dari O, lalu panah resultan dari O ke titik akhir. Bangun apa yang terbentuk oleh dua rute itu?

Analisis

1. Bandingkan kolom "Ujung: a lalu b" dan "Ujung: b lalu a". Apa yang kamu temukan? Bangun apa yang terbentuk oleh dua rute pada gambarmu? Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Titik akhirnya selalu sama, jadi urutan tidak berpengaruh: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (sifat komutatif). Kedua rute membentuk sisi-sisi sebuah jajargenjang, dan resultannya adalah diagonal jajargenjang itu. Hipotesis "urutan tidak berpengaruh" terbukti.

2. Tanpa melangkah, bagaimana cara menentukan titik akhir dari $\vec{a}$ dan $\vec{b}$? Uji aturanmu untuk $\vec{a} = (-3, 2)$ dan $\vec{b} = (5, 4)$, lalu buktikan dengan melangkah.

Kunci: Jumlahkan komponen yang bersesuaian: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Untuk $(-3, 2) + (5, 4) = (2, 6)$.

3. Bandingkan jarak lurus hasil ukur (dalam ubin) dengan $\sqrt{x^2 + y^2}$. Mengapa Teorema Pythagoras berlaku di sini?

Kunci: Hasilnya hampir sama (contoh: 5,03 dan 5,00; 6,43 dan 6,40). Komponen x dan y berjalan sepanjang garis-garis ubin yang saling tegak lurus, sehingga keduanya menjadi kaki segitiga siku-siku dan perpindahan lurusnya menjadi sisi miring: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Selisih kecil berasal dari tali yang kurang tegak atau pembacaan meteran.

4. Apakah jarak taksi selalu lebih besar atau sama dengan jarak lurus? Kapan keduanya sama? Mengapa ojek di kota bergrid menempuh jarak taksi?

Kunci: Ya. $(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2$, jadi $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Keduanya sama hanya jika salah satu komponen nol (percobaan 2: titik akhir (6, 0), keduanya 6). Ojek harus mengikuti jalan yang berpola kotak-kotak, sehingga tidak bisa memotong lurus.

5. Untuk percobaan 3 dan 5, hitung $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, dan $|\vec{a}| + |\vec{b}|$, lalu bandingkan dengan $|\vec{a} + \vec{b}|$. Kapan $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

Kunci: Percobaan 3: $|\vec{a}| = \sqrt{29} \approx 5,39$, $|\vec{b}| = \sqrt{10} \approx 3,16$, jumlahnya $\approx 8,55 > |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{41} \approx 6,40$. Percobaan 5: $\sqrt{5} + \sqrt{20} \approx 2,24 + 4,47 = 6,71 = \sqrt{45} = |\vec{a} + \vec{b}|$. Kesamaan hanya terjadi bila kedua vektor searah ($\vec{b} = 2\vec{a}$); selain itu berlaku ketaksamaan segitiga $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

6. Tantangan harta karun: Kak Lintang menyembunyikan koin di ubin (7, 2). Kamu hanya boleh memakai jurus $\vec{a} = (2, 1)$ dan $\vec{b} = (1, -1)$, masing-masing berkali-kali (boleh mundur). Berapa kali setiap jurus dipakai? Buktikan dengan melangkah.

Kunci: $m(2, 1) + n(1, -1) = (7, 2)$ memberi $2m + n = 7$ dan $m - n = 2$. Dijumlahkan: $3m = 9$, jadi $m = 3$ dan $n = 1$. Jalankan $\vec{a}$ tiga kali lalu $\vec{b}$ sekali: $(6, 3) + (1, -1) = (7, 2)$.

7. Sebuah feri melaju 4 m/s ke utara terhadap air, sedangkan arus menghanyutkannya 3 m/s ke timur. Berapa kelajuan feri terhadap dasar laut dan ke mana arahnya? Kaitkan dengan percobaan 1.

Kunci: Kecepatan terhadap dasar laut = (3, 4) m/s (timur, utara), panjangnya $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m/s, sama seperti resultan percobaan 1. Arahnya condong $\tan^{-1} \frac{3}{4} \approx 37^\circ$ dari utara ke timur (bearing $\pm 037^\circ$).

✓ Kesimpulan

Tuliskan aturan menjumlahkan dua vektor dalam bentuk komponen, sifat urutan penjumlahan yang kamu temukan, rumus panjang vektor, dan perbedaan jarak lurus dengan jarak taksi.

💡 Refleksi

- Saat melangkah di lantai ubin, aku jadi paham bahwa vektor itu ...
- Kesalahan yang hampir kulakukan saat menghitung adalah ...
- Aku bisa memakai penjumlahan vektor untuk ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak bisa memakai lantai ubin? Buka Lab Mini "Harta karun Ancil: hanya dua jurus" di Bab 23 (subbab 23.4) untuk tantangan pertanyaan 6, dan Grafik Hidup "Resultan dua vektor: $\vec{a} + k\vec{b}$ " di subbab yang sama: atur $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ sesuai tabel (dengan $k = 1$), lalu catat resultan dan panjangnya. Grafik Hidup "Titik tengah, jarak lurus, dan jarak ojek" (subbab 23.1) membantu membandingkan jarak lurus dengan jarak taksi, dan Lab Mini "Feri menyeberangi Selat Sunda" (subbab 23.4) cocok untuk pertanyaan 7.

Contoh data (sisi ubin 30 cm)

No	Vektor a	Vektor b	Ujung: a lalu b	Ujung: b lalu a	Jarak lurus diukur (cm)	Jarak lurus (ubin)	$\sqrt{x^2 + y^2}$	Jarak taksi $ x + y $
1	$(3, 1)$	$(0, 3)$	$(3, 4)$	$(3, 4)$	151	5,03	5,00	7
2	$(4, -1)$	$(2, 1)$	$(6, 0)$	$(6, 0)$	180	6,00	6,00	6
3	$(2, 5)$	$(3, -1)$	$(5, 4)$	$(5, 4)$	193	6,43	6,40	9
4	$(-2, 3)$	$(6, 1)$	$(4, 4)$	$(4, 4)$	169	5,63	5,66	8
5	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(3, 6)$	$(3, 6)$	202	6,73	6,71	9

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketepatan melangkah & mengukur	Semua vektor dijalankan tepat sesuai komponen dan arahnya, jarak lurus diukur dengan tali tegang.	Ada satu langkah atau pengukuran yang perlu diulang.	Beberapa titik akhir salah karena tanda negatif atau arah sumbu tertukar.	Data tidak dapat dipakai.
Perhitungan komponen & panjang	Titik akhir, $\sqrt{x^2 + y^2}$, jarak taksi, dan konversi cm ke ubin semuanya benar.	Ada 1-2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan, misalnya menjumlahkan panjang alih-alih komponen.	Tabel hampir kosong.
Penemuan aturan & penalaran	Menemukan sifat komutatif, aturan penjumlahan komponen, dan menjelaskan ketaksamaan segitiga dengan alasan tepat.	Menemukan aturan dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut aturan tanpa alasan atau ada miskonsepsi ($ \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} $ selalu).	Belum menemukan aturan.
Kerja sama & komunikasi	Peran (pelangkah, pencatat, pengukur, penggambar) bergiliran; gambar vektor rapi dan berlabel.	Kerja sama baik, gambar cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = $(\text{jumlah skor} \div 16) \times 100$.

Catatan guru

Sebelum pelajaran, pastikan ubin cukup luas: titik O sebaiknya di tengah ruang agar komponen negatif bisa dijalankan. Jika ubin tidak persegi atau terlalu kecil, buat petak kapur 50 cm di lapangan. Kesalahan yang sering muncul: menjalankan y lebih dulu dan tertukar arah negatif; minta pencatat membacakan komponen keras-keras. Diferensiasi: kelompok cepat mencari apakah setiap ubin bisa dicapai dengan jurus $(2, 1)$ dan

$(1, -1)$ memakai bilangan bulat (tidak; hanya titik dengan $x + y$ kelipatan 3), kelompok lain cukup percobaan 1–3 dan pertanyaan 1–4.

Klinometer Sedotan: Mengukur Tinggi Tiang Bendera dengan Tangen

Bab 24 · Trigonometri Segitiga Siku-siku

Proyek mini: membuat dan memakai alat ukur sendiri

SMP kelas IX – SMA kelas X

2 × 45 menit

Model: PjBL singkat + discovery learning: buat alat – ukur – temukan pola – terapkan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat membuat klinometer dari busur, sedotan, benang, dan mur, lalu membaca sudut elevasi dengan benar ($\theta = 90^\circ - \text{bacaan}$).
- Peserta didik dapat menemukan dari data bahwa $d \times \tan \theta$ tetap walaupun jarak d berubah, dan memakainya untuk menghitung tinggi benda.
- Peserta didik dapat menilai pengaruh galat sudut dan memilih posisi pengukuran yang paling andal.

Cerita pemantik



Saat berlibur ke Jakarta, Dimas berdiri di pelataran Monas dan bertanya-tanya: "Bagaimana orang tahu tingginya 132 meter? Masa diukur dengan meteran dari puncak?" Di sekolah, Kak Lintang memberi tantangan: ukur tinggi tiang bendera hanya dengan busur, sedotan, benang, dan sebuah mur. Ayu ragu: "Kalau aku berdiri lebih jauh, sudutnya kan berubah. Apa hasilnya tetap sama?" Ancil berbisik soal trik rahasia: "Carilah tempat ketika sudutnya tepat 45° ..."

Rumusan masalah

Bagaimana sudut elevasi ke puncak sebuah benda berubah ketika kita menjauh, dan bagaimana tangen sudut itu dipakai untuk menghitung tinggi benda yang tidak terjangkau?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Jarak pengamat ke kaki tiang d	Sudut elevasi θ (dan $\tan \theta$)	Tiang yang dibidik, pengamat yang sama (tinggi mata tetap), tanah datar, cara membaca busur

Alat dan bahan

- Busur derajat plastik 180° , 1 buah per kelompok
- Sedotan plastik lurus, benang jahit ± 25 cm, mur atau penghapus kecil sebagai beban, dan selotip
- Meteran kain atau meteran gulung ≥ 15 m (atau tali rafia bersimpul tiap 1 m)
- Kapur atau batu kecil untuk menandai posisi
- Kalkulator ilmiah atau HP (mode derajat/DEG)
- Penggaris 30 cm dan kertas untuk segitiga pemanasan

Keselamatan

Jangan pernah membidik matahari lewat sedotan atau menatap matahari. Bidik puncak benda saja; jika matahari tepat di belakang puncak, pindah ke sisi lain. Saat mundur sambil membidik, seorang teman

memegang bahu dan memandu, dan jangan mundur ke arah selokan, jalan, atau tiang lain. Pakai topi, minum cukup, dan jangan memanjat benda apa pun.

Langkah kerja

1. Buat klinometer: rekatkan sedotan sepanjang sisi lurus busur. Ikat benang di lubang titik pusat busur dan gantungkan mur di ujungnya. Periksa: saat sedotan mendatar, benang menunjuk angka 90° .
2. Pemanasan di kertas: gambar tiga segitiga siku-siku dengan sudut 35° dan sisi samping 4 cm, 8 cm, dan 12 cm. Ukur sisi depan masing-masing, lalu hitung depan : samping. Tulis hipotesismu tentang apa yang terjadi pada sudut elevasi dan pada hasil hitungan tinggi bila kamu menjauh.
3. Di lapangan, ukur tinggi mata t pengamat (dari tanah ke mata). Dengan meteran, tandai posisi 5 m, 8 m, 11 m, dan 14 m dari kaki tiang bendera di tanah yang datar.
4. Di setiap posisi, bidik puncak tiang lewat sedotan. Tahan benang dengan jari saat sudah diam, lalu teman membaca angka yang ditunjuk benang. Hitung sudut elevasi $\theta = 90^\circ - \text{bacaan}$. Bidik dua kali dan ambil rata-ratanya.
5. Hitung $\tan \theta$, $d \times \tan \theta$, dan tinggi tiang $h = d \tan \theta + t$. Bandingkan hasil dari keempat posisi.
6. Pilih satu benda tinggi lain (pohon kelapa, gedung, atau menara masjid). Ukur jarakmu ke kakinya dan sudut elevasinya, lalu hitung tingginya (baris 5).
7. Coba trik Ancil: mundur atau maju sampai sudut elevasi tepat 45° , ukur jaraknya, dan bandingkan $d + t$ dengan hasil hitunganmu.

Tabel pengamatan (jarak dan tinggi dalam meter)

Posisi	Jarak d (m)	Bacaan busur ($^\circ$)	Sudut elevasi θ ($^\circ$)	$\tan \theta$	$d \times \tan \theta$ (m)	Tinggi mata t (m)	Tinggi $h = d \tan \theta + t$ (m)
1							
2							
3							
4							
5 (benda pilihan)							

Grafik

Untuk posisi 1–4, buat diagram titik dengan sumbu mendatar $\frac{1}{d}$ dan sumbu tegak $\tan \theta$. Apakah titik-titiknya hampir segaris dan melalui $(0, 0)$? Tentukan gradien garisnya dan jelaskan artinya.

Analisis

1. Pada segitiga pemanasan bersudut 35° , berapa perbandingan depan : samping? Mengapa nilainya sama walaupun ukuran segitiganya berbeda? Bandingkan dengan $\tan 35^\circ$ pada kalkulator.

Kunci: Sisi depannya sekitar 2,8 cm, 5,6 cm, dan 8,4 cm, sehingga perbandingannya selalu $\approx 0,70$. Ketiga segitiga sebangun (sudut 90° dan 35° sama), jadi perbandingan sisi bersesuaiannya sama. $\tan 35^\circ \approx 0,700$: $\tan$ hanya bergantung pada sudut, bukan pada ukuran segitiga.

2. Semakin jauh kamu berdiri, apa yang terjadi pada sudut elevasi dan $\tan \theta$? Bagaimana dengan $d \times \tan \theta$? Jelaskan mengapa. Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Sudut elevasi turun ($55^\circ \rightarrow 27^\circ$) dan $\tan \theta$ ikut turun, tetapi $d \times \tan \theta$ tetap sekitar 7,1 m. Hasil kali itu adalah bagian tiang di atas mata ($h - t$), yang tidak bergantung pada tempat kita berdiri; jadi $\tan \theta = \frac{h - t}{d}$ berbanding terbalik dengan d . Tinggi tiang dari keempat posisi hampir sama (rata-rata $\approx 8,54$ m).

3. Mengapa tinggi mata t harus ditambahkan? Berapa persen kesalahannya bila lupa?

Kunci: Segitiga siku-siku yang dibidik dimulai dari mata, bukan dari tanah, sehingga $d \tan \theta$ hanya mengukur bagian tiang di atas mata. Jika lupa, hasilnya sekitar 7,1 m alih-alih 8,5 m, kurang $\frac{1,45}{8,54} \approx 17\%$.

4. Saat sudut elevasi 55° , benang menunjuk 35° . Jelaskan dengan gambar mengapa $\theta = 90^\circ - \text{bacaan}$.

Kunci: Benang selalu tegak (ditarik gravitasi), sedangkan busur ikut berputar bersama sedotan. Saat sedotan mendatar, benang tegak lurus sisi lurus busur sehingga menunjuk 90° . Jika sedotan mendongak θ , sisi lurus busur ikut miring θ , sehingga sudut antara benang dan sisi lurus menjadi $90^\circ - \theta$. Jadi bacaan $= 90^\circ - \theta$, atau $\theta = 90^\circ - \text{bacaan}$ (pada sisi skala lainnya, $\theta = \text{bacaan} - 90^\circ$).

5. Andaikan bacaan sudut meleset 1° di setiap posisi (mis. 56° alih-alih 55°). Hitung perubahan tinggi tiang untuk keempat posisi. Posisi mana yang paling tahan terhadap galat? Kaitkan dengan trik Ancil.

Kunci: Perubahan tinggi $= d(\tan(\theta + 1^\circ) - \tan \theta)$: posisi 1 $\approx 0,27$ m, posisi 2 $\approx 0,25$ m, posisi 3 $\approx 0,28$ m, posisi 4 $\approx 0,31$ m. Galat terkecil pada posisi 2 (sudut 41° , paling dekat dengan 45°); sudut yang sangat curam atau sangat landai lebih peka. Trik Ancil: pada 45° , $\tan 45^\circ = 1$, jadi $h = d + t$ tanpa kalkulator, dan posisinya termasuk yang paling tahan galat.

6. Hitung tinggi pohon kelapa pada baris 5. Jika pohon itu dibidik dari jarak 20 m, berapa sudut elevasi yang seharusnya terbaca?

Kunci: $h = 10 \times \tan 58^\circ + 1,45 \approx 10 \times 1,600 + 1,45 \approx 17,45$ m. Dari 20 m: $\tan \theta = \frac{16,00}{20} \approx 0,800$, jadi $\theta \approx 38,7^\circ$ (benang menunjuk sekitar $51,3^\circ$).

7. Dari sudut elevasi posisi 1, hitung $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ (tiga desimal), lalu $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$. Apa yang kamu dapat, dan mengapa?

Kunci: $\sin 55^\circ \approx 0,819$ dan $\cos 55^\circ \approx 0,574$; $0,819^2 + 0,574^2 \approx 0,671 + 0,329 = 1,000$. Selalu 1, karena $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{\text{depan}^2 + \text{samping}^2}{\text{miring}^2} = 1$ menurut Teorema Pythagoras.

✓ Kesimpulan

Tuliskan rumus tinggi benda dari jarak, sudut elevasi, dan tinggi mata; jelaskan mengapa hasilnya tidak bergantung pada posisi berdiri; lalu sebutkan tinggi tiang bendera menurut kelompokmu beserta posisi yang paling kamu percaya.

💬 Refleksi

- Saat pertama kali membidik puncak tiang, aku merasa ...
- Sekarang aku paham bahwa tangen sebuah sudut sebenarnya adalah ...
- Bangunan di daerahku yang ingin kuukur dengan klinometer adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak bisa ke luar kelas? Buka Lab Mini "Klinometer: ukur tinggi Monas, menara, dan pohon kelapa" di Bab 24 (subbab 24.6). Pilih benda, atur jarak ke empat nilai berbeda, bidik puncaknya, catat bacaan busur, hitung tingginya, lalu nyalakan "Ungkap tinggi sebenarnya" untuk mengecek. Untuk pemanasan, pakai Lab Mini "Segitiga ajaib: seret sudutnya!" (subbab 24.1): tahan sudut 35° , ubah ukurannya saja, dan amati $\tan \theta$. Rumus Hidup "Tinggi benda dari sudut elevasi" (subbab 24.4) membantu memeriksa hitunganmu.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b24-6

Contoh data (tiang bendera; pengamat dengan tinggi mata 1,45 m)

Posisi	Jarak d (m)	Bacaan busur ($^\circ$)	Sudut elevasi θ ($^\circ$)	$\tan \theta$	$d \times \tan \theta$ (m)	Tinggi mata t (m)	Tinggi $h = d \tan \theta + t$ (m)
1	5	35	55	1,428	7,14	1,45	8,59
2	8	49	41	0,869	6,95	1,45	8,40
3	11	57	33	0,649	7,14	1,45	8,59
4	14	63	27	0,510	7,13	1,45	8,58
5 (pohon kelapa)	10	32	58	1,600	16,00	1,45	17,45

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Pembuatan & pemakaian klinometer	Klinometer berfungsi baik, bacaan diubah ke sudut elevasi dengan benar, setiap sudut dibidik dua kali.	Klinometer berfungsi, ada satu bacaan yang kurang cermat.	Sering lupa mengubah bacaan menjadi 90° – bacaan atau benang tidak dibiarkan diam.	Klinometer tidak dapat dipakai.
Perhitungan trigonometri	$\tan \theta$, $d \tan \theta$, dan h benar di semua baris (kalkulator mode derajat), tinggi mata ditambahkan.	Ada 1–2 kesalahan kecil.	Banyak kesalahan, mis. kalkulator mode radian atau tinggi mata lupa ditambahkan.	Perhitungan hampir tidak ada.
Penemuan pola & analisis galat	Menjelaskan mengapa $d \tan \theta$ tetap, memakai grafik $\tan \theta$ terhadap $\frac{1}{d}$, dan memilih posisi paling andal dengan alasan.	Menemukan pola dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & keselamatan	Peran pembidik, pembaca, pengukur jarak, dan pencatat bergiliran; tidak ada yang membidik matahari.	Kerja sama baik dengan sedikit pengingat.	Hanya sebagian anggota aktif atau aturan keselamatan sering dilanggar.	Kelompok tidak bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Buat satu klinometer contoh sebelum pelajaran. Kesalahan paling umum adalah memakai bacaan busur langsung sebagai sudut elevasi (lihat Awas Jebakan di subbab 24.6) dan kalkulator dalam mode radian. Jika tiang bendera terlalu pendek, pakai gedung sekolah atau pohon; jaraknya boleh diubah asalkan ada empat jarak berbeda. Diferensiasi: kelompok cepat mencoba metode dua sudut tanpa mengukur jarak ke kaki benda (contoh "Dua sudut, satu menara", subbab 24.4) atau membandingkan hasilnya dengan cara bayangan di Bab 22; kelompok yang perlu bantuan cukup tiga posisi dan pertanyaan 1–3.

Mathpedia · LKPD Bab 24 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Segitiga Rafia di Lapangan: Menemukan Bilangan Rahasia Aturan Sinus

Bab 25 · Aturan Sinus, Kosinus & Luas Segitiga

Eksplorasi lapangan berkelompok (penemuan terbimbing)

SMA kelas X-XI



3 × 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing: ukur – hitung – temukan konstanta – terapkan (triangulasi)

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur sisi dan sudut segitiga besar di lapangan, lalu menemukan bahwa $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ pada segitiga lancip, siku-siku, dan tumpul.
- Peserta didik dapat memeriksa aturan kosinus dari data dan menjelaskan mengapa Teorema Pythagoras adalah kasus khususnya.
- Peserta didik dapat memakai aturan sinus untuk menghitung jarak ke titik yang tak terjangkau (triangulasi) dan mengenali kasus ambigu.
- Peserta didik dapat memilih aturan yang tepat berdasarkan data yang diketahui.

Cerita pematik



Di belakang sekolah ada selokan besar, dan di seberangnya tumbuh pohon ketapang tempat burung-burung bersarang. Dimas ingin tahu jarak pohon itu tanpa menyeberang. Ayu mencoba trik sin-cos-tan dari Bab 24, tetapi gagal: segitiga yang terbentuk tidak siku-siku! Kak Lintang bercerita bahwa para juru ukur dulu memetakan Pulau Jawa dengan jaring-jaring segitiga tanpa harus mendatangi setiap puncak gunung. Ancil berbisik: "Setiap segitiga menyimpan satu bilangan rahasia. Bagilah sebuah sisi dengan sinus sudut di hadapannya, lalu lihat apa yang terjadi!"

? Rumusan masalah

Adakah hubungan tetap antara panjang sisi dan sinus sudut di hadapannya pada sembarang segitiga, dan bagaimana hubungan itu dipakai untuk mengukur jarak ke tempat yang tak terjangkau?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Bentuk dan ukuran segitiga (lancip, siku-siku, tumpul)	Nilai $a : \sin A$, $b : \sin B$, dan $c : \sin C$	Tanah datar, rafia selalu tegang, alat ukur sudut dan meteran yang sama

Alat dan bahan

- Tali rafia ± 30 m (dipotong sesuai kebutuhan)
- 4 botol plastik 1,5 L berisi pasir atau air sebagai titik sudut (pengganti pasak)
- Meteran kain atau meteran gulung ≥ 10 m
- Busur besar dari kardus (jari-jari ± 20 cm, skala 0° – 180° digambar dengan busur kecil), 1 per kelompok
- Kapur, papan jalan, dan kalkulator ilmiah atau HP (mode derajat)

Keselamatan

Pakai botol berisi pasir sebagai titik sudut, bukan pasak runcing. Rentangkan rafia rendah dekat tanah dan beri tahu teman di sekitar agar tidak tersandung; jangan berlari di antara tali. Jangan menyeberangi selokan, pagar, atau jalan untuk mendekati sasaran (justru itulah gunanya triangulasi). Pakai topi, minum cukup, dan jangan menatap matahari saat membidik.

Langkah kerja

1. Buat segitiga 1 (lancip): letakkan tiga botol sebagai titik A, B, C dengan sisi-sisi sekitar 5–7 m, lalu hubungkan dengan rafia yang tegang. Beri label: sisi a berhadapan dengan sudut A , dan seterusnya.
2. Ukur ketiga sisi dengan meteran (ketelitian 0,01 m). Ukur ketiga sudut dengan busur kardus: letakkan pusat busur tepat di titik sudut dan garis 0° berimpit dengan salah satu rafia. Periksa: jumlah ketiga sudut harus $180^\circ \pm 2^\circ$; jika tidak, ukur ulang.
3. Tulis hipotesismu, lalu hitung $a : \sin A$, $b : \sin B$, dan $c : \sin C$ (dua desimal).
4. Ulangi untuk segitiga 2 (siku-siku, mis. 4,5 m – 6 m – 7,5 m) dan segitiga 3 (tumpul, mis. sudut C lebih dari 120°).
5. Triangulasi: di tepi selokan, pasang botol A dan B berjarak 10 m (garis dasar c). Dengan busur kardus, ukur sudut A antara garis dasar dan arah bidikan ke pohon, lalu sudut B dengan cara yang sama. Hitung sudut C di pohon, lalu jarak $a = BC$ dan $b = AC$ dengan aturan sinus.
6. Lengan yang berayun: pasang botol A dan C berjarak $b = 6$ m. Dari A , rentangkan rafia panjang sebagai garis dasar yang membentuk sudut 40° dengan AC . Ikat rafia sepanjang $a = 4,5$ m di C , lalu ayunkan ujungnya. Tandai setiap titik B tempat ujung rafia menyentuh garis dasar dan ukur AB .
7. Kembali ke kelas, lengkapi tabel dan kerjakan pertanyaan analisis.

Tabel pengamatan (sisi dalam meter, sudut dalam derajat)

Segitiga	a (m)	b (m)	c (m)	$\angle A$ ($^\circ$)	$\angle B$ ($^\circ$)	$\angle C$ ($^\circ$)	$a : \sin A$	$b : \sin B$	$c : \sin C$
1 (lancip)									
2 (siku-siku)									
3 (tumpul)									
4 (triangulasi pohon)									

Grafik

Gambar sketsa berskala (mis. 1 cm : 1 m) dari segitiga triangulasi dan dari dua kemungkinan segitiga pada percobaan lengan berayun. Tandai sisi dan sudut yang diukur dengan warna berbeda dari yang dihitung.

Analisis

1. Bandingkan ketiga nilai $a : \sin A$, $b : \sin B$, dan $c : \sin C$ dalam satu segitiga. Pola apa yang kamu temukan? Apakah berlaku juga untuk segitiga tumpul? Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Dalam setiap segitiga, ketiga nilai hampir sama (selisih kurang dari 1–2%, akibat galat ukur sudut).

Polanya juga berlaku untuk segitiga tumpul ($\sin 125^\circ = \sin 55^\circ$). Inilah aturan sinus: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

2. Bilangan rahasia itu berbeda dari satu segitiga ke segitiga lain. Pada segitiga siku-siku, bilangan itu sama dengan sisi yang mana? Apa artinya secara geometri? (Petunjuk: lingkaran yang melalui ketiga titik sudut.)

Kunci: Pada segitiga siku-siku, $\sin 90^\circ = 1$, jadi bilangan itu sama dengan sisi miring (7,50 m). Secara umum bilangan itu adalah diameter lingkaran luar segitiga, $2R$. Pada segitiga siku-siku, sisi miring adalah diameter lingkaran luarnya (Teorema Thales). Segitiga yang lebih besar punya lingkaran luar yang lebih besar, sehingga bilangannya berbeda-beda.

