Mathpedia

BUKU LENGKAP · VERSI CETAK

Mathpedia

Matematika Itu Asyik!

Buku matematika interaktif untuk anak Indonesia: SD, SMP, SMA, IGCSE, IB, sampai olimpiade.



dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD

Editor: Abdullah Hanif Hidayat

Didukung oleh Aurumgen Academy

Edisi 1 · 2026 · Versi interaktif: aurumgen.my.id/mathpedia

Tentang buku ini

Buku ini adalah versi cetak dari Mathpedia. Bagian yang di layar dapat digeser dan dimainkan (Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, animasi langkah) ditampilkan sebagai gambar, sedangkan latihan lengkap ada di PDF Bank Soal dan LKPD.

Mathpedia · Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026).

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD**
Editor: **Abdullah Hanif Hidayat**
Didukung oleh Aurumgen Academy.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Dokumen ini boleh dicetak dan diperbanyak untuk keperluan pembelajaran nonkomersial dengan tetap mencantumkan sumber.

Semua soal dan LKPD adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.

Versi interaktif dengan komik bergerak, Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, Adu Cepat, dan latihan berskor: aurumgen.my.id/mathpedia

Daftar isi

Cara belajar dengan Mathpedia 6

BAGIAN A · BILANGAN

1 Matematika Ada di Mana-mana 11

2 Bilangan Bulat & Garis Bilangan 39

3 Pecahan, Desimal & Persen 64

4 Faktor, Kelipatan & Bilangan Prima 96

5 Rasio, Proporsi & Laju 125

6 Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah 154

BAGIAN B · ALJABAR & FUNGSI

7 Bahasa Aljabar 184

8 Persamaan & Pertidaksamaan Linear 212

9 Garis Lurus & Fungsi Linear 240

10 Sistem Persamaan Linear 271

11 Persamaan Kuadrat 298

12 Fungsi Kuadrat & Parabola 325

13 Fungsi: Komposisi, Invers & Transformasi 356

14 Eksponen & Logaritma 388

15 Barisan & Deret 420

16 Polinomial 454

BAGIAN C · GEOMETRI & PENGUKURAN

17 Garis, Sudut & Segitiga 481

18 Teorema Pythagoras 510

19 Keliling & Luas Bangun Datar 529

20 Lingkaran 557

21 Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume 585

22 Kesebangunan & Transformasi Geometri 612

23 Geometri Koordinat & Vektor 642

BAGIAN D · TRIGONOMETRI

24 Trigonometri Segitiga Siku-siku 674

25 Aturan Sinus, Kosinus & Luas Segitiga 698

26 Fungsi & Identitas Trigonometri 723

BAGIAN E · KALKULUS

27 Limit: Seni Mendekati 753

28 Turunan: Laju Perubahan 782

29 Aplikasi Turunan: Optimasi & Grafik 808

30 Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga 833

BAGIAN F · DATA & PELUANG

31 Statistika: Bercerita dengan Data 865

32 Kaidah Pencacahan 895

33 Peluang 924

34 Distribusi Peluang: Binomial & Normal 951

BAGIAN G · MATEMATIKA LANJUT & OLIMPIADE

35 Logika & Pembuktian 977

36 Matriks 1004

37 Bilangan Kompleks 1032

38 Teori Bilangan Olimpiade 1058

39 Strategi Olimpiade: Kombinatorika & Ketaksamaan 1086

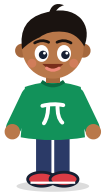
LAMPIRAN

Peta Rumus: semua Rumus Hidup 1114

Penutup, glosarium & panduan guru 1131

Cara Belajar dengan Mathpedia

Kenalan dulu, yuk!



Dimas

Anak SMP dari Bandung yang selalu menebak paling cepat. Kadang benar, sering kena jebakan, tetapi tidak pernah kapok. Kaus kesayangannya bergambar π.



Ayu

Sahabat Dimas dari Padang. Teliti dan suka mencatat. Kalimat andalannya: "Tunggu dulu. Buktinya mana?"



Kak Lintang

Kakak mentor yang humoris. Selalu membawa kapur, selalu punya analogi, dan percaya bahwa tidak ada pertanyaan yang bodoh.



Ancil si Kancil

Maskot cerdik dari hutan Nusantara. Seperti kancil dalam dongeng, ia suka teka-teki dan **jalan pintas yang sah**: trik cerdas yang tetap bisa dibuktikan.

Lima janji Mathpedia



Paham dulu, rumus kemudian

Setiap rumus lahir dari cerita, gambar, atau pola. Kamu melihat *mengapa* sebelum menghafal *apa*.



Boleh diutak-atik

Geser nilai, seret titik, putar animasi. Matematika paling mudah dipahami saat kamu bermain dengannya.



Dekat dengan hidupmu

Martabak, angkot, batik, sawah terasering, Monas, dan harga cabai. Matematika ada di sekitarmu.



Salah itu bagian dari belajar

Tebak dulu, keliru, lalu temukan alasannya. Otakmu justru tumbuh paling kuat saat itu.



Tangga sampai puncak

Dari soal Pemula untuk SD sampai soal gaya IGCSE, IB, dan Olimpiade, semuanya dengan pembahasan.

Cara belajar di Mathpedia

Setiap bab mengikuti alur yang sama. Kamu akan **memahami**, **mengaplikasikan**, lalu **merefleksikan**, sesuai semangat Pembelajaran Mendalam yang berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan.

1. Komik pembuka
Masalah nyata dari kehidupan sehari-hari.

2. Tebak Dulu!
Pilih prediksimu sebelum belajar. Salah tebak itu bagus!

3. Cerita & gambar
Konsep abstrak dibuat konkret dengan analogi dan animasi.

4. Definisi & Teorema
Kalimat matematika yang tepat, lengkap dengan buktinya.

5. Grafik Hidup
Seret titik dan geser nilai, kurva ikut berubah.

6. Rumus Hidup
Geser nilainya, lihat hasilnya, kumpulkan kartunya.

7. Contoh bertingkat
Contoh → kerjakan bersama → coba sendiri.

8. Awas Jebakan!
Kesalahan yang paling sering terjadi.

9. Adu Cepat
Latihan kilat 60 detik. Kalahkan rekormu!

10. Tangga Latihan
Soal dari Pemula sampai Olimpiade.

TIGA MODE BACAAN

Di kanan atas ada tombol **Dasar · SMA · Lanjut**. Mode **Dasar** memakai bahasa paling sederhana untuk SD–SMP. Mode **SMA** adalah standar kelas X–XII. Mode **Lanjut** membuka kotak 🚀 berisi pendalaman IGCSE, IB, dan trik olimpiade. Tombol 🌙 mengubah buku menjadi **Papan Tulis**.

MENULIS JAWABAN

Di kotak isian kamu boleh menulis **desimal** (0,75), **pecahan** (3/4 atau 2 1/3), **akar** (2√3 atau sqrt(3)), **π** (3π/4), atau **pangkat** (2^10). Mathpedia akan membacanya untukmu.

Pilih jalur belajarmu

SD – SMP

Bacaan **Dasar**. Mulai dari Bab 1–8, 17–21, 31, dan 33.

Lv 1 Lv 2

SMA · TKA · UTBK

Bacaan **SMA**. Ikuti urutan bab. Fokus pada Grafik Hidup, Rumus Hidup, dan contoh bertingkat.

Lv 2 Lv 3

IGCSE · IB

Bacaan **Lanjut**. Perhatikan kotak 🚀, soal berstruktur, pemodelan, dan kalkulus.

Lv 4 Lv 5

Olimpiade (OSN)

Bacaan **Lanjut**. Kuasai Bab 35, 38, dan 39, lalu taklukkan Tantangan Olimpiade di Bank Soal.

Lv 5 Lv 6

Tangga 6 level soal

Level	Untuk siapa	Ciri soal
Lv 1 · Pemula	SD – awal SMP	Mengenali konsep, angka sederhana, gambar.
Lv 2 · Penjelajah	SMP (Fase D)	Satu atau dua langkah hitungan, membaca tabel dan grafik sederhana.
Lv 3 · Pejuang	SMA · TKA · UTBK	Beberapa langkah, konteks nyata, penalaran.
Lv 4 · IGCSE	Gaya Cambridge IGCSE Mathematics	Soal berstruktur, kata perintah (*hitung, tunjukkan, jelaskan*), data dan grafik.
Lv 5 · IB DP	Gaya IB Mathematics AA/AI	Pemodelan, pembuktian singkat, kalkulus, analisis berbagian.
Lv 6 · Olimpiade	Gaya OSN · OMITS · IMO	Tidak rutin, butuh ide kreatif dan bukti yang rapi.

Peta isi buku

Bagian A · Bilangan

1 Matematika Ada di Mana-mana
2 Bilangan Bulat & Garis Bilangan
3 Pecahan, Desimal & Persen
4 Faktor, Kelipatan & Bilangan Prima
5 Rasio, Proporsi & Laju
6 Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah

Bagian B · Aljabar & Fungsi

7 Bahasa Aljabar
8 Persamaan & Pertidaksamaan Linear
9 Garis Lurus & Fungsi Linear
10 Sistem Persamaan Linear
11 Persamaan Kuadrat
12 Fungsi Kuadrat & Parabola
13 Fungsi: Komposisi, Invers & Transformasi
14 Eksponen & Logaritma
15 Barisan & Deret
16 Polinomial

Bagian C · Geometri & Pengukuran

17 Garis, Sudut & Segitiga

18 Teorema Pythagoras

19 Keliling & Luas Bangun Datar

20 Lingkaran

21 Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume

22 Kesebangunan & Transformasi Geometri

23 Geometri Koordinat & Vektor

Bagian D · Trigonometri

24 Trigonometri Segitiga Siku-siku

25 Aturan Sinus, Kosinus & Luas Segitiga

26 Fungsi & Identitas Trigonometri

Bagian E · Kalkulus

27 Limit: Seni Mendekati

28 Turunan: Laju Perubahan

29 Aplikasi Turunan: Optimasi & Grafik

30 Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga

Bagian F · Data & Peluang

31 Statistika: Bercerita dengan Data

32 Kaidah Pencacahan

33 Peluang

34 Distribusi Peluang: Binomial & Normal

Bagian G · Matematika Lanjut & Olimpiade

35 Logika & Pembuktian

36 Matriks

37 Bilangan Kompleks

38 Teori Bilangan Olimpiade

39 Strategi Olimpiade: Kombinatorika & Ketaksamaan

Selaras dengan kurikulum

Kurikulum	Bab yang paling relevan
Matematika SD (Fase A–C)	1–5 · 17 · 19 · 21 · 31 · 33 (bacaan Dasar)
Matematika SMP (Fase D)	2–10 · 11 (pengantar) · 17–22 · 24 (pengantar) · 31 · 33
Matematika kelas X (Fase E)	6 (eksponen) · 10 · 11 · 12 · 14 · 15 · 24 · 31 · 33

Matematika XI–XII (Fase F, termasuk Tingkat Lanjut)	13 · 16 · 20 · 22 · 23 · 25–30 · 32 · 34 · 36 · 37
Cambridge IGCSE Mathematics 0580	2–13 · 15 · 17–25 · 31 · 33
IB Mathematics AA/AI	Bilangan & aljabar: 6, 14, 15, 32, 35, 37 · Fungsi: 9, 12, 13, 14, 26 · Geometri & trigonometri: 23–26 · Statistika & peluang: 31–34 · Kalkulus: 27–30
OSN Matematika	Semua bab. Inti: aljabar (7, 11, 15, 16), geometri (17–22), teori bilangan (4, 38), kombinatorika (32, 35, 39).

Rujukan: Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025). Label "gaya IGCSE/IB/olimpiade" menunjukkan tingkat dan format soal, bukan soal resmi.

BAB 1 · BILANGAN

01 Matematika Ada di Mana-mana: Berburu Pola

Mengapa lebah membangun sarang segi enam? Mengapa biji bunga matahari berbaris dalam spiral 34 dan 55? Batik nenekmu, tangga rumahmu, dan bunga di kebun ternyata menyimpan rahasia yang sama: **pola**. Yuk, berburu!

Setelah bab ini, kamu bisa

- memandang matematika sebagai **ilmu tentang pola** dan menemukannya di batik, sarang lebah, dan bunga;
- melanjutkan **barisan pola** gambar dan bilangan, serta menghitung **bilangan segitiga** dan **bilangan persegi**;
- mengenali **barisan Fibonacci** dan **rasio emas** di alam;
- memecahkan masalah dengan **empat langkah Polya**;
- membedakan **menebak, menguji, dan membuktikan**, misalnya untuk jumlah bilangan ganjil.

MISI BERBURU POLA

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Lebah madu membangun sarangnya dari sel-sel segi enam. Mengapa segi enam, bukan lingkaran atau persegi?

- Karena lebah punya enam kaki, jadi mereka suka angka enam.
- Kebetulan saja; bentuknya bisa apa pun.
- Segi enam bisa menutup bidang tanpa celah dan memakai lilin paling sedikit untuk luas yang sama.
- Karena segi enam adalah bangun yang paling mudah digambar.