3. Untuk setiap segitiga, hitung $a^2 + b^2 - c^2$ dan $2ab \cos C$. Apa yang kamu temukan? Apa yang terjadi pada segitiga siku-siku, dan apa artinya tanda negatif pada segitiga tumpul?

Kunci: Segitiga 1: $25 + 36 - 49 = 12$ dan $60 \cos 79^\circ \approx 11,45$. Segitiga 2: $20,25 + 36 - 56,25 = 0$ dan $2ab \cos 90^\circ = 0$. Segitiga 3: $16 + 25 - 64 = -23$ dan $40 \cos 125^\circ \approx -22,94$. Keduanya hampir sama, jadi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (aturan kosinus). Untuk $C = 90^\circ$ koreksinya nol, sehingga menjadi Teorema Pythagoras. Untuk C tumpul $\cos C < 0$, sehingga c^2 lebih besar dari $a^2 + b^2$.

4. Hitung jarak dari botol A dan B ke pohon pada baris 4. Mengapa sudut C harus dihitung lebih dulu?

Kunci: $\angle C = 180^\circ - 68^\circ - 74^\circ = 38^\circ$. $b = AC = \frac{10 \sin 74^\circ}{\sin 38^\circ} \approx 15,61$ m dan $a = BC = \frac{10 \sin 68^\circ}{\sin 38^\circ} \approx 15,06$ m. Sudut C diperlukan karena aturan sinus memasangkan sisi dengan sudut di hadapannya, dan sisi yang diketahui ($c = AB$) berhadapan dengan C .

5. Pada percobaan lengan berayun, hitung kedua kemungkinan sudut B dan panjang AB , lalu bandingkan dengan hasil ukurmu. Kapan lengan hanya menyentuh garis dasar sekali, atau tidak sama sekali?

Kunci: $\sin B = \frac{6 \sin 40^\circ}{4,5} \approx 0,857$, jadi $B_1 \approx 59,0^\circ$ atau $B_2 \approx 121,0^\circ$. Maka $C \approx 81,0^\circ$ atau $19,0^\circ$, dan $AB = \frac{4,5 \sin C}{\sin 40^\circ} \approx 6,91$ m atau $2,28$ m. Dua segitiga terjadi karena $b \sin A \approx 3,86 < a = 4,5 < b = 6$. Lengan menyentuh sekali jika $a = b \sin A$ (siku-siku) atau $a \geq b$, dan tidak menyentuh jika $a < b \sin A$.

6. Hitung luas segitiga 1 dengan rumus $\frac{1}{2}ab \sin C$, lalu periksa dengan rumus Heron. Mengapa rumus $\frac{1}{2}ab \sin C$ praktis untuk lahan di lapangan?

Kunci: $L = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 79^\circ \approx 14,72$ m². Heron: $s = 9$, $L = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} \approx 14,70$ m², hampir sama. Di lapangan, mengukur garis tinggi yang tegak lurus sulit, sedangkan dua sisi dan sudut apitnya mudah diukur dengan meteran dan busur.

7. Buat daftar kapan memakai aturan sinus dan kapan memakai aturan kosinus, berdasarkan data yang diketahui (dua sudut dan satu sisi; dua sisi dan sudut apitnya; tiga sisi; dua sisi dan sudut yang tidak diapit).

Kunci: Aturan sinus: dua sudut dan satu sisi (Sd-S-Sd atau Sd-Sd-S), atau dua sisi dan sudut yang tidak diapit (S-S-Sd, waspadai kasus ambigu). Aturan kosinus: tiga sisi (S-S-S, untuk mencari sudut) atau dua sisi dan sudut apitnya (S-Sd-S, untuk mencari sisi ketiga). Kuncinya: aturan sinus butuh satu pasangan sisi-sudut yang berhadapan dan keduanya diketahui.

✓ Kesimpulan

Tuliskan aturan sinus dan aturan kosinus yang kamu temukan dalam kata-kata dan rumus, makna bilangan rahasia $a : \sin A$, serta jarak pohon ketapang menurut hitungan kelompokmu.

💡 Refleksi

- Aku paling terkejut ketika menyadari bahwa ...
- Bagian yang paling menantang saat mengukur sudut di lapangan adalah ...

- Pekerjaan di sekitarku yang memakai segitiga untuk mengukur jarak adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak bisa ke lapangan? Buka Lab Mini "Lengan yang berayun: nol, satu, atau dua segitiga?" di Bab 25 (subbab 25.2). Atur $\angle A = 40^\circ$, $b = 6$, dan $a = 4,5$ untuk percobaan lengan berayun, lalu bentuk segitiga lain untuk mengisi tabel. Periksa hitunganmu dengan Rumus Hidup "Aturan sinus: cari sisi dari dua sudut" (subbab 25.1) dan "Aturan kosinus: Pythagoras plus koreksi" (subbab 25.3). Untuk tantangan arah kompas, pakai Lab Mini "Nakhoda cilik: hitung jalan pulang" (subbab 25.5).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b25-1

Contoh data (meteran 0,01 m, busur kardus 1°)

Segitiga	a (m)	b (m)	c (m)	$\angle A$ (°)	$\angle B$ (°)	$\angle C$ (°)	a : sin A	b : sin B	c : sin C
1 (lancip)	5,00	6,00	7,00	44	57	79	7,20	7,15	7,13
2 (siku-siku)	4,50	6,00	7,50	37	53	90	7,48	7,51	7,50
3 (tumpul)	4,00	5,00	8,00	24	31	125	9,83	9,71	9,77
4 (pohon di seberang selokan)	15,06 (hitung)	15,61 (hitung)	10,00	68	74	38 (hitung)	16,24	16,24	16,24

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketelitian mengukur sisi & sudut	Rafia tegang, semua sisi diukur sampai 0,01 m, jumlah sudut setiap segitiga $180^\circ \pm 2^\circ$.	Sebagian besar teliti, satu segitiga perlu diukur ulang.	Beberapa sudut jauh meleset (jumlah sudut menyimpang lebih dari 5°).	Data tidak dapat dipakai.
Perhitungan sinus, kosinus & luas	Semua perbandingan, pemeriksaan aturan kosinus, jarak triangulasi, dan luas benar.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan, mis. memasang sisi dengan sudut yang tidak berhadapan.	Perhitungan hampir tidak ada.
Penemuan pola & penalaran	Menemukan aturan sinus dan kosinus, menjelaskan makna $2R$, dan menganalisis kasus ambigu dengan tepat.	Menemukan pola dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & keselamatan	Peran pengukur sisi, pengukur sudut, dan pencatat bergiliran; aturan keselamatan dipatuhi.	Kerja sama baik dengan sedikit pengingat.	Hanya sebagian anggota aktif.	Kelompok tidak bekerja sama atau mengabaikan keselamatan.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Siapkan busur kardus sebelum pelajaran (satu per kelompok) dan tunjukkan cara menaruh pusatnya tepat di titik sudut. Segitiga dengan sisi 4–9 m sudah cukup; galat sudut 1° wajar. Jika tidak ada selokan, pakai sasaran apa pun yang "dilarang didekati", misalnya pohon di balik pagar atau tiang gawang di seberang lapangan. Diferensiasi: kelompok cepat mencoba "jalan pulang" dengan arah kompas (aplikasi kompas HP, jauhkan dari benda logam), yaitu berjalan 15 m pada bearing 060° lalu 12 m pada bearing 150° , menghitung jarak dan bearing pulang dengan aturan kosinus, lalu mengujinya; kelompok yang perlu bantuan cukup segitiga 1–3 dan pertanyaan 1–4. Bukti umum aturan sinus ada di subbab 25.1.

Mathpedia · LKPD Bab 25 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Bianglala Kardus: Dari Putaran ke Gelombang Sinus

Bab 26 · Fungsi & Identitas Trigonometri

Eksplorasi kelompok dengan model buatan sendiri

SMA kelas XI (Matematika Tingkat Lanjut)

2 × 45 menit

Model: Discovery learning: bangun model – ukur – grafikkan – modelkan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur posisi kabin pada bianglala mini dan menemukan bahwa $y : r = \sin \theta$ dan $x : r = \cos \theta$ untuk sudut berapa pun, termasuk tandanya di setiap kuadran.
- Peserta didik dapat menemukan makna radian sebagai perbandingan busur : jari-jari dan menjelaskan mengapa $180^\circ = \pi$ radian.
- Peserta didik dapat menggambar grafik tinggi kabin terhadap sudut putar, membaca amplitudo, sumbu tengah, dan periodenya, lalu memodelkan bianglala sungguhan dengan fungsi sinus.

Cerita pemantik



Malam Minggu di pasar malam alun-alun, Dimas naik bianglala. Dari kabinnya ia merasa naik cepat di awal, melambat di puncak, lalu turun lagi. Ayu yang menunggu di bawah memotretnya setiap 30 detik dan mencatat tinggi kabin. "Kalau titik-titiknya digambar, bentuknya seperti apa ya? Segitiga? Setengah lingkaran?" tanya Ayu. Kak Lintang mengajak kelompokmu membuat bianglala mini dari kardus untuk menjawabnya. Ancil berbisik: "Ukur juga panjang busurnya. Ada bilangan terkenal yang bersembunyi di sana!"

Rumusan masalah

Bagaimana tinggi kabin bianglala berubah ketika rodanya berputar, dan bagaimana sinus, kosinus, serta radian muncul dari putaran itu?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Sudut putar θ (0° sampai 360° , tiap 30°)	Tinggi kabin h , jarak mendatar x , dan panjang busur s	Jari-jari $r = 10$ cm, tinggi poros $D = 15$ cm di atas garis tanah, arah putar berlawanan jarum jam mulai dari 0°

Alat dan bahan

- Kardus bekas ± 40 cm $\times$ 40 cm sebagai papan, dan pita kardus 2 cm $\times$ 13 cm sebagai jari-jari roda
- Jangka, busur derajat, dan penggaris 30 cm
- Paku payung atau paku jamur kertas, ditambah penghapus untuk menutup ujungnya di balik kardus
- Benang jahit ± 70 cm untuk mengukur panjang busur
- Gunting, kertas berpetak, pensil warna, dan kalkulator ilmiah atau HP

Keselamatan

Ujung paku payung dan jangka tajam: tutup ujung paku di balik kardus dengan penghapus, dan jangan mengarahkan jangka ke teman. Gunting kardus di atas meja dengan arah potongan menjauhi tangan; cutter hanya dipakai oleh guru. Simpan paku payung di wadah agar tidak tercecer di lantai.

Langkah kerja

1. Pada kardus, gambar lingkaran berjari-jari $r = 10$ cm dengan jangka (pusat O). Tarik sumbu mendatar dan sumbu tegak melalui O. Dengan busur, beri tanda setiap 30° mulai dari ujung kanan sumbu mendatar (0°) berlawanan arah jarum jam. Gambar garis "tanah" mendatar 15 cm di bawah O.
2. Lubangi satu ujung pita kardus dan sematkan di O dengan paku payung (tidak terlalu kencang agar bisa berputar). Tandai kabin P tepat 10 cm dari O dan tempelkan kabin kertas kecil.
3. Tulis hipotesismu: bagaimana bentuk grafik tinggi kabin terhadap sudut putar dari 0° sampai 360° ?
4. Putar jari-jari sampai P tepat di tanda θ . Ukur tinggi h dari garis tanah ke P (penggaris tegak lurus garis tanah) dan jarak mendatar x dari sumbu tegak ke P (positif di kanan, negatif di kiri), sampai ketelitian 0,1 cm.
5. Ukur panjang busur s dari tanda 0° sampai P: susuri lingkaran dengan benang, luruskan benangnya, lalu ukur dengan penggaris.
6. Lakukan untuk $\theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 360^\circ$. Hitung $s : r$, $y = h - 15$, $y : r$, dan $x : r$ (dua desimal).
7. Gambar grafik sesuai petunjuk, lalu kerjakan pertanyaan analisis.

Tabel pengamatan ($r = 10$ cm, poros 15 cm di atas tanah)

θ ($^\circ$)	Busur s (cm)	$s : r$	Tinggi h (cm)	$y = h - 15$ (cm)	x (cm)	$y : r$	$x : r$
0							
30							
60							
90							
120							
150							
180							
210							
240							
270							
300							
330							
360							

Grafik

Pada kertas berpetak, gambar titik-titik (θ, h) untuk $\theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 360^\circ$ dan hubungkan dengan kurva mulus. Di bawah sumbu mendatar, tulis juga nilai $s : r$ sebagai sumbu kedua (radian). Dengan warna lain, gambar titik-titik

(θ, x) . Bandingkan kedua kurva.

Analisis

1. Bandingkan kolom $y : r$ dengan $\sin \theta$ dan kolom $x : r$ dengan $\cos \theta$ dari kalkulator (mode derajat). Apa yang kamu temukan, juga untuk θ di atas 90° ? Kapan nilainya negatif?

Kunci: $y : r \approx \sin \theta$ dan $x : r \approx \cos \theta$ untuk semua sudut (selisih paling banyak 0,02). $y : r$ negatif ketika kabin di bawah poros ($180^\circ < \theta < 360^\circ$), dan $x : r$ negatif ketika kabin di kiri poros ($90^\circ < \theta < 270^\circ$). Inilah definisi sin dan cos untuk sudut sembarang: titik pada lingkaran berjari-jari 1 adalah $(\cos \theta, \sin \theta)$.

2. Amati kolom $s : r$. Berapa nilainya pada $\theta = 180^\circ$ dan 360° ? Bilangan terkenal apa yang muncul? Berapa derajat sudut yang busurnya tepat sepanjang jari-jari ($s : r = 1$)?

Kunci: Pada 180° nilainya $\approx 3,15 \approx \pi$, dan pada $360^\circ \approx 6,29 \approx 2\pi$. $s : r$ sebanding dengan θ : $s : r = \theta \times \frac{\pi}{180^\circ}$. Perbandingan inilah ukuran sudut dalam radian, sehingga $180^\circ = \pi$ rad. Busur sepanjang jari-jari: $\theta = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$ (1 radian).

3. Dari grafik h terhadap θ , tentukan nilai maksimum, minimum, sumbu tengah, amplitudo, dan periodenya. Tuliskan rumus h sebagai fungsi θ . Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Maksimum 25 cm ($\theta = 90^\circ$), minimum 5 cm ($\theta = 270^\circ$), sumbu tengah $h = 15$ (tinggi poros), amplitudo 10 cm (jari-jari), periode 360° atau 2π rad. Rumusnya $h = 15 + 10 \sin \theta$. Grafiknya bukan segitiga atau setengah lingkaran, melainkan gelombang yang landai di puncak dan lembah, dan paling curam ketika melewati sumbu tengah.

4. Temukan pasangan sudut di tabel yang tingginya sama (mis. 30° dan 150°). Rumuskan polanya, lalu tentukan semua θ antara 0° dan 360° ketika $h = 20$ cm dan ketika $h = 10$ cm.

Kunci: Pasangan θ dan $180^\circ - \theta$ (30° dan 150° , 60° dan 120°), juga 210° dan 330° , 240° dan 300° : $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$. $h = 20 \Rightarrow \sin \theta = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ$ atau 150° . $h = 10 \Rightarrow \sin \theta = -0,5 \Rightarrow \theta = 210^\circ$ atau 330° .

5. Pilih baris $\theta = 120^\circ$, hitung $(x : r)^2 + (y : r)^2$. Ulangi untuk dua baris lain. Pola apa yang muncul? Jelaskan dengan Teorema Pythagoras.

Kunci: $\theta = 120^\circ$: $(-0,51)^2 + 0,87^2 = 0,2601 + 0,7569 \approx 1,02$. Baris lain juga ≈ 1 (mis. 30° : $0,87^2 + 0,50^2 \approx 1,01$). Sebabnya $x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras pada segitiga O-P-kaki tegak lurus), sehingga $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

6. Kurva (θ, x) mirip kurva (θ, h) . Berapa derajat kurva kosinus harus digeser agar berimpit dengan kurva sinus (dengan sumbu tengah yang sama)?

Kunci: Kurva kosinus mencapai puncak di 0° , kurva sinus di 90° . Menggeser kurva kosinus 90° ke kanan membuatnya berimpit dengan kurva sinus: $\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$, atau setara $\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ)$.

7. Bianglala sungguhan berdiameter 40 m, porosnya 22 m di atas tanah, dan satu putaran memakan 8 menit. Ayu naik dari titik terendah. Tuliskan model tinggi $h(t)$ dengan t dalam menit, lalu tentukan berapa lama setiap putaran Ayu berada lebih tinggi dari 32 m.

Kunci: Jari-jari 20 m, poros 22 m, periode 8 menit ($B = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$). Mulai dari titik terendah: $h(t) = 22 - 20 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$. $h > 32 \iff \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) < -\frac{1}{2} \iff \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi t}{4} < \frac{4\pi}{3} \iff \frac{8}{3} < t < \frac{16}{3}$. Jadi $\frac{8}{3} \approx 2,67$ menit (2 menit 40 detik) setiap putaran.

✓ Kesimpulan

Tuliskan arti $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ untuk sudut berapa pun memakai bianglalamu, arti satu radian, dan bentuk umum rumus tinggi kabin bianglala (jari-jari, tinggi poros, dan lama satu putaran).

💡 Refleksi

- Sebelum percobaan, aku mengira grafiknya berbentuk ... ternyata ...
- Satu hal tentang radian yang kini masuk akal bagiku adalah ...
- Peristiwa berulang lain yang mungkin bisa dimodelkan dengan gelombang sinus adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya kardus? Buka Lab Mini "Roda yang melukis gelombang" di Bab 26 (subbab 26.3): seret titik ungu ke 0° , 30° , ..., 360° (sudut istimewa menempel seperti magnet), catat tingginya untuk kolom y , lalu ganti pilihan ke $\cos \theta$ untuk kolom x . Grafik Hidup "Lingkaran satuan: sin, cos, dan tan sebagai panjang ruas" (subbab 26.1) membantu memeriksa tanda di setiap kuadran, Rumus Hidup "Radian dan panjang busur" (subbab 26.2) untuk kolom $s : r$, dan Lab Mini "Bianglala pasar malam: dari putaran ke grafik" (subbab 26.4) untuk pertanyaan bianglala sungguhan.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b26-3

📊 Contoh data (penggaris dan benang, ketelitian 0,1 cm)

θ ($^\circ$)	Busur s (cm)	$s : r$	Tinggi h (cm)	$y = h - 15$ (cm)	x (cm)	$y : r$	$x : r$
0	0,0	0,00	15,0	0,0	10,0	0,00	1,00
30	5,3	0,53	20,0	5,0	8,7	0,50	0,87
60	10,4	1,04	23,6	8,6	5,0	0,86	0,50
90	15,8	1,58	25,0	10,0	0,0	1,00	0,00
120	20,9	2,09	23,7	8,7	-5,1	0,87	-0,51
150	26,1	2,61	19,9	4,9	-8,7	0,49	-0,87
180	31,5	3,15	15,0	0,0	-10,0	0,00	-1,00
210	36,5	3,65	10,1	-4,9	-8,6	-0,49	-0,86
240	42,0	4,20	6,3	-8,7	-5,0	-0,87	-0,50
270	47,0	4,70	5,1	-9,9	0,0	-0,99	0,00
300	52,5	5,25	6,4	-8,6	5,1	-0,86	0,51
330	57,5	5,75	10,0	-5,0	8,7	-0,50	0,87
360	62,9	6,29	15,0	0,0	10,0	0,00	1,00

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Pembuatan model & ketelitian mengukur	Tanda sudut tepat, jari-jari berputar lancar, semua h , x , dan s diukur sampai 0,1 cm dengan tanda x yang benar.	Model berfungsi, ada 1–2 pengukuran yang kurang cermat.	Tanda sudut atau tanda x sering salah.	Model atau data tidak dapat dipakai.
Grafik & perhitungan	Kolom perbandingan benar, grafik mulus dengan dua sumbu (derajat dan radian) dan berlabel.	Ada 1–2 kesalahan kecil pada hitungan atau grafik.	Grafik berupa garis patah-patah atau sumbu tidak berskala.	Grafik tidak dibuat.
Penemuan pola & pemodelan	Menemukan $y : r = \sin \theta$, $x : r = \cos \theta$, makna radian, simetri $\sin(180^\circ - \theta)$, dan memodelkan bianglala sungguhan dengan benar.	Menemukan sebagian besar pola dengan penjelasan tepat.	Menyebut pola tanpa alasan, atau model bianglala salah amplitudo/periode.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & keselamatan	Peran pemutar, pengukur, pengukur busur, dan pencatat bergiliran; alat tajam dipakai dengan aman.	Kerja sama baik dengan sedikit pengingat.	Hanya sebagian anggota aktif.	Kelompok tidak bekerja sama atau memakai alat tajam sembarangan.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Galat terbesar biasanya berasal dari tanda 30° yang kurang tepat dan penggaris yang tidak tegak lurus garis tanah; minta siswa memakai pojok buku sebagai penyiku. Bagi tugas: satu memutar, satu mengukur h dan x , satu mengukur busur, satu mencatat. Ingatkan perbedaan mode DEG dan RAD di kalkulator. Diferensiasi: kelompok cepat mengukur tiap 15° atau memodelkan data pasang surut dengan Rumus Hidup "Model gelombang sinus (pasang surut)" (subbab 26.4); kelompok yang perlu bantuan cukup mengukur 0° – 180° lalu menebak sisanya dengan simetri.

Mengepung π dengan Jangka: Jejak Archimedes

Bab 27 • Limit: Seni Mendekati

Eksplorasi kelompok (konstruksi geometri + tabel mendekat)

SMA kelas XI–XII (Fase F lanjut), pengantar limit IB Mathematics

2 × 45 menit

Model: Discovery learning: konstruksi – ukur – hitung – temukan pola limit

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengonstruksi segi-6 dan segi-12 beraturan di dalam dan di luar lingkaran, lalu menaksir π dari kelilingnya.
- Peserta didik dapat menurunkan keliling segi- n dalam $K = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$ dan segi- n luar $K' = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n}$ dengan trigonometri segitiga siku-siku.
- Peserta didik dapat menyusun tabel mendekat untuk $n = 6, 12, 24, 48, 96$ dan menjelaskan mengapa π adalah limit kedua barisan yang menjepitnya.
- Peserta didik dapat mengaitkan hasilnya dengan limit istimewa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Cerita pemantik



Di bengkel anyaman bambu Pak Darto di Tasikmalaya, Ayu melihat perajin membuat tampah bundar hanya dari bilah-bilah bambu yang lurus. "Kok bisa bulat, padahal bilahnya lurus semua?" tanyanya. Dimas menyeletuk, "Itu kan cuma segi banyak yang sisinya banyak sekali!" Kak Lintang tersenyum: "Lebih dari 2.000 tahun lalu, Archimedes memakai ide yang sama untuk menjepit π tanpa kalkulator. Hari ini kalian jadi Archimedes: gambar segi banyak di dalam dan di luar lingkaran, lalu lihat ke mana kelilingnya pergi." Ancil sudah membuka jangkanya.

Rumusan masalah

Jika banyak sisi n segi banyak beraturan di dalam dan di luar lingkaran terus digandakan, ke bilangan berapakah perbandingan keliling segi banyak terhadap diameter lingkaran mendekat, dan bagaimana kedua barisan itu menjepit π ?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak sisi segi banyak n	Keliling segi- n dalam dan luar, serta perbandingannya terhadap diameter	Jari-jari lingkaran tetap $r = 5$ cm (diameter 10 cm), alat ukur dan cara mengukur yang sama

Alat dan bahan

- Jangka dan busur derajat, 1 set per kelompok
- Kertas HVS A4 atau kertas gambar, 3 lembar per kelompok
- Penggaris 30 cm dan penggaris segitiga siku-siku (atau pojok buku)
- Pensil runcing dan penghapus
- Kalkulator ilmiah atau HP (mode derajat)
- Untuk kegiatan bonus: benang ± 1 m dan 2–3 benda bundar (tutup toples, piring, kaleng)

Keselamatan

Ujung jangka tajam: pegang jangka di bagian kepalanya, jangan diayunkan atau diarahkan ke teman, dan simpan dengan ujung menghadap ke bawah atau tertutup. Jangan menusukkan jarum jangka ke meja. Saat melilitkan benang pada kaleng, waspadai bibir kaleng yang tajam.

Langkah kerja

1. Gambar lingkaran berjari-jari $r = 5$ cm di tengah kertas dan tandai pusatnya O . Tuliskan dugaanmu: jika sisinya makin banyak, keliling segi banyak dibagi diameter akan mendekati bilangan berapa?
2. Segi-6 dalam: dengan bukaan jangka tetap 5 cm, tandai 6 titik berurutan pada lingkaran, lalu hubungkan. Ukur panjang satu sisinya s sampai 0,1 cm.
3. Segi-6 luar: tarik jari-jari ke keenam titik. Di setiap titik, gambar garis yang tegak lurus jari-jari (garis singgung) memakai penggaris segitiga. Keenam garis singgung membentuk segi-6 luar. Ukur sisinya t .
4. Pada kertas kedua, gambar lingkaran $r = 5$ cm lagi. Pakai busur derajat untuk menandai titik setiap 30° , lalu ulangi langkah 2–3 untuk segi-12 dalam dan luar.
5. Hitung keliling $K = n \times s$ dan $K' = n \times t$, bagi masing-masing dengan diameter $d = 10$ cm, lalu isi baris $n = 6$ dan $n = 12$.
6. Bagi segi- n dalam menjadi n segitiga sama kaki dari pusat O , lalu belah satu segitiga menjadi dua segitiga siku-siku. Tunjukkan bahwa $s = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$. Dengan cara serupa pada segi- n luar, tunjukkan $t = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$.
7. Segi-24 ke atas terlalu rapat untuk digambar, jadi pakai rumus langkah 6 dan kalkulator (mode derajat) untuk mengisi baris $n = 24, 48, 96$. Tulis perbandingannya sampai 5 angka desimal.
8. Bonus: lilitkan benang pada tiga benda bundar, ukur keliling dan diameternya, lalu hitung keliling $\div$ diameter.

Tabel mendekat keliling segi- n ($r = 5$ cm, $d = 10$ cm)

n (banyak sisi)	s sisi dalam (cm)	$K = n \times s$ (cm)	$K \div d$	t sisi luar (cm)	$K' = n \times t$ (cm)	$K' \div d$	Lebar jepitan ($K' - K \div d$)
6							
12							
24							
48							
96							

Grafik

Gambar grafik dengan sumbu mendatar n (6, 12, 24, 48, 96) dan sumbu tegak perbandingan keliling $\div$ diameter (3,0 sampai 3,5). Plot titik $K \div d$ dan $K' \div d$ dengan dua warna, lalu tarik garis mendatar $y = 3,14159$. Amati kedua barisan titik mendekati garis itu dari bawah dan dari atas.

Analisis

1. Amati kolom $K \div d$ dan $K' \div d$ ketika n digandakan. Mana yang terus naik dan mana yang terus turun? Apakah keduanya mendekati bilangan yang sama? Bandingkan dengan dugaanmu.

Kunci: Dari hitungan rumus, $K \div d$ naik: 3,000; 3,106; 3,133; 3,139; 3,141, sedangkan $K' \div d$ turun: 3,464; 3,215; 3,160; 3,146; 3,143. Keduanya mendekati bilangan yang sama, yaitu $\pi \approx 3,14159$: segi- n dalam dari bawah (setiap sisinya lebih pendek dari busur lingkaran) dan segi- n luar dari atas.

2. Perhatikan kolom lebar jepitan. Setiap kali n digandakan, lebar jepitan kira-kira dibagi berapa? Pakai pola itu untuk menebak lebar jepitan pada $n = 192$, lalu periksa dengan kalkulator.

Kunci: Lebar jepitan kira-kira dibagi 4: $0,464 \rightarrow 0,110 \rightarrow 0,027 \rightarrow 0,0067 \rightarrow 0,0017$. Tebakan untuk $n = 192$: $0,00168 : 4 \approx 0,0004$; kalkulator memberi $3,14187 - 3,14145 = 0,00042$. (Alasannya: untuk x kecil, $\tan x - \sin x \approx \frac{1}{2}x^3$, sehingga lebar jepitan $\approx \frac{\pi^3}{2n^2}$; menggandakan n membagi lebarnya dengan 4.)