Jawabannya: hemat dan tanpa celah. Lingkaran yang dijajarkan selalu menyisakan celah. Dari semua bangun beraturan yang bisa menutup bidang tanpa celah (hanya segitiga, persegi, dan segi enam), segi enam punya keliling terpendek untuk luas yang sama, jadi lilin yang dibutuhkan paling sedikit. Lebah tentu tidak berhitung; bentuk itu muncul karena alam "memilih" cara yang hemat. Matematikawan Thomas Hales baru berhasil membuktikan dugaan sarang lebah ini secara lengkap sekitar tahun 1999. Kamu akan mengujinya sendiri di Lab Mini sebentar lagi!

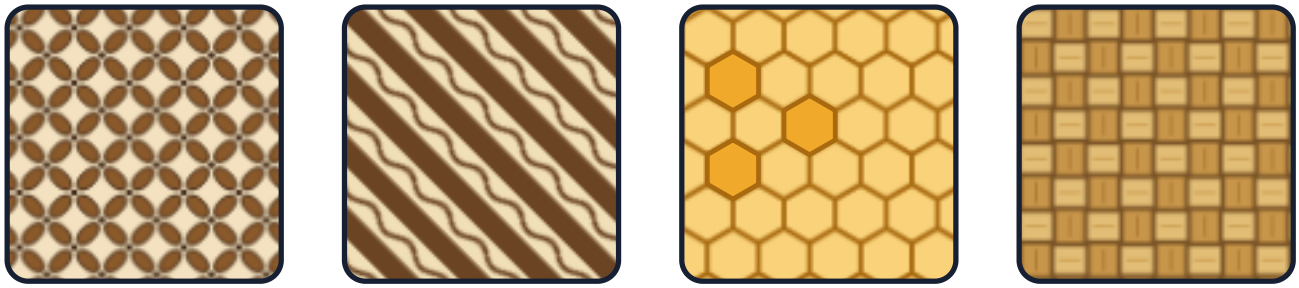
1.1 Matematika adalah ilmu tentang pola

Kalau ditanya "matematika itu apa?", banyak orang menjawab "berhitung". Padahal berhitung hanyalah salah satu alatnya. Para matematikawan suka menyebut matematika sebagai **ilmu tentang pola**: pola bilangan, pola bentuk,

pola gerak, sampai pola dalam permainan.

DEFINISI

Pola adalah keteraturan yang mengikuti suatu aturan, sehingga kita bisa meramalkan kelanjutannya. Ada **pola berulang**, yaitu bagian yang sama muncul lagi dan lagi (seperti motif batik), dan **pola tumbuh**, yaitu setiap langkah berubah menurut aturan yang sama (seperti 1, 3, 6, 10, ...).



Kawung — *diputar 90°: tetap sama*

Parang — *digeser miring: berulang*

Sarang lebah — *segi enam tanpa celah*

Anyaman — *atas, bawah, atas, bawah*

Empat pola berulang dari sekitar kita. Masing-masing bisa digeser, diputar, atau dicerminkan tanpa berubah wujud.

Bahasa sederhana · Gampangnya, pola itu seperti lagu yang reffnya diulang-ulang. Kalau kamu sudah tahu aturannya, kamu bisa meneruskannya sendiri tanpa melihat contekan.

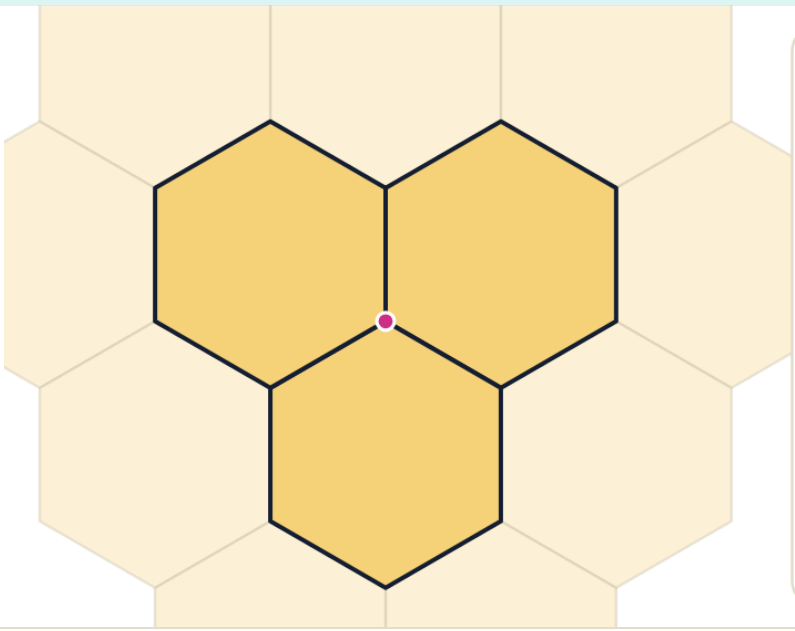
MATEMATIKA NUSANTARA

Para pembatik adalah ahli pola. Motif **kawung** tersusun dari empat bentuk lonjong yang mengelilingi satu titik, lalu diulang ke segala arah. Putar seperempat putaran (90°), motifnya tetap sama: inilah *simetri putar*. Motif **parang** berulang miring seperti ombak. Batik cap dibuat dengan mencapkan satu cetakan tembaga berkali-kali, persis seperti *translasi* (pergeseran) dalam geometri. Anyaman tikar pandan dan bilik bambu mengikuti pola "atas-bawah" yang berselang-seling. Motif serupa kawung bahkan disebut-sebut sudah terpahat pada arca candi di Jawa lebih dari seribu tahun lalu.

Sekarang kembali ke lebah. Bayangkan kamu harus menutup lantai dengan ubin berbentuk segi banyak beraturan yang sama semua, tanpa celah dan tanpa tumpang-tindih. Di setiap titik pertemuan, sudut-sudut ubin harus berjumlah tepat 360°. Coba sendiri, segi berapa saja yang berhasil?

LAB MINI Ubin lebah: segi berapa yang pas tanpa celah?

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1





sudut dalam	360° ÷ sudut dalam	Hasil	keliling untuk luas 1
120 °	3	3 ubin pas tanpa celah	3,722

Geser banyak sisi dari 3 sampai 12. Perhatikan titik merah muda di tengah: apakah ubin-ubinnya menutup 360° dengan pas, ada celah, atau malah bertumpuk? Lalu bandingkan panjang batang "lilin" di kanan. Ketuk nama ubin di panel kanan untuk memilihnya.

SIFAT UBIN BERATURAN

Ubin segi-n beraturan yang sama dapat menutup bidang tanpa celah dan tanpa tumpang-tindih **hanya** untuk $n = 3$, $n = 4$, dan $n = 6$. Dari ketiganya, segi enam memakai keliling (lilin) paling sedikit untuk luas yang sama.

Bukti singkat: mengapa hanya 3, 4, dan 6?

Sudut dalam segi-n beraturan adalah $180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$. Agar pas di satu titik, harus ada bilangan bulat k (banyak ubin di titik itu) dengan

$$k\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Supaya k bulat, $n - 2$ harus membagi 4, jadi $n - 2 \in \{1, 2, 4\}$, yaitu $n = 3, 4, 6$ dengan $k = 6, 4, 3$. Tidak ada kemungkinan lain. Bukti selesai, hanya dengan satu pecahan!

1.2 Pola tumbuh: bilangan segitiga dan bilangan persegi

Ingat kelereng Dimas? Susunan segitiganya berisi 1, 3, 6, 10, ... kelereng. Bilangan-bilangan ini disebut **bilangan segitiga**. Kalau kelerengnya disusun membentuk persegi, kamu mendapat 1, 4, 9, 16, ... yang disebut **bilangan persegi**. Keduanya adalah **barisan**: daftar bilangan yang tersusun menurut aturan, dan setiap anggotanya disebut **suku**.

LAB MINI Penumbuh pola: titik demi titik

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1



ketuk gambar untuk menumbuhkan pola

Pola ke-5

15

titik

5 × 6 ÷ 2 = 15

Barisannya:

1, 3, 6, 10,
15, 21, 28, …

Tambahannya:

+2 +3 +4 +5 +6 …

Selisihnya naik 1 setiap langkah.

banyak titik	tambahan dari pola sebelumnya	rumus
15	5	n(n + 1) ÷ 2

Tekan ▶ **Jalankan** atau ketuk gambarnya untuk menumbuhkan pola. Ganti jenisnya: segitiga, persegi, persegi panjang, atau segi enam. Perhatikan baris **Tambahannya**: pola persegi selalu bertambah bilangan ganjil. Mengapa?

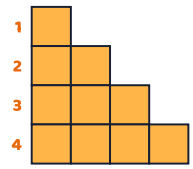
TRIK KAK LINTANG: LIHAT SELISIHNYA

Kalau bingung menebak pola, tulis **selisih** antarsuku di bawahnya. Selisih tetap (3, 7, 11, 15: selalu +4) berarti pola tambah biasa. Selisih yang naik teratur (1, 3, 6, 10: +2, +3, +4) berarti polanya tumbuh makin cepat, seperti bilangan segitiga. Kalau setiap suku dikali bilangan yang sama (1, 2, 4, 8), itu pola kali.

AWAS JEBAKAN

Dua atau tiga suku saja belum cukup untuk memastikan sebuah pola. Barisan 2, 4, ... bisa berlanjut 6, 8 (tambah 2), atau 8, 16 (kali 2), atau 7, 11 (selisih naik 1). Karena itu soal yang baik selalu menyebutkan **aturannya** atau memberi cukup banyak suku.

Berapa titik pada pola segitiga ke-100? Menjumlahkan $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ satu per satu tentu melelahkan. Ada trik yang jauh lebih cantik: **gandakan, lalu bagi dua**.

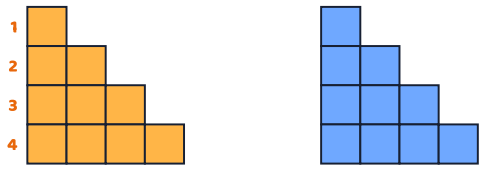


Tangga dengan 4 anak tangga:

1 + 2 + 3 + 4 kotak.

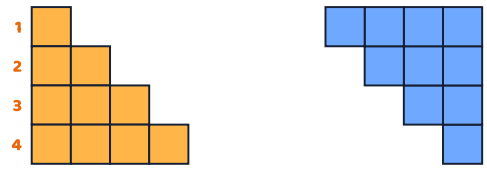
Berapa jumlahnya tanpa menghitung satu per satu?

Langkah 1. Bilangan segitiga ke-4 adalah tangga dengan baris berisi 1, 2, 3, dan 4 kotak. Kita ingin tahu $1 + 2 + 3 + 4$ tanpa menghitung satu per satu.



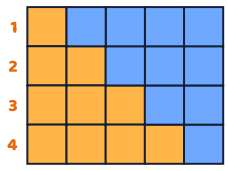
Buat salinannya yang sama persis (biru).

Langkah 2. Buat salinan tangga yang sama persis. Sekarang kita punya dua kali lebih banyak kotak.



Putar salinan biru setengah putaran (180°).

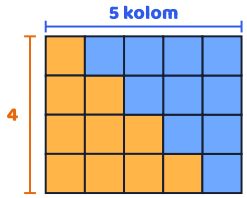
Langkah 3. Putar salinannya setengah putaran (180°). Anak tangga terpanjang kini berada di atas.



Geser ke kiri... klik!

Dua tangga menyatu menjadi sebuah persegi panjang.

Langkah 4. Geser salinan itu ke kiri. Kedua tangga mengunci satu sama lain tanpa celah dan membentuk persegi panjang!

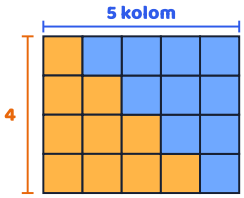


4 baris × 5 kolom = 20 kotak.

Satu tangga = setengahnya:

20 : 2 = 10

Langkah 5. Persegi panjangnya 4 baris × 5 kolom = 20 kotak. Karena terdiri atas dua tangga yang sama, satu tangga berisi $20 : 2 = 10$ kotak.



tangga n anak tangga → persegi panjang n baris × (n + 1) kolom, lalu dibagi 2:

T_n = n × (n + 1) : 2

T_{100} = 100 × 101 : 2 = 5.050

Langkah 6. Cara ini berlaku untuk tangga berapa pun: n baris dan $n + 1$ kolom, lalu dibagi dua. Jadi $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, dan $T_{100} = 5.050$.

RUMUS BILANGAN SEGITIGA

Bilangan segitiga ke-n adalah jumlah n bilangan asli pertama:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bilangan persegi ke-n adalah $n \times n = n^2$.

RUMUS HIDUP

Bilangan segitiga

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dua tangga yang sama membentuk persegi panjang n × (n + 1). Satu tangga = setengahnya.

n Banyak baris `baris`

T_n Banyak titik `titik`

BANYAK TITIK

10

titik

1 + 2 + … + **4** = **4** × **5** : 2 = **10**. Persegi panjang dari dua tangga berisi **20** titik. Hasilnya selalu bulat, karena salah satu dari **4** dan **5** pasti genap.

Cek satuan: banyak titik selalu bilangan asli, jadi hasil yang berkoma pasti salah hitung.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BILANGAN-SEGITIGA

TAMU DARI MASA LALU

Konon, sekitar tahun 1786 seorang guru di Jerman menyuruh murid-muridnya menjumlahkan 1 sampai 100 agar kelas tenang. Baru sebentar, seorang anak berumur sekitar 9 tahun bernama **Carl Friedrich Gauss** sudah menulis 5.050. Caranya: pasangkan 1 dengan 100, 2 dengan 99, 3 dengan 98, dan seterusnya. Ada 50 pasang yang masing-masing berjumlah 101, jadi $50 \times 101 = 5.050$. Detail ceritanya mungkin sudah dibumbui, tetapi Gauss kelak memang menjadi salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa. Di Bab 15 kamu akan memakai trik pasangan ini untuk deret apa pun.

CONTOH **Kaleng di etalase warung**

Pak Joko menyusun kaleng susu di etalase warungnya membentuk segitiga. Baris paling bawah berisi 12 kaleng, dan setiap baris di atasnya berkurang satu kaleng sampai puncaknya 1 kaleng. Berapa kaleng yang dipajang?

1. Banyak kaleng $= 1 + 2 + 3 + \cdots + 12$, yaitu bilangan segitiga ke-12.
2. $T_{12} = \dfrac{12 \times 13}{2} = \dfrac{156}{2} = 78.$
3. Cek dengan trik Gauss: 6 pasang (1 + 12, 2 + 11, ..., 6 + 7) yang masing-masing berjumlah 13, jadi $6 \times 13 = 78$. ✓

Ada 78 kaleng. Dua cara berbeda memberi hasil yang sama, jadi kita yakin jawabannya benar.

ADU CEPAT **Tebak suku berikutnya**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tulis selisihnya. Selisih tetap: pola tambah. Selisih naik: cek bilangan persegi atau segitiga. Dikali 2: pola kali. Bukan semuanya? Jumlahkan dua suku sebelumnya, seperti Fibonacci!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BILANGAN SEGITIGA BERSAHABAT DENGAN BILANGAN PERSEGI

Dua bilangan segitiga yang berurutan selalu menyusun persegi: $T_{n-1} + T_n = n^2$ (misalnya $6 + 10 = 16$). Gambar saja persegi $n \times n$ titik, lalu potong tepat di samping diagonalnya. Hubungan lain yang sering dipakai di olimpiade:

$$8T_n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2.$$

Jadi untuk menguji apakah suatu bilangan m adalah bilangan segitiga, cukup periksa apakah $8m + 1$ bilangan kuadrat. Contoh: $8 \times 55 + 1 = 441 = 21^2$, jadi 55 bilangan segitiga (T_{10}). Ada pula bilangan yang sekaligus segitiga dan persegi: 1, 36, 1.225, ... ($T_8 = 36 = 6^2$ dan $T_{49} = 1.225 = 35^2$).

1.3 Fibonacci dan rasio emas: matematika yang tumbuh di kebun

Pada tahun 1202, seorang pedagang dari Pisa, Italia, bernama Leonardo (kini dikenal sebagai **Fibonacci**) menulis buku hitung *Liber Abaci*. Di dalamnya ada teka-teki kelinci: sepasang kelinci muda menjadi dewasa dalam

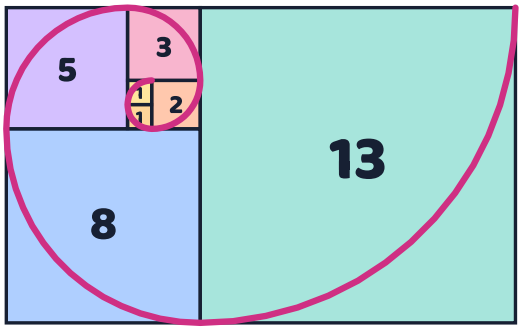
sebulan, lalu setiap bulan sepasang kelinci dewasa melahirkan sepasang anak. Banyak pasangan kelinci dari bulan ke bulan adalah 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Setiap bilangan adalah jumlah dua bilangan sebelumnya!

DEFINISI

Barisan Fibonacci dimulai dengan $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$. Setiap suku berikutnya adalah jumlah dua suku sebelumnya:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Hasilnya: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Setiap persegi baru bersisi jumlah sisi dua persegi sebelumnya, jadi semuanya pas.

8 : 5 = 1,6 13 : 8 = 1,625

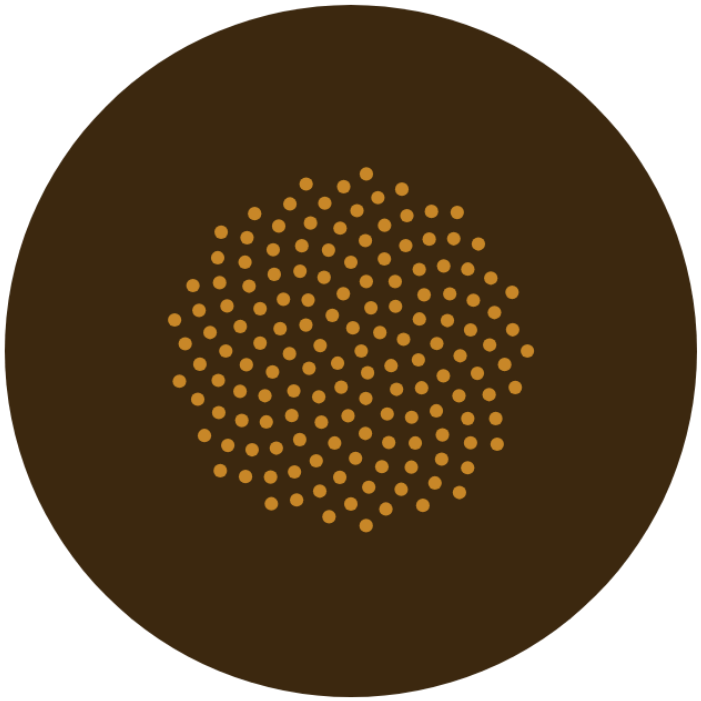
21 : 13 ≈ 1,615 → φ ≈ 1,618

Persegi-persegi Fibonacci menyusun persegi panjang 21 × 13. Busur seperempat lingkaran di setiap persegi membentuk spiral yang mirip cangkang siput.

Coba hitung spiral pada **nanas**, sisik buah pinus, atau biji **bunga matahari**. Kamu sering menemukan dua bilangan Fibonacci berurutan, misalnya 8 dan 13 pada nanas, atau 34 dan 55 pada bunga matahari. Banyak bunga juga berkelopak 3, 5, atau 8. Tidak selalu, tetapi cukup sering sehingga para ilmuwan menelitinya sungguh-sungguh. Rahasianya ada pada **sudut putar** setiap biji baru.

LAB MINI **Bunga matahari: putar, tumbuh, putar lagi**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1



Aturan tumbuh

biji ke-k diputar k × θ
dan sedikit menjauh dari pusat

θ = 137,5°

= 0,3819 putaran

Sudut emas!

Tidak ada biji yang berbaris lurus, jadi tak ada ruang terbuang.

sudut emas = 360° × (1 − 1/φ)
≈ 137,508°

putaran per biji	Pola	biji tumbuh
0,3819	spiral Fibonacci, rapat merata	149

Setiap biji baru diputar sebesar sudut θ dari biji sebelumnya. Mulailah dari **135°**: biji berbaris di 8 jari-jari dengan celah kosong. Lalu tekan **Sudut emas**. Pilih "Warnai spiral" 21, 34, atau 55, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat bunga tumbuh.

Bahasa sederhana · Bayangkan kamu menaruh biji satu per satu sambil berputar. Kalau putarannya "pecahan sederhana" seperti setengah atau sepertiga putaran, biji-biji akan menumpuk di jalur yang sama dan menyisakan ruang kosong. Sudut emas adalah putaran yang paling "tidak sederhana", jadi biji menyebar rata dan bunga bisa memuat biji sebanyak-banyaknya.

Sekarang bagi setiap bilangan Fibonacci dengan bilangan sebelumnya: $2:1=2$, $3:2=1{,}5$, $5:3\approx 1{,}667$, $8:5=1{,}6$, $13:8=1{,}625$, … Hasilnya bergoyang naik-turun, tetapi makin dekat ke bilangan istimewa yang disebut **rasio emas**:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

Hebatnya, kamu boleh memulai dengan **dua bilangan apa saja**. Asalkan setiap suku adalah jumlah dua suku sebelumnya, rasionya tetap menuju φ. Buktikan sendiri:

GRAFIK HIDUP

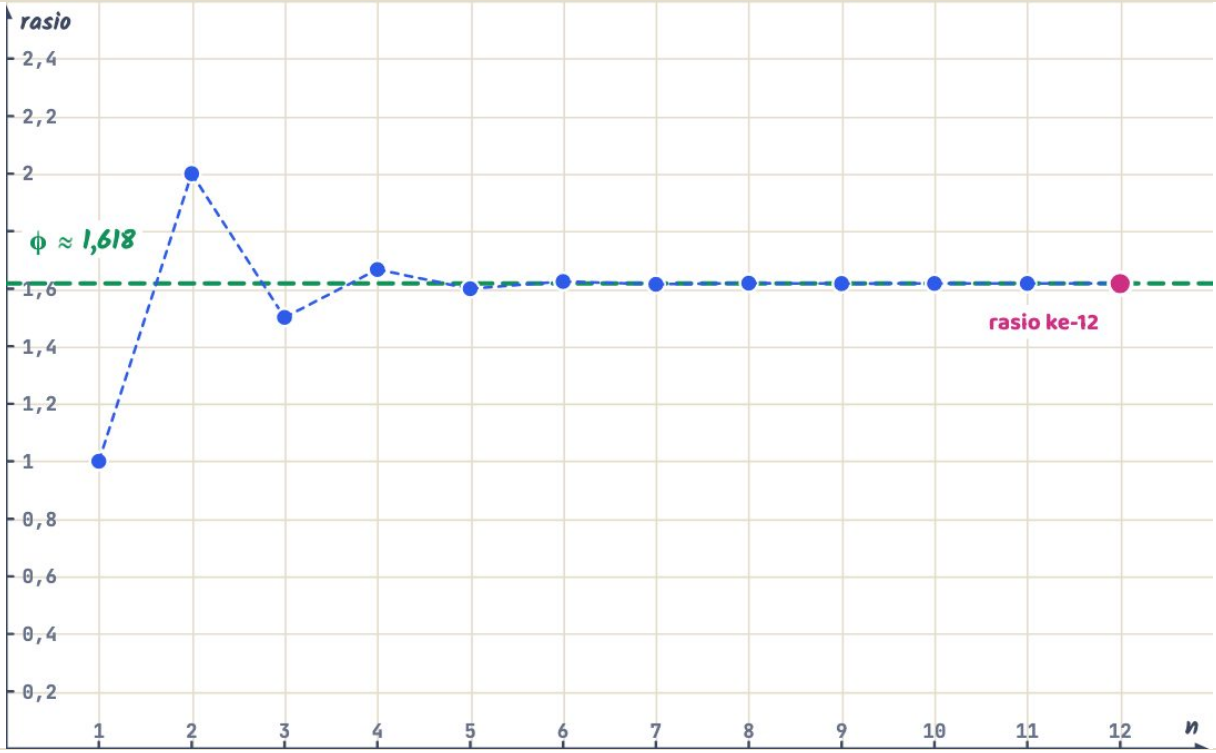
Dua bilangan apa saja menuju rasio emas

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1

$$G_1 = a,\ G_2 = b,\ G_{n+1} = G_n + G_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{G_{n+1}}{G_n} \to \varphi$$

$$\frac{G_{N+1}}{G_N} = \frac{233}{144} \approx 1{,}618056$$

Setiap titik biru adalah rasio dua suku berurutan. Seberapa liar pun awalnya, titik-titik itu akhirnya merapat ke garis hijau ϕ.



barisan Fibonacci asli: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

✨ **selisihnya dengan ϕ kurang dari 0,0001!**

suku ke-N	rasio ke-N	selisih dengan ϕ
144	1,618056	$2{,}156681 \times 10^{-5}$

Pilih $a = 20$ dan $b = 1$: rasio pertamanya liar sekali (20 lalu turun drastis), tetapi lihat apa yang terjadi setelah beberapa langkah. Coba juga $a = 2, b = 1$ (barisan Lucas).

KERJAKAN BERSAMA

Naik tangga ala Fibonacci

Di rumah Ayu ada tangga dengan 10 anak tangga. Sekali melangkah, Dimas boleh naik 1 atau 2 anak tangga. Ada berapa cara berbeda untuk sampai di puncak?

1. Coba kasus kecil dulu. Untuk 1 anak tangga: 1 cara. Untuk 2 anak tangga: 2 cara (1+1 atau 2). Untuk 3 anak tangga: 3 cara (1+1+1, 1+2, 2+1).

2. Langkah terakhir menuju anak tangga ke-n pasti berasal dari anak tangga ke-$(n-1)$ (naik 1) atau ke-$(n-2)$ (naik 2). Jadi banyak cara $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$: aturan Fibonacci!