3. Archimedes berhenti di segi-96 dan menyimpulkan $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Ubah kedua pecahan campuran itu ke desimal dan bandingkan dengan baris $n = 96$ di tabelmu. Angka desimal π mana yang sudah pasti?

Kunci: $3\frac{10}{71} \approx 3,14085$ dan $3\frac{1}{7} \approx 3,14286$. Tabel memberi $3,14103 < \pi < 3,14271$, sedikit lebih rapat karena Archimedes membulatkan akar-akar ke arah yang aman. Kedua batas diawali 3,14, jadi angka 3,14 sudah pasti; angka desimal ketiga belum pasti (1 atau 2 menurut tabel).

4. Tunjukkan bahwa $\frac{K}{d} = n \sin \frac{180^\circ}{n}$. Dengan menulis sudutnya dalam radian, $x = \frac{\pi}{n}$, jelaskan mengapa $n \sin \frac{\pi}{n} = \pi \cdot \frac{\sin x}{x}$ menuju π ketika $n \rightarrow \infty$.

Kunci: Segi- n dalam terbagi menjadi n segitiga sama kaki berkaki r dengan sudut puncak $\frac{360^\circ}{n}$. Belahan siku-sikunya bersudut $\frac{180^\circ}{n}$ dengan sisi depan $\frac{s}{2}$, jadi $\frac{s}{2} = r \sin \frac{180^\circ}{n}$, $K = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$, dan $\frac{K}{d} = n \sin \frac{180^\circ}{n}$. Dalam radian $180^\circ = \pi$; dengan $x = \frac{\pi}{n}$ diperoleh $n \sin \frac{\pi}{n} = \pi \cdot \frac{\sin x}{x}$. Jika $n \rightarrow \infty$ maka $x \rightarrow 0$, sehingga $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ dan $\frac{K}{d} \rightarrow \pi$. Dengan cara serupa $\frac{K'}{d} = \pi \cdot \frac{\tan x}{x} \rightarrow \pi$.

5. Adakah nilai n yang membuat keliling segi- n dalam tepat sama dengan keliling lingkaran? Jelaskan kaitannya dengan makna limit: mendekati sedekat yang kita mau tanpa harus menyentuh.

Kunci: Tidak ada. Untuk setiap n , setiap sisi (tali busur) lebih pendek daripada busur yang dibentanginya, jadi $n \sin \frac{180^\circ}{n} < \pi$ selalu. Kelilingnya dapat dibuat sedekat apa pun dengan πd asalkan n cukup besar, tetapi tidak pernah sama. Itulah makna limit: nilai yang didekati, tidak harus dicapai.

6. Hasil ukur penggaris untuk segi-12 sedikit berbeda dari hasil rumus. Sebutkan dua sumber galat, lalu jelaskan mengapa untuk n besar kita beralih dari mengukur ke menghitung.

Kunci: Contoh: tebal garis pensil, titik pada lingkaran yang meleset beberapa derajat, garis singgung yang tidak tepat tegak lurus jari-jari, dan penggaris yang hanya terbaca sampai 0,1 cm. Sisi dalam segi-12 sebenarnya 2,588 cm; galat 0,05 cm per sisi sudah menjadi 0,6 cm pada keliling. Untuk n besar, sisinya sangat pendek dan galat ukur jauh lebih besar daripada lebar jepitan, jadi hanya perhitungan yang masih dapat menjepit π .

7. Bonus benang: berapa keliling $\div$ diameter benda bundar yang kamu ukur? Mengapa hasilnya kurang teliti dibanding cara Archimedes, padahal idenya sama-sama keliling dibagi diameter?

Kunci: Biasanya diperoleh antara 3,0 dan 3,3. Benang dapat melar atau miring, dan diameter sulit diukur tepat melalui pusat. Cara Archimedes lebih unggul karena tidak bergantung pada ketelitian alat: rumus menjamin batas bawah dan batas atas yang makin rapat.

✓ Kesimpulan

Tuliskan dengan kata-katamu sendiri arti kalimat “ π adalah limit keliling segi- n dibagi diameter”, lengkap dengan dua barisan yang menjepitnya dan kaitannya dengan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

💡 Refleksi

- Hal yang paling membuatku takjub dari cara Archimedes adalah ...

- Sekarang aku memahami “mendekati tanpa menyentuh” sebagai ...
- Benda di sekitarku yang tampak bulat padahal tersusun dari bagian-bagian lurus adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada jangka? Buka Lab Mini "Archimedes menjepit π " di Bab 27 (subbab 27.5). Mulai dari $n = 6$, tekan $\times 2$ Gandakan sisi sampai 96 (bahkan 192), lalu salin keliling segi- n dalam, keliling segi- n luar, dan lebar jepitan ke tabel. Diameter lingkaran di lab itu 1, jadi kelilingnya langsung sama dengan $K \div d$. Untuk pertanyaan 4, buka Grafik Hidup "sin x / x : terjepit menuju 1" di subbab yang sama dan lihat mengapa $n \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi$.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b27-5

Contoh data ($n = 6$ dan 12 diukur dengan penggaris; $n \geq 24$ dihitung dengan rumus)

n (banyak sisi)	s sisi dalam (cm)	$K = n \times s$ (cm)	$K \div d$	t sisi luar (cm)	$K' = n \times t$ (cm)	$K' \div d$	Lebar jepitan ($K' - K) \div d$
6	5,0	30,0	3,000	5,8	34,8	3,480	0,480
12	2,6	31,2	3,120	2,7	32,4	3,240	0,120
24	1,3053	31,326	3,13263	1,3165	31,597	3,15966	0,02703
48	0,6540	31,394	3,13935	0,6554	31,461	3,14609	0,00674
96	0,3272	31,410	3,14103	0,3274	31,427	3,14271	0,00168

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Konstruksi & pengukuran	Segi-6 dan segi-12 dalam serta luar digambar rapi dan tepat; sisi diukur sampai 0,1 cm.	Konstruksi benar dengan satu bagian yang kurang rapi atau kurang teliti.	Sebagian segi banyak tidak beraturan atau garis singgung tidak tegak lurus.	Konstruksi belum dapat dipakai untuk mengukur.
Perhitungan tabel mendekat	Semua keliling dan perbandingan benar sampai 5 desimal; kalkulator dipakai dalam mode yang tepat.	Ada 1-2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan, misalnya kalkulator dalam mode yang salah.	Tabel hampir kosong.
Penemuan pola & penalaran limit	Menjelaskan jepitan dari bawah dan atas, pola lebar jepitan dibagi 4, serta kaitan $n \sin \frac{\pi}{n} = \pi \frac{\sin x}{x} \rightarrow \pi$.	Menemukan bahwa kedua barisan mendekati π dengan alasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut hasil mendekati 3,14 tanpa alasan, atau mengira suatu saat keliling tepat sama.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota berperan; kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah limit yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor $\div$ 16) $\times$ 100.

Catatan guru

Bila waktu terbatas, separuh kelompok mengonstruksi segi-6 dan separuh lagi segi-12, lalu mereka bertukar data. Ingatkan kalkulator dalam mode derajat (DEG) untuk $\sin \frac{180^\circ}{n}$, atau mode radian bila memakai $\frac{\pi}{n}$. Nilai ukur pada baris 6 dan 12 boleh sedikit keluar dari jepitan karena galat; yang dijamin hanya nilai hitungan. Kelompok cepat dapat mencoba $n = 192$ atau membuktikan lebar jepitan $\approx \pi^3/(2n^2)$. Hubungkan dengan kisah Liu Hui dan Zu Chongzhi di subbab 27.5.

Mathpedia · LKPD Bab 27 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Speedometer Kelereng: Dari Kecepatan Rata-rata ke Kecepatan Sesaat

Bab 28 • Turunan: Laju Perubahan

Percobaan kelompok (pengukuran + analisis data)

SMA kelas XI–XII, IB Mathematics: differentiation

2 × 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing: ukur – modelkan – perkecil selang – temukan turunan

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengukur waktu tempuh kelereng pada lintasan miring dan menemukan model posisi $s(t) \approx kt^2$ dari data.
- Peserta didik dapat menghitung kecepatan rata-rata $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ pada beberapa selang dan menaksir kecepatan sesaat dengan memperkecil selang.
- Peserta didik dapat menurunkan $v(t) = 2kt$ dari definisi turunan dan membandingkannya dengan taksiran dari data.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa selang yang terlalu sempit justru membuat taksiran dari data pengukuran kurang andal.

Cerita pemantik



Dalam perjalanan ke sekolah, Dimas dibonceng Kak Lintang dan terus memperhatikan jarum speedometer. "Kak, jarumnya menunjuk 30 km/jam. Itu kecepatan selama satu jam terakhir?" Kak Lintang tertawa, "Kalau begitu jarumnya baru bergerak sejam sekali! Speedometer menunjukkan kecepatan saat ini juga." Ayu bingung: kecepatan kan jarak dibagi waktu, sedangkan waktu "saat ini" panjangnya nol. Hari ini kelompokmu membuat speedometer untuk sebutir kelereng yang menggelinding di papan miring. Ancil sudah siap dengan kamera HP-nya.

Rumusan masalah

Bagaimana menaksir kecepatan sesaat kelereng ketika melewati tanda 60 cm dari data jarak dan waktu, dan bagaimana taksiran itu berubah jika selang yang dipakai makin sempit?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Jarak tanda s dari titik lepas (20, 40, ..., 120 cm)	Waktu tempuh t dari titik lepas sampai tanda	Kemiringan papan, kelereng yang sama, titik lepas yang sama, dan kelereng dilepas tanpa didorong

Alat dan bahan

- Papan, triplek, talang plastik, atau rel karton yang dilipat berbentuk huruf V, panjang ± 150 cm
- Kelereng (2 butir, satu cadangan)
- Meteran jahit atau meteran gulung, dan selotip kertas untuk menandai jarak
- Tumpukan buku setinggi ± 10 –15 cm untuk mengganjal ujung papan

- HP dengan stopwatch, atau lebih baik perekam video (gerak lambat bila ada)
- Kotak atau kardus kecil untuk menangkap kelereng di ujung lintasan
- Kalkulator dan kertas grafik

Keselamatan

Lakukan di lantai yang lapang, jauh dari pintu dan tangga. Tangkap kelereng di ujung lintasan dengan kardus agar tidak menggelinding ke lantai: kelereng yang terinjak dapat membuat orang tergelincir. Pastikan tumpukan buku stabil dan papan tidak mudah jatuh. Jangan memasukkan kelereng ke mulut.

Langkah kerja

1. Ganjal satu ujung papan dengan buku setinggi ± 13 cm. Tandai titik lepas (0 cm), lalu tandai jarak 20, 40, 60, 80, 100, dan 120 cm dengan selotip. Letakkan kardus di ujung bawah.
2. Tulis dugaanmu: apakah kelereng menempuh setiap 20 cm dalam waktu yang sama? Di bagian mana ia paling cepat?
3. Lepaskan kelereng dari titik 0 tanpa didorong. Cara paling teliti: rekam video dengan meteran terlihat, mulai sedikit sebelum kelereng dilepas, lalu putar ulang dan baca waktunya saat kelereng melewati setiap tanda. Tanpa video, satu orang menekan stopwatch tepat saat kelereng melewati tanda yang ditentukan.
4. Ukur waktu ke setiap tanda tiga kali, hitung rata-ratanya t sampai 0,01 s, lalu isi kolom t^2 dan $s \div t^2$.
5. Hitung kecepatan rata-rata dari tanda sebelumnya: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20}{t_{\text{sekarang}} - t_{\text{sebelumnya}}}$ cm/s.
6. Fokus pada tanda 60 cm. Hitung kecepatan rata-rata pada selang yang makin sempit di sekitarnya: dari 0 ke 120 cm, dari 20 ke 100 cm, lalu dari 40 ke 80 cm. Catat ketiga hasilnya di bawah tabel.
7. Buat grafik s terhadap t , gambar tali busur untuk ketiga selang di langkah 6, dan sebuah garis singgung di titik 60 cm.

Tabel pengamatan kelereng (s dalam cm, t dalam detik)

s (cm)	t ₁ (s)	t ₂ (s)	t ₃ (s)	t rata-rata (s)	t ² (s ²)	s ÷ t ² (cm/s ²)	v rata-rata dari tanda sebelumnya (cm/s)
0							
20							
40							
60							
80							
100							
120							

Grafik

Gambar grafik s (sumbu tegak) terhadap t rata-rata (sumbu mendatar) dan hubungkan titik-titiknya dengan kurva mulus. Gambar tiga tali busur di sekitar titik 60 cm (langkah 6) dengan tiga warna, lalu perhatikan kemiringannya makin mendekati kemiringan garis singgung di titik itu.

Analisis

1. Apakah kelereng menempuh setiap 20 cm dalam waktu yang sama? Lihat kolom kecepatan rata-rata: apa yang terjadi pada kecepatannya? Bandingkan dengan dugaanmu.

Kunci: Tidak. Waktu tiap 20 cm makin singkat (0,83 s, lalu 0,32; 0,25; 0,22; 0,20; 0,16 s), sehingga kecepatan rata-rata tiap ruas naik dari sekitar 24 cm/s menjadi 125 cm/s. Kelereng dipercepat dan paling cepat di ujung bawah lintasan.

2. Perhatikan kolom $s \div t^2$. Nilainya hampir tetap. Tuliskan model posisi kelereng $s(t) = kt^2$ dengan k dari datamu (pakai rata-rata kolom itu).

Kunci: Pada contoh data, kolom $s \div t^2$ berkisar 29–31 dengan rata-rata $k \approx 30,2 \text{ cm/s}^2$, jadi $s(t) \approx 30,2 t^2$. Jarak sebanding dengan kuadrat waktu: waktu kira-kira dua kali lipat, jarak empat kali lipat (tanda 20 cm pada 0,83 s dan tanda 80 cm pada 1,62 s).

3. Tuliskan tiga taksiran kecepatan di tanda 60 cm dari langkah 6. Ke bilangan berapa taksiran itu tampaknya mendekat ketika selangnya menyempit?

Kunci: $\frac{120 - 0}{1,98 - 0} \approx 60,6$; $\frac{100 - 20}{1,82 - 0,83} \approx 80,8$; $\frac{80 - 40}{1,62 - 1,15} \approx 85,1 \text{ cm/s}$. Taksiran terus naik dan mulai mendatar di sekitar 85 cm/s; itulah taksiran kecepatan sesaat di tanda 60 cm.

4. Dari definisi turunan, buktikan bahwa jika $s(t) = kt^2$ maka $v(t) = s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(t+h)^2 - kt^2}{h} = 2kt$. Hitung v ketika kelereng melewati tanda 60 cm dan bandingkan dengan jawaban nomor 3.

Kunci: $\frac{k(t+h)^2 - kt^2}{h} = \frac{2kth + kh^2}{h} = 2kt + kh \rightarrow 2kt$ ketika $h \rightarrow 0$. Di tanda 60 cm, $t \approx 1,40 \text{ s}$ sehingga $v \approx 2(30,2)(1,40) \approx 84,6 \text{ cm/s}$, sangat dekat dengan taksiran 85,1 cm/s dari selang 40–80 cm.

5. Dimas mengusulkan selang yang jauh lebih sempit, misalnya dari 59 cm ke 61 cm, agar lebih dekat ke kecepatan sesaat. Mengapa dengan stopwatch tangan usul itu justru berbahaya? Pertimbangkan galat menekan tombol sekitar 0,05–0,1 s.

Kunci: Selang 59–61 cm ditempuh hanya dalam sekitar $\frac{2}{85} \approx 0,024 \text{ s}$, jauh lebih singkat daripada galat menekan tombol. Selisih waktu yang terukur bisa 0 (pembagian dengan nol), negatif, atau dua kali lipat, sehingga hasilnya ngawur. Dalam matematika $h \rightarrow 0$ aman; dalam pengukuran, selang yang terlalu sempit memperbesar galat relatif. Solusinya: buat model $s = kt^2$ dari seluruh data, lalu turunkan modelnya.

6. Ubah kecepatan sesaat di tanda 60 cm ke km/jam. Apa yang bergerak secepat itu dalam kehidupan sehari-hari?

Kunci: $84,6 \text{ cm/s} = 0,846 \text{ m/s} = 0,846 \times 3,6 \approx 3,0 \text{ km/jam}$, kira-kira kecepatan orang berjalan santai.

7. Kembali ke Ayu: jelaskan dengan bahasamu sendiri apa yang sebenarnya ditunjukkan speedometer, dan mengapa waktu yang panjangnya nol tidak menjadi masalah.

Kunci: Speedometer menunjukkan limit kecepatan rata-rata $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ketika $\Delta t \rightarrow 0$, yaitu turunan $s'(t)$. Kita tidak pernah membagi dengan nol; kita melihat ke bilangan mana hasil bagi itu mendekat ketika selangnya makin sempit, persis seperti barisan taksiran di nomor 3.

Kesimpulan

Tuliskan perbedaan kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat, cara menaksir kecepatan sesaat dari data, serta turunan model $s(t) = kt^2$ yang kamu temukan dan buktikan.

Refleksi

- Saat taksiranku makin mendekati satu angka, aku merasa ...
- Bagian percobaan yang paling sulit dibuat teliti adalah ... dan cara mengatasinya adalah ...
- Selain di speedometer, laju sesaat juga muncul di ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada papan atau kelereng? Buka Lab Mini "Speedometer: rata-rata yang menjadi sesaat" di Bab 28 (subbab 28.6). Pilih satu saat t , lalu perkecil selang Δt langkah demi langkah dan catat bacaan jarum oranye (kecepatan rata-rata) sampai menempel pada jarum magenta (kecepatan sesaat). Lalu buka Grafik Hidup "Tali busur yang berubah menjadi garis singgung" dan Rumus Hidup "Kemiringan tali busur pada $y = x^2$ " di subbab 28.2: kemiringan tali busur $2x + h$ menuju $2x$ ketika $h \rightarrow 0$. Kalikan dengan k untuk memperoleh $v = 2kt$ pada model kelereng.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b28-1

Contoh data (papan 150 cm diganjil ± 13 cm, waktu dibaca dari video HP)

s (cm)	t ₁ (s)	t ₂ (s)	t ₃ (s)	t rata-rata (s)	t ² (s ²)	s ÷ t ² (cm/s ²)	v rata-rata dari tanda sebelumnya (cm/s)
0	0	0	0	0,00	0,00	—	—
20	0,86	0,80	0,82	0,83	0,69	29,0	24,1
40	1,16	1,17	1,13	1,15	1,32	30,3	62,5
60	1,41	1,40	1,39	1,40	1,96	30,6	80,0
80	1,62	1,62	1,63	1,62	2,62	30,5	90,9
100	1,81	1,83	1,81	1,82	3,31	30,2	100,0
120	1,94	2,02	1,99	1,98	3,92	30,6	125,0

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Perancangan & pengukuran	Lintasan, tanda, dan cara melepas konsisten; tiga kali ukur di setiap tanda dengan pembacaan waktu yang teliti.	Pengukuran baik, ada satu tanda yang hanya diukur sekali atau kurang teliti.	Kelereng kadang didorong atau tanda jarak tidak tepat, data tidak konsisten.	Data belum dapat dipakai.
Pengolahan data & model	Semua rata-rata, t^2 , $s \div t^2$, dan kecepatan rata-rata benar; model $s = kt^2$ dirumuskan dengan k dari data.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil; model hampir tepat.	Banyak kesalahan hitung atau model tidak sesuai data.	Tabel hampir kosong.
Penalaran limit & turunan	Menaksir kecepatan sesaat dari selang yang menyempit, membuktikan $s' = 2kt$ dari definisi, dan menjelaskan batas ketelitian pengukuran.	Taksiran dan turunan benar, penjelasan galat kurang lengkap.	Hanya menghitung kecepatan rata-rata tanpa mengaitkannya dengan limit.	Belum dapat membedakan kecepatan rata-rata dan sesaat.
Kerja sama & komunikasi	Peran (pelepas, pencatat waktu, pengukur, penghitung) dibagi jelas; kesimpulan disampaikan dengan istilah yang tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Pengukuran video jauh lebih teliti daripada stopwatch tangan; video biasa 30 bingkai per detik memberi ketelitian sekitar 0,03 s, dan mode gerak lambat lebih baik lagi. Jika kelereng terlalu cepat, kurangi tinggi ganjalan; jika sering berhenti, ganjal sedikit lebih tinggi atau pakai talang yang lebih licin. Kelompok cepat dapat menaksir percepatan $a = 2k$ dan membuktikan bahwa untuk model kt^2 , kecepatan rata-rata pada selang waktu simetris $[t - h, t + h]$ tepat sama dengan $v(t)$. Bila waktu terbatas, bagi tanda jarak di antara kelompok lalu gabungkan datanya di papan tulis.

Kotak Kue Terbesar dari Selebar Karton

Bab 29 • Aplikasi Turunan: Optimasi & Grafik

Proyek mini kelompok (membuat model + optimasi)

SMA kelas XI–XII, IB Mathematics: optimisation



2 × 45 menit

Model: PjBL singkat dengan discovery learning: buat – ukur – tebak puncak – buktikan dengan turunan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat membuat kotak tanpa tutup dari karton persegi dan mengukur volumenya untuk berbagai potongan pojok x .
- Peserta didik dapat menyusun fungsi volume $V(x) = x(24 - 2x)^2$ beserta daerah asalnya dari model fisik.
- Peserta didik dapat menentukan potongan yang memberi volume maksimum dengan $V'(x) = 0$ dan uji turunan kedua, lalu membandingkannya dengan data.
- Peserta didik dapat menggeneralisasi hasilnya menjadi aturan potong seperenam sisi untuk karton persegi berukuran berapa pun.

Cerita pemantik



Menjelang Lebaran, Ayu membantu ibunya membuat kotak nastar dari lembaran karton 24 cm × 24 cm: gunting persegi kecil di keempat pojok, lalu lipat sisinya ke atas. Dimas mengusulkan potongan kecil, 1 cm, "supaya alasnya luas". Ayu memilih potongan besar, 8 cm, "supaya kotaknya tinggi". Kak Lintang menengahi, "Dua-duanya ada benarnya. Pasti ada potongan yang membuat kotaknya memuat nastar paling banyak. Coba buat, ukur, lalu buktikan dengan turunan!" Ancil sudah memegang gunting.

? Rumusan masalah

Berapa panjang sisi persegi x yang harus digunting di setiap pojok karton 24 cm × 24 cm agar volume kotak tanpa tutup yang terbentuk paling besar?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Sisi potongan pojok x (cm)	Volume kotak V (cm ³)	Ukuran karton 24 cm × 24 cm, jenis karton, dan cara melipat yang sama

Alat dan bahan

- Karton manila atau karton bekas, dipotong menjadi 8 persegi berukuran 24 cm × 24 cm per kelompok
- Selotip bening atau selotip kertas
- Penggaris 30 cm, pensil, dan penggaris segitiga untuk menggambar pojok siku-siku
- Kalkulator atau HP
- Gunting, 2 buah per kelompok
- Opsional: beras ±1,5 kg, nampan, dan gelas ukur 250 mL

Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati: arahkan guntingan menjauhi tubuh dan serahkan gunting dengan pegangan menghadap teman. Jangan memakai cutter tanpa pengawasan guru. Bila memakai beras, kerjakan di atas nampan atau koran agar tidak berceceran, lalu kembalikan berasnya ke wadah.

Langkah kerja

1. Tulis dugaan kelompokmu: potongan berapa sentimeter yang menghasilkan kotak paling besar? Mengapa?
2. Bagi tugas: setiap anggota membuat 2 kotak. Pada setiap karton, gambar persegi bersisi x di keempat pojok dengan $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cm.
3. Gunting keempat persegi, lipat sisi-sisinya tegak ke atas, lalu rekatkan sudut-sudutnya dengan selotip.
4. Ukur panjang dan lebar alas bagian dalam serta tinggi kotak sampai 0,1 cm. Hitung $V_{\text{ukur}} = p \times l \times t$.
5. Dari gambar karton sebelum dilipat, tuliskan panjang sisi alas dalam x . Hitung V_{rumus} untuk setiap x dan selisihnya dengan V_{ukur} .
6. Jajarkan kedelapan kotak dari yang paling kecil volumenya. Opsional: isi kotak dengan beras sampai rata, lalu tuang ke gelas ukur untuk merasakan perbedaan volumenya ($1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$).
7. Buat grafik V terhadap x , tandai titik puncaknya, lalu buktikan letak puncak itu dengan turunan (pertanyaan 3).

Tabel pengukuran kotak (karton 24 cm $\times$ 24 cm)

x (cm)	Panjang alas (cm)	Lebar alas (cm)	Tinggi (cm)	$V_{\text{ukur}} = p \times l \times t$ (cm^3)	V_{rumus} (cm^3)	Selisih $V_{\text{ukur}} - V_{\text{rumus}}$ (cm^3)
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

Grafik

Gambar grafik V (sumbu tegak, 0–1.100 cm^3) terhadap x (sumbu mendatar, 0–12 cm). Plot titik V_{ukur} dengan satu warna dan kurva V_{rumus} dengan warna lain, lalu gambar garis singgung mendatar di puncak kurva.

Analisis

1. Bagaimana volume berubah ketika x membesar dari 1 cm sampai 8 cm? Potongan berapa yang memberi volume terbesar menurut tabelmu? Apakah dugaanmu tepat?

Kunci: Volume naik dari sekitar 480 cm^3 ($x = 1$) ke puncak sekitar 1.000 cm^3 di $x = 4$, lalu turun lagi sampai sekitar 490 cm^3 di $x = 8$. Potongan kecil membuat kotak pendek, potongan besar membuat alas sempit; puncaknya ada di antara keduanya.

2. Tunjukkan bahwa $V(x) = x(24 - 2x)^2$. Berapa daerah asal x yang masuk akal, dan berapa volumenya di kedua ujung daerah asal itu?

Kunci: Setelah dipotong x di kedua ujung, setiap sisi alas tinggal $24 - 2x$ dan tingginya x , jadi $V = x(24 - 2x)^2$. Daerah asalnya $0 < x < 12$. Di $x = 0$ kotak tidak bertinggi dan di $x = 12$ alasnya habis, sehingga $V = 0$ di kedua ujung; karena itu pasti ada puncak di antaranya.

3. Turunkan $V(x)$, selesaikan $V'(x) = 0$, dan pakai uji turunan kedua untuk memastikan jenis titik stasionernya. Berapa volume maksimumnya?

Kunci: $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$, $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x - 4)(x - 12)$. $V'(x) = 0$ di $x = 4$ atau $x = 12$ (ujung daerah asal, $V = 0$). $V''(x) = 24x - 192$ dan $V''(4) = -96 < 0$: maksimum. Volume maksimumnya $V(4) = 4 \cdot 16^2 = 1.024 \text{ cm}^3$, kira-kira 1 liter.

4. Volume hasil ukur hampir selalu sedikit lebih kecil daripada V_{rumus} . Sebutkan dua penyebabnya.

Kunci: Karton punya ketebalan dan lipatannya membulat, sehingga alas dalam sedikit lebih sempit dari $24 - 2x$; guntingan dapat meleset 1–2 mm; dinding yang tidak tegak mengurangi tinggi. Kekurangan 0,1–0,2 cm pada setiap sisi alas sudah mengurangi volume sekitar 1–4%.

5. Ulangi perhitungan nomor 3 untuk karton persegi bersisi a . Aturan umum apa yang kamu temukan untuk potongan terbaik?

Kunci: $V = x(a - 2x)^2$, $V' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x)$. Di dalam daerah asal $0 < x < \frac{a}{2}$, $V' = 0$ hanya di $x = \frac{a}{6}$. Aturannya: potong seperenam sisi karton. Volume maksimumnya $\frac{a}{6} \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{2a^3}{27}$; untuk $a = 24$ diperoleh $x = 4$ dan $V = 1.024 \text{ cm}^3$.

6. Kertas A4 berukuran $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$. Apakah aturan nomor 5 masih berlaku? Tentukan potongan terbaik dan volume maksimumnya.

Kunci: Tidak tepat seperenam, karena kartonnya tidak persegi. $V = x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$ dan $V'(x) = 12x^2 - 202,8x + 623,7 = 0$ memberi $x \approx 4,04 \text{ cm}$ (akar lainnya $\approx 12,86$ di luar daerah asal $0 < x < 10,5$). Volume maksimumnya $\approx 4,04 \times 12,92 \times 21,62 \approx 1.128 \text{ cm}^3$.

7. Toko kue jarang memakai kotak bervolume maksimum. Sebutkan dua alasan praktis mengapa ukuran terbaik secara matematika belum tentu terbaik dalam kehidupan nyata.

Kunci: Contoh: kotak harus pas dengan ukuran kue dan rak etalase; kotak yang terlalu dalam menyulitkan menata dan mengambil kue; dinding tinggi dari karton tipis mudah penyok; tutup dan lidah lem butuh bahan tambahan; tampilan dan biaya cetak ikut diperhitungkan. Optimasi matematika memberi titik awal yang kemudian disesuaikan dengan kendala nyata.

✓ Kesimpulan

Tuliskan fungsi volume kotak, potongan pojok terbaik beserta buktinya dengan turunan, dan aturan umum yang kamu temukan untuk karton persegi.

💡 Refleksi

- Ketika melihat delapan kotak berjajar, aku menyadari bahwa ...
- Turunan membantuku menemukan yang terbaik karena ...
- Masalah mencari yang terbaik di rumah atau di pasar yang ingin kuselesaikan adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada karton? Buka Lab Mini "Gunting pojok, lipat, dan ukur volumenya" di Bab 29 (subbab 29.4). Atur panjang dan lebar karton 24 cm, geser potongan x dari 1 sampai 8, tekan ► Jalankan untuk melihat karton terlipat, lalu catat volume dan $V'(x)$ ke tabel. Perhatikan garis singgung oranye yang mendatar di puncak, lalu ubah ukuran karton untuk menguji aturan seperenam (pertanyaan 5–6). Periksa hitunganmu dengan Rumus Hidup "Volume kotak dari karton" di subbab yang sama.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b29-4

Contoh data (karton manila 24 cm × 24 cm, diukur sampai 0,1 cm)

x (cm)	Panjang alas (cm)	Lebar alas (cm)	Tinggi (cm)	V ukur = p × l × t (cm ³)	V rumus (cm ³)	Selisih V ukur – V rumus (cm ³)
1	21,9	21,8	1,0	477	484	–7
2	19,8	19,9	2,0	788	800	–12
3	17,9	17,8	3,0	956	972	–16
4	15,8	15,9	4,0	1.005	1.024	–19
5	13,9	13,8	5,0	959	980	–21
6	11,8	11,9	6,0	843	864	–21
7	9,9	9,8	7,0	679	700	–21
8	7,8	7,9	8,0	493	512	–19

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketelitian membuat & mengukur kotak	Delapan kotak dipotong dan dilipat rapi; semua ukuran dicatat sampai 0,1 cm.	Kotak cukup rapi, ada 1–2 ukuran yang kurang teliti.	Beberapa kotak miring atau potongannya tidak sama, data kurang konsisten.	Kotak belum dapat diukur.
Model & perhitungan	$V(x)$ dan daerah asal benar; semua volume dan selisih dihitung tepat.	Model benar dengan 1–2 kesalahan hitung kecil.	Model kurang tepat (mis. alas $24 - x$) atau banyak kesalahan hitung.	Belum dapat menyusun model.
Penalaran optimasi & generalisasi	Menyelesaikan $V' = 0$, memakai uji turunan kedua, membandingkan dengan data, dan menemukan aturan $x = \frac{a}{6}$.	Turunan dan maksimum benar, generalisasi belum lengkap.	Hanya membaca puncak dari tabel tanpa bukti turunan.	Belum menentukan potongan terbaik.
Kerja sama & presentasi	Tugas dibagi adil; temuan dipresentasikan jelas dengan grafik dan alasan.	Kerja sama baik, presentasi cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Siapkan persegi $24\text{ cm} \times 24\text{ cm}$ sebelum pelajaran; satu lembar manila ($\pm 50\text{ cm} \times 65\text{ cm}$) cukup untuk 4 persegi. Kelompok cepat dapat membuat kotak $x = 3,5$ dan $4,5$ untuk merasakan puncak yang datar, atau membuktikan maksimum tanpa kalkulus dengan AM-GM: $4x \cdot (24 - 2x) \cdot (24 - 2x) \leq \left(\frac{48}{3}\right)^3 = 4.096$ karena jumlah ketiga faktornya tetap 48, sehingga $V \leq 1.024$ dengan kesamaan saat $4x = 24 - 2x$, yaitu $x = 4$. Diskusikan juga mengapa puncak yang datar membuat salah potong $0,5\text{ cm}$ hampir tidak berpengaruh.

Mathpedia · LKPD Bab 29 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Berapa Luas Selembar Daun? Menjepit Luas dengan Kertas Milimeter

Bab 30 • Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga

Eksplorasi kelompok (menghitung petak + jumlah Riemann)

SMA kelas XI–XII, IB Mathematics: integration

🕒 2 × 45 menit

Model: Discovery learning: taksir – jepit – perkecil petak – temukan limit

Nama Kelas Kelompok Tanggal

🎯 Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menaksir luas daerah lengkung dengan taksiran bawah (petak penuh) dan taksiran atas (petak tersentuh).
- Peserta didik dapat menemukan bahwa celah antara kedua taksiran kira-kira menjadi setengahnya setiap kali sisi petak dibuat setengahnya.
- Peserta didik dapat menjelaskan luas sebagai limit taksiran ketika sisi petak menuju nol dan mengaitkannya dengan jumlah Riemann dan integral tentu.
- Peserta didik dapat menghitung luas model daun dengan integral dan membandingkannya dengan hasil hitung petak.

🔍 Cerita pemantik



Pak Darto, petani cabai di Bantul, membaca petunjuk pupuk daun: takarannya bergantung pada luas permukaan daun. "Daun kan bentuknya lengkung, mana ada rumus luasnya," keluh Dimas. Ayu mengusulkan menjiplak daun di kertas berpetak lalu menghitung kotaknya. "Tapi kotak di tepi daun cuma terisi sebagian. Dihitung atau tidak?" tanya Ancil. Kak Lintang tersenyum, "Hitung dua kali: sekali yang pasti di dalam, sekali yang tersentuh daun. Luas sebenarnya terjepit di antaranya. Lalu perkecil kotaknya dan lihat apa yang terjadi pada jepitan itu!"

? Rumusan masalah

Bagaimana taksiran bawah dan taksiran atas luas sebuah daerah lengkung berubah ketika sisi petak diperkecil, dan ke nilai berapa keduanya mendekat?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Sisi petak h (2 cm, 1 cm, 0,5 cm)	Taksiran bawah, taksiran atas, dan celah di antara keduanya	Daerah yang sama (lingkaran berjari-jari 5,5 cm dan daun yang sama) dan aturan menghitung petak yang sama

🧰 Alat dan bahan

- Kertas milimeter blok (bergaris 1 mm, 0,5 cm, dan 1 cm), 2 lembar per kelompok
- Selembar daun utuh yang lebar dan pipih, panjang ± 10 –15 cm (daun jambu air, mangga, atau nangka)
- Jangka, penggaris, dan pensil runcing
- Stabilo atau pensil warna 2 warna (hijau untuk petak penuh, kuning untuk petak sebagian)
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Pakai daun yang sudah gugur atau minta izin sebelum memetik, dan jangan merusak tanaman sekolah. Hindari daun yang bergetah atau berbulu gatal, dan cuci tangan setelah memegang daun. Ujung jangka tajam: jangan diayunkan atau diarahkan ke teman.

Langkah kerja

1. Kalibrasi: tancapkan jarum jangka tepat di titik potong dua garis tebal 1 cm pada kertas milimeter, lalu gambar lingkaran berjari-jari 5,5 cm. Luas sebenarnya dapat dihitung: $\pi \cdot 5,5^2 \approx 95,03 \text{ cm}^2$.
2. Pakai petak 2 cm (gabungan 2×2 kotak 1 cm) yang sudut-sudutnya bertemu di pusat lingkaran. Warnai hijau petak yang seluruhnya di dalam lingkaran (petak penuh) dan kuning petak yang hanya terisi sebagian. Petak tersentuh = petak penuh + petak sebagian.
3. Ulangi untuk petak 1 cm dan 0,5 cm. Hemat tenaga dengan simetri: hitung seperempat lingkaran saja, lalu kalikan 4.
4. Hitung luas satu petak h^2 , taksiran bawah = banyak petak penuh $\times h^2$, taksiran atas = banyak petak tersentuh $\times h^2$, rata-ratanya, dan celah = atas – bawah.
5. Letakkan daun di kertas milimeter kedua dan jiplak tepinya dengan pensil runcing. Ukur panjang dan lebar terbesarnya.
6. Ulangi langkah 2–4 untuk jiplakan daun dengan petak 2 cm, 1 cm, dan 0,5 cm. Untuk petak kecil, kerjakan berpasangan: satu orang menghitung, satu orang memeriksa.
7. Bandingkan celah pada ketiga ukuran petak dan tuliskan dugaanmu tentang polanya, lalu kerjakan pertanyaan analisis.

Tabel taksiran luas dengan petak

Bentuk dan sisi petak h	Luas 1 petak h^2 (cm^2)	Petak penuh	Petak tersentuh (penuh + sebagian)	Taksiran bawah (cm^2)	Taksiran atas (cm^2)	Rata-rata (cm^2)	Celah atas – bawah (cm^2)
Lingkaran, $h = 2 \text{ cm}$							
Lingkaran, $h = 1 \text{ cm}$							
Lingkaran, $h = 0,5 \text{ cm}$							
Daun, $h = 2 \text{ cm}$							
Daun, $h = 1 \text{ cm}$							
Daun, $h = 0,5 \text{ cm}$							

Grafik

Gambar grafik celah (sumbu tegak) terhadap sisi petak h (sumbu mendatar) untuk lingkaran dan daun dengan dua warna. Sambungkan titik-titiknya dan perpanjang ke arah $h = 0$. Ke mana celah menuju ketika $h \rightarrow 0$?

Analisis

1. Untuk lingkaran, apakah luas sebenarnya $95,03 \text{ cm}^2$ selalu terjepit di antara taksiran bawah dan taksiran atas? Mengapa pasti begitu? Taksiran mana (bawah, atas, atau rata-rata) yang paling dekat?

Kunci: Ya: $48 \leq 95,03 \leq 128$, $76 \leq 95,03 \leq 120$, dan $83 \leq 95,03 \leq 104$. Petak penuh seluruhnya berada di dalam lingkaran, jadi taksiran bawah tidak mungkin melebihi luas sebenarnya; petak tersentuh menutupi seluruh lingkaran, jadi taksiran atas tidak mungkin kurang. Rata-rata paling dekat: $93,5 \text{ cm}^2$ pada petak $0,5 \text{ cm}$, selisihnya sekitar $1,5 \text{ cm}^2$.

2. Setiap kali sisi petak dibuat setengahnya, celahnya menjadi kira-kira berapa kali semula? Jelaskan alasannya dengan memikirkan petak-petak kuning di sepanjang tepi daerah.

Kunci: Kira-kira setengahnya: lingkaran $80 \rightarrow 44 \rightarrow 21 \text{ cm}^2$, daun $68 \rightarrow 35 \rightarrow 18 \text{ cm}^2$. Celah sama dengan luas semua petak kuning. Banyak petak kuning kira-kira sebanding dengan panjang tepi dibagi h , sedangkan luas setiap petak h^2 , sehingga celah sebanding dengan (panjang tepi) $\times h$. Jika h dibagi 2, celahnya juga kira-kira dibagi 2.

3. Pakai pola nomor 2 untuk menebak celah pada petak $0,25 \text{ cm}$ dan $0,125 \text{ cm}$. Apa yang terjadi pada celah dan pada kedua taksiran jika $h \rightarrow 0$? Tuliskan luas daun sebagai sebuah limit.

Kunci: Lingkaran: sekitar $10\text{--}11 \text{ cm}^2$ pada petak $0,25 \text{ cm}$ dan 5 cm^2 pada petak $0,125 \text{ cm}$; daun: sekitar 9 cm^2 dan $4\text{--}5 \text{ cm}^2$. Jika $h \rightarrow 0$, celah $\rightarrow 0$, sehingga taksiran bawah dan atas sama-sama mendekati luas sebenarnya: $L = \lim_{h \rightarrow 0} (\text{banyak petak penuh}) \cdot h^2 = \lim_{h \rightarrow 0} (\text{banyak petak tersentuh}) \cdot h^2$. Inilah gagasan integral: luas adalah limit jumlah luas bagian-bagian kecil.

4. Ancil memodelkan tepi daun sepanjang 12 cm dan selebar 6 cm dengan dua parabola $y = \frac{x(12-x)}{12}$ dan $y = -\frac{x(12-x)}{12}$ untuk $0 \leq x \leq 12$. Hitung luas daun model itu dengan integral dan bandingkan dengan rata-rata taksiran petak $0,5 \text{ cm}$ pada contoh data.

Kunci: $L = \int_0^{12} \left[\frac{x(12-x)}{12} - \left(-\frac{x(12-x)}{12} \right) \right] dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} (12x - x^2) dx = \frac{1}{6} \left[6x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{12} = \frac{1}{6} (864 - 576) = 48 \text{ cm}^2$. Contoh data petak $0,5 \text{ cm}$ memberi rata-rata $47,75 \text{ cm}^2$, selisihnya hanya $0,25 \text{ cm}^2$. Daun asli tidak tepat berbentuk parabola, jadi untuk daunmu sendiri selisihnya bisa lebih besar.

5. Ayu memakai cara yang lebih rapi: membagi daun model menjadi 4 pita tegak selebar 3 cm dan mengganti setiap pita dengan persegi panjang yang tingginya diambil di titik tengah pita. Hitung jumlah Riemann ini dan bandingkan dengan jawaban nomor 4.

Kunci: Lebar daun model di x adalah $w(x) = \frac{x(12-x)}{6}$. Di titik tengah pita $x = 1,5; 4,5; 7,5; 10,5$ lebarnya $2,625; 5,625; 5,625; 2,625 \text{ cm}$. Jumlah Riemann $= 3 \times (2,625 + 5,625 + 5,625 + 2,625) = 3 \times 16,5 = 49,5 \text{ cm}^2$. Hanya dengan 4 persegi panjang hasilnya sudah dekat dengan 48 cm^2 (lebih $1,5 \text{ cm}^2$); makin banyak pita, makin dekat ke nilai integral.

6. Pada peta berskala $1 : 50.000$, sebuah danau menutupi tepat 18 petak penuh dan 30 petak tersentuh berukuran 1 cm . Taksir luas danau itu dalam km^2 beserta batas bawah dan batas atasnya. Apa saranmu agar taksirannya lebih meyakinkan?

Kunci: Skala $1 : 50.000$ berarti 1 cm di peta $= 50.000 \text{ cm} = 0,5 \text{ km}$, jadi 1 cm^2 di peta $= 0,25 \text{ km}^2$. Taksiran bawah $18 \times 0,25 = 4,5 \text{ km}^2$, taksiran atas $30 \times 0,25 = 7,5 \text{ km}^2$, rata-rata sekitar 6 km^2 . Celahnya masih 3 km^2 , jadi petak perlu diperkecil (misalnya $0,5 \text{ cm}$ atau 1 mm) agar jepitannya rapat.

✓ Kesimpulan

Tuliskan cara menjepit luas daerah lengkung dengan petak, bagaimana celah berubah ketika petak diperkecil, dan mengapa luas sebenarnya dapat dipandang sebagai sebuah limit, yaitu integral tentu.

💬 Refleksi

- Saat celah jepitan makin sempit, aku merasa ...
- Menghitung petak satu per satu mengajarku bahwa ...
- Benda atau tempat di sekitarku yang luasnya ingin kutaksir dengan cara ini adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada kertas milimeter? Buka Lab Mini "Peta danau: perkecil kotak, rapatkan jepitan" di Bab 30 (subbab 30.1). Pilih sisi kotak 2 km, 1 km, 500 m, 250 m, dan 125 m, lalu catat banyak kotak penuh, kotak sebagian, taksiran bawah, dan taksiran atas ke tabel (ganti baris lingkaran dan daun dengan danau). Periksa apakah celahnya juga menjadi setengahnya. Untuk pertanyaan 5, pakai Grafik Hidup "Persegi panjang Riemann: tambah n , celahnya menghilang" di subbab yang sama: tambah n dan amati jumlah Riemann mendekati luas eksak.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b30-1

📊 Contoh data (lingkaran $r = 5,5$ cm; daun jambu air panjang 12 cm, lebar 6 cm)

Bentuk dan sisi petak h	Luas 1 petak h^2 (cm^2)	Petak penuh	Petak tersentuh (penuh + sebagian)	Taksiran bawah (cm^2)	Taksiran atas (cm^2)	Rata-rata (cm^2)	Celah atas – bawah (cm^2)
Lingkaran, $h = 2$ cm	4	12	32	48	128	88	80
Lingkaran, $h = 1$ cm	1	76	120	76	120	98	44
Lingkaran, $h = 0,5$ cm	0,25	332	416	83	104	93,5	21
Daun, $h = 2$ cm	4	5	22	20	88	54	68
Daun, $h = 1$ cm	1	32	67	32	67	49,5	35
Daun, $h = 0,5$ cm	0,25	155	227	38,75	56,75	47,75	18

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian menjiplak & menghitung petak	Jiplakan rapi; petak penuh dan sebagian diwarnai konsisten dan dihitung ulang oleh pasangan.	Hitungan hampir tepat, ada sedikit petak yang terlewat.	Aturan petak penuh dan sebagian tidak konsisten.	Petak belum dihitung.
Perhitungan taksiran & tabel	Luas petak, taksiran bawah, atas, rata-rata, dan celah semuanya benar.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan, misalnya lupa mengalikan dengan h^2 .	Tabel hampir kosong.
Penemuan pola & penalaran limit	Menemukan celah sebanding dengan h , menuliskan luas sebagai limit, dan mengaitkannya dengan jumlah Riemann dan integral.	Menemukan pola celah dengan alasan sebagian.	Hanya menyebut taksiran makin teliti tanpa alasan.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & komunikasi	Pembagian tugas menghitung dan memeriksa berjalan baik; kesimpulan disampaikan jelas.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.



Catatan guru

Petak 0,5 cm paling melelahkan; sarankan menghitung blok 1 cm yang penuh lebih dulu (setiap blok = 4 petak kecil), lalu hanya memeriksa petak kecil di sekitar tepi. Sepakati aturannya: petak yang hanya bersentuhan di satu titik atau sepanjang garis tepi tidak dihitung tersentuh. Untuk lingkaran, simetri seperempat sangat menghemat waktu. Kelompok cepat dapat menaksir luas daun dengan cara lain (menimbang guntingan karton daun dibanding persegi karton 10 cm × 10 cm) atau menghitung jumlah Riemann dengan 6 pita.

Tangkap Penggaris! Survei Waktu Reaksi Kelas

Bab 31 • Statistika: Ber cerita dengan Data

Survei data kelas + percobaan sederhana

SMA kelas X–XII, IGCSE/IB statistics

2 x 45 menit

Model: Inkuiri terbimbing (siklus investigasi statistika): bertanya – mengumpulkan – mengolah – menyajikan – menafsirkan

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengumpulkan data waktu reaksi kelas secara etis lalu menyajikannya dalam tabel, box plot berdampingan, dan diagram pencar.
- Peserta didik dapat menghitung rata-rata, median, modus, kuartil, IQR, dan simpangan baku, serta mengenali pencilan dengan aturan $1,5 \times \text{IQR}$.
- Peserta didik dapat membandingkan dua kelompok data (tangan dominan dan tangan lain) dari pusat dan sebarannya.
- Peserta didik dapat menafsirkan koefisien korelasi, menjelaskan pengaruh pencilan, dan tidak menyimpulkan sebab-akibat secara keliru.

Cerita pemantik



Di jalan menuju sekolah, Kak Lintang mengingatkan Dimas agar menjaga jarak dari angkot di depannya. "Begitu angkot mengerem, kamu butuh waktu untuk bereaksi, dan selama itu motormu masih melaju." Dimas penasaran: secepat apa sebenarnya reaksi kita? Ayu punya ide murah: menangkap penggaris yang dijatuhkan tiba-tiba. Makin pendek jarak jatuhnya, makin cepat reaksinya. Ancil menambah pertanyaan, "Apakah tangan yang biasa dipakai menulis lebih cepat daripada tangan satunya?" Mari kumpulkan data seisi kelas dan biarkan data bercerita.

Rumusan masalah

Bagaimana sebaran waktu reaksi teman sekelas, dan apakah tangan dominan bereaksi lebih cepat serta lebih konsisten daripada tangan yang lain?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Tangan yang dipakai (tangan dominan atau tangan lain)	Jarak jatuh penggaris d (cm) dan waktu reaksi t (ms)	Penggaris yang sama, jari di angka 0 saat mulai, tanpa aba-aba, lengan disandarkan di meja

Alat dan bahan

- Penggaris 30 cm yang kaku (kayu atau logam), 1 per pasangan
- Lembar pencatat dan pensil
- Kalkulator ilmiah atau HP (mode statistika bila ada)
- Kertas grafik untuk box plot dan diagram pencar
- Meja dan kursi untuk menyandarkan lengan

Keselamatan

Penggaris dijatuhkan, bukan dilempar; jangan mengayunkan penggaris ke arah wajah teman. Privasi dan persetujuan: ikut survei bersifat sukarela, minta izin setiap teman sebelum mencatat datanya, pakai kode (S01, S02, ...), bukan nama, dan jangan mengumumkan peringkat paling lambat. Data hanya dipakai untuk pelajaran ini; daftar pasangan kode–nama disimpan guru lalu dimusnahkan setelah selesai. Teman yang tidak ingin diukur boleh berperan sebagai pencatat atau pemeriksa hitungan.

Langkah kerja

1. Berpasangan. Penangkap menyandarkan lengan di meja dengan telapak tangan menjulur melewati tepi meja, ibu jari dan telunjuk terbuka ± 2 cm. Pelepas memegang ujung atas penggaris sehingga angka 0 tepat di antara ibu jari dan telunjuk penangkap.
2. Tanpa aba-aba dan setelah jeda acak, pelepas menjatuhkan penggaris. Penangkap menjepitnya secepat mungkin. Baca angka di tepi atas ibu jari: itulah jarak jatuh d (cm).
3. Lakukan 3 kali dengan tangan dominan dan 3 kali dengan tangan lain. Catat rata-ratanya, dibulatkan ke 0,5 cm. Bila penggaris lolos, ulangi percobaan itu.
4. Kumpulkan data dari minimal 12 teman yang bersedia, memakai kode S01, S02, ... (baca catatan privasi).
5. Ubah jarak menjadi waktu reaksi dengan rumus jatuh bebas $d = \frac{1}{2}gt^2$, yaitu $t = \sqrt{\frac{2d}{981}}$ detik (d dalam cm, $g = 981 \text{ cm/s}^2$), lalu kalikan 1.000 untuk mendapat milidetik (ms).
6. Urutkan data setiap tangan. Hitung rata-rata, median, modus, Q_1 , Q_3 , IQR, dan simpangan baku σ (pembagi n). Periksa pencilan dengan batas $Q_1 - 1,5 \times \text{IQR}$ dan $Q_3 + 1,5 \times \text{IQR}$.
7. Gambar box plot kedua tangan berdampingan pada satu sumbu, lalu diagram pencar d tangan dominan (sumbu mendatar) terhadap d tangan lain (sumbu tegak).

Tabel data waktu reaksi (rata-rata 3 percobaan)

Kode	d tangan dominan (cm)	d tangan lain (cm)	t tangan dominan (ms)	t tangan lain (ms)
S01				
S02				
S03				
S04				
S05				
S06				
S07				
S08				
S09				
S10				
S11				
S12				

Grafik

Gambar (1) box plot d tangan dominan dan tangan lain berdampingan pada satu sumbu 0–35 cm, dengan pencilan ditandai titik terpisah; (2) diagram pencar dengan d tangan dominan pada sumbu mendatar dan d tangan lain pada sumbu tegak, ditambah garis $y = x$ sebagai pembanding.

Analisis

1. Hitung rata-rata, median, dan modus d untuk kedua tangan. Pada tangan lain, mengapa rata-rata lebih besar daripada median? Ukuran mana yang lebih mewakili teman pada umumnya?

Kunci: Tangan dominan: rata-rata $\frac{168}{12} = 14,0$ cm, median $\frac{13,0+14,0}{2} = 13,5$ cm, modus 13,0 cm. Tangan lain: rata-rata $\frac{210,5}{12} \approx 17,5$ cm, median $\frac{16,5+16,5}{2} = 16,5$ cm, modulusnya tidak bermakna (14,0; 15,0; 16,5; dan 17,0 masing-masing muncul dua kali). Rata-rata tangan lain ditarik naik oleh S07 (30,0 cm), sedangkan median tahan pencilan, jadi median lebih mewakili teman pada umumnya.

2. Tentukan ringkasan lima angka dan IQR untuk kedua tangan. Adakah pencilan menurut aturan $1,5 \times \text{IQR}$? Apa kemungkinan penyebabnya, dan bolehkah data itu langsung dibuang?

Kunci: Tangan dominan: 10,5; $Q_1 = 12,25$; 13,5; $Q_3 = 15,5$; 19,0; IQR = 3,25; batas pencilan 7,375 dan 20,375, jadi tidak ada pencilan. Tangan lain: 13,5; $Q_1 = 14,5$; 16,5; $Q_3 = 18,75$; 30,0; IQR = 4,25; batas atas $18,75 + 6,375 = 25,125$, jadi 30,0 (S07) adalah pencilan. Mungkin S07 lengah, kaget, atau penggaris dilepas saat ia menoleh. Jangan langsung dibuang: periksa catatan, ulangi percobaan bila bisa, dan laporkan hasil dengan dan tanpa pencilan.

3. Hitung simpangan baku σ kedua tangan, lalu hitung lagi untuk tangan lain tanpa pencilan. Tangan mana yang lebih konsisten? Seberapa besar pengaruh satu pencilan terhadap σ ?

Kunci: $\sigma_{\text{dominan}} = \sqrt{6} \approx 2,45$ cm (jumlah kuadrat simpangan 72, dibagi 12). $\sigma_{\text{lain}} \approx 4,44$ cm, tetapi tanpa S07 hanya $\approx 2,48$ cm. Dengan semua data, tangan dominan jauh lebih konsisten; tanpa pencilan, keduanya hampir sama konsisten. Satu pencilan hampir menggandakan σ karena simpangannya (sekitar 12,5 cm) dikuadratkan.

4. Dari box plot berdampingan, apakah tangan dominan bereaksi lebih cepat? Berapa titik pada diagram pencar yang berada di atas garis $y = x$, dan apa artinya?

Kunci: Ya. Kotak tangan dominan (12,25–15,5) terletak lebih ke kiri daripada kotak tangan lain (14,5–18,75), dan median tangan lain (16,5) bahkan berada di luar kotak tangan dominan. Semua 12 titik berada di atas garis $y = x$: setiap siswa menangkap lebih cepat dengan tangan dominannya.

5. Hitung koefisien korelasi r antara d tangan dominan dan d tangan lain, dengan dan tanpa S07. Mengapa satu titik dapat mengubah r sebesar itu? Apakah korelasi yang kuat berarti tangan dominan menyebabkan tangan lain cepat?