3. Lanjutkan: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Anak tangga ke-10 memberi 89 cara.

Ada 89 cara. Fibonacci muncul bukan karena kelinci atau bunga, melainkan karena aturan "jumlah dua sebelumnya" muncul dengan sendirinya.

TAMU DARI MASA LALU

Fibonacci bukan penemu pertama barisan ini. Berabad-abad sebelumnya, para ahli tembang di India (misalnya Virahanka, sekitar abad ke-7) sudah menemukannya ketika menghitung banyak cara menyusun ketukan pendek (1 ketuk) dan panjang (2 ketuk) dalam sebuah larik puisi, persis seperti soal naik tangga di atas! Jasa terbesar buku Fibonacci justru memperkenalkan angka Hindu-Arab (0 sampai 9) ke para pedagang Eropa. Nama "barisan Fibonacci" sendiri baru populer pada abad ke-19.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RUMUS BINET: FIBONACCI TANPA MENJUMLAH

Bilangan $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ adalah kedua akar persamaan $x^2 = x + 1$. Karena $\varphi^2 = \varphi + 1$ dan $\psi^2 = \psi + 1$, barisan φ^n dan ψ^n mematuhi aturan Fibonacci yang sama. Dengan menyesuaikan dua suku pertama, diperoleh **rumus Binet**:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Dua bilangan irasional menghasilkan bilangan bulat! Karena $|\psi| < 1$, suku ψ^n cepat mengecil, sehingga F_n adalah bilangan bulat terdekat ke $\varphi^n/\sqrt{5}$. Itulah sebabnya $F_{n+1}/F_n \to \varphi$.

RUMUS HIDUP

Rumus Binet: Fibonacci dari akar 5

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

ϕ = (1 + √5)/2 dan ψ = (1 − √5)/2 dipangkatkan n, dikurangkan, lalu dibagi √5. Hasilnya selalu bilangan Fibonacci yang bulat.

n Suku ke-n

F_n Bilangan Fibonacci

BILANGAN FIBONACCI

55

✨ **hasilnya bulat!**

ϕ pangkat **10** ≈ **122,992** dan ψ pangkat **10** ≈ **0,008**. Selisihnya dibagi √5 tepat **55**. Perhatikan: ψ pangkat n sangat kecil, jadi ϕ pangkat n dibagi √5 ≈ **55,004** tinggal dibulatkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINET-FIBONACCI

1.4 Empat langkah Polya: resep memecahkan masalah

Bagaimana matematikawan menghadapi soal yang belum pernah mereka lihat? Mereka **tidak** langsung tahu jawabannya! Mereka mencoba, keliru, mencoba lagi, dan memakai sebuah "resep". Resep paling terkenal ditulis oleh George Pólya dalam empat langkah.



Empat langkah Polya. Panah putus-putus mengingatkan bahwa memecahkan masalah jarang lurus dari awal sampai akhir.

TAMU DARI MASA LALU

George Pólya (1887–1985) adalah matematikawan kelahiran Hungaria yang lama mengajar di Swiss dan Amerika Serikat. Pada tahun 1945 ia menerbitkan buku *How to Solve It* ("Bagaimana Memecahkannya") yang terjual lebih dari sejuta eksemplar dan diterjemahkan ke banyak bahasa. Pesannya sederhana: memecahkan masalah adalah keterampilan yang bisa dilatih, seperti berenang atau bermain gitar.

KERJAKAN BERSAMA

Pesta jabat tangan

Sepuluh anggota kelompok belajar saling berjabat tangan. Setiap orang berjabat tangan tepat satu kali dengan setiap orang lainnya. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi?

1. **Pahami.** Ada 10 orang. Jabat tangan Ayu–Dimas sama dengan Dimas–Ayu, jadi hanya dihitung sekali.

2. **Rencanakan.** Sepuluh orang terlalu banyak untuk digambar. Coba *kasus kecil* dan cari polanya: 2 orang → 1, 3 orang → 3, 4 orang → 6, 5 orang → 10.

3. **Laksanakan.** Polanya 1, 3, 6, 10: bilangan segitiga! Orang ke-2 menjabat 1 orang yang sudah ada, orang ke-3 menjabat 2 orang, dan seterusnya. Untuk 10 orang: $1 + 2 + \cdots + 9 = T_9 = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45$.

4. **Periksa.** Cara lain: setiap orang menjabat 9 tangan, jadi $10 \times 9 = 90$. Tetapi setiap jabat tangan terhitung dua kali (sekali oleh tiap orang), jadi $90 : 2 = 45$. ✓

Ada 45 jabat tangan. Strategi "coba kasus kecil" membuka pola, dan cara kedua memastikan jawabannya.

Strategi	Kapan dipakai	Contoh di bab ini
Coba kasus kecil	Angkanya terlalu besar untuk langsung dihitung.	Jabat tangan 2, 3, 4 orang dulu.
Buat tabel	Ada beberapa nilai yang berubah bersamaan.	Tabel daerah dalam lingkaran (1.5).
Gambar	Soal bercerita tentang bentuk, susunan, atau rute.	Tangga kotak untuk bilangan segitiga.
Cari pola	Hasil kasus kecil tampak teratur.	1, 3, 6, 10 adalah bilangan segitiga.
Bekerja mundur	Keadaan akhirnya diketahui, awalnya dicari.	Langkah terakhir naik tangga: dari $n-1$ atau $n-2$.
Tebak dan uji	Jawabannya bilangan bulat dalam rentang kecil.	$n(n-1)=132$, coba $n=12$.

Bahasa sederhana · Ringkasnya: **baca baik-baik**, **pilih cara**, **kerjakan pelan-pelan**, lalu **cek lagi**. Kalau macet, kecilkan dulu soalnya. Hampir semua matematikawan melakukannya, termasuk yang paling hebat.



TRIK KAK LINTANG: KECILKAN DULU

Soal tentang 100 orang, 1000 lampu, atau papan 8 × 8 sering terasa menakutkan. Ganti dulu angkanya dengan 2, 3, dan 4, kerjakan dengan tangan, lalu cari polanya. Setelah polanya ketemu, baru kembali ke angka besar. Kak Lintang menyebutnya "mengecilkan gajah supaya muat di saku".



MATEMATIKA NUSANTARA

Congklak (dakon) adalah permainan berhitung dari Nusantara. Dalam aturan yang umum dimainkan, setiap pemain memiliki 7 lubang kecil yang masing-masing berisi 7 biji, ditambah satu lubang besar (lumbung). Jadi ada $2 \times 7 \times 7 = 98$ biji di papan berlubang 16. Saat menebar biji, lumbung lawan dilewati, sehingga satu putaran penuh hanya 15 lubang. Pemain jago diam-diam menghitung: "Lubang ini berisi 9 biji, berarti biji terakhir jatuh di lubang mana?" Itulah strategi Polya dalam permainan tradisional!

COBA SENDIRI **Berburu persegi di lantai teras**

Lantai teras rumah Ayu berupa ubin 5 × 5. Berapa banyak persegi, dari semua ukuran, yang bisa kamu temukan pada garis-garis ubin itu?

1. **Kasus kecil.** Ubin 1 × 1: 1 persegi. Ubin 2 × 2: 4 persegi kecil + 1 persegi besar = 5. Ubin 3 × 3: 9 + 4 + 1 = 14.
2. **Pola.** Untuk ubin $n \times n$, persegi berukuran $k \times k$ bisa diletakkan di $(n-k+1)^2$ posisi. Jadi totalnya $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.
3. **Untuk 5 × 5:** $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$.

Ada 55 persegi. Tantangan: dengan cara yang sama, papan catur 8 × 8 menyimpan 204 persegi. Coba buktikan!

1.5 Menebak, menguji, membuktikan

Penemuan matematika biasanya berjalan dalam tiga tahap. Pertama, kita **menebak** sebuah pola dari beberapa contoh; tebakan seperti ini disebut **dugaan** (konjektur). Kedua, kita **menguji** dugaan itu dengan contoh-contoh baru. Ketiga, kita **membuktikan** bahwa dugaan itu benar untuk *semua* kasus. Dugaan yang sudah terbukti naik pangkat menjadi **teorema**.

Contoh: jumlahkan bilangan ganjil berturut-turut dari 1.

$$1 = 1, \quad 1+3 = 4, \quad 1+3+5 = 9, \quad 1+3+5+7 =$$

Tebak: hasilnya selalu bilangan persegi, n^2. **Uji:** sepuluh bilangan ganjil pertama, $1 + 3 + \cdots + 19 = 100 = 10^2$. Cocok lagi! Tetapi sepuluh contoh belum tentu berlaku untuk sejuta contoh. Kita butuh **bukti**. Lihatlah kotak-kotak ini tumbuh:



1 = 1 = 1²

Mulai dari satu kotak.

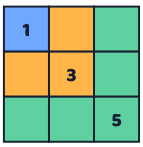
Langkah 1. Mulailah dengan satu kotak: $1 = 1^2$.



1 + 3 = 4 = 2²

Sabuk L berisi 3 kotak memperbesar persegi menjadi 2 × 2.

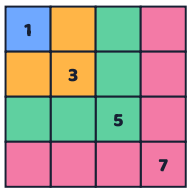
Langkah 2. Tambahkan sabuk berbentuk L berisi 3 kotak. Persegi tumbuh menjadi 2×2: $1 + 3 = 2^2$.



1 + 3 + 5 = 9 = 3²

Sabuk berikutnya berisi 5 kotak: 3 di sisi kanan, 3 di bawah, pojoknya dipakai bersama.

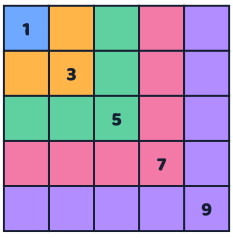
Langkah 3. Sabuk berikutnya berisi 5 kotak, dan persegi menjadi 3×3: $1 + 3 + 5 = 3^2$.



1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4²

Setiap sabuk baru berisi 2 kotak lebih banyak: bilangan ganjil berikutnya!

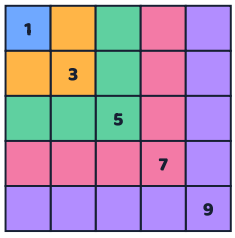
Langkah 4. Sabuk 7 kotak menghasilkan 4×4. Setiap sabuk baru selalu 2 kotak lebih banyak: itulah bilangan ganjil berikutnya.



1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5²

Lima bilangan ganjil pertama menyusun persegi 5 × 5.

Langkah 5. Sabuk 9 kotak menghasilkan $5 \times 5 = 25$.



Berlaku untuk semua n!

Gambar ini adalah bukti, bukan sekadar contoh.

sabuk ke-n: n + (n − 1) = 2n − 1 kotak

1 + 3 + … + (2n − 1) = n²

Langkah 6. Untuk memperbesar persegi $(n-1) \times (n-1)$ menjadi $n \times n$, sabuknya berisi $n + (n-1) = 2n - 1$ kotak, selalu bilangan ganjil ke-n. Jadi $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ untuk **setiap** n.

TEOREMA JUMLAH BILANGAN GANJIL

Jumlah n bilangan ganjil pertama sama dengan n^2:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Bukti aljabar (memakai bilangan segitiga)

Bilangan ganjil ke-k adalah $2k - 1$. Jadi

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \cdots + (2n - 1) = 2(1 + 2 + \cdots + n) - n.$$

Dengan rumus bilangan segitiga, $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$. Terbukti! Dua bukti yang sangat berbeda (gambar dan aljabar) sampai pada kesimpulan yang sama.

RUMUS HIDUP **Jumlah n bilangan ganjil pertama**

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = S_n = n^2$$

Setiap bilangan ganjil adalah satu sabuk L yang memperbesar persegi satu ukuran. n sabuk = persegi n × n.

n Banyak bilangan ganjil buah

S_n Jumlahnya

JUMLAHNYA

25

1 + 3 + 5 + ... + **9** = **25**. Bilangan ganjil terakhirnya **9**, dan persegi **5** × **5** berisi tepat **25** kotak.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-GANJIL

Apakah setiap pola yang "kelihatan benar" pasti benar? Tebak dulu sebelum mencoba Lab Mini berikutnya!

Tebak Dulu!

Titik-titik diletakkan pada lingkaran, lalu setiap dua titik dihubungkan dengan garis lurus. Dengan 1, 2, 3, 4, 5 titik, lingkaran terbagi menjadi 1, 2, 4, 8, 16 daerah. Dengan 6 titik, berapa daerah paling banyak?

32, karena polanya selalu dikali 2.

30, karena 6 × 5 = 30.

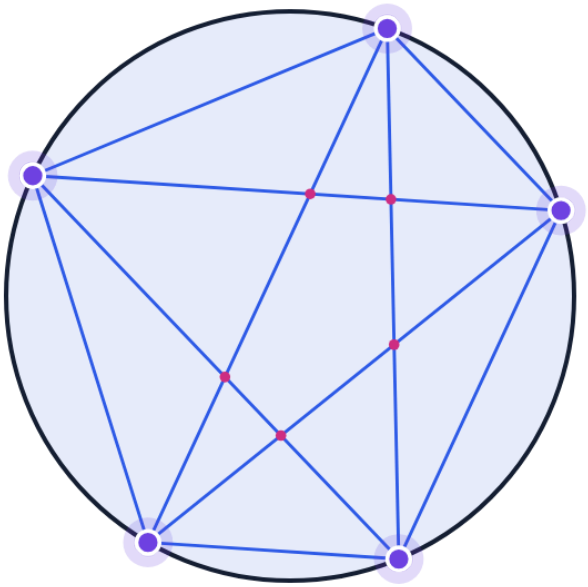
31.