Kunci: Dengan semua data $r \approx 0,13$ (hampir tidak ada hubungan linear); tanpa S07 $r \approx 0,90$ (korelasi positif kuat). Rumus r memakai hasil kali simpangan dari rata-rata; titik S07 sangat jauh dari pola (d tangan lain besar padahal d dominannya kecil), sehingga menguasai jumlahnya. Korelasi tidak berarti sebab-akibat: kedua tangan sama-sama dipengaruhi faktor ketiga, yaitu kewaspadaan dan kecepatan otak orang itu.

6. Ubah median d tangan dominan menjadi waktu reaksi. Mengapa median waktu dapat dihitung langsung dari median jarak, sedangkan rata-rata waktu tidak tepat sama dengan waktu dari rata-rata jarak?

Kunci: $t = \sqrt{\frac{2 \times 13,5}{981}} \approx 0,166 \text{ s} = 166 \text{ ms}$. Fungsi $t = \sqrt{2d/981}$ selalu naik, jadi urutan data tidak berubah dan median waktu sama dengan waktu dari median jarak (median kolom ms juga $\frac{163+169}{2} = 166 \text{ ms}$). Rata-rata tidak demikian karena akar kuadrat tidak linear: rata-rata kolom ms $\approx 168,4 \text{ ms}$, sedangkan waktu dari rata-rata jarak $14,0 \text{ cm} \approx 168,9 \text{ ms}$.

7. Dimas mengendarai motor dengan kecepatan 40 km/jam . Berapa meter motornya masih melaju selama waktu reaksi median kelas? Mengapa jarak aman di jalan raya harus jauh lebih besar daripada hasil ini?

Kunci: $40 \text{ km/jam} = \frac{40}{3,6} \approx 11,1 \text{ m/s}$, sehingga selama $0,166 \text{ s}$ motor menempuh $11,1 \times 0,166 \approx 1,8 \text{ m}$. Di jalan kita tidak sedang siaga menatap satu benda: perlu waktu untuk melihat, menyadari bahaya, dan memindahkan tangan atau kaki ke rem (sering 1 detik atau lebih, jadi sekitar 11 m), ditambah jarak pengereman. Karena itu jarak aman harus jauh lebih besar.

✓ Kesimpulan

Tuliskan kesimpulan survei kelasmu: pusat dan sebaran waktu reaksi kelas, perbandingan tangan dominan dan tangan lain (dengan box plot dan simpangan baku), pengaruh pencilan, serta satu keterbatasan surveimu.

💬 Refleksi

- Hal yang paling mengejutkanku dari data kelas adalah ...
- Menjaga privasi teman saat mengumpulkan data penting karena ...
- Aku akan memakai cara berpikir statistika ini ketika ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak sempat mengumpulkan data? Pakai contoh data guru dengan Lab Mini "Jungkat-jungkit data: rata-rata vs median" di Bab 31 (subbab 31.2): tekan **—** Hapus satu sampai tersisa tiga titik, seret ketiganya ke nilai d yang pertama, lalu klik di atas papan untuk menambah titik lainnya (bulatkan ke cm). Nyalakan Box plot, bandingkan rata-rata dan median, lalu tekan **🚀** Tambah pencilan. Untuk korelasi, buka Lab Mini "Diagram pencar hidup: korelasi dan garis regresi" (subbab 31.5): seret satu titik jauh dari polanya seperti S07 dan amati r anjlok. Periksa σ dengan Rumus Hidup "Simpangan baku lima data" (subbab 31.4).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b31-3

 Contoh data 12 siswa (jarak dibulatkan ke 0,5 cm; waktu dari rumus jatuh bebas)

Kode	d tangan dominan (cm)	d tangan lain (cm)	t tangan dominan (ms)	t tangan lain (ms)
S01	12,5	16,5	160	183
S02	15,0	17,0	175	186
S03	10,5	14,0	146	169
S04	17,5	20,5	189	204
S05	13,0	13,5	163	166
S06	14,5	16,5	172	183
S07	11,0	30,0	150	247
S08	16,0	17,0	181	186
S09	13,0	14,0	163	169
S10	19,0	21,5	197	209
S11	12,0	15,0	156	175
S12	14,0	15,0	169	175

 Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Etika & prosedur pengumpulan data	Meminta izin, memakai kode, prosedur jatuh penggaris konsisten, dan percobaan gagal diulang.	Etika dijaga, prosedur sesekali kurang konsisten (mis. memberi aba-aba).	Data dikumpulkan tanpa izin jelas atau prosedur sering berubah.	Data tidak dapat dipercaya atau privasi teman dilanggar.
Ketepatan perhitungan statistik	Rata-rata, median, modus, kuartil, IQR, σ , batas pencilan, dan r semuanya benar.	Ada 1-2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan, misalnya median dari data yang belum diurutkan.	Statistik belum dihitung.
Penyajian data	Box plot berdampingan dan diagram pencar berskala benar, berlabel, dan pencilan ditandai.	Grafik benar dengan sedikit kekurangan label atau skala.	Grafik kurang tepat, misalnya kumis menjulur ke pencilan.	Grafik belum dibuat.
Penafsiran & penalaran	Membandingkan pusat dan sebaran, menjelaskan pengaruh pencilan, dan membedakan korelasi dari sebab-akibat.	Penafsiran sebagian besar tepat.	Hanya membandingkan rata-rata tanpa melihat sebaran.	Belum menafsirkan data.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Peragakan cara melepas penggaris tanpa aba-aba dan tanpa gerakan pemberi isyarat. Untuk kelas besar, setiap kelompok cukup mengumpulkan 12 data, atau gabungkan data seluruh kelas di papan tulis memakai kode. Jangan memaksa siswa yang enggan diukur. Ingatkan bahwa simpangan baku di buku ini memakai pembagi n karena datanya adalah seluruh kelompok yang diteliti. Kelompok cepat dapat menghitung garis regresi tanpa S_{07} ($\hat{y} \approx 3,09 + 0,93x$) atau menguji apakah latihan (percobaan ke-1 dibanding ke-3) mempercepat reaksi.

Kartu Calon Pengurus: Kapan Urutan Itu Penting?

Bab 32 • Kaidah Pencacahan

Eksplorasi kelompok dengan kartu (penemuan terbimbing)

SMA kelas XI–XII (Fase F), juga pengayaan SMP kelas IX

2 × 45 menit

Model: Discovery learning: susun – daftar – bandingkan – rumuskan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mendaftar semua susunan dan semua kelompok secara sistematis dengan kartu dan diagram pohon.
- Peserta didik dapat memakai aturan perkalian (kotak pengisian tempat) untuk menghitung permutasi $P(n, r)$.
- Peserta didik dapat menemukan hubungan $P(n, r) = C(n, r) \times r!$ dari data dan memakainya untuk merumuskan kombinasi $C(n, r)$.
- Peserta didik dapat memutuskan apakah suatu masalah sehari-hari memakai permutasi atau kombinasi, lalu menghitungnya.

Cerita pemantik



Kelas XI-2 sedang menyiapkan dua hal sekaligus. Pertama, memilih ketua dan wakil ketua kelas dari lima calon: Ayu, Bima, Citra, Dimas, dan Eka. Kedua, mengirim dua orang dari lima calon yang sama ke lomba cerdas cermat. Ancil berkomentar, "Dua-duanya sama saja, kok: memilih 2 orang dari 5. Banyak caranya pasti sama!" Ayu menggeleng ragu: "Dimas ketua dan Ayu wakil itu beda dengan Ayu ketua dan Dimas wakil, kan? Tapi di tim lomba, Dimas–Ayu sama saja dengan Ayu–Dimas." Kak Lintang membagikan lima kartu nama: "Jangan berdebat dulu. Susun, daftar, lalu hitung. Biar kartu-kartu ini yang menjawab!"

? Rumusan masalah

Bagaimana hubungan antara banyak susunan berurutan (permutasi) dan banyak kelompok tanpa urutan (kombinasi) jika kita memilih r orang dari n calon?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- 5 kartu nama dari karton bekas ($\pm 5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$) bertuliskan A (Ayu), B (Bima), C (Citra), D (Dimas), E (Eka)
- 3 kartu jabatan: Ketua, Wakil, Sekretaris (sebagai alas tempat kartu nama)
- 2 lembar kertas HVS atau buram untuk daftar dan diagram pohon
- Pensil warna atau spidol, minimal 3 warna
- Gunting dan penggaris untuk membuat kartu
- Kalkulator atau HP

! Keselamatan

Gunakan gunting dengan hati-hati, arahkan ujungnya menjauhi teman, dan kembalikan setelah dipakai. Pakai nama tokoh cerita pada kartu, bukan nama teman sekelas, agar tidak ada yang merasa sedang dinilai

atau dipilih-pilih. Kumpulkan sisa potongan karton ke tempat sampah.

Langkah kerja

1. Buat 5 kartu nama A–E dan 3 kartu jabatan. Tulis dugaan kelompokmu: apakah banyak cara memilih ketua–wakil sama dengan banyak cara memilih tim lomba 2 orang? Mana yang lebih banyak?
2. Mulai dengan 3 calon saja (A, B, C). Letakkan kartu jabatan Ketua dan Wakil, lalu isi dengan kartu nama. Daftar semua susunan secara sistematis: tetapkan Ketua dulu (A, lalu B, lalu C), baru ganti Wakilnya. Gambar diagram pohonnya.
3. Sekarang pilih tim lomba 2 orang dari A, B, C tanpa jabatan. Daftar semua timnya. Warnai dengan warna yang sama susunan-susunan di langkah 2 yang ternyata tim yang sama (misalnya AB dan BA).
4. Ulangi langkah 2–3 untuk 4 calon (A–D) memilih 2 orang, 4 calon memilih 3 orang (Ketua, Wakil, Sekretaris), dan 5 calon memilih 2 orang. Tulis juga banyak susunannya sebagai kotak-kotak aturan perkalian, misalnya 4×3 .
5. Untuk 5 calon memilih 3 orang, jangan mendaftar semua susunan! Daftar dulu semua tim 3 orang. Lalu ambil satu tim saja dan bagikan ke tiga jabatan dengan kartu: ada berapa susunan untuk satu tim? Pakai hasil itu untuk menghitung banyak susunan seluruhnya, lalu periksa dengan aturan perkalian.
6. Isi kolom "susunan ÷ kelompok" pada setiap baris dan bandingkan dengan kolom $r!$.
7. Tukar lembar daftar dengan kelompok lain. Periksa apakah ada susunan yang terlewat atau terhitung dua kali.

Tabel hasil pencacahan

Kasus (n calon, pilih r)	Banyak susunan berurutan (jabatan)	Aturan perkalian	Banyak kelompok tanpa urutan (tim)	Susunan ÷ kelompok	$r!$
$n = 3, r = 2$					
$n = 4, r = 2$					
$n = 4, r = 3$					
$n = 5, r = 2$					
$n = 5, r = 3$					

Grafik

Gambar diagram pohon untuk 4 calon (A–D) yang dipilih menjadi Ketua dan Wakil. Ada berapa ujung cabang? Lingkari dengan warna yang sama setiap dua ujung yang membentuk tim yang sama (misalnya A–B dan B–A). Berapa warna yang kamu perlukan?

Analisis

1. Bandingkan kolom susunan berurutan dan kolom kelompok tanpa urutan. Apakah pendapat Ancil benar? Kolom mana yang selalu lebih banyak, dan mengapa? Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Tidak. Untuk 5 calon memilih 2 ada 20 susunan ketua–wakil, tetapi hanya 10 tim lomba. Untuk $r \geq 2$, susunan selalu lebih banyak karena orang-orang yang sama dengan urutan berbeda dihitung sebagai susunan berbeda, sedangkan sebagai tim hanya dihitung sekali. (Untuk $r = 1$ keduanya sama, yaitu n .)

2. Pada kolom aturan perkalian, mengapa memilih ketua dan wakil dari 5 calon menghasilkan 5×4 ? Tuliskan aturan umum untuk menyusun r orang dari n calon dalam bentuk faktorial.

Kunci: Kotak Ketua dapat diisi 5 calon. Setelah ketua terpilih, kotak Wakil tinggal punya 4 calon, sehingga menurut aturan perkalian ada $5 \times 4 = 20$ susunan. Umumnya $P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$, yaitu r faktor yang menurun mulai dari n .

3. Kolom susunan $\div$ kelompok selalu sama dengan $r!$. Jelaskan mengapa setiap tim berisi r orang muncul tepat $r!$ kali dalam daftar susunan berurutan. Lalu tuliskan rumus kombinasi $C(n, r)$.

Kunci: Satu tim berisi r orang dapat dibagikan ke r jabatan dengan $r \times (r-1) \times \cdots \times 1 = r!$ cara, dan setiap cara itu tercatat sebagai satu susunan berbeda. Jadi $P(n, r) = C(n, r) \times r!$, sehingga $C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Contoh: $C(5, 3) = \frac{60}{6} = 10$.

4. Dari tabel, $C(5, 2) = C(5, 3)$. Apakah ini kebetulan? Jelaskan dengan kalimat sehari-hari (petunjuk: memilih 2 orang yang berangkat lomba sama saja dengan memilih ... orang yang tinggal).

Kunci: Bukan kebetulan. Setiap pilihan 2 orang yang berangkat berpasangan tepat dengan satu pilihan 3 orang yang tinggal, jadi banyaknya sama: $C(5, 2) = C(5, 3) = 10$. Umumnya $C(n, r) = C(n, n-r)$, terlihat juga dari rumus $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ yang simetris.

5. Tentukan apakah masalah berikut memakai permutasi atau kombinasi, lalu hitung banyak caranya: (a) menentukan juara 1, 2, dan 3 lomba balap karung dari 8 peserta; (b) memilih 3 rasa berbeda dari 6 rasa es krim untuk satu cup; (c) banyak jabat tangan antara 10 orang selesai rapat.

Kunci: (a) Urutan penting (juara 1 berbeda dengan juara 2): permutasi $P(8, 3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$. (b) Urutan rasa dalam cup tidak penting: kombinasi $C(6, 3) = 20$. (c) Jabat tangan A-B sama dengan B-A: kombinasi $C(10, 2) = 45$.

6. Kelas Dimas berisi 32 siswa. Hitung banyak cara memilih ketua, wakil, sekretaris, dan bendahara, serta banyak cara memilih tim 4 orang untuk lomba. Berapa kali lipat perbedaannya? Apakah cocok dengan pola di tabelmu?

Kunci: $P(32, 4) = 32 \times 31 \times 30 \times 29 = 863.040$ cara memilih pengurus; $C(32, 4) = \frac{863.040}{4!} = \frac{863.040}{24} = 35.960$ cara memilih tim. Banyak susunan 24 kali banyak tim, dan $24 = 4!$, cocok dengan pola susunan $\div$ kelompok $= r!$.

✓ Kesimpulan

Tuliskan perbedaan permutasi dan kombinasi dengan kata-katamu sendiri, rumus keduanya, dan hubungan $P(n, r) = C(n, r) \times r!$. Berikan satu contoh kehidupan sehari-hari untuk masing-masing.

💡 Refleksi

- Cara mendaftar yang membuat tidak ada susunan yang terlewat adalah ...
- Saat menyadari bahwa satu tim muncul berkali-kali dalam daftar susunan, aku merasa ...
- Situasi di sekitarku yang urutannya penting adalah ..., sedangkan yang urutannya tidak penting adalah ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak sempat membuat kartu? Buka Lab Mini "Penyusun antrean: dari loket sampai meja bundar" di Bab 32 (subbab 32.3). Pilih mode antrean lurus, atur banyak teman n dan tempat r sesuai tabel, lalu tekan ➡ Berikutnya untuk melihat susunan satu per satu; catat banyak susunan dan kotak-kotak aturan perkaliannya. Untuk kolom tim, pakai Rumus Hidup "Kombinasi: memilih r dari n " di subbab 32.5. Setelah itu, uji kecepatanmu dengan Adu Cepat "Permutasi kilat" (subbab 32.3) dan "Kombinasi kilat" (subbab 32.5).
Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b32-5

Contoh hasil (daftar lengkap, tanpa susunan yang terlewat atau ganda)

Kasus (n calon, pilih r)	Banyak susunan berurutan (jabatan)	Aturan perkalian	Banyak kelompok tanpa urutan (tim)	Susunan ÷ kelompok	$r!$
$n = 3, r = 2$	6	3×2	3	2	2
$n = 4, r = 2$	12	4×3	6	2	2
$n = 4, r = 3$	24	$4 \times 3 \times 2$	4	6	6
$n = 5, r = 2$	20	5×4	10	2	2
$n = 5, r = 3$	60	$5 \times 4 \times 3$	10	6	6

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Pendaftaran sistematis	Semua susunan dan tim terdaftar lengkap tanpa ganda, dengan urutan teratur dan diagram pohon yang rapi.	Daftar lengkap; ada 1 susunan ganda atau terlewat yang kemudian diperbaiki sendiri.	Beberapa susunan terlewat atau terhitung dua kali.	Daftar acak dan jauh dari lengkap.
Perhitungan & tabel	Semua isian tabel, aturan perkalian, dan faktorial benar.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan hitung atau tabel tidak lengkap.	Tabel hampir kosong.
Penemuan pola & penalaran	Menemukan susunan ÷ kelompok = $r!$, menjelaskan alasannya, dan merumuskan $C(n, r)$ dengan tepat.	Menemukan pola dan rumus dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan, atau tertukar antara permutasi dan kombinasi.	Belum menemukan pola.
Penerapan dalam konteks	Semua masalah pada pertanyaan 5–6 diklasifikasikan dan dihitung benar disertai alasan urutan penting atau tidak.	Sebagian besar benar; alasan kurang lengkap.	Klasifikasi sering keliru.	Belum dapat menerapkan.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota berperan (penyusun kartu, pencatat, pemeriksa); kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 20) × 100.

Catatan guru

Kartu dapat disiapkan sebelum pelajaran atau dibuat siswa dalam 5 menit. Kelompok 3–4 siswa dengan peran bergilir: penyusun kartu, pencatat, pemeriksa. Tekankan cara mendaftar sistematis (tetapkan posisi pertama dulu); inilah jembatan ke aturan perkalian. Kelompok cepat dapat menghitung banyak cara duduk 5 orang di meja bundar ($4! = 24$) lalu memeriksanya dengan mode meja bundar di Lab Mini, atau menemukan bilangan $C(n, r)$ pada segitiga Pascal (subbab 32.6). Kelompok yang perlu bantuan cukup sampai $n = 4$.

Mathpedia · LKPD Bab 32 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Balap Karung Dadu 17-an: Mengapa Nomor 7 Paling Kencang?

Bab 33 • Peluang

Percobaan kelompok + permainan matematika

SMP kelas VIII–IX, juga SMA kelas X–XI



2 × 40 menit

Model: Inkuiri terbimbing: tebak – lempar – catat – bandingkan dengan teori

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menyusun ruang sampel pelemparan dua dadu dan menghitung peluang teoretis setiap jumlah mata.
- Peserta didik dapat mengumpulkan data percobaan, menghitung frekuensi relatif, dan membandingkannya dengan peluang teoretis.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa frekuensi relatif makin dekat ke peluang teoretis jika banyak percobaan bertambah.
- Peserta didik dapat memakai frekuensi harapan dan peluang untuk menilai apakah sebuah aturan permainan adil.

Cerita pemantik



Panitia 17-an di RT Ayu menyiapkan lomba baru: Balap Karung Dadu. Sebelas peserta bernomor 2 sampai 12 berbaris di garis start. Setiap kali dua dadu dilempar, peserta yang nomornya sama dengan jumlah mata maju satu petak. Ancil langsung menjagokan nomor 12: "Angkanya paling besar, pasti paling kencang!" Dimas memilih nomor 7, tetapi tidak bisa menjelaskan alasannya. Ayu bertanya-tanya, apakah sebenarnya semua peserta punya kesempatan yang sama? Kak Lintang tersenyum: "Daripada berdebat, ayo kita lempar, catat, dan hitung!"

? Rumusan masalah

Pada pelemparan dua dadu, jumlah mata berapa yang paling sering muncul, dan seberapa dekat frekuensi relatif hasil percobaan dengan peluang teoretisnya?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak lemparan (60 lemparan kelompok dibandingkan 360 lemparan gabungan kelas)	Frekuensi dan frekuensi relatif setiap jumlah mata	Dadu yang sama, cara mengocok dan melempar yang sama, arena lempar yang sama

Alat dan bahan

- 2 dadu berbeda warna (misalnya merah dan biru) per kelompok
- Tutup kotak kardus atau nampan sebagai arena lempar
- Selembar karton/HVS untuk lintasan 11 jalur (bernomor 2–12), masing-masing 8 petak
- 11 pion dari kancing, tutup botol kecil, atau biji jagung

- Kertas buram untuk turus, penggaris, dan spidol
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Lempar dadu di dalam tutup kotak agar tidak jatuh ke lantai dan terinjak. Dadu, kancing, dan biji jagung adalah benda kecil: jangan dimasukkan ke mulut dan kembalikan semuanya setelah selesai. Permainan ini hanya untuk mengumpulkan data: tanpa taruhan apa pun (uang, jajan, atau hukuman).

Langkah kerja

1. Sebelum melempar, tulis hipotesis kelompokmu: peserta nomor berapa yang paling cepat finis, dan nomor berapa yang paling lambat? Tulis alasannya.
2. Gambar lintasan 11 jalur bernomor 2–12 pada karton, masing-masing 8 petak. Letakkan satu pion di garis start setiap jalur.
3. Kocok kedua dadu di telapak tangan, lalu lempar ke dalam tutup kotak. Jumlahkan matanya, majukan pion yang nomornya sama satu petak, dan buat satu turus pada kertas buram. Catat peserta yang finis pertama, tetapi teruskan melempar sampai tepat 60 lemparan.
4. Pindahkan turus ke kolom frekuensi kelompok, lalu hitung frekuensi relatifnya ($\text{frekuensi} \div 60$) sampai 3 desimal.
5. Susun ruang sampel: buat tabel 6×6 (dadu merah sebagai baris, dadu biru sebagai kolom) dan isi setiap sel dengan jumlah matanya. Hitung banyak cara munculnya setiap jumlah, lalu isi kolom peluang teoretis.
6. Gabungkan data seluruh kelas di papan tulis ($6 \text{ kelompok} \times 60 = 360$ lemparan). Isi kolom frekuensi kelas dan frekuensi relatif kelas ($\text{frekuensi} \div 360$).
7. Buat diagram batang sesuai petunjuk grafik, lalu jawab pertanyaan analisis bersama kelompokmu.

Tabel pengamatan jumlah mata dua dadu

Jumlah mata	Banyak cara (tabel 6×6)	Peluang teoretis	Frekuensi kelompok (60 lemparan)	Frekuensi relatif kelompok	Frekuensi kelas (360 lemparan)	Frekuensi relatif kelas
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
Jumlah						

Grafik

Buat dua diagram batang frekuensi relatif (data kelompok dan data kelas) untuk jumlah 2 sampai 12 pada sumbu mendatar yang sama. Tandai peluang teoretis setiap jumlah dengan titik lalu hubungkan titik-titiknya. Bentuk apa yang terlihat? Diagram mana yang lebih mirip bentuk itu?

Analisis

1. Jumlah mata berapa yang paling sering muncul di kelompokmu? Di seluruh kelas? Apakah pilihan Ancil (nomor 12) pilihan yang bijak? Bandingkan dengan hipotesismu.

Kunci: Pada data contoh, di kelompok yang paling sering muncul justru jumlah 8 (13 kali), sedangkan di kelas jumlah 7 (59 kali). Jumlah 12 hanya muncul 2 kali di kelompok dan 9 kali di kelas. Pilihan Ancil kurang bijak: jumlah 12 hanya punya satu cara (6, 6), sama sedikitnya dengan jumlah 2. Besar kecilnya nomor tidak menentukan peluang.

2. Dari tabel 6×6 , jelaskan mengapa jumlah 7 punya cara muncul paling banyak. Mengapa (1, 6) dan (6, 1) dihitung sebagai dua hasil berbeda? Tentukan $P(7)$, $P(2)$, dan $P(12)$.

Kunci: Jumlah 7 muncul dari (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1): 6 cara, terbanyak karena 7 berada di diagonal terpanjang tabel 6×6 . Kedua dadu berbeda (merah dan biru), jadi merah 1–biru 6 dan merah 6–biru 1 adalah dua hasil berbeda; hanya dengan cara ini ke-36 hasil sama mungkin. $P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(2) = P(12) = \frac{1}{36}$.

3. Bisa saja di kelompokmu jumlah lain lebih sering muncul daripada 7. Apakah itu berarti teorinya salah atau dadunya curang? Bandingkan selisih frekuensi relatif jumlah 7 dengan $\frac{1}{6}$ pada data kelompok dan data kelas.

Kunci: Tidak. 60 lemparan masih sedikit, sehingga frekuensi relatif wajar melenceng. Pada data contoh, jumlah 7 di kelompok: $\frac{8}{60} \approx 0,133$ (selisih $\approx 0,033$ dari $\frac{1}{6} \approx 0,167$); di kelas: $\frac{59}{360} \approx 0,164$ (selisih $\approx 0,003$). Makin banyak lemparan, frekuensi relatif makin dekat ke peluang teoretis (hukum bilangan besar).

4. Hitung frekuensi harapan jumlah 7 dan jumlah 12 dalam 360 lemparan. Bandingkan dengan data kelas.

Kunci: Frekuensi harapan jumlah 7: $360 \times \frac{1}{6} = 60$ kali (data kelas 59). Jumlah 12: $360 \times \frac{1}{36} = 10$ kali (data kelas 9). Keduanya sangat dekat dengan harapan.

5. Kak Lintang mengusulkan permainan lain: Dimas mendapat poin jika jumlahnya lebih dari 7, Ayu mendapat poin jika kurang dari 7, dan tidak ada yang mendapat poin jika jumlahnya 7. Apakah permainan ini adil? Jawab dengan peluang teoretis, lalu periksa dengan data kelas.

Kunci: Adil. Jumlah lebih dari 7 (8 sampai 12) punya $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ cara, jumlah kurang dari 7 (2 sampai 6) juga 15 cara, jadi peluang Dimas dan Ayu sama, yaitu $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Data kelas contoh: lebih dari 7 sebanyak 143 kali ($\approx 0,397$), kurang dari 7 sebanyak 158 kali ($\approx 0,439$); bedanya kecil dan disebabkan keacakan, bukan aturan yang berat sebelah.

6. Panitia ingin lomba ini adil sehingga setiap peserta rata-rata butuh banyak lemparan yang sama untuk finis. Usulkan panjang lintasan (banyak petak) untuk peserta 2, 4, 7, dan 12, lalu jelaskan alasanmu.

Kunci: Buat panjang lintasan sebanding dengan banyak cara munculnya: peserta 2 dan 12 cukup 1 petak, peserta 4 sebanyak 3 petak, dan peserta 7 sebanyak 6 petak (umumnya peserta s diberi $6 - |s - 7|$ petak). Rata-rata banyak lemparan untuk maju m petak adalah $m \div P(s)$, sehingga setiap peserta rata-rata butuh $1 \div \frac{1}{36} = 3 \div \frac{3}{36} = 6 \div \frac{6}{36} = 36$ lemparan. (Kelipatannya, misalnya 2, 6, dan 12 petak, juga boleh.)

✓ Kesimpulan

Tuliskan jumlah mata yang paling mungkin muncul beserta alasannya dari ruang sampel, lalu jelaskan hubungan antara banyak lemparan dan kedekatan frekuensi relatif dengan peluang teoretis.

💬 Refleksi

- Dugaanku tentang peserta tercepat ternyata ...
- Hal yang paling meyakinkanku bahwa jumlah 7 paling mungkin muncul adalah ...
- Contoh keputusan sehari-hari yang memakai frekuensi relatif (misalnya ramalan cuaca BMKG) adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya dadu? Buka Lab Mini "Pelempar ribuan kali: tunggu frekuensinya jinak" di Bab 33 (subbab 33.2) dan pilih percobaan "2 dadu: jumlah 7". Tekan ► Jalankan sampai sekitar 60 lemparan dan catat frekuensi relatif jumlah 7, lalu tekan ⚡ +10.000 dan amati garis birunya mendekati garis putus-putus $\frac{1}{6}$. Untuk mengisi seluruh tabel, kelompok dapat memakai pengocok dadu di HP. Latih juga peluang jumlah dua dadu dengan Adu Cepat "Jumlah dua dadu kilat" di subbab 33.1.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b33-2

 Contoh data (6 kelompok, dadu dilempar di dalam tutup kotak)

Jumlah mata	Banyak cara (tabel 6 × 6)	Peluang teoretis	Frekuensi kelompok (60 lemparan)	Frekuensi relatif kelompok	Frekuensi kelas (360 lemparan)	Frekuensi relatif kelas
2	1	$1/36 \approx 0,028$	2	0,033	15	0,042
3	2	$2/36 \approx 0,056$	1	0,017	24	0,067
4	3	$3/36 \approx 0,083$	4	0,067	34	0,094
5	4	$4/36 \approx 0,111$	9	0,150	46	0,128
6	5	$5/36 \approx 0,139$	10	0,167	39	0,108
7	6	$6/36 \approx 0,167$	8	0,133	59	0,164
8	5	$5/36 \approx 0,139$	13	0,217	48	0,133
9	4	$4/36 \approx 0,111$	4	0,067	44	0,122
10	3	$3/36 \approx 0,083$	4	0,067	27	0,075
11	2	$2/36 \approx 0,056$	3	0,050	15	0,042
12	1	$1/36 \approx 0,028$	2	0,033	9	0,025
Jumlah	36	$36/36 = 1$	60	$60/60 = 1$	360	$360/360 = 1$

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Pelaksanaan percobaan & pencatatan	Tepat 60 lemparan dengan cara yang sama, turus dan frekuensi tercatat rapi, jumlah frekuensi tepat 60.	Percobaan baik; ada sedikit ketidaksesuaian turus yang diperbaiki.	Banyak lemparan atau pencatatan tidak konsisten.	Data tidak dapat dipakai.
Ruang sampel & peluang teoretis	Tabel 6×6 lengkap dan benar; semua peluang teoretis tepat.	Ada 1–2 kesalahan kecil pada banyak cara.	Menganggap (1, 6) dan (6, 1) sama atau banyak kesalahan.	Ruang sampel belum disusun.
Membandingkan data dengan teori	Menjelaskan perbedaan data kelompok dan kelas dengan hukum bilangan besar dan menilai keadilan permainan dengan peluang.	Perbandingan tepat, penjelasan kurang lengkap.	Menyimpulkan teori salah atau dadu curang hanya dari data kelompok.	Belum membandingkan.
Kerja sama & komunikasi	Peran bergilir (pelempar, penghitung, pencatat); kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = $(\text{jumlah skor} \div 16) \times 100$.

Catatan guru

Ideal 6 kelompok berisi 4–5 siswa; jika banyak kelompok berbeda, sesuaikan total kelas (misalnya 5 kelompok = 300 lemparan) dan frekuensi harapan. Sampaikan sejak awal bahwa tidak ada taruhan apa pun. Data kelompok yang "aneh" justru bahan diskusi terbaik; jangan disuruh mengulang. Siswa yang perlu bantuan dapat mengisi tabel 6×6 dengan memperhatikan pola diagonal; kelompok cepat dapat menghitung $P(\text{jumlah prima})$ atau mencoba lintasan adil dari pertanyaan 6. Simpan data kelas untuk Bab 34.

Papan Galton Saku: Enam Koin Membentuk Lonceng

Bab 34 • Distribusi Peluang: Binomial & Normal

Percobaan kelompok + pengumpulan data kelas

SMA kelas XI–XII (Fase F)

2 × 45 menit

Model: Discovery learning: Lempar – tumpuk – bandingkan dengan binomial

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat memodelkan papan Galton dengan pelemparan enam koin dan mencatat sebaran banyak Angka X .
- Peserta didik dapat menurunkan $P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^6$ dengan menghitung jalur pada papan dan mengaitkannya dengan segitiga Pascal.
- Peserta didik dapat membandingkan frekuensi data dengan frekuensi harapan, serta rata-rata data dengan $\mu = np$ dan $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa binomial dengan n besar membentuk kurva lonceng (aproksimasi normal).

Cerita pemantik



Di Pekan Sains sekolah, Kak Lintang memamerkan papan Galton: kelereng dijatuhkan dari atas, memantul ke kiri atau ke kanan di setiap paku, lalu tertampung di laci-laci bawah. Anehnya, tumpukan kelereng selalu membentuk lonceng. Ancil curiga, "Pasti paku-pakunya dibuat miring ke tengah!" Ayu punya ide lain: setiap pantulan ke kiri atau ke kanan itu mirip melempar koin. Dimas segera mengeluarkan enam koin dari sakunya. Bisakah kelompokmu membuat papan Galton tanpa paku dan kelereng, hanya dengan koin dan biji jagung?

? Rumusan masalah

Jika enam koin dilempar berulang kali, bagaimana sebaran banyak Angka yang muncul, dan apakah sebaran itu cocok dengan distribusi binomial $B(6, \frac{1}{2})$?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak lemparan (64 lemparan kelompok dibandingkan 384 lemparan gabungan kelas)	Frekuensi setiap banyak Angka $k = 0, 1, \dots, 6$	Enam koin yang sama, cara mengocok dan menumpahkan yang sama

Alat dan bahan

- 6 koin logam per kelompok (boleh campuran Rp100, Rp200, Rp500, Rp1.000)
- 1 gelas plastik untuk mengocok koin dan 1 tutup kotak kardus sebagai tempat menumpahkan
- 1 lembar kertas berpetak 1 cm untuk gambar papan Galton dan 7 laci bernomor 0–6
- ±70 biji jagung, kacang hijau, atau kancing kecil sebagai "kelereng"
- Pensil warna, penggaris, dan kalkulator atau HP

Keselamatan

Koin dan biji jagung adalah benda kecil: jangan dimasukkan ke mulut atau hidung. Tutup gelas dengan telapak tangan saat mengocok dan tumpahkan dari ketinggian rendah ke dalam tutup kotak agar koin tidak menggelinding ke kolong meja. Cuci tangan setelah memegang koin, dan kembalikan semua bahan. Kegiatan ini hanya untuk mengumpulkan data, tanpa taruhan apa pun.

Langkah kerja

1. Pada kertas berpetak, gambar papan Galton dengan 6 baris paku (titik) berbentuk segitiga dan 7 laci di bawahnya, bernomor 0 sampai 6. Laci k berarti kelereng belok kanan tepat k kali. Tulis hipotesismu: laci mana yang paling penuh? Adakah laci yang kosong?
2. Masukkan 6 koin ke gelas, kocok, lalu tumpahkan ke tutup kotak. Anggap Angka = belok kanan dan Gambar = belok kiri. Hitung banyak Angka k .
3. Untuk tiga lemparan pertama, urutkan koin dari kiri ke kanan sebagai baris paku 1 sampai 6, lalu telusuri jalur kelerengnya di gambar papan dengan pensil warna. Apakah jalur selalu berakhir di laci k ?
4. Taruh satu biji jagung di laci k , bertumpuk ke atas seperti batang histogram. Ulangi sampai 64 lemparan, dengan peran bergilir: pengocok, penghitung, penaruh biji, dan pencatat.
5. Isi kolom frekuensi kelompok, lalu gabungkan data seluruh kelas ($6 \text{ kelompok} \times 64 = 384$ lemparan).
6. Hitung banyak jalur menuju setiap paku: tulis 1 di paku teratas, lalu setiap paku berikutnya diberi jumlah dua bilangan di atasnya. Bilangan di baris laci adalah $\binom{6}{k}$. Isi kolom $P(X = k)$ dan frekuensi harapan $384 \times P(X = k)$.
7. Isi kolom $k \times$ frekuensi kelas, lalu hitung rata-ran banyak Angka dari data kelas.

Tabel sebaran banyak Angka pada 6 koin

Banyak Angka (k)	Frekuensi kelompok (64 lemparan)	Frekuensi kelas (384 lemparan)	Frekuensi relatif kelas	$C(6, k)$	$P(X = k)$ teoretis	Frekuensi harapan (384 $\times P$)	$k \times$ frekuensi kelas
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
Jumlah							

Grafik

Foto atau gambar tumpukan biji jagungmu (histogram data kelompok). Lalu pada kertas berpetak, buat histogram frekuensi relatif kelas untuk $k = 0$ sampai 6 dan tandai $P(X = k)$ teoretis dengan titik merah. Hubungkan titik-titik merah dengan kurva halus: bentuk apa yang muncul?

1. Amati tumpukan biji jagung kelompokmu dan histogram kelas. Di laci mana puncaknya? Apakah bentuknya simetris? Adakah laci yang kosong? Bandingkan dengan hipotesismu.

Kunci: Data contoh: di kelompok puncaknya di laci 2 (16 biji), disusul laci 4 (15) dan laci 3 (14), sedangkan laci 6 kosong; bentuknya belum rapi. Di kelas (384 lemparan) puncaknya jelas di laci 3 (116), laci 2 dan 4 hampir sama (96 dan 86), dan kedua ujung sangat sedikit (8 dan 7), sehingga bentuknya hampir simetris seperti lonceng. Laci kosong tidak berarti mustahil: peluang laci 6 hanya $\frac{1}{64}$, jadi dalam 64 lemparan wajar muncul 0, 1, atau 2 kali.

2. Bilangan apa yang muncul di baris laci pada gambar papanmu? Jelaskan mengapa $P(X = 3) = \frac{20}{64}$, lalu tuliskan rumus umum $P(X = k)$.

Kunci: Baris laci berisi 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, yaitu baris ke-6 segitiga Pascal $\binom{6}{k}$. Jalur ke laci 3 berarti belok kanan tepat 3 kali di antara 6 baris; memilih 3 baris itu ada $\binom{6}{3} = 20$ cara. Setiap jalur (urutan Angka-Gambar) berpeluang $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ karena keenam koin saling bebas. Jadi $P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = \frac{\binom{6}{k}}{64}$, yaitu $X \sim B(6, \frac{1}{2})$.

3. Bandingkan frekuensi kelas dengan frekuensi harapan, serta frekuensi relatif kelompok dengan peluang teoretis. Mana yang lebih dekat ke teori, data kelompok atau data kelas? Mengapa?

Kunci: Data kelas contoh dekat dengan harapan: 8 vs 6, 31 vs 36, 96 vs 90, 116 vs 120, 86 vs 90, 40 vs 36, 7 vs 6; selisih frekuensi relatif paling besar hanya $0,250 - 0,234 = 0,016$ (laci 2). Data kelompok lebih jauh: laci 3 hanya $\frac{14}{64} \approx 0,219$ padahal teorinya 0,3125 (selisih $\approx 0,094$). Data kelas lebih dekat karena lemparannya jauh lebih banyak (hukum bilangan besar).

4. Hitung rata-rata banyak Angka dari data kelas, $\bar{x} = \frac{\sum kf}{384}$, dan bandingkan dengan $\mu = np$. Hitung juga $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ dan persentase lemparan kelas yang jatuh di laci 2, 3, atau 4 (sekitar $\mu \pm \sigma$).

Kunci: $\bar{x} = \frac{1157}{384} \approx 3,01$, sangat dekat dengan $\mu = 6 \times \frac{1}{2} = 3$. $\sigma = \sqrt{6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{1,5} \approx 1,22$, jadi $\mu \pm \sigma \approx 1,78$ sampai 4,22, yaitu laci 2, 3, dan 4. Data kelas: $\frac{96 + 116 + 86}{384} = \frac{298}{384} \approx 77,6\%$; teori: $\frac{15 + 20 + 15}{64} = \frac{50}{64} \approx 78,1\%$.

5. Jika papan dimiringkan sehingga peluang memantul ke kanan menjadi 0,8, di laci mana puncaknya? Hitung np , $P(X = 5)$, dan $P(X = 6)$. Bagaimana bentuk histogramnya?

Kunci: $np = 6 \times 0,8 = 4,8$. $P(X = 5) = \binom{6}{5} (0,8)^5 (0,2) = 6 \times 0,32768 \times 0,2 \approx 0,393$, sedangkan $P(X = 6) = (0,8)^6 \approx 0,262$ dan $P(X = 4) = 15(0,8)^4 (0,2)^2 \approx 0,246$. Jadi puncaknya di laci 5. Histogram tidak simetris lagi: menumpuk di kanan dengan ekor panjang ke kiri (menceng ke kiri).

6. Bayangkan papan Galton raksasa dengan 100 baris paku (atau 100 koin sekaligus). Hitung μ dan σ , lalu pakai aturan 68–95–99,7 untuk menaksir rentang banyak Angka yang memuat sekitar 95% lemparan. Mengapa histogramnya makin mirip kurva normal?

Kunci: $\mu = 100 \times 0,5 = 50$ dan $\sigma = \sqrt{100 \times 0,5 \times 0,5} = 5$. Sekitar 95% lemparan berada di $\mu \pm 2\sigma$, yaitu 40 sampai 60 Angka. Posisi akhir kelereng adalah hasil penjumlahan banyak pantulan kecil yang saling bebas; makin banyak baris, histogram binomial makin halus dan mendekati kurva normal $N(np, np(1-p))$ (aproksimasi de Moivre–Laplace), apalagi $np = 50 \geq 5$ dan $n(1-p) = 50 \geq 5$.

✓ Kesimpulan

Tuliskan distribusi peluang banyak Angka pada enam koin (rumus dan bentuk histogramnya), hubungannya dengan papan Galton dan segitiga Pascal, serta perbandingan rata-rata data dengan np . Jelaskan juga apa yang terjadi pada bentuk histogram jika n makin besar.

💡 Refleksi

- Saat melihat tumpukan biji jagung membentuk lonceng, aku merasa ...
- Hubungan yang paling mengejutkan bagiku antara koin, papan Galton, dan segitiga Pascal adalah ...
- Contoh di sekitarku yang mungkin berbentuk lonceng (misalnya tinggi badan siswa) adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya koin? Buka Lab Mini "Papan Galton: hujan kelereng membentuk lonceng" di Bab 34 (subbab 34.6). Atur banyak baris paku menjadi 6, tekan ▶ Jalankan, tambahkan kelereng dengan ⚡ +100 kelereng, lalu catat isi setiap laci (arahkan kursor atau ketuk laci). Nyalakan Tampilkan teori untuk membandingkan tumpukan dengan titik binomial dan kurva normal, lalu ubah peluang memantul ke kanan menjadi 0,8 untuk pertanyaan 5. Untuk menghitung $P(X = k)$, atur $n = 6$ dan $p = 0,5$ pada Grafik Hidup "Histogram binomial hidup: geser n dan p" di subbab 34.2.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b34-2

📊 Contoh data (6 kelompok × 64 lemparan enam koin)

Banyak Angka (k)	Frekuensi kelompok (64 lemparan)	Frekuensi kelas (384 lemparan)	Frekuensi relatif kelas	C(6, k)	P(X = k) teoretis	Frekuensi harapan (384 × P)	k × frekuensi kelas
0	1	8	0,021	1	$1/64 \approx 0,016$	6	0
1	10	31	0,081	6	$6/64 \approx 0,094$	36	31
2	16	96	0,250	15	$15/64 \approx 0,234$	90	192
3	14	116	0,302	20	$20/64 = 0,3125$	120	348
4	15	86	0,224	15	$15/64 \approx 0,234$	90	344
5	8	40	0,104	6	$6/64 \approx 0,094$	36	200
6	0	7	0,018	1	$1/64 \approx 0,016$	6	42
Jumlah	64	384	$384/384 = 1$	64	$64/64 = 1$	384	1157

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Pelaksanaan percobaan & pencatatan	Tepat 64 lemparan dengan cara yang sama; histogram biji jagung dan tabel frekuensi cocok dan berjumlah 64.	Percobaan baik; ada sedikit ketidaksesuaian yang diperbaiki.	Banyak lemparan atau pencatatan tidak konsisten.	Data tidak dapat dipakai.
Perhitungan peluang binomial	Bilangan jalur (Pascal), $P(X = k)$, frekuensi harapan, rata-rata, dan σ semuanya benar.	Ada 1–2 kesalahan hitung kecil.	Banyak kesalahan atau lupa faktor $\binom{6}{k}$.	Perhitungan belum dilakukan.
Membandingkan data dengan teori	Menjelaskan perbedaan data kelompok dan kelas dengan hukum bilangan besar, mengaitkan $\bar{x}$ dengan np , dan menalar bentuk lonceng untuk n besar.	Perbandingan tepat, penjelasan kurang lengkap.	Menyimpulkan teori salah hanya dari data kelompok.	Belum membandingkan.
Kerja sama & komunikasi	Peran bergilir dan semua anggota aktif; kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Rancang 6 kelompok ($6 \times 64 = 384$ lemparan); jika banyak kelompok berbeda, sesuaikan total dan frekuensi harapan. Dengan peran bergilir, 64 lemparan selesai ± 15 menit. Koin campuran tetap boleh karena setiap koin kira-kira seimbang. Data kelompok yang tampak "aneh" justru bahan diskusi. Kelompok cepat dapat menghitung varians data kelas $\frac{\sum (k - \bar{x})^2 f}{384}$ (data contoh $\pm 1,56$) dan membandingkannya dengan $np(1 - p) = 1,5$. Simpan histogram kelas untuk membuka subbab 34.4 (kurva normal).

Menara Tampah Pak Darto: Domino, Pola, dan Induksi

Bab 35 • Logika & Pembuktian

Eksplorasi kelompok + teka-teki (penemuan terbimbing)

SMA kelas X–XII (Fase E–F), juga persiapan olimpiade

2 × 45 menit

Model: Discovery learning: coba – catat – duga – buktikan dengan induksi

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menjelaskan dua syarat induksi matematika (kasus dasar dan langkah induktif) melalui percobaan domino.
- Peserta didik dapat mengumpulkan data langkah minimum teka-teki menara, menemukan hubungan $T(n) = 2T(n-1) + 1$, dan menduga rumus $T(n)$.
- Peserta didik dapat membuktikan $T(n) = 2^n - 1$ dengan induksi matematika.
- Peserta didik dapat membantah dugaan yang hanya didukung beberapa contoh dengan sebuah contoh penyangkal.

Cerita pemantik



Pak Darto, penjual nasi di kantin sekolah, punya tumpukan lima tampah bambu berbeda ukuran: yang terbesar di bawah, yang terkecil di atas. Ia ingin memindahkan tumpukan itu dari meja A ke meja C. Aturannya: setiap kali hanya satu tampah yang boleh diangkat, dan tampah besar tidak boleh ditaruh di atas tampah kecil karena bisa jatuh. Untung ada meja B di tengah untuk menampung sementara. Dimas bertanya, "Paling sedikit berapa kali kita harus memindahkan tampah?" Ancil menebak, "Sepuluh kali cukup!" Kak Lintang tersenyum: "Mulailah dari satu tampah, lalu dua, lalu tiga. Siapa tahu polanya muncul. Tapi ingat, pola belum tentu benar sebelum dibuktikan. Ingat cara domino roboh!"

? Rumusan masalah

Berapa banyak langkah minimum $T(n)$ untuk memindahkan menara n tampah, dan bagaimana membuktikan bahwa rumus dugaan kita benar untuk semua bilangan asli n ?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak cakram (tampah) n	Banyak langkah minimum $T(n)$	Aturan permainan: satu cakram per langkah, cakram besar tidak boleh di atas cakram kecil, tiga meja A, B, C

Alat dan bahan

- 12–20 kartu domino, kotak korek api kosong, atau kartu karton 5 cm × 8 cm yang dilipat agar bisa berdiri
- 5 cakram dari kardus bekas berdiameter 4, 5, 6, 7, dan 8 cm (atau 5 tutup toples/koin yang berbeda ukuran)
- 1 lembar HVS bergambar tiga lingkaran berlabel A, B, C sebagai "meja"

- Gunting, penggaris, dan jangka (atau gelas/tutup botol untuk menjiplak lingkaran)
- Kalkulator atau HP

Keselamatan

Hati-hati memakai gunting dan jangka; ujung jangka tajam, jadi simpan dengan kaki tertutup dan jangan diacungkan ke teman. Susun domino di atas meja, bukan di lantai tempat orang lewat, agar tidak terinjak atau membuat teman tersandung. Kembalikan semua alat dan buang sisa kardus ke tempat sampah.

Langkah kerja

1. Pemanasan domino: dirikan 12 domino berjajar dengan jarak ± 2 cm. (a) Dorong domino pertama. (b) Susun ulang, tetapi jangan dorong domino pertama; dorong domino ke-5. (c) Susun ulang dengan celah lebar (± 6 cm) sesudah domino ke-6, lalu dorong domino pertama. Catat domino mana saja yang roboh pada setiap percobaan.
2. Buat 5 cakram kardus dan gambar tiga "meja" A, B, C. Tumpuk cakram di meja A, yang terbesar di bawah. Tulis hipotesismu: berapa langkah minimum untuk 5 cakram?
3. Mulai dengan $n = 1$, lalu $n = 2$ dan $n = 3$. Pindahkan menara dari A ke C mengikuti aturan. Satu anggota memindahkan, satu anggota menghitung langkah. Catat banyak langkah percobaan pertama, lalu ulangi sampai kalian yakin menemukan banyak langkah paling sedikit.
4. Untuk $n = 4$ dan $n = 5$, mainkan dulu dengan bebas dan catat banyak langkahnya. Lalu pakai siasat: pindahkan $n - 1$ cakram teratas ke B (dengan cara yang sudah kamu temukan), pindahkan cakram terbesar ke C, lalu pindahkan $n - 1$ cakram itu dari B ke atas cakram terbesar. Catat banyak langkah minimumnya.
5. Isi kolom $T(n - 1)$, $2 \times T(n - 1) + 1$, 2^n , dan $2^n - 1$. Tulis dugaan rumus $T(n)$, lalu ramalkan $T(6)$ tanpa memainkannya.
6. Susun bukti induksi: periksa kasus dasar $n = 1$, lalu tunjukkan bahwa jika $T(k) = 2^k - 1$, maka $T(k + 1) = 2^{k+1} - 1$.
7. Ancil memperhatikan bahwa $T(2) = 3$, $T(3) = 7$, dan $T(5) = 31$ semuanya prima, lalu menduga "jika n prima, maka $T(n)$ prima". Uji dugaan itu untuk $n = 7$ dan $n = 11$ dengan kalkulator.

Tabel langkah menara tumpah

n (banyak cakram)	Langkah percobaan pertama	Langkah minimum $T(n)$	$T(n - 1)$	$2 \times T(n - 1) + 1$	2^n	$2^n - 1$
1						
2						
3						
4						
5						
6 (ramalan)						

Grafik

Pada kertas berpetak, gambar titik-titik $(n, T(n))$ untuk $n = 1$ sampai 5 dan hubungkan. Apakah grafiknya garis lurus? Gambar juga titik-titik $(n, 2^n)$ dengan warna lain dan bandingkan kedua grafik.

Analisis

1. Pada pemanasan domino, domino mana saja yang roboh di percobaan (a), (b), dan (c)? Syarat apa yang gagal pada (b) dan pada (c)? Hubungkan dengan dua syarat induksi matematika.

Kunci: (a) Semua 12 domino roboh: kasus dasar (domino ke-1 didorong) dan langkah induktif (setiap domino yang roboh merobohkan domino berikutnya) terpenuhi. (b) Hanya domino ke-5 sampai ke-12 yang roboh: kasus dasar $n = 1$ tidak dipenuhi, tetapi "induksi" dimulai dari $n_0 = 5$ tetap berlaku untuk $n \geq 5$. (c) Domino ke-1 sampai ke-6 roboh, ke-7 sampai ke-12 tetap berdiri: langkah induktif gagal di domino ke-6. Induksi memerlukan kedua syarat sekaligus.

2. Perhatikan kolom $T(n)$. Pola apa yang kamu lihat? Mengapa siasat pada langkah 4 menghasilkan $T(n) = 2T(n-1) + 1$, dan mengapa tidak mungkin lebih sedikit?

Kunci: Barisan 1, 3, 7, 15, 31: setiap suku sama dengan dua kali suku sebelumnya ditambah 1, dan selalu satu kurangnya dari pangkat dua. Cakram terbesar hanya dapat dipindahkan ke C jika semua $n-1$ cakram lainnya berada di B (tidak di atasnya dan tidak di C). Memindahkan mereka ke B memerlukan paling sedikit $T(n-1)$ langkah, ditambah 1 langkah untuk cakram terbesar, lalu paling sedikit $T(n-1)$ langkah lagi untuk menumpuknya kembali di C. Jadi $T(n) = 2T(n-1) + 1$ dan tidak bisa kurang.

3. Dari kolom $2^n - 1$, tuliskan dugaan rumus $T(n)$. Ramalkan $T(6)$ dan $T(10)$. Mungkinkah tebakan Ancil (10 langkah untuk 5 tampah) berhasil?

Kunci: Dugaan: $T(n) = 2^n - 1$. $T(6) = 63$ dan $T(10) = 1023$. Tebakan Ancil tidak mungkin, karena 5 tampah memerlukan paling sedikit $2^5 - 1 = 31$ langkah.

4. Buktikan dengan induksi matematika bahwa $T(n) = 2^n - 1$ untuk semua bilangan asli n .

Kunci: Kasus dasar $n = 1$: $T(1) = 1 = 2^1 - 1 \checkmark$. Langkah induktif: anggap $T(k) = 2^k - 1$ untuk suatu $k \geq 1$. Maka $T(k+1) = 2T(k) + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \checkmark$. Karena kedua syarat terpenuhi, menurut prinsip induksi matematika $T(n) = 2^n - 1$ benar untuk semua bilangan asli n .

5. Menurut legenda teka-teki Menara Hanoi (Édouard Lucas, 1883), para biksu harus memindahkan 64 cakram emas, satu langkah setiap detik. Berapa tahun yang dibutuhkan? (Gunakan 1 tahun $\approx 31.557.600$ detik.)

Kunci: $T(64) = 2^{64} - 1 \approx 1,84 \times 10^{19}$ detik. Dibagi 31.557.600 detik per tahun, hasilnya $\approx 5,8 \times 10^{11}$ tahun, yaitu sekitar 585 miliar tahun, jauh lebih lama daripada umur alam semesta ($\pm 13,8$ miliar tahun).

6. Uji dugaan Ancil, "jika n prima, maka $2^n - 1$ prima", untuk $n = 7$ dan $n = 11$. Apa yang dapat disimpulkan tentang pola yang hanya diperiksa pada beberapa contoh?

Kunci: $2^7 - 1 = 127$ memang prima, tetapi $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ bukan prima. Jadi $n = 11$ adalah contoh penyangkal dan dugaan Ancil salah. Beberapa contoh yang cocok ($n = 2, 3, 5, 7$) tidak membuktikan pernyataan "untuk semua", sedangkan satu contoh penyangkal sudah cukup untuk membantahnya. Karena itulah rumus $T(n)$ perlu dibuktikan dengan induksi, bukan hanya dicoba.

Kesimpulan

Tuliskan rumus langkah minimum $T(n)$ beserta alasan hubungan $T(n) = 2T(n-1) + 1$. Lalu jelaskan dengan bahasamu sendiri dua syarat induksi matematika dan mengapa beberapa contoh saja tidak cukup untuk membuktikan sebuah pola.

Refleksi

- Saat domino berhenti roboh di tengah barisan, aku jadi paham bahwa ...

- Bagian bukti induksi yang paling sulit bagiku adalah ..., dan yang membantuku adalah ...
- Kebiasaan memecah masalah besar menjadi masalah yang lebih kecil bisa kupakai saat ...

Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak punya domino? Buka Lab Mini "Domino induksi: robohkan semuanya!" di Bab 35 (subbab 35.6). Matikan sakelar kasus dasar dan ketuk domino ke-5 (percobaan b), lalu nyalakan lagi dan rusak langkah induktif dengan celah sesudah domino ke-6 (percobaan c). Menara dapat dimainkan dengan 5 lembar kertas berbeda ukuran. Uji dugaan Ancil dengan Lab Mini "Pemburu contoh penyangkal: pola yang menipu" di subbab 35.3, pilih dugaan " p prima $\Rightarrow 2^p - 1$ prima". Latih rumus hasil induksi dengan Adu Cepat "Jumlah kilat hasil induksi" di subbab 35.6.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b35-6

Contoh data (cakram kardus, satu kelompok)

n (banyak cakram)	Langkah percobaan pertama	Langkah minimum T(n)	T(n – 1)	$2 \times T(n - 1) + 1$	2^n	$2^n - 1$
1	1	1	0	1	2	1
2	3	3	1	3	4	3
3	9	7	3	7	8	7
4	19	15	7	15	16	15
5	37	31	15	31	32	31
6 (ramalan)	—	63	31	63	64	63

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Pelaksanaan percobaan & pencatatan	Domino dan menara dimainkan sesuai aturan; semua percobaan dan banyak langkah tercatat lengkap.	Sebagian besar tercatat; ada satu data yang kurang lengkap.	Aturan menara sering dilanggar atau data tidak konsisten.	Data tidak dapat dipakai.
Penemuan pola	Menemukan $T(n) = 2T(n-1) + 1$ dan $T(n) = 2^n - 1$, serta menjelaskan mengapa siasatnya minimum.	Menemukan kedua pola dengan penjelasan kurang lengkap.	Hanya menemukan salah satu pola tanpa alasan.	Belum menemukan pola.
Bukti induksi	Kasus dasar dan langkah induktif lengkap, aljabar benar, dan kesimpulan dinyatakan dengan tepat.	Struktur bukti benar dengan kesalahan kecil.	Hanya memeriksa beberapa nilai n atau melupakan kasus dasar.	Belum menyusun bukti.
Berpikir kritis (contoh penyangkal)	Menemukan $2047 = 23 \times 89$ dan menjelaskan mengapa contoh tidak sama dengan bukti.	Menemukan contoh penyangkal, penjelasan kurang lengkap.	Menerima dugaan Ancil karena beberapa contoh cocok.	Belum menguji dugaan.
Kerja sama & komunikasi	Peran bergilir (pemindah, penghitung, pencatat); kesimpulan disampaikan jelas dengan istilah tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 20) × 100.

Catatan guru

Cakram dapat disiapkan dari kardus sebelum pelajaran untuk menghemat waktu. Batasi percobaan menara bebas ± 15 menit agar cukup waktu untuk bukti. Minta siswa mengucapkan siasat langkah 4 sambil memindahkan cakram, karena itulah inti rekursi. Kelompok cepat dapat membuktikan bahwa cakram terkecil berpindah 2^{n-1} kali, atau membuktikan $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ dengan induksi lalu mengaitkannya dengan menara. Kelompok yang perlu bantuan cukup sampai $n = 4$ dan diberi kerangka bukti rumpang.

Mesin Gambar Empat Angka: Matriks, Kertas Berpetak, dan Rahasia Luas

Bab 36 • Matriks

Eksplorasi kelompok (penemuan terbimbing)

SMA kelas XI (Fase F)

2 x 45 menit

Model: Discovery learning: gambar – ubah – hitung luas – temukan pola – buktikan

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menentukan bayangan titik oleh matriks 2×2 dan menemukan bahwa bayangan $(1, 0)$ dan $(0, 1)$ adalah kolom-kolom matriks itu.
- Peserta didik dapat menemukan dari data bahwa luas bayangan persegi satuan sama dengan $|ad - bc|$, lalu membuktikannya dengan metode kotak pembungkus.
- Peserta didik dapat menjelaskan arti determinan negatif (gambar terbalik seperti di cermin) dan determinan nol (gambar gepeng, matriks tidak punya invers).
- Peserta didik dapat menunjukkan dengan gambar dan hitungan bahwa urutan transformasi berpengaruh: umumnya $AB \neq BA$.

Cerita pemantik



Dimas sedang membuat gim HP sederhana "Kancil Lompat" untuk lomba aplikasi di sekolahnya. Ia ingin si kancil bisa membesar, berputar, dan berbalik menghadap ke kiri. Kak Lintang menjelaskan, "Mesin gim tidak menggambar ulang kancilnya. Ia hanya menyimpan empat angka, yaitu sebuah matriks 2×2 , lalu mengalikannya dengan setiap titik gambar." Ayu penasaran: "Kalau cuma empat angka, bagaimana komputer tahu kancilnya jadi berapa kali lebih luas, atau malah terbalik?" Ancil sudah membagikan kertas berpetak. Saatnya kelompokmu menjadi mesin gim!

? Rumusan masalah

Bagaimana keempat bilangan dalam matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ menentukan bentuk, luas, dan arah (terbalik atau tidak) dari gambar hasil transformasinya?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Kertas berpetak 1 cm, 3 lembar per kelompok
- Penggaris 30 cm, pensil, dan pensil warna/spidol 3 warna (merah, biru, hijau)
- 7 kartu matriks A_1 sampai A_7 (potongan kertas kecil, disiapkan guru)
- Kalkulator atau HP (hanya untuk memeriksa hitungan)

! Keselamatan

Kegiatan ini hanya memakai alat tulis. Simpan pensil yang diruncingkan dengan ujung menghadap ke bawah, jangan mengayunkan penggaris ke arah teman, dan rautlah pensil di atas tempat sampah. Duduklah tegak dan istirahatkan mata sejenak setiap selesai menggambar satu matriks.

Langkah kerja

1. Bagi tugas: setiap anggota mengerjakan 1–2 kartu dari ketujuh matriks berikut: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Di kertas berpetak, gambar sumbu- x dan sumbu- y dari -8 sampai 8 (1 petak = 1 satuan). Gambar persegi satuan dengan titik sudut $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ dan huruf L dengan titik sudut $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 3)$. Luas huruf L adalah 4 petak.
3. Untuk matriksmu, hitung bayangan $(1, 0)$ dan $(0, 1)$ dengan aturan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$. Gambar panah merah dari O ke bayangan $(1, 0)$ dan panah biru dari O ke bayangan $(0, 1)$, lalu lengkapi jajargenjangnya (titik keempat adalah bayangan $(1, 1)$).
4. Hitung luas jajargenjang dengan cara kotak pembungkus: gambar persegi panjang terkecil yang memuatnya dengan sisi mengikuti garis petak, hitung luasnya, lalu kurangi luas segitiga dan persegi panjang di pojok-pojok yang berada di luar jajargenjang. Catat di tabel.
5. Hitung $ad - bc$ untuk matriksmu dan catat di tabel.
6. Putar pandanganmu dari panah merah ke panah biru melalui sudut yang terkecil. Apakah arahnya berlawanan jarum jam (sama seperti dari $(1, 0)$ ke $(0, 1)$ semula) atau searah jarum jam? Catat di tabel.
7. Untuk A_1 , A_3 , A_6 , dan A_7 , transformasikan juga keenam titik sudut huruf L dan gambar bayangannya dengan warna hijau. Apakah L-nya masih terbaca L atau terbalik seperti bayangan di cermin?
8. Bersama kelompok: putar huruf L dengan A_2 , lalu cerminkan hasilnya dengan A_3 . Ulangi dengan urutan terbalik (cermin dulu, baru putar). Bandingkan kedua gambar akhirnya.

Tabel pengamatan (1 petak = 1 satuan luas)

Matriks	Bayangan (1, 0)	Bayangan (0, 1)	Luas jajargenjang (petak)	$ad - bc$	Arah panah merah $\rightarrow$ biru
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$					
$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$					
$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$					
$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$					
$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$					
$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					
$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					

Grafik

Tempel atau gambar ketujuh jajargenjang berdampingan. Tulis luas dan nilai $ad - bc$ di dalam setiap jajargenjang, lalu beri tanda bintang pada jajargenjang yang huruf L-nya terbalik.

Analisis

1. Bandingkan bayangan $(1, 0)$ dan $(0, 1)$ dengan bilangan-bilangan di dalam matriksnya. Pola apa yang kamu temukan? Bagaimana pola ini membantumu menebak matriks dari sebuah gambar?

Kunci: Bayangan $(1, 0)$ adalah kolom pertama (a, c) dan bayangan $(0, 1)$ adalah kolom kedua (b, d) , sebab $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ dan $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Jadi, jika kita tahu ke mana $(1, 0)$ dan $(0, 1)$ pergi, kita langsung bisa menuliskan matriksnya.

2. Bandingkan kolom luas jajargenjang dengan kolom $ad - bc$. Tuliskan hubungannya. Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Luas jajargenjang selalu sama dengan nilai mutlak $ad - bc$ $(4, 1, 1, 1, 3, 3, 0)$. Jadi determinan adalah faktor pengali luas: luas bayangan = $|\det A| \times$ luas semula. Persegi satuan berluas 1, sehingga luas bayangannya tepat $|\det A|$.

3. Matriks mana yang nilai $ad - bc$ -nya negatif? Apa yang terjadi pada arah panah dan pada huruf L? Jelaskan arti tanda determinan.

Kunci: A_3 ($\det -1$) dan A_6 ($\det -3$). Panah merah $\rightarrow$ biru berputar searah jarum jam dan huruf L menjadi terbalik seperti bayangan cermin. Tanda determinan menunjukkan orientasi: positif berarti arah gambar tetap, negatif berarti gambar dibalik (ada pencerminan). Nilai mutlaknya tetap menunjukkan faktor luas.

4. Buktikan temuanmu untuk a, b, c, d positif dengan $ad > bc$: tunjukkan bahwa metode kotak pembungkus pada jajargenjang bertitik sudut $(0, 0)$, (a, c) , (b, d) , $(a + b, c + d)$ menghasilkan luas tepat $ad - bc$.

Kunci: Kotak pembungkus berukuran $(a + b) \times (c + d)$. Di luarnya ada dua segitiga siku-siku berkaki a dan c (total ac), dua segitiga berkaki b dan d (total bd), dan dua persegi panjang $b \times c$ di pojok (total $2bc$). Luas jajargenjang = $(a + b)(c + d) - ac - bd - 2bc = ac + ad + bc + bd - ac - bd - 2bc = ad - bc$. Contoh A_5 : $3 \times 3 - 2 - 2 - 2 = 3$.

5. Huruf L luasnya 4 petak. Tanpa menggambar, berapa luas bayangan L oleh A_5 dan oleh A_6 ? Periksa salah satunya dengan gambar.

Kunci: Luas bayangan = $|\det| \times 4$. Oleh A_5 : $3 \times 4 = 12$ petak. Oleh A_6 : $|-3| \times 4 = 12$ petak, tetapi L-nya terbalik. Bayangan L oleh A_5 bertitik sudut $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(5, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 7)$, $(3, 6)$; dengan kotak pembungkus luasnya memang 12 petak.

6. Apa yang terjadi pada persegi satuan dan huruf L oleh A_7 ? Mengapa transformasi ini tidak bisa dibatalkan, dan apa kaitannya dengan rumus $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$?

Kunci: Semua titik jatuh pada garis $y = x$: persegi satuan dan huruf L menjadi ruas garis (luas 0) karena kolom $(2, 2)$ dan $(1, 1)$ searah. Banyak titik berbeda dipetakan ke titik yang sama, misalnya $(1, 0)$ dan $(0, 2)$ sama-sama ke $(2, 2)$, sehingga titik asalnya tidak bisa ditebak kembali. Pada rumus invers kita harus membagi dengan $ad - bc = 0$, jadi A_7^{-1} tidak ada.

7. Pada langkah 8, apakah "putar dulu lalu cermin" sama dengan "cermin dulu lalu putar"? Hitung A_3A_2 dan A_2A_3 , cocokkan dengan gambarmu, lalu sebutkan transformasi tunggal yang dihasilkan masing-masing.

Kunci: Tidak sama. Putar dulu lalu cermin: $A_3A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, yaitu pencerminan terhadap garis $y = x$.

Cermin dulu lalu putar: $A_2A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, yaitu pencerminan terhadap garis $y = -x$. Matriks yang dikerjakan lebih dulu ditulis di sebelah kanan. Keduanya berdeterminan -1 (L sama-sama terbalik), tetapi letaknya berbeda, jadi $A_3A_2 \neq A_2A_3$.

8. Bantu Dimas: tuliskan matriks yang membuat kancil dua kali lebih panjang ke segala arah sekaligus berbalik arah (dicerminkan terhadap sumbu- y). Berapa determinannya, dan berapa kali luas kancil berubah?

Kunci: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, yaitu dilatasi 2 kali dikalikan cermin sumbu- y : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinannya -4 : luas kancil menjadi 4 kali semula, dan tanda negatif menunjukkan kancil berbalik arah.

✓ Kesimpulan

Tuliskan dengan kata-kata dan rumus: apa arti kolom-kolom sebuah matriks transformasi, apa arti nilai dan tanda $ad - bc$, dan mengapa matriks dengan $ad - bc = 0$ tidak mempunyai invers.

💡 Refleksi

- Hal yang paling mengejutkanku dari empat angka sebuah matriks adalah ...
- Sekarang aku paham bahwa determinan negatif berarti ...
- Di gim, animasi, atau aplikasi kamera HP, matriks transformasi mungkin dipakai untuk ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak sempat menggambar? Buka Grafik Hidup "Mesin transformasi: persegi satuan dan si kancil" di Bab 36 (subbab 36.4). Geser slider a, b, c, d sesuai setiap kartu matriks, catat letak titik biru dan magenta (bayangan $(1, 0)$ dan $(0, 1)$), nilai $\det A$, dan faktor luas yang tampil, lalu perhatikan kapan kancil terbalik atau menjadi garis. Periksa hitunganmu dengan Rumus Hidup "Determinan matriks 2×2 " (subbab 36.4). Untuk langkah 8, pakai Grafik Hidup "Putar dulu atau cermin dulu?" di subbab 36.6.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b36-4

Contoh data hasil satu kelompok

Matriks	Bayangan (1, 0)	Bayangan (0, 1)	Luas jajargenjang (petak)	ad – bc	Arah panah merah → biru
A_1	(2, 0)	(0, 2)	4	4	berlawanan jarum jam
A_2	(0, 1)	(-1, 0)	1	1	berlawanan jarum jam
A_3	(-1, 0)	(0, 1)	1	-1	searah jarum jam
A_4	(1, 0)	(2, 1)	1	1	berlawanan jarum jam
A_5	(2, 1)	(1, 2)	3	3	berlawanan jarum jam
A_6	(1, 2)	(2, 1)	3	-3	searah jarum jam
A_7	(2, 2)	(1, 1)	0	0	segaris (tidak ada putaran)

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketelitian menghitung & menggambar bayangan	Semua bayangan titik benar dan jajargenjang serta huruf L digambar tepat pada petak.	Ada 1–2 kesalahan kecil pada hitungan atau gambar.	Banyak bayangan salah (mis. baris dan kolom tertukar).	Gambar dan hitungan belum dapat dipakai.
Penemuan pola dari data	Menemukan bahwa kolom matriks = bayangan (1, 0) dan (0, 1), luas = $ ad - bc $, dan tanda determinan menunjukkan pembalikan.	Menemukan dua dari tiga pola dengan tepat.	Menemukan satu pola atau polanya kurang tepat.	Belum menemukan pola.
Pembuktian & penalaran	Bukti kotak pembungkus lengkap; menjelaskan determinan nol dan $AB \neq BA$ dengan alasan tepat.	Bukti benar tetapi ada langkah yang dilewati; penjelasan lain sebagian besar tepat.	Hanya memeriksa contoh tanpa bukti umum.	Belum ada penalaran.
Kerja sama & komunikasi	Pembagian tugas jelas, semua anggota menyumbang data, dan kesimpulan disampaikan dengan istilah tepat.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Siapkan kartu matriks sebelum pelajaran; kelompok bertiga cukup mengerjakan A_1 – A_6 dan berbagi data A_7 dengan kelompok lain. Kesalahan yang sering muncul: mengalikan baris matriks dengan baris vektor, dan lupa bahwa pada $A_3 A_2$ matriks kanan dikerjakan lebih dulu. Semua matriks memakai bilangan –2 sampai 2 agar bisa diperiksa dengan Grafik Hidup. Diferensiasi: siswa yang cepat mencari matriks yang memutar 45° sambil memperbesar $\sqrt{2}$ kali, yaitu $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (det 2), atau mencoba sandi Hill di subbab 36.7; siswa yang

perlu bantuan cukup mengerjakan A_1 , A_3 , dan A_5 dengan pendampingan. Kaitkan determinan nol dengan subbab 36.5 (matriks tanpa invers).

Mathpedia · LKPD Bab 36 · © 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD · Editor: Abdullah Hanif Hidayat · Boleh diperbanyak untuk pembelajaran nonkomersial.

Layang-layang Berputar: Rahasia Mengali dengan i

Bab 37 • Bilangan Kompleks

Eksplorasi kelompok (penemuan terbimbing)

SMA kelas XI–XII (Matematika Tingkat Lanjut)

2 × 45 menit

Model: Discovery learning: hitung – gambar – ukur – temukan pola – generalisasi

Nama Kelas Kelompok Tanggal

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat mengalikan bilangan kompleks bentuk $a + bi$ dan menggambar hasilnya di bidang Argand.
- Peserta didik dapat menemukan dari pengukuran bahwa mengali dengan i sama dengan memutar titik 90° berlawanan arah jarum jam terhadap titik asal.
- Peserta didik dapat menemukan bahwa mengali dengan $1 + i$ berarti memutar 45° dan meregang $\sqrt{2}$ kali, lalu menggeneralisasi: modulus dikalikan, argumen dijumlahkan.
- Peserta didik dapat memakai pola $i^4 = 1$ untuk menghitung pangkat besar dari i .

Cerita pemantik



Menjelang Festival Layang-layang di Pantai Padang Galak, Bali, Ayu merancang logo kelompoknya di kertas berpetak: empat layang-layang yang sama, masing-masing diputar seperempat putaran sehingga membentuk kincir. "Repot sekali kalau setiap titik harus diputar memakai busur," keluh Ayu. Kak Lintang tersenyum, "Tulis saja setiap titik sebagai bilangan kompleks, lalu kalikan dengan i ." Dimas tidak percaya: "Mengali kok bisa memutar?" Ancil sudah menyiapkan busur, jangka, dan paku payung. Mari kita uji siapa yang benar!

? Rumusan masalah

Apa yang terjadi secara geometris pada sebuah titik z di bidang Argand jika z dikalikan dengan i , dengan i berulang kali, dan dengan $1 + i$?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Kertas berpetak 1 cm, 2 lembar per kelompok
- Penggaris, busur derajat, dan jangka
- Pensil warna atau spidol 5 warna (hitam, merah, biru, hijau, ungu)
- Plastik mika bening (atau kertas minyak) ukuran A5, paku payung, dan alas kardus $\pm 20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$
- Kalkulator HP (untuk menghitung akar kuadrat)

Keselamatan

Paku payung dan ujung jangka tajam: tancapkan paku hanya pada alas kardus, jangan dibawa berjalan, dan kembalikan ke wadahnya setelah dipakai. Saat menjiplak di atas mika, tahan mika dengan tangan yang jauh dari ujung paku.

Langkah kerja

1. Gambar bidang Argand di kertas berpetak dengan 1 satuan = 2 petak: sumbu real (mendatar) dari -4 sampai 4 dan sumbu imajiner (tegak) dari -4 sampai 7 . Titik $a + bi$ digambar di (a, b) .
2. Dengan warna hitam, gambar layang-layang Ayu $A = 1 + i$, $B = 2 + i$, $C = 3 + 3i$, $D = 1 + 2i$ (hubungkan $A-B-C-D-A$), serta ekornya: ruas dari A ke $E = 2$.
3. Hitung iz untuk kelima titik. Ingat $i^2 = -1$, misalnya $i(2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$. Gambar layang-layang hasilnya dengan warna merah, lalu isi tabel.
4. Ukur dengan busur sudut $\angle AOA'$ dan $\angle COC'$ (dengan $A' = iA$, $C' = iC$). Bandingkan juga jarak OC dan OC' memakai jangka. Catat pengamatanmu.
5. Kalikan lagi hasil merah dengan i (diperoleh i^2z), lalu sekali lagi (i^3z), dan sekali lagi (i^4z). Gambar i^2z dengan biru dan i^3z dengan hijau. Ke mana i^4z jatuh?
6. Uji dengan tangan: jiplak layang-layang hitam beserta titik O dan sumbu-sumbunya di mika, tusuk titik O dengan paku payung di atas alas kardus, lalu putar mika seperempat putaran berlawanan arah jarum jam. Apakah jiplakan itu tepat menutupi layang-layang merah?
7. Kalikan kelima titik semula dengan $1 + i$ dan gambar hasilnya dengan warna ungu. Ukur sudut putarnya dengan busur, lalu hitung $|z|$ dan $|(1 + i)z|$ memakai $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (dua angka di belakang koma).

Tabel hasil perkalian

Titik	z	iz	i^2z	i^3z	i^4z	$(1 + i)z$	$ z $	$ (1 + i)z $
A								
B								
C								
D								
E								

Grafik

Gambar kelima layang-layang (hitam, merah, biru, hijau, ungu) pada satu bidang Argand. Tarik ruas putus-putus dari O ke titik C dan ke semua bayangannya, lalu tandai besar sudut di antara ruas-ruas itu.

Analisis

1. Berapa besar $\angle AOA'$ dan $\angle COC'$ hasil ukurmu, dan bagaimana jarak OC dibandingkan dengan OC' ? Simpulkan: mengali dengan i sama dengan melakukan transformasi apa? Apakah hipotesismu terbukti?

Kunci: Kedua sudut sekitar 90° (berlawanan arah jarum jam) dan $OC = OC'$ (bukaan jangka pas). Jadi mengali dengan i sama dengan memutar titik 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O . Seluruh layang-layang ikut berputar tanpa berubah bentuk dan ukuran.

2. Tunjukkan secara aljabar bahwa $i(a + bi) = -b + ai$. Mengapa titik $(-b, a)$ selalu berjarak sama dari O dengan titik (a, b) , dan mengapa kedua ruas dari O itu saling tegak lurus?

Kunci: $i(a + bi) = ai + bi^2 = -b + ai$, yaitu titik $(-b, a)$. Jaraknya $\sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, sama dengan jarak (a, b) . Hasil kali titik $(a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0$, jadi kedua ruas tegak lurus. Contoh: $B = 2 + i$, yaitu $(2, 1)$, menjadi $-1 + 2i$, yaitu $(-1, 2)$.

3. Bandingkan kolom $i^4 z$ dengan kolom z . Jelaskan dengan putaran mengapa $i^4 = 1$, lalu hitung i^{2026} dan i^{2027} .

Kunci: Kolom $i^4 z$ sama persis dengan z : empat kali putar $90^\circ = 360^\circ$, kembali ke posisi semula, jadi $i^4 = 1$. Karena $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, $i^{2026} = i^2 = -1$; dan $i^{2027} = i^3 = -i$.

4. Seandainya layang-layang tidak berekor, hasil kali i tampak sama dengan pencerminan terhadap sumbu imajiner. Bagaimana ekor AE membuktikan bahwa yang terjadi adalah putaran, bukan pencerminan?

Kunci: Ekor semula mengarah dari $A = 1 + i$ ke kanan bawah menuju $E = 2$. Pencerminan terhadap sumbu imajiner memetakan E ke -2 , sehingga ekornya mengarah ke kiri bawah dari $-1 + i$. Hasil kali i memetakan E ke $2i$, sehingga ekornya mengarah ke kanan atas dari $-1 + i$, persis arah ekor semula yang diputar 90° . Karena itu keempat layang-layang membentuk kincir yang bersimetri putar orde 4 tetapi tidak bersimetri cermin.

5. Dari tabel, hitung perbandingan $|(1 + i)z| : |z|$ untuk setiap titik, lalu baca sudut putarnya dari gambar. Hubungkan hasilnya dengan modulus dan argumen dari $1 + i$.

Kunci: Perbandingannya selalu $\sqrt{2} \approx 1,41$ (mis. $2,00 : 1,41$, $3,16 : 2,24$, $6,00 : 4,24$) dan sudut putarnya 45° . Ini cocok dengan $|1 + i| = \sqrt{2}$ dan $\arg(1 + i) = 45^\circ$. Umumnya, mengali dengan w berarti memutar sebesar $\arg w$ dan meregang $|w|$ kali: $|zw| = |z| |w|$ dan $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.

6. Tanpa menggambar, jelaskan mengapa $(1 + i)(3 + 3i)$ tepat berada di sumbu imajiner positif dan berjarak 6 dari O . Periksa dengan menghitung.

Kunci: $C = 3 + 3i$ berada di arah 45° dengan $|C| = 3\sqrt{2}$. Mengali dengan $1 + i$ memutar 45° lagi (menjadi 90° , yaitu sumbu imajiner positif) dan meregang $\sqrt{2}$ kali: $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$. Hitungannya: $(1 + i)(3 + 3i) = 3 + 3i + 3i + 3i^2 = 6i$.

7. Bilangan kompleks apa yang, jika dikalikan, memutar titik 90° searah jarum jam? Memutar 180° ? Memutar 30° berlawanan arah jarum jam tanpa mengubah jaraknya dari O ?

Kunci: Putar 90° searah jarum jam: kalikan dengan $-i (= i^3)$. Putar 180° : kalikan dengan $-1 (= i^2)$. Putar 30° tanpa meregang: kalikan dengan $\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, bilangan bermodulus 1 dan berargumen 30° .

✓ Kesimpulan

Tuliskan arti geometris mengali sebuah bilangan kompleks dengan i , dengan -1 , dan dengan sembarang w (putar berapa derajat, regang berapa kali), lalu berikan satu contoh dari kegiatanmu.

💡 Refleksi

- Semula aku mengira mengali dengan i akan ..., ternyata ...
- Cara yang paling meyakinkanku bahwa mengali sama dengan memutar adalah ...
- Putaran dengan bilangan kompleks mungkin dipakai di sekitarku, misalnya untuk ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada kertas berpetak atau mika? Buka Grafik Hidup "Kali = putar & regang" di Bab 37 (subbab 37.5). Atur $w = i$ ($\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = 1$), lalu seret z ke setiap titik layang-layang $(1 + i, 2 + i, 3 + 3i, 1 + 2i, 2)$ dan catat letak zw ; ulangi dengan $w = 1 + i$. Untuk perkalian berulang dengan i , pakai Lab Mini "Bianglala De Moivre: kalikan terus dengan w " (subbab 37.6) dengan $|w| = 1$ dan argumen 90° . Grafik Hidup "Satu titik, tiga kembaran" (subbab 37.3) membantu membedakan putaran dari pencerminan.