36, karena 6 × 6 = 36.

Jawabannya: 31! Pola "kali dua" yang tampak sempurna untuk lima contoh pertama ternyata patah di contoh keenam. Hitung sendiri di Lab Mini berikut. Pelajarannya sangat penting: lima contoh yang cocok **belum** merupakan bukti.

LAB MINI **Potong martabak bundar: berapa daerah?**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1



✋ *seret titik ungu*

Daerah sekarang: 16

n	daerah maks.	tebakan 2^{n-1}
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4	8	8
5	16	16
6	31	32
7	57	64
8	99	128
9	163	256
10	256	512

Sejauh ini pola
"kali dua" cocok...
Coba n = 6!

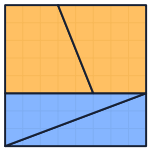
tali busur	titik potong	daerah	tebakan "kali dua"
10	5	16	16

Bayangkan lingkaran ini martabak, dan setiap tali busur adalah potongan pisau. Naikkan banyak titik sampai 6 dan bandingkan dengan tebakan "kali dua". Lalu tekan ⬡ **Beraturan**: mengapa 6 titik beraturan hanya menghasilkan 30 daerah? Seret titik ungu untuk menyelidikinya.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Contoh yang cocok, sebanyak apa pun, belum merupakan bukti. Matematikawan Leonhard Euler menemukan rumus $n^2 + n + 41$ yang menghasilkan bilangan prima untuk $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$: empat puluh contoh berturut-turut! Tetapi untuk $n = 40$ hasilnya $1.681 = 41 \times 41$, bukan bilangan prima.

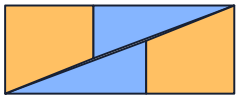
Bahkan gambar pun bisa menipu. Perhatikan teka-teki terkenal ini: sebuah persegi 8×8 dipotong menjadi empat bagian, lalu disusun ulang menjadi persegi panjang 13×5. Padahal $8 \times 8 = 64$, sedangkan $13 \times 5 = 65$. Dari mana datangnya satu kotak tambahan?



8 × 8 = 64 kotak

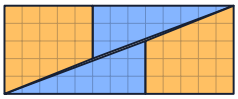
Potong menjadi 2 segitiga (biru) dan 2 trapesium (oranye).

Langkah 1. Persegi 8×8 berisi 64 kotak. Potong menjadi dua segitiga siku-siku (kaki 8 dan 3) dan dua trapesium (sisi sejajar 3 dan 5, tinggi 5).



Segitiga digeser, trapesium diputar seperempat putaran...

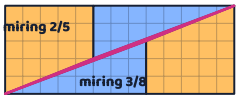
Langkah 2. Geser kedua segitiga dan putar kedua trapesium seperempat putaran. Tidak ada potongan yang dibuang atau ditambah.



13 × 5 = 65 kotak?!

Potongannya sama, tetapi luasnya bertambah satu kotak?

Langkah 3. Hasilnya tampak seperti persegi panjang $13 \times 5 = 65$ kotak. Satu kotak muncul dari udara?



13 × 5 = 65 kotak?!

"Diagonal" itu ternyata bukan garis lurus!
Ada celah tipis berbentuk jajargenjang yang luasnya tepat 1 kotak.

Langkah 4. Rahasianya: kemiringan sisi miring segitiga $\frac{3}{8} = 0{,}375$, sedangkan kemiringan trapesium $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Keduanya hampir sama, tetapi tidak sama, sehingga "diagonal" itu sedikit bengkok dan menyisakan celah setipis rambut seluas tepat 1 kotak.

Mengapa celahnya tepat 1 kotak? (Hubungan dengan Fibonacci)

Perhatikan ukurannya: 3, 5, 8, 13, semuanya bilangan Fibonacci berurutan! Ada sifat ajaib yang disebut **identitas Cassini**: untuk tiga bilangan Fibonacci berurutan, hasil kali kedua bilangan di pinggir selalu berselisih tepat 1 dari kuadrat bilangan di tengah, misalnya $5 \times 13 - 8^2 = 65 - 64 = 1$ dan $8 \times 21 - 13^2 = 168 - 169 = -1$. Secara umum

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Karena selisihnya hanya 1, kemiringan potongan-potongannya hampir sama sehingga mata kita tertipu. Dengan Fibonacci yang lebih besar (misalnya 21 × 21 menjadi 34 × 13), celahnya makin tipis tetapi luasnya tetap 1. Inilah alasan matematikawan tidak puas dengan gambar saja: mereka menghitung kemiringannya.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RUMUS DAERAH DALAM LINGKARAN

Jika tidak ada tiga tali busur yang melalui satu titik, banyak daerahnya adalah

$$R(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

Idenya: mulai dari 1 daerah (lingkaran utuh). Setiap tali busur baru menambah daerah sebanyak 1 ditambah banyak tali busur lama yang dipotongnya. Setiap titik potong ditentukan oleh tepat 4 titik pada lingkaran (dua tali busur yang bersilangan), jadi ada $\binom{n}{4}$ titik potong, dan ada $\binom{n}{2}$ tali busur. Untuk $n = 6$: $15 + 15 + 1 = 31$. Untuk $n = 10$ hasilnya $210 + 45 + 1 = 256 = 2^8$, sebuah kebetulan yang lucu. Kamu akan menguasai notasi $\binom{n}{k}$ di Bab 32.

MITOS

"Matematika itu cuma berhitung."

FAKTA

Berhitung hanyalah alat. Inti matematika adalah menemukan **pola**, menebak aturannya, lalu membuktikan bahwa aturan itu selalu benar.

MITOS

"Kalau polanya cocok untuk lima contoh, pasti benar untuk semua."

FAKTA

Daerah dalam lingkaran 1, 2, 4, 8, 16 berlanjut 31, bukan 32. Rumus Euler cocok 40 kali lalu gagal. Hanya **bukti** yang menjamin kebenaran untuk semua kasus.

MITOS

"Cangkang siput nautilus adalah contoh sempurna rasio emas."

FAKTA

Cangkang nautilus memang berbentuk spiral yang indah, tetapi pengukuran menunjukkan pertumbuhannya umumnya **tidak** mengikuti 1,618. Rasio emas sering ditempelkan pada hal-hal yang sebenarnya tidak cocok.

MITOS

"Orang yang jago matematika langsung tahu jawabannya."

FAKTA

Mereka juga mencoba, keliru, dan mengulang. Bedanya, mereka punya strategi (seperti empat langkah Polya) dan tidak menyerah saat tebakan pertama salah.

1.6 Matematika dalam pekerjaan dan teknologi

Di balik layar ponselmu, di kantor BMKG, sampai di bengkel batik, matematika bekerja diam-diam. Hampir semua pekerjaan memakai siklus yang sama: **amati pola**, **buat model** (aturan atau rumus), lalu **ramalkan** apa yang akan terjadi. Di dunia komputer ada satu kebiasaan berpikir yang sangat penting: **berpikir komputasional**, yaitu

memecah masalah menjadi langkah-langkah kecil yang teratur dan bisa diulang, seperti resep. Contoh paling seru adalah permainan tebak angka.

Tebak Dulu!

Ancil memikirkan satu bilangan dari 1 sampai 1.000. Setiap kali kamu menebak, Ancil hanya menjawab "terlalu besar", "terlalu kecil", atau "benar". Dengan cara paling cerdik, berapa tebakan yang pasti cukup?

- 500 tebakan.
- 100 tebakan.
- 10 tebakan.
- 1.000 tebakan.

Jawabannya: cukup 10! Tebaklah tepat di tengah, yaitu 500. Apa pun jawaban Ancil, separuh kemungkinan langsung tersingkir. Banyak kemungkinan menyusut kira-kira 1.000 → 500 → 250 → 125 → 62 → 31 → 15 → 7 → 3 → 1. Cara "selalu tebak di tengah" ini disebut **pencarian biner**. Sekarang giliran Ancil menebak pikiranmu!

LAB MINI

Ancil menebak pikiranmu

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1



Tebakan ke-1: apakah bilanganmu 50?

Bilanganmu pasti di antara 1 dan 100.

Pikirkan satu bilangan, lalu jawab dengan tombol di bawah.

Seluruh rentang

1 100

Kaca pembesar: kemungkinan yang tersisa

1 tebakan: 50 100

tebakan ke-	kemungkinan tersisa	janji Ancil: paling banyak
1	100	7 tebakan

Pikirkan satu bilangan rahasia, jangan diberitahu! Ancil akan menebak. Jawab dengan tombol **Terlalu besar**, **Terlalu kecil**, atau **Benar!**. Lalu ganti rentangnya menjadi 1 sampai 1.000.000. Hanya butuh berapa tebakan?

Mengapa Ancil selalu menepati janjinya? Dengan 1 tebakan kamu hanya bisa menangani 1 bilangan. Dengan 2 tebakan: tebak di tengah, lalu masih ada 1 bilangan di kiri dan 1 di kanan, jadi 3 bilangan. Dengan 3 tebakan: 7 bilangan. Polanya 1, 3, 7, 15, 31, ...: **kali dua, lalu tambah satu**.

RUMUS HIDUP

Jangkauan tebak angka

$$N = 2^k - 1$$

Setiap tebakan di tengah membuang separuh kemungkinan. Jadi satu tebakan tambahan menggandakan jangkauanmu, lalu ditambah satu.

k Banyak tebakan `kali`

N Rentang yang pasti tertebak `bilangan`

RENTANG YANG PASTI TERTEBAK

127

bilangan

🎯 **1 sampai 100 cukup 7 tebakan**

Dengan **7** tebakan, kamu pasti bisa menemukan bilangan rahasia dari 1 sampai **127**. Satu tebakan lagi, jangkauannya menjadi **255**.

Cek satuan: N adalah banyak bilangan, jadi tanpa satuan ukuran.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEBAK-BINER

DI DUNIA NYATA

Pencarian biner dipakai di mana-mana. Ponselmu memakainya saat mencari nama di daftar kontak yang urut abjad. Kamu memakainya saat membuka kamus tepat di tengah, lalu memilih separuh depan atau belakang. Teknisi listrik memakainya saat mencari titik kabel yang putus: cek bagian tengah dulu, lalu separuh yang rusak saja. Tanpa rumus rumit, cukup satu pola: **bagi dua terus**.

Pembatik & desainer

Merancang motif berarti mengatur simetri: berapa kali cap diulang, diputar, dan dicerminkan agar kain penuh dan rapi.

Prakirawan BMKG

Pola suhu, angin, dan curah hujan selama puluhan tahun diubah menjadi model komputer untuk meramal cuaca esok hari.

Aplikasi ojek & peta

Algoritma mencari rute tercepat dari ribuan kemungkinan jalan, lalu menghitung tarif dari jarak dan waktu tempuh.

Arsitek & insinyur

Rangka atap berbentuk segitiga dan struktur sarang lebah dipakai karena kuat tetapi hemat bahan.

Dokter & apoteker

Dosis obat anak dihitung dari berat badan, dan jadwal minum obat mengikuti pola waktu yang teratur.

Petani & pranata mangsa

Petani Jawa sejak dulu membaca pola musim tahunan dalam kalender pranata mangsa untuk menentukan waktu tanam.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA KOMPUTER MENYUKAI POLA KALI DUA

Komputer menyimpan segala sesuatu sebagai saklar mati-hidup (0 atau 1), yang disebut *bit*. Satu bit punya 2 keadaan, dua bit punya $2 \times 2 = 4$, dan n bit punya 2^n keadaan. Itulah sebabnya kapasitas memori ponsel selalu 32, 64, 128, atau 256 GB. Dengan 10 lampu yang masing-masing boleh menyala atau padam, ada $2^{10} = 1.024$ pola. Tetapi kalau dua lampu bersebelahan tidak boleh sama-sama menyala, banyak polanya menyusut menjadi 144, yang ternyata bilangan Fibonacci. Penasaran mengapa? Kerjakan soal Lv 6 di Tangga Latihan bab ini!

Cek Cepat

Bilangan berikutnya dari barisan 2, 5, 10, 17, 26, ... adalah...

- 35
- 37
- 36
- 52

Nilai $1 + 3 + 5 + \cdots + 19$ adalah...

- 81
- 90
- 100
- 190

Setelah 21, 34, 55, bilangan Fibonacci berikutnya adalah...

76

110

144

89

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. D

Tantangan Rumah: detektif spiral nanas

Bahan: sebuah nanas (boleh juga buah pinus atau bunga matahari), spidol yang bisa dihapus atau potongan selotip, buku catatan.

1. Perhatikan "mata" nanas. Mata-mata itu tersusun dalam baris-baris miring yang melingkar seperti spiral.
2. Pilih satu baris spiral yang miring ke kanan. Tandai mata pertamanya dengan selotip, lalu ikuti barisnya sampai mengelilingi nanas.
3. Hitung ada berapa baris spiral sejajar yang miring ke kanan. Tandai setiap baris supaya tidak terhitung dua kali.
4. Ulangi untuk baris spiral yang miring ke kiri, lalu untuk spiral yang paling curam.
5. Catat ketiga bilangan itu. Mintalah anggota keluarga menghitung ulang (langkah ke-4 Polya: periksa!).

Pertanyaan: Apakah bilangan-bilanganmu termasuk barisan Fibonacci (misalnya 5, 8, dan 13)? Jika tidak, apa kemungkinan penyebabnya: salah hitung, atau memang alam tidak selalu sempurna?

RINGKASAN KILAT

Bab 1 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- memandang matematika sebagai **ilmu tentang pola** dan menemukannya di batik, sarang lebah, dan bunga
- melanjutkan **barisan pola** gambar dan bilangan, serta menghitung **bilangan segitiga** dan **bilangan persegi**
- mengenali **barisan Fibonacci** dan **rasio emas** di alam
- memecahkan masalah dengan **empat langkah Polya**
- membedakan **menebak, menguji, dan membuktikan**, misalnya untuk jumlah bilangan ganjil

Istilah kunci

ilmu tentang pola · Pola · bilangan segitiga · bilangan persegi · barisan · suku · Barisan Fibonacci · rasio emas · dugaan · teorema · berpikir komputasional · pencarian biner

Rumus penting

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bilangan segitiga. Dua tangga yang sama membentuk persegi panjang n × (n + 1). Satu tangga = setengahnya.

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Rumus Binet: Fibonacci dari akar 5. ϕ = (1 + √5)/2 dan ψ = (1 − √5)/2 dipangkatkan n, dikurangkan, lalu dibagi √5. Hasilnya selalu bilangan Fibonacci yang bulat.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = S_n = n^2$$

Jumlah n bilangan ganjil pertama. Setiap bilangan ganjil adalah satu sabuk L yang memperbesar persegi satu ukuran. n sabuk = persegi n × n.

$$N = 2^k - 1$$

Jangkauan tebak angka. Setiap tebakan di tengah membuang separuh kemungkinan. Jadi satu tebakan tambahan menggandakan jangkauanmu, lalu ditambah satu.

Jangan sampai terjebak

- Dua atau tiga suku saja belum cukup untuk memastikan sebuah pola.
- Contoh yang cocok, sebanyak apa pun, belum merupakan bukti.

Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=1

Teka-teki untuk Bab 2

Pagi hari di Dieng, termometer menunjukkan suhu −3 °C dan rumput tertutup embun beku. Menjelang siang, suhu naik 5 °C. Dimas yakin suhunya sekarang 8 °C, sedangkan Ayu bilang 2 °C. Siapa yang benar? Petunjuk dari pola: kalau kamu menghitung mundur 3, 2, 1, 0, … bilangan apa yang datang sesudah 0?

▼ Intip petunjuk

Bayangkan termometer sebagai garis bilangan yang berdiri tegak. Dari −3, naik 3 langkah sampai 0, lalu naik 2 langkah lagi. Pola hitung mundur 3, 2, 1, 0 berlanjut ke −1, −2, −3, …: itulah **bilangan negatif**. Di Bab 2 kamu akan belajar menjumlah, mengurang, bahkan mengalikan bilangan negatif, termasuk alasan mengapa negatif kali negatif hasilnya positif.

BAB 2 · BILANGAN

02 Bilangan Bulat: Petualangan di Bawah Nol

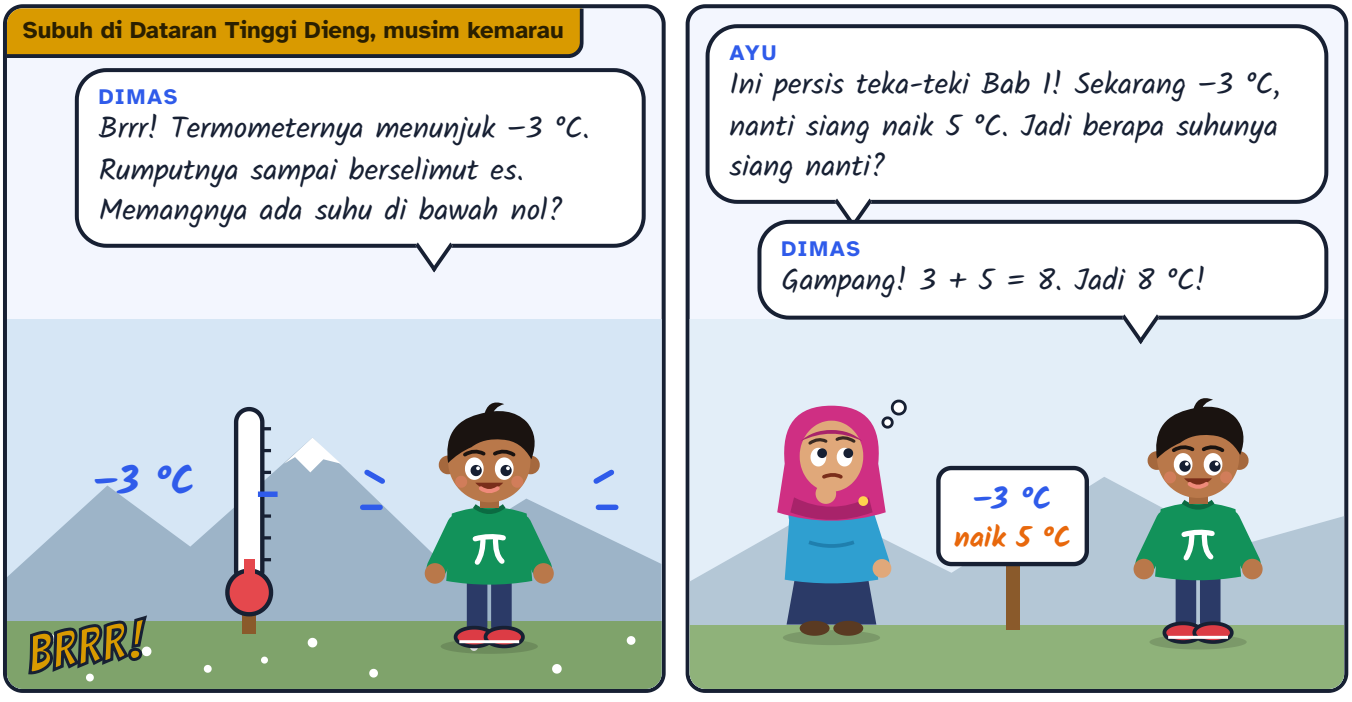
Subuh di Dieng, termometer menunjuk −3 °C. Di Laut Banda, dasar laut berada ribuan meter di bawah permukaan. Bagaimana caranya berhitung dengan bilangan yang "lebih kecil daripada nol"? Ayo melompat ke sisi kiri garis bilangan!

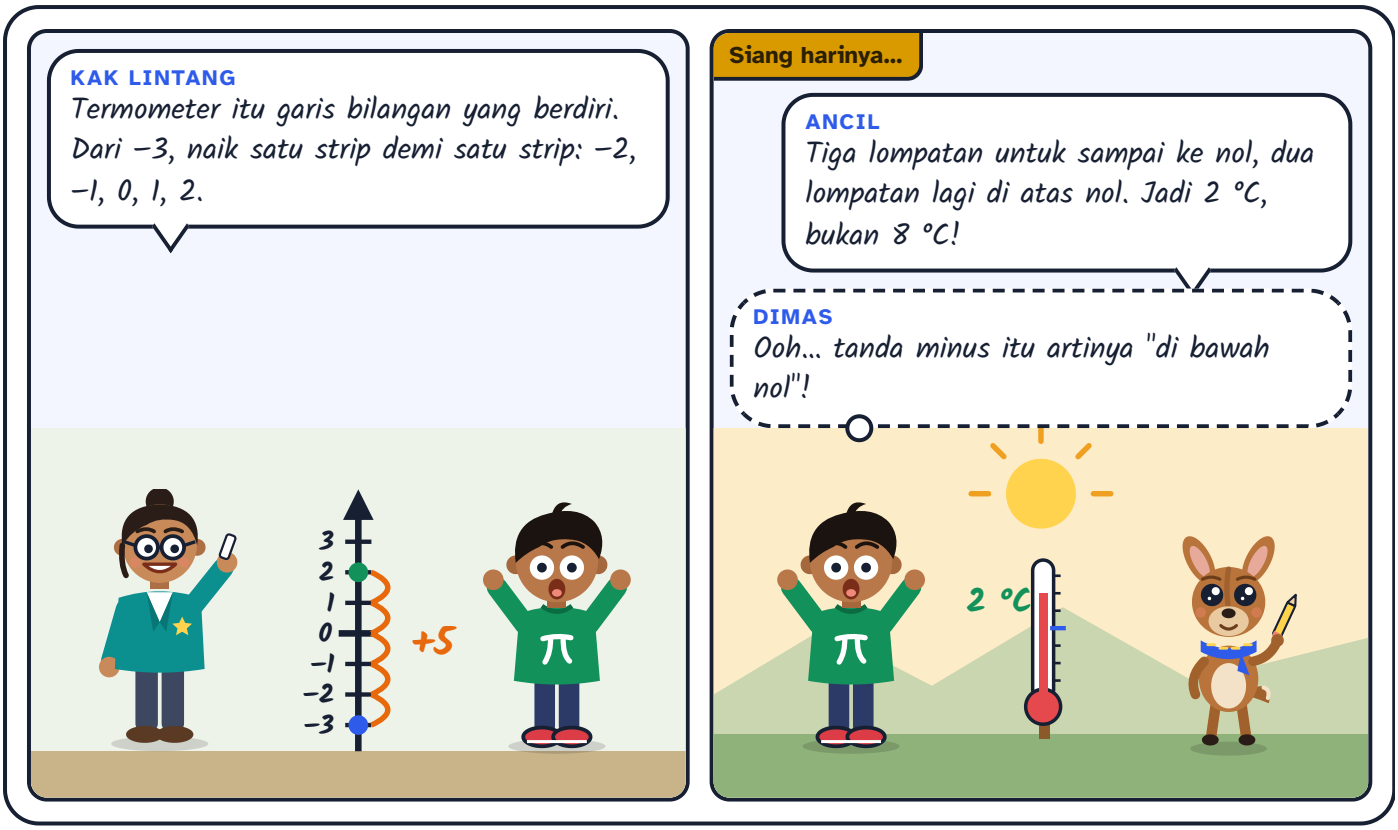
Setelah bab ini, kamu bisa

- menempatkan dan membandingkan **bilangan bulat** pada garis bilangan, termasuk bilangan negatif;
- menjumlahkan dan mengurangkan bilangan bulat dengan **lompatan katak** dan **koin pasangan nol**;
- menjelaskan mengapa **negatif × negatif = positif** dan memakai aturan tanda;
- menghitung soal campuran dengan **urutan operasi** yang benar;
- memakai **nilai mutlak** untuk menghitung jarak, selisih suhu, dan selisih ketinggian.

EMBUN BEKU DI DIENG

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Mana yang lebih besar: -2 atau -10?

- -10, karena 10 lebih besar daripada 2.
- -2.
- Sama besar, karena keduanya negatif.
- Tidak bisa dibandingkan.

Jawabannya: -2. Bayangkan termometer: −2 °C jauh lebih hangat daripada −10 °C, jadi letaknya lebih tinggi. Pada garis bilangan, -2 berada di sebelah kanan -10, dan yang lebih kanan selalu lebih besar. Untuk bilangan negatif, makin besar angka di belakang tanda minus, makin *kecil* bilangannya.

2.1 Garis bilangan: rumah bagi bilangan negatif

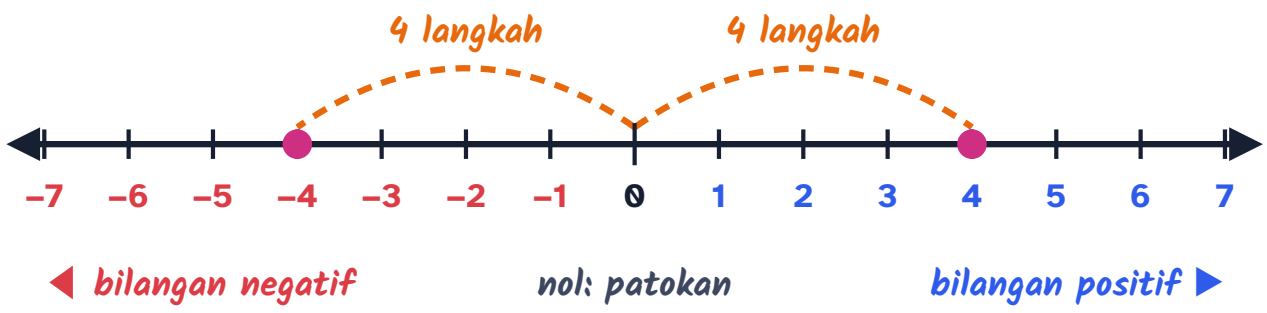
Bayangkan termometer yang direbahkan. Angka 0 di tengah. Ke kanan ada 1, 2, 3, ... yang makin hangat. Ke kiri ada −1, −2, −3, ... yang makin dingin. Inilah **garis bilangan**: setiap bilangan punya tempat, dan jarak antara dua bilangan yang berurutan selalu sama.