Contoh data ($|z|$ dibulatkan dua angka di belakang koma)

Titik	z	iz	i^2z	i^3z	i^4z	$(1+i)z$	$ z $	$ (1+i)z $
A	$1+i$	$-1+i$	$-1-i$	$1-i$	$1+i$	$2i$	1,41	2,00
B	$2+i$	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	$2+i$	$1+3i$	2,24	3,16
C	$3+3i$	$-3+3i$	$-3-3i$	$3-3i$	$3+3i$	$6i$	4,24	6,00
D	$1+2i$	$-2+i$	$-1-2i$	$2-i$	$1+2i$	$-1+3i$	2,24	3,16
E	2	$2i$	-2	$-2i$	2	$2+2i$	2,00	2,83

Rubrik penilaian

Aspek	4 · Sangat baik	3 · Baik	2 · Cukup	1 · Perlu bimbingan
Ketepatan perhitungan bilangan kompleks	Semua hasil kali benar, termasuk penggunaan $i^2 = -1$ dan modulus.	Ada 1-2 kesalahan hitung kecil.	Kesalahan berulang, mis. $i^2 = 1$ atau bagian real dan imajiner tertukar.	Tabel hampir kosong atau sebagian besar salah.
Ketelitian menggambar & mengukur	Semua layang-layang tepat letaknya; sudut dan jarak diukur cermat dengan busur dan jangka.	Gambar sebagian besar tepat, ada satu pengukuran yang kurang teliti.	Beberapa layang-layang salah letak atau tidak diukur.	Gambar belum dapat dipakai.
Penemuan pola & generalisasi	Menyimpulkan kali i = putar 90° , $i^4 = 1$, dan kali w = putar $\arg w$ & regang $ w $, lengkap dengan alasan aljabar.	Menemukan pola dengan penjelasan yang sebagian besar tepat.	Menyebut pola tanpa alasan atau hanya untuk satu kasus.	Belum menemukan pola.
Kerja sama & komunikasi	Semua anggota berperan (menghitung, menggambar, mengukur, menguji dengan mika); kesimpulan disampaikan jelas.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Ingatkan bahwa sudut di bidang Argand diukur dari sumbu real positif, berlawanan arah jarum jam. Skala 2 petak per satuan membuat semua gambar muat di satu halaman kertas berpetak (ingat $(1+i)C = 6i$). Kesalahan yang sering muncul: menulis $i^2 = 1$, menggambar $a+bi$ di (b, a) , dan mengira hasil kali i adalah pencerminan; ekor layang-layang sengaja dibuat miring untuk memunculkan diskusi itu. Diferensiasi: kelompok yang cepat mencoba $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (putar 45° sambil mengecil) atau mencari w yang memutar 60° ; kelompok yang perlu bantuan cukup mengerjakan titik A, C, dan E.

Jam Piring Kertas: Memburu Angka Terakhir 7 Pangkat 2026

Bab 38 • Teori Bilangan Olimpiade

Eksplorasi kelompok dengan model buatan sendiri (penemuan terbimbing)

SMA kelas X–XII / persiapan OSN SMP–SMA

2 x 45 menit

Model: Discovery learning: buat model – lompat & catat – temukan siklus – duga – buktikan

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat membuat jam modular dari piring kertas dan memakainya untuk menentukan sisa pembagian hasil kali.
- Peserta didik dapat menemukan bahwa angka satuan a^n berulang dalam siklus, menentukan panjang siklusnya, dan memakainya untuk pangkat besar seperti 7^{2026} .
- Peserta didik dapat menjelaskan mengapa cukup mengalikan angka satuannya saja dan mengapa siklus pasti muncul.
- Peserta didik dapat menduga Teorema Fermat kecil dari data sisa pangkat modulo 7.

Cerita pemantik



Teka-teki di papan pengumuman OSN sekolah membuat Ancil penasaran: "Berapa angka terakhir 7^{2026} ?" Dimas langsung mengetik di kalkulator HP, tetapi layarnya hanya menampilkan 1,47...E1712, bahkan kalkulator lain menulis "Error". Angka terakhirnya tidak kelihatan. "Bilangan itu punya 1.713 angka!" seru Ayu. Kak Lintang memberi petunjuk sambil mengangkat sebuah piring kertas: "Untuk angka terakhir, kalian hanya perlu jam berangka 0 sampai 9. Ikuti ke mana bidaknya melompat." Kelompokmu akan membuat jam itu dan memburu jawabannya.

Rumusan masalah

Bagaimana pola angka satuan (sisa pembagian) dari $a, a^2, a^3, \dots$, dan bagaimana pola itu dapat dipakai untuk menentukan angka terakhir pangkat yang sangat besar?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Alat dan bahan

- Piring kertas berdiameter ± 20 cm (atau lingkaran dari kardus bekas), 1 per kelompok
- Busur derajat, penggaris, dan pensil
- Spidol atau pensil warna, minimal 4 warna
- Penjepit kertas atau koin sebagai penanda posisi (bidak)
- Kalkulator HP (hanya untuk memeriksa pangkat kecil)

Keselamatan

Jika memotong lingkaran dari kardus bekas, gunakan gunting (bukan cutter) dengan ujung menjauhi tubuh dan teman, atau minta bantuan guru. Koin dan penjepit kertas adalah benda kecil: jangan dimasukkan ke

mulut dan kumpulkan kembali setelah selesai.

Langkah kerja

1. Di sisi depan piring, tulis angka 0 sampai 9 melingkar searah jarum jam dengan jarak 36° (gunakan busur dari titik pusat piring). Inilah jam modulo 10: setiap bilangan bulat diwakili oleh angka satuannya.
2. Letakkan bidak di angka 7 (yaitu 7^1). Kalikan angka posisi bidak dengan 7 dan ambil angka satuannya saja: $7 \times 7 = 49 \rightarrow 9$. Pindahkan bidak ke 9 dan gambar panah dari 7 ke 9.
3. Ulangi: $9 \times 7 = 63 \rightarrow 3$, dan seterusnya, sampai bidak kembali ke angka yang pernah dikunjungi. Catat angka satuan 7^1 sampai 7^6 dan panjang siklusnya di tabel.
4. Bagi tugas di kelompok dan ulangi dengan warna lain untuk $a = 2, 3, 4, 8, 9$. Periksa satu hasil dengan kalkulator, misalnya $2^6 = 64$ atau $3^5 = 243$.
5. Balik piringnya. Tulis angka 0 sampai 6 melingkar dengan jarak sekitar 51° . Inilah jam modulo 7, sekaligus jam hari: 0 = Minggu, 1 = Senin, ..., 6 = Sabtu.
6. Pada jam modulo 7, ulangi perburuan siklus untuk $a = 2$ dan $a = 3$: kalikan posisi bidak dengan a , lalu ambil sisa pembagiannya oleh 7 (misalnya $3 \times 3 = 9 \rightarrow 2$).
7. Isi kolom terakhir tabel, yaitu sisa a^{2026} , memakai siklus yang kamu temukan. Petunjuk: cari sisa 2026 dibagi panjang siklus.

Tabel perburuan siklus

a (jam)	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	Panjang siklus	Sisa a^{2026}
7 (mod 10)								
2 (mod 10)								
3 (mod 10)								
4 (mod 10)								
8 (mod 10)								
9 (mod 10)								
2 (mod 7)								
3 (mod 7)								

Grafik

Salin peta panah $\times 3$ dan $\times 7$ dari piringmu ke dua lingkaran berangka 0–9 di LKPD (gunakan warna berbeda). Bandingkan bentuk dan arah kedua lintasan itu.

Analisis

1. Berapa angka satuan 7^{2026} ? Jelaskan langkahmu memakai siklus, tanpa menghitung 7^{2026} .

Kunci: Siklus angka satuan pangkat 7 adalah 7, 9, 3, 1 (panjang 4). Karena $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, 7^{2026} berada di posisi ke-2 dalam siklus, sama seperti $7^2 = 49$. Jadi angka satuannya 9.

2. Mengapa untuk mencari angka satuan 7^{n+1} cukup mengalikan angka satuan 7^n dengan 7? Jelaskan dengan menuliskan $7^n = 10q + r$.

Kunci: Jika $7^n = 10q + r$ dengan r angka satuannya, maka $7^{n+1} = 7 \cdot 7^n = 70q + 7r = 10(7q) + 7r$. Bagian $10(7q)$ berakhiran 0, jadi angka satuan 7^{n+1} sama dengan angka satuan $7r$. Angka puluhan, ratusan, dan seterusnya tidak berpengaruh.

3. Mengapa perburuan pada jam pasti suatu saat berulang? (Petunjuk: ada berapa angka di jam, dan apa yang menentukan lompatan berikutnya?)

Kunci: Jam hanya punya 10 angka, jadi dalam 11 lompatan pasti ada angka yang dikunjungi dua kali (prinsip sarang merpati). Lompatan berikutnya hanya ditentukan oleh posisi sekarang, sehingga begitu sebuah angka terulang, seluruh urutan sesudahnya ikut terulang: terbentuklah siklus.

4. Bandingkan peta panah $\times 3$ dan $\times 7$ pada jam modulo 10. Apa yang kamu lihat? Hubungkan dengan $3 \times 7 = 21$.

Kunci: Kedua lintasan memakai angka yang sama (1, 3, 9, 7), tetapi arahnya berlawanan: $\times 3$: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 1$, sedangkan $\times 7$: $1 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Sebabnya $3 \times 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10}$: mengali dengan 7 membatalkan mengali dengan 3, jadi 7 adalah invers 3 modulo 10.

5. Perhatikan panjang siklus modulo 10 (4 atau 2) dan modulo 7 (3 atau 6). Apa hubungannya dengan bilangan 4 dan 6? Dugalah sisa 4^6 , 5^6 , dan 6^6 jika dibagi 7, lalu periksa dengan jammu.

Kunci: Semua panjang siklus modulo 10 membagi 4, dan semua panjang siklus modulo 7 membagi 6. Dugaan: $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$ untuk $a = 1, 2, \dots, 6$; memang $4^6 = 4096$, $5^6 = 15625$, dan $6^6 = 46656$ semuanya bersisa 1 jika dibagi 7. Inilah Teorema Fermat kecil: jika p prima dan p tidak membagi a , maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

6. Buktikan bahwa $3^{2025} + 7^{2025}$ habis dibagi 10.

Kunci: $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, jadi 3^{2025} berangka satuan sama dengan 3^1 , yaitu 3, dan 7^{2025} berangka satuan 7. Angka satuan jumlahnya sama dengan angka satuan $3 + 7 = 10$, yaitu 0, sehingga $3^{2025} + 7^{2025}$ habis dibagi 10.

7. Hari ini hari Senin. Hari apakah 2^{100} hari lagi? Gunakan jam hari di balik piringmu.

Kunci: Siklus 2^n modulo 7 adalah 2, 4, 1 (panjang 3). Karena $100 = 3 \cdot 33 + 1$, $2^{100} \equiv 2^1 = 2 \pmod{7}$. Maju 2 hari dari Senin: hari Rabu.

✓ Kesimpulan

Tuliskan langkah-langkah umum mencari angka satuan (atau sisa pembagian) dari a^n untuk n yang besar, lalu tuliskan dugaanmu tentang a^{p-1} jika dibagi bilangan prima p .

💬 Refleksi

- Sebelum kegiatan ini, aku mengira mencari angka terakhir 7^{2026} itu ...
- Bagian yang membuatku berkata "aha!" adalah ...
- Hal lain di sekitarku yang berulang dalam siklus, seperti jam dan kalender, adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada piring kertas? Buka Grafik Hidup "Siklus sisa pangkat" di Bab 38 (subbab 38.4): mulai dengan $a = 7$, $m = 10$, catat lompatan titik-titiknya, lalu ganti a dan m sesuai setiap baris tabel (termasuk $m = 7$). Lab

Mini "Jam modular: jarum yang melompat" (subbab 38.3) memperlihatkan jam modulo n yang sama, dan Rumus Hidup "Angka satuan pangkat besar" (subbab 38.4) dapat dipakai untuk memeriksa kolom terakhir. Tutup dengan Adu Cepat "Angka satuan kilat" (subbab 38.4).

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b38-4

Contoh data hasil satu kelompok

a (jam)	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	Panjang siklus	Sisa a^{2026}
7 (mod 10)	7	9	3	1	7	9	4	9
2 (mod 10)	2	4	8	6	2	4	4	4
3 (mod 10)	3	9	7	1	3	9	4	9
4 (mod 10)	4	6	4	6	4	6	2	6
8 (mod 10)	8	4	2	6	8	4	4	4
9 (mod 10)	9	1	9	1	9	1	2	1
2 (mod 7)	2	4	1	2	4	1	3	2
3 (mod 7)	3	2	6	4	5	1	6	4

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Ketepatan model jam & peta panah	Kedua jam (mod 10 dan mod 7) tertata rapi dengan jarak sudut tepat; semua peta panah benar dan berwarna berbeda.	Jam rapi, ada satu panah yang salah.	Jam kurang rapi atau beberapa panah salah.	Model jam belum dibuat atau tidak dapat dipakai.
Ketepatan sisa & siklus	Seluruh tabel benar, termasuk panjang siklus dan sisa pangkat 2026.	Ada 1–2 kesalahan kecil.	Siklus ditemukan, tetapi sisa pangkat besar banyak yang salah.	Tabel hampir kosong.
Penalaran & pembuktian	Menjelaskan dengan aljabar mengapa cukup angka satuan, mengapa siklus pasti muncul, dan membuktikan soal habis dibagi 10.	Penjelasan sebagian besar tepat, ada langkah yang kurang rinci.	Hanya menunjukkan contoh tanpa alasan.	Belum ada penalaran.
Kerja sama & komunikasi	Tugas terbagi rata, hasil saling diperiksa, dan dugaan disampaikan dengan istilah tepat (sisa, modulo, siklus).	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Biarkan siswa mencoba kalkulator dahulu: 7^{2026} punya 1.713 angka, sehingga kalkulator biasa hanya menampilkan bentuk baku (atau pesan galat) dan angka satuannya tidak terlihat. Ketidakberdayaan itu membuat siklus terasa berharga. Siswa sering bingung jika sisa pembagian pangkat oleh panjang siklus adalah 0; itu berarti posisi terakhir siklus (mis. 7^{2024} berakhiran 1). Diferensiasi: siswa yang cepat mencari dua angka terakhir 7^{2026} dengan jam modulo 100 (petunjuk: $7^4 = 2401$, jadi $7^{2026} \equiv 7^2 = 49 \pmod{100}$); siswa yang perlu bantuan cukup mengerjakan $a = 7$, $a = 9$, dan $2 \pmod{7}$.

Pasti Ada! Berburu Sarang Merpati dengan Tutup Botol dan Kartu

Bab 39 • Strategi Olimpiade: Kombinatorika & Ketaksamaan

Percobaan kelompok + permainan matematika (penemuan terbimbing)

SMA kelas X–XII / persiapan OSN SMP–SMA

2 × 45 menit

Model: Discovery learning: coba – catat – cari kasus terburuk – duga – buktikan

Nama _____ Kelas _____ Kelompok _____ Tanggal _____

Tujuan pembelajaran

- Peserta didik dapat menentukan banyak benda paling sedikit yang harus diambil agar pasti ada beberapa yang sewarna, melalui percobaan dan penalaran kasus terburuk.
- Peserta didik dapat merumuskan prinsip sarang merpati bentuk dasar dan bentuk umum $\lceil N/k \rceil$.
- Peserta didik dapat merancang "sarang" berupa pasangan bilangan untuk membuktikan sebuah pernyataan "pasti ada".
- Peserta didik dapat membedakan bukti matematis dengan dukungan dari data percobaan.

Cerita pemantik



Pak RT di kampung Dimas memelihara 13 ekor merpati, padahal pagupon di atas pos ronda hanya punya 12 lubang. "Pasti ada lubang yang dihuni dua merpati," kata Ayu yakin. Dimas protes, "Tahu dari mana? Kita kan tidak melihat merpati mana masuk ke lubang mana!" Kak Lintang tertawa, "Kadang matematika bisa menjamin sesuatu pasti ada, walaupun kita tidak tahu yang mana." Ancil datang membawa sekantong tutup botol warna-warni dan setumpuk kartu remi. Kelompokmu akan menguji sendiri kekuatan kata "pasti" itu.

? Rumusan masalah

Berapa banyak benda paling sedikit yang harus diambil agar pasti (bukan sekadar mungkin) terdapat beberapa benda dengan sifat tertentu, misalnya sewarna atau berjumlah 11?

Hipotesis (tebakan) kelompok kami:

Variabel bebas	Variabel terikat	Variabel kontrol
Banyak warna (sarang) dan banyak tutup sewarna yang ingin didapat	Banyak ambilan sampai tujuan tercapai	Isi kantong selalu 4 merah, 4 kuning, 4 hijau; mengambil tanpa melihat; tutup tidak dikembalikan selama satu percobaan

Alat dan bahan

- 12 tutup botol bekas: 4 merah, 4 kuning, 4 hijau (boleh diganti kancing atau karet gelang 3 warna)
- Kantong kain atau tas belanja yang tidak tembus pandang
- Kartu remi As (= 1) sampai 10 dari satu jenis, atau 10 sobekan kertas bertuliskan 1–10
- Pensil, LKPD, dan kertas plano untuk menggabungkan data kelas

Keselamatan

Cuci dan keringkan tutup botol bekas sebelum dipakai, lalu periksa agar tidak ada pinggiran yang tajam. Benda kecil seperti tutup botol dan kancing jangan dimasukkan ke mulut. Saat survei bulan lahir, cukup sebutkan bulannya (tanpa tanggal dan tahun), dan hargai teman yang memilih tidak menyebutkan.

Langkah kerja

1. Tuliskan dugaanmu: paling banyak berapa kali harus mengambil agar pasti mendapat 2 tutup sewarna? Agar pasti mendapat 3 tutup sewarna?
2. Masukkan 12 tutup botol ke kantong dan kocok. Seorang anggota mengambil satu per satu tanpa melihat dan menjajarkannya di meja. Catat urutan ke berapa pertama kali ada 2 tutup sewarna.
3. Teruskan mengambil sampai pertama kali ada 3 tutup sewarna. Catat urutannya, lalu kembalikan semua tutup ke kantong.
4. Ulangi langkah 2–3 sampai 8 percobaan, bergiliran menjadi pengambil dan pencatat.
5. Permainan kartu: kocok 10 kartu As–10 dan ambil 5 kartu. Periksa apakah ada dua kartu yang jumlahnya 11, lalu catat kartu dan hasilnya. Ambil kartu ke-6 dan periksa lagi. Kocok ulang semua kartu di setiap percobaan.
6. Tantangan curang: tanpa mengocok, pilih sendiri 5 kartu yang tidak memuat pasangan berjumlah 11. Bisakah kamu melakukannya dengan 6 kartu?
7. Survei sukarela: bergabunglah dengan kelompok lain sampai ada sedikitnya 13 orang. Setiap orang menyebutkan bulan lahirnya. Adakah dua orang yang bulan lahirnya sama?

Tabel percobaan

Percobaan	Ambilan sampai 2 sewarna	Ambilan sampai 3 sewarna	5 kartu yang terambil	Ada pasangan berjumlah 11?	Kartu ke-6	Dengan 6 kartu, ada pasangan?
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

Grafik

Gabungkan data seluruh kelas di kertas plano, lalu buat dua diagram batang: banyak ambilan sampai 2 sewarna (nilai 2, 3, 4, ...) dan sampai 3 sewarna (nilai 3, 4, 5, ...). Tandai nilai terbesar yang pernah muncul pada setiap diagram.

Analisis

1. Berapa nilai terbesar pada kolom "sampai 2 sewarna"? Mengapa nilai 5 tidak mungkin muncul? Jelaskan dengan kasus terburuk.

Kunci: Nilai terbesar 4 (pada contoh data muncul di percobaan 3). Kasus terburuk: tiga ambilan pertama berbeda warna semua (merah, kuning, hijau). Ambilan ke-4 harus masuk ke salah satu dari 3 warna (4 merpati, 3 sarang), jadi pasti ada 2 tutup sewarna. Karena itu ambilan ke-5 tidak pernah diperlukan.

2. Berapa nilai terbesar pada kolom "sampai 3 sewarna"? Tentukan rumus banyak ambilan paling sedikit agar pasti mendapat m tutup sewarna jika ada k warna (dan setiap warna tersedia cukup banyak).

Kunci: Nilai terbesar $7 = 2 \cdot 3 + 1$ (pada contoh data muncul di percobaan 5). Kasus terburuk: 2 tutup dari setiap warna (6 tutup) tanpa ada 3 sewarna; tutup ke-7 pasti membuat 3 sewarna. Umumnya diperlukan $(m - 1)k + 1$ ambilan. Ini prinsip sarang merpati bentuk umum: N benda dalam k sarang menjamin ada sarang berisi sedikitnya $\lceil N/k \rceil$ benda.

3. Seorang teman berkata, "Aku sudah mencoba 100 kali dan tidak pernah butuh lebih dari 4 ambilan, jadi terbukti." Apakah percobaan saja cukup sebagai bukti? Apa yang membuat argumen sarang merpati lebih kuat?

Kunci: Tidak cukup. Percobaan hanya menunjukkan bahwa kejadian lain belum terlihat; urutan yang langka bisa saja belum muncul. Argumen sarang merpati memeriksa kasus terburuk, yaitu semua kemungkinan sekaligus, sehingga berlaku untuk setiap urutan, bukan hanya yang kebetulan dicoba. Data berguna untuk menduga, bukti berguna untuk memastikan.

4. Kelompokkan kartu 1–10 menjadi 5 "sarang" sehingga dua kartu dalam satu sarang berjumlah 11. Gunakan sarang itu untuk membuktikan bahwa 6 kartu pasti memuat pasangan berjumlah 11, dan tunjukkan bahwa 5 kartu belum tentu.

Kunci: Sarang: $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$. Enam kartu masuk ke 5 sarang, jadi menurut prinsip sarang merpati ada sarang yang berisi 2 kartu, dan keduanya berjumlah 11. Lima kartu bisa gagal jika diambil satu dari setiap sarang, misalnya $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ atau $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ seperti percobaan 2 pada contoh data.

5. Generalisasikan: jika dipilih $n + 1$ bilangan dari $\{1, 2, \dots, 2n\}$, mengapa pasti ada dua bilangan yang jumlahnya $2n + 1$?

Kunci: Buat n sarang $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n - 1\}$, $\dots$, $\{n, n + 1\}$; setiap sarang berjumlah $2n + 1$. Ada $n + 1$ bilangan tetapi hanya n sarang, jadi ada sarang yang terisi dua bilangan, dan keduanya berjumlah $2n + 1$. Permainan kartu adalah kasus $n = 5$.

6. Mengapa 13 orang pasti memuat dua orang yang bulan lahirnya sama? Berapa orang yang diperlukan agar pasti ada 3 orang yang bulan lahirnya sama? Di sekolah dengan 400 siswa, apa yang pasti dapat dikatakan tentang hari ulang tahun mereka?

Kunci: Ada 12 bulan (12 sarang) dan 13 orang, jadi pasti ada bulan yang dihuni 2 orang. Agar pasti ada 3 orang sebulan lahir diperlukan $2 \cdot 12 + 1 = 25$ orang. Dengan 400 siswa dan paling banyak 366 kemungkinan hari ulang tahun (termasuk 29 Februari), $\lceil 400/366 \rceil = 2$: pasti ada dua siswa yang berulang tahun pada tanggal dan bulan yang sama.

7. Saat mati lampu, Dimas mengambil kaus kaki dari laci berisi 10 kaus kaki hitam, 8 putih, dan 6 abu-abu. Berapa kaus kaki paling sedikit yang harus diambil agar pasti mendapat sepasang yang sewarna? Agar pasti mendapat sepasang hitam?

Kunci: Sepasang sewarna: 4 kaus kaki (3 warna = 3 sarang, kaus kaki ke-4 pasti melengkapi pasangan).
Sepasang hitam: kasus terburuk semua 8 putih dan 6 abu-abu terambil lebih dulu, baru 2 hitam, jadi $8 + 6 + 2 = 16$ kaus kaki.

✓ Kesimpulan

Tuliskan prinsip sarang merpati (bentuk dasar dan bentuk umum) dengan kata-katamu sendiri, lalu jelaskan langkah memakainya: apa "merpati"-nya, apa "sarang"-nya, dan apa yang dijamin.

💡 Refleksi

- Perbedaan antara "mungkin ada" dan "pasti ada" yang kupahami sekarang adalah ...
- Bagian tersulit adalah menemukan "sarang" yang tepat, karena ...
- Klaim "pasti ada" di sekitarku yang ingin kuuji adalah ...

💻 Tidak punya alat? Pakai versi virtual

Tidak ada tutup botol? Buka Lab Mini "Pagupon Pak RT: masukkan merpatinya!" di Bab 39 (subbab 39.1). Pilih cara terbang "paling merata", lalu coba 13 merpati di 12 sarang dan 25 merpati di 12 sarang: catat isi sarang terpadat dan bandingkan dengan $\lceil N/k \rceil$. Periksa rumusmu dengan Rumus Hidup "Sarang merpati bentuk umum" dan tutup dengan Adu Cepat "Sarang merpati kilat" (keduanya di subbab 39.1). Permainan kartu cukup memakai 10 sobekan kertas bernomor 1-10.

Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia#b39-1

Contoh data hasil satu kelompok

Percobaan	Ambilan sampai 2 sewarna	Ambilan sampai 3 sewarna	5 kartu yang terambil	Ada pasangan berjumlah 11?	Kartu ke-6	Dengan 6 kartu, ada pasangan?
1	3	5	4, 6, 7, 8, 10	ya (4 + 7)	1	ya (1 + 10, 4 + 7)
2	3	6	1, 2, 3, 4, 6	tidak	5	ya (5 + 6)
3	4	6	2, 5, 6, 9, 10	ya (2 + 9, 5 + 6)	7	ya (2 + 9, 5 + 6)
4	2	4	1, 3, 4, 8, 9	ya (3 + 8)	2	ya (2 + 9, 3 + 8)
5	2	7	1, 3, 4, 6, 10	ya (1 + 10)	2	ya (1 + 10)
6	3	6	3, 4, 7, 9, 10	ya (4 + 7)	8	ya (3 + 8, 4 + 7)
7	2	3	5, 6, 8, 9, 10	ya (5 + 6)	3	ya (3 + 8, 5 + 6)
8	3	4	3, 7, 8, 9, 10	ya (3 + 8)	6	ya (3 + 8)

Rubrik penilaian

Aspek	4 • Sangat baik	3 • Baik	2 • Cukup	1 • Perlu bimbingan
Pelaksanaan percobaan & pencatatan data	Delapan percobaan dilakukan jujur (tanpa melihat) dan semua kolom tabel terisi rapi.	Percobaan lengkap, ada sedikit catatan yang kurang rapi.	Percobaan kurang dari 5 kali atau data tidak lengkap.	Data belum dapat dipakai.
Analisis kasus terburuk & rumus umum	Menjelaskan kasus terburuk untuk 2 dan 3 sewarna dan merumuskan $(m - 1)k + 1$ serta $\lceil N/k \rceil$ dengan tepat.	Kasus terburuk benar, rumus umum kurang lengkap.	Hanya membaca nilai terbesar dari data tanpa alasan.	Belum ada analisis.
Penyusunan sarang & bukti	Menyusun sarang pasangan berjumlah 11, membuktikan kasus 6 kartu, memberi contoh penyangkal 5 kartu, dan menggeneralisasi ke $\{1, \dots, 2n\}$.	Bukti 6 kartu benar, generalisasi belum lengkap.	Sarang disebut tanpa bukti yang runtut.	Belum menemukan sarang.
Kerja sama & komunikasi	Peran bergiliran, semua anggota aktif, dan perbedaan data dan bukti dijelaskan dengan jelas.	Kerja sama baik, penyampaian cukup jelas.	Hanya sebagian anggota yang aktif.	Kelompok belum bekerja sama.

Nilai akhir = (jumlah skor ÷ 16) × 100.

Catatan guru

Tekankan perbedaan antara data (mendukung dugaan) dan bukti (menjamin untuk semua kasus). Jika waktu terbatas, cukup 5 percobaan per kelompok, lalu gabungkan data kelas: nilai 7 biasanya hanya muncul sesekali (peluangnya sekitar 23%), dan 5 kartu tanpa pasangan berjumlah 11 cukup jarang (peluangnya $32/252 \approx 13\%$), sehingga diskusi "jarang muncul tidak sama dengan mustahil" menjadi hidup. Survei bulan lahir bersifat sukarela. Diferensiasi: kelompok yang cepat membuktikan bahwa dari 11 bilangan yang dipilih dari 1–20 selalu ada dua bilangan yang salah satunya membagi yang lain (sarang: bagian ganjil 1, 3, 5, ..., 19); kelompok yang perlu bantuan memulai dengan 2 warna saja.