DEFINISI

Bilangan bulat adalah bilangan 0, bilangan asli 1, 2, 3, ..., dan lawan-lawannya −1, −2, −3, ... Himpunannya ditulis $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

- Bilangan di kanan 0 disebut **bilangan bulat positif**; di kiri 0 disebut **bilangan bulat negatif**. Nol tidak positif dan tidak negatif.
- Dua bilangan yang jaraknya ke 0 sama tetapi letaknya berseberangan, misalnya 4 dan −4, disebut saling **lawan**. Jumlah sebuah bilangan dengan lawannya selalu 0.

−4 dan 4 saling berlawanan: jaraknya ke 0 sama



Makin ke kanan, makin besar. Bilangan dan lawannya seperti bayangan cermin dengan 0 sebagai cerminnya.

Bahasa sederhana · Gampangnya: tanda minus di depan angka artinya "di bawah nol" atau "kurang dari nol". Suhu −3 °C artinya 3 derajat di bawah nol. Utang Rp 5.000 bisa ditulis −5.000, karena uangmu "kurang dari kosong".

Bilangan negatif muncul di banyak tempat: suhu di puncak Jayawijaya, utang di warung, lantai bawah tanah di mal, dan kedalaman laut. Semuanya memakai titik nol sebagai patokan: titik beku air, saldo kosong, lantai dasar, atau permukaan laut. Lihat garis bilangan tegak berikut, dari dasar laut terdalam di Indonesia sampai puncak gunung tertingginya.



Garis bilangan tegak (tidak sesuai skala). Permukaan laut menjadi titik nol. Dari dasar Palung Weber sampai Puncak Jaya terbentang sekitar 12 km!

SIFAT URUTAN

Pada garis bilangan, bilangan yang letaknya **lebih ke kanan selalu lebih besar**. Akibatnya:

- setiap bilangan positif lebih besar daripada 0, dan 0 lebih besar daripada setiap bilangan negatif;
- di antara dua bilangan negatif, yang lebih dekat ke 0 lebih besar: $-2 > -10$ dan $-99 < -1$.

AWAS JEBAKAN

Bilangan negatif yang angkanya lebih besar justru lebih kecil. $-10 < -2$, sama seperti −10 °C lebih dingin daripada −2 °C. Jangan membandingkan angkanya saja; lihatlah letaknya pada garis bilangan.

MATEMATIKA NUSANTARA

Tukang bangunan di Indonesia menulis ketinggian lantai dengan **peil** (dibaca "pil"). Lantai utama rumah diberi tanda **±0,00** sebagai titik nol. Teras yang 15 cm lebih rendah ditulis **−0,15**, dan lantai kamar mandi biasanya dibuat sedikit lebih rendah, misalnya **−0,05**, agar air tidak mengalir ke kamar lain. Di jalur pendakian, papan bertuliskan "**mdpl**" (meter di atas permukaan laut) memakai laut sebagai titik nol. Dua-duanya adalah garis bilangan tegak yang dipakai setiap hari!

2.2 Menjumlah dan mengurang: lompat katak dan koin pasangan nol

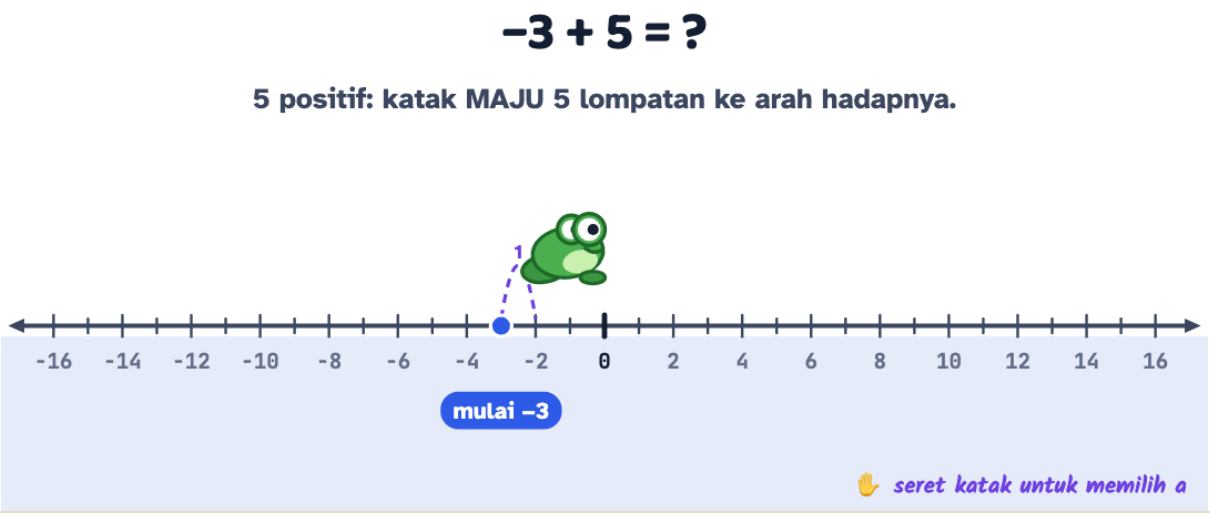
Penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat bisa dibayangkan sebagai seekor katak yang melompat di garis bilangan. Katak itu mula-mula berdiri di bilangan pertama dan menghadap ke kanan (arah positif). Aturannya hanya dua:

- **Tanda operasi menentukan arah hadap.** Tanda + berarti tetap menghadap ke kanan; tanda – berarti katak **berbalik** menghadap ke kiri.
- **Tanda bilangan kedua menentukan cara melangkah.** Bilangan positif berarti **maju**; bilangan negatif berarti **mundur** (melompat ke belakang).

Contoh $-3 + 5$: katak berdiri di –3, menghadap ke kanan, lalu maju 5 lompatan dan mendarat di 2. Itulah jawaban teka-teki suhu Dieng! Sekarang coba sendiri.

LAB MINI **Katak pelompat di garis bilangan**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2



Kalimat	Katak menghadap	Cara melompat	Mendarat di
-3 + 5 = ?	kanan →	maju 5	…

Atur a, operasi, dan b, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Kamu juga bisa menyeret katak untuk memilih posisi awal. Coba $4 - (-3)$: katak berbalik ke kiri, lalu mundur… ke mana ia mendarat? Bandingkan dengan $4 + 3$.

RUMUS HIDUP **Suhu akhir**

$$T = T_0 + \Delta T$$

Suhu akhir sama dengan suhu awal ditambah perubahannya. Suhu naik berarti perubahannya positif; suhu turun berarti perubahannya negatif.

T_0 Suhu awal °C | ΔT Perubahan suhu °C | T Suhu akhir °C



Mulai dari **-3** °C, lalu **naik 5** °C. Suhu akhirnya **2** °C, **di atas titik beku air.**

Cek satuan: suhu awal, perubahan suhu, dan suhu akhir memakai satuan yang sama, yaitu °C.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUHU-AKHIR

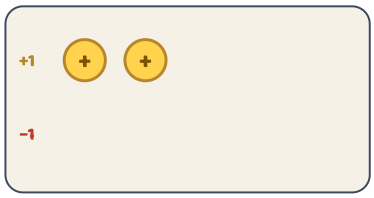
Cara kedua memakai koin. **Koin kuning bernilai +1** dan **koin merah bernilai –1**. Sekeping kuning dan sekeping merah bersama-sama bernilai 0; pasangan ini disebut **pasangan nol**. Menambah atau membuang pasangan nol tidak mengubah nilai, seperti menambah 0.

Tebak Dulu!

Berapa hasil $2 - (-3)$?

- -1
- 5
- -5
- 1

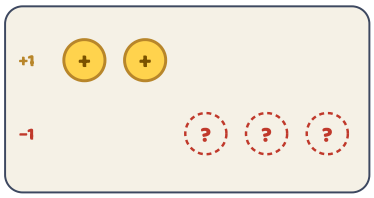
Jawabannya: 5. Mengurangi –3 berarti "mengambil utang 3". Kalau utangmu diambil (dihapus), kamu justru makin kaya: $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$. Lihat buktinya dengan koin di bawah ini.



Nampan berisi 2 koin kuning.

Nilainya: 2

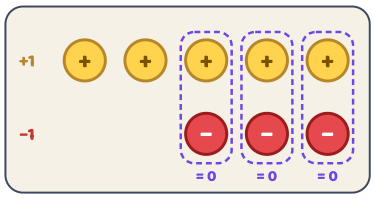
Langkah 1. Nampan berisi 2 koin kuning, jadi nilainya 2.



Perintahnya:
ambil 3 koin merah.

Padahal di nampan tidak ada koin merah!

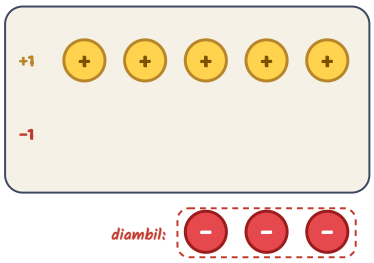
Langkah 2. Kita harus **mengambil** 3 koin merah (yaitu mengurangi -3). Masalahnya, tidak ada satu pun koin merah di nampan!



Tambah 3 pasangan nol.

Nilainya tetap 2, karena setiap pasangan kuning + merah = 0.

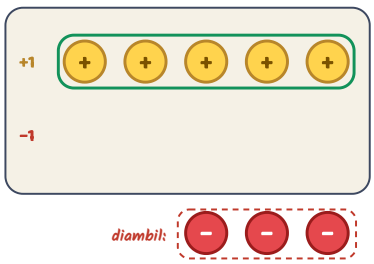
Langkah 3. Tambahkan 3 pasangan nol (3 kuning + 3 merah). Nilai nampan tidak berubah, tetap 2, karena setiap pasangan bernilai 0.



Sekarang ambil
3 koin merah.

Yang tersisa hanya koin kuning.

Langkah 4. Sekarang ada 3 koin merah. Ambil ketiganya.



Sisa 5 koin kuning:

2 − (−3) = 5

sama dengan 2 + 3

Langkah 5. Tersisa 5 koin kuning: $2-(-3)=5$. Mengambil koin merah sama saja dengan menambah koin kuning. Mengurangi -3 sama dengan menambah 3!

ATURAN PENGURANGAN

Mengurangi sebuah bilangan sama dengan **menambah lawannya**:

$$a-b=a+(-b)$$

Khususnya, $a-(-b)=a+b$. Contoh: $2-(-3)=2+3=5$ dan $-4-6=-4+(-6)=-10$.

LAB MINI **Nampan koin: pasangan nol beraksi**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

3 − (−5) = ?

nilai nampan: 3



Mulai dengan 3: 3 koin kuning.

Kalimat	Nilai nampan	Tahap
3 - (-5) = ?	3	1/4 · mulai

Pilih a, operasi, dan b, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Perhatikan angka "nilai nampan": saat pasangan nol ditambahkan, nilainya tidak berubah sedikit pun. Coba $-3+5$, $3-(-5)$, dan $-2-6$.

TRIK KAK LINTANG

Dua tanda kurang yang berdempetan, $-(-\ldots)$, seperti dua orang yang saling menghapus utang: hasilnya tanda tambah. $7-(-2)=7+2=9$. Sebaliknya, tanda tambah yang berdempetan dengan tanda kurang tetap menjadi kurang: $7+(-2)=7-2=5$.

CONTOH **Malam di puncak Jayawijaya**

Siang hari, suhu di dekat puncak Jayawijaya 4 °C. Menjelang tengah malam, suhunya turun 9 °C. Berapa suhu tengah malam itu?

1. Turun berarti perubahannya negatif: $\Delta T=-9$.
2. $T=4+(-9)$. Katak di 4 menghadap ke kanan, lalu mundur 9 lompatan: 4 lompatan sampai ke 0, lalu 5 lompatan lagi di bawah nol.
3. $T=-5$.

Suhu tengah malam −5 °C, yaitu 5 derajat di bawah titik beku air.

ADU CEPAT **Kurang kilat: ubah jadi tambah!**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

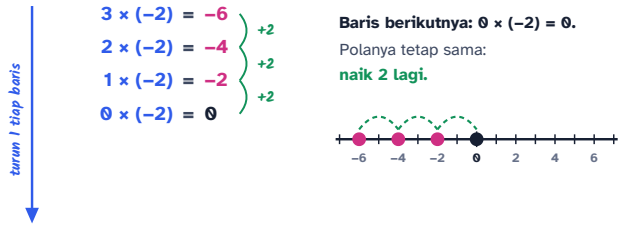
Mengurangi sama dengan menambah lawannya. Contoh: $-4-(-9)=-4+9=5$, sedangkan $-4-9=-13$.

2.3 Perkalian dan pembagian: misteri aturan tanda

Perkalian adalah penjumlahan berulang: $3\times(-4)=(-4)+(-4)+(-4)=-12$. Tiga kali berutang Rp 4.000 berarti berutang Rp 12.000. Lalu bagaimana dengan $(-3)\times(-4)$? Kita tidak bisa "menjumlahkan sebanyak –3 kali". Kita perlu ide lain, yaitu **pola**.



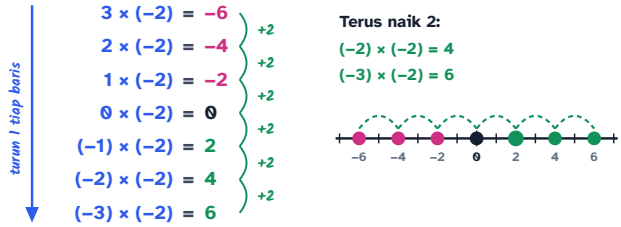
Langkah 1. Mulai dari yang sudah kita yakini: $3\times(-2)=-6$, $2\times(-2)=-4$, $1\times(-2)=-2$. Setiap kali faktor pertama turun 1, hasilnya **naik** 2.



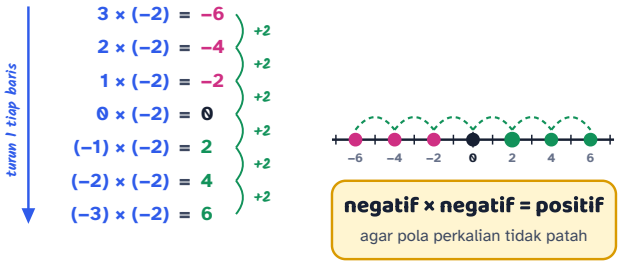
Langkah 2. Baris berikutnya $0\times(-2)=0$. Pola "naik 2" tetap berlaku.



Langkah 3. Sekarang faktor pertama menjadi negatif. Agar polanya tidak tiba-tiba patah, $(-1)\times(-2)$ harus $0+2=2$.



Langkah 4. Lanjutkan: $(-2)\times(-2)=4$ dan $(-3)\times(-2)=6$. Titik-titik hasilnya terus melompat ke kanan.



Langkah 5. Kesimpulan: hasil kali dua bilangan negatif adalah bilangan positif. Bukan aturan sembarangan, melainkan satu-satunya cara agar pola perkalian tetap rapi.

ATURAN TANDA PERKALIAN DAN PEMBAGIAN

Tanda kedua bilangan	Hasil	Contoh perkalian	Contoh pembagian
positif dan positif	**positif**	$3 \times 4 = 12$	$12 : 4 = 3$
negatif dan negatif	**positif**	$(-3) \times (-4) = 12$	$(-12) : (-4) = 3$
positif dan negatif	**negatif**	$3 \times (-4) = -12$	$12 : (-4) = -3$
negatif dan positif	**negatif**	$(-3) \times 4 = -12$	$(-12) : 4 = -3$

Bukti dengan sifat distributif (untuk yang suka aljabar)

Kita tahu apa pun yang dikali 0 hasilnya 0, dan $4 + (-4) = 0$. Dengan sifat distributif:

$$0 = (-3) \times 0 = (-3) \times \big(4 + (-4)\big) = (-3) \times 4 + (-3) \times (-4) = -12 + (-3) \times (-4).$$

Jumlah -12 dengan $(-3) \times (-4)$ sama dengan 0, jadi $(-3) \times (-4)$ adalah lawan dari -12, yaitu 12. Cara yang sama berlaku untuk bilangan negatif apa saja.

Bahasa sederhana · Cara mudah mengingat: **tanda sama** (+ dan +, atau − dan −) hasilnya **positif**; **tanda beda** hasilnya **negatif**.

DUA CERITA DI BALIK ATURAN TANDA

Film diputar mundur. Rekam Dimas yang berjalan mundur (−), lalu putar videonya mundur (−). Di layar, Dimas tampak berjalan maju (+)!

Utang dihapus. Jika Pak RT menghapus (−) tiga catatan utangmu yang masing-masing −Rp 2.000, kamu menjadi Rp 6.000 lebih kaya (+): (−3) × (−2.000) = +6.000.

Ada cara lain melihat aturan tanda: gambarlah tabel perkalian sebagai titik-titik pada bidang koordinat. Semua titik $a \times x$ ternyata berbaris pada satu garis lurus.

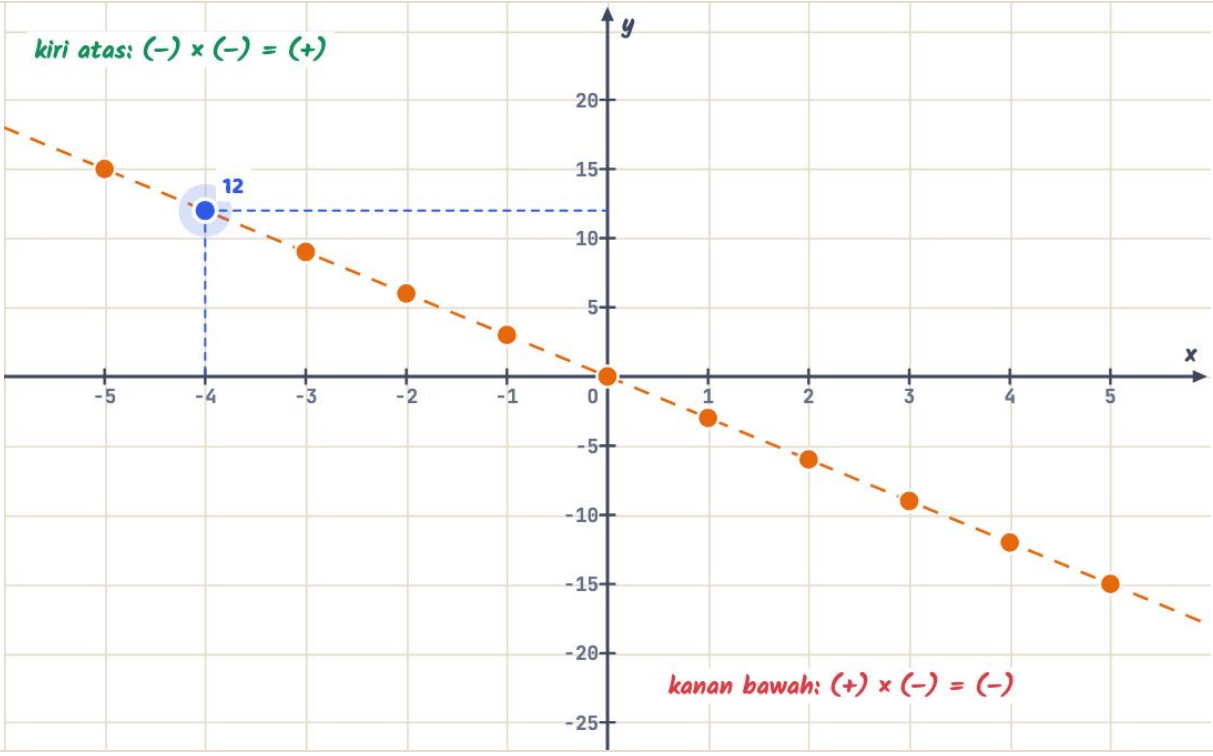
GRAFIK HIDUP **Tabel perkalian yang berubah menjadi garis**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

$$y = a \times x$$

$$(-3) \times (-4) = 12$$

Setiap titik oranye adalah satu baris tabel perkalian a × x, untuk x = −5 sampai 5. Semuanya terletak pada satu garis lurus yang melewati titik 0.



✨ **negatif × negatif = positif**

a × x	Tanda hasil
12	positif

Geser a ke bilangan negatif. Perhatikan sisi kiri grafik (tempat x negatif): titik-titiknya naik ke **atas** sumbu-x. Seret titik biru untuk memilih x. Apa yang terjadi pada garis ketika $a = 0$?

Pembagian adalah kebalikan perkalian. $(-12) : 3 = -4$ karena $3 \times (-4) = -12$, dan $(-12) : (-3) = 4$ karena $(-3) \times 4 = -12$. Karena itu aturan tandanya sama persis dengan perkalian.

MEMBAGI DENGAN NOL? DILARANG!

$6 : 0$ seharusnya bilangan yang jika dikali 0 menghasilkan 6. Tidak ada bilangan seperti itu, karena apa pun yang dikali 0 hasilnya 0. Jadi pembagian dengan nol **tidak terdefinisi**. Sebaliknya, $0 : 6 = 0$ boleh, karena $6 \times 0 = 0$.

TRIK KAK LINTANG

Pada perkalian atau pembagian berderet, hitung saja banyaknya tanda negatif. **Genap** → hasilnya positif; **ganjil** → hasilnya negatif. Contoh: $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) = 24$ (empat tanda negatif), sedangkan $(-2)^5 = -32$ (lima tanda negatif).

KERJAKAN BERSAMA

Freezer dan mesin waktu

Suhu di dalam sebuah *freezer* turun 3 °C setiap jam. Sekarang suhunya –6 °C. Berapa suhunya 2 jam lagi? Berapa suhunya 4 jam yang lalu?

1. Perubahan per jam adalah -3 °C. Waktu ke depan kita tulis positif, waktu ke belakang negatif.
2. 2 jam lagi: perubahannya $(-3) \times 2 = -6$, jadi suhunya $-6 + (-6) = -12$ °C.
3. 4 jam yang lalu: perubahannya $(-3) \times (-4) = 12$, jadi suhunya $-6 + 12 = 6$ °C.
4. Masuk akal? Suhunya terus turun, jadi 4 jam lalu memang lebih hangat: 6 → 3 → 0 → –3 → –6. ✓

2 jam lagi –12 °C; 4 jam yang lalu 6 °C. "Negatif × negatif = positif" di sini berarti memutar waktu mundur.

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 2.000 tahun lalu, kitab Tiongkok *Jiuzhang Suanshu* (Sembilan Bab Seni Berhitung) sudah memakai batang hitung **merah** untuk bilangan positif dan **hitam** untuk bilangan negatif, mirip koin kita. Pada tahun 628 M, matematikawan India **Brahmagupta** menulis aturan bilangan negatif dengan bahasa harta dan utang, misalnya "hasil kali dua utang adalah harta". Ia juga termasuk orang pertama yang memperlakukan nol sebagai bilangan. Di Eropa, bilangan negatif lama dicurigai: pada abad ke-17, René Descartes masih menyebut penyelesaian persamaan yang negatif sebagai "akar palsu".

ADU CEPAT

Aturan tanda kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan angkanya dulu, baru tentukan tandanya: tanda sama → positif, tanda beda → negatif.

2.4 Urutan operasi: siapa yang dikerjakan duluan?

Tebak Dulu!

Ayu dan Dimas menghitung $12 : 3 \times 2$. Ayu mendapat 8, Dimas mendapat 2. Siapa yang benar?

- Dimas, karena kali harus dikerjakan sebelum bagi.
- Ayu, karena kali dan bagi setara dan dikerjakan dari kiri.
- Keduanya benar, tergantung cara masing-masing.
- Keduanya salah, hasilnya 24.

Jawabannya: Ayu. Kali dan bagi sama kuat, jadi dikerjakan urut dari kiri: $12 : 3 = 4$, lalu $4 \times 2 = 8$. Dimas mengalikan 3×2 lebih dulu karena salah paham dengan singkatan "KaBaTaKu".

Bila satu soal memuat beberapa operasi, semua orang harus sepakat tentang urutannya. Kalau tidak, satu soal bisa punya banyak jawaban, dan kalkulator di seluruh dunia akan saling berselisih!

ATURAN URUTAN OPERASI

1. **Kurung** dikerjakan lebih dulu (kurung yang paling dalam lebih dulu).
2. **Pangkat** (dan akar).
3. **Kali dan bagi**: setara, dikerjakan urut dari kiri ke kanan.
4. **Tambah dan kurang**: setara, dikerjakan urut dari kiri ke kanan.

Di Indonesia, langkah 3 dan 4 sering diingat dengan singkatan **KaBaTaKu** (Kali, Bagi, Tambah, Kurang).

TRIK KAK LINTANG

Bayangkan kali dan bagi itu saudara kembar yang sama kuat, begitu pula tambah dan kurang. Saudara kembar tidak saling berebut: siapa yang berdiri lebih kiri, dia duluan. Jadi $12 : 3 \times 2 = 4 \times 2 = 8$, dan $10 - 3 + 2 = 7 + 2 = 9$ (bukan $10 - 5 = 5$).

AWAS JEBAKAN

-3^2 tidak sama dengan $(-3)^2$. Pangkat dikerjakan sebelum tanda minus di depannya, jadi $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$, sedangkan $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$. Kalkulator ilmiah pun membedakan keduanya.

LAB MINI **Mesin urutan operasi**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

$$8 - (-4 + 2) \times (-6)$$
$$= 8 - (-2) \times (-6)$$

Urutan kerja

1 ( ) kurung

2 x^2 pangkat

3 × : dari kiri

4 + - dari kiri

(di dalam kurung)

Langkah	Aturan terakhir	Hasil
1/3	tambah-kurang (dalam kurung)	?

Tebak dulu hasilnya di kertas, lalu tekan ▶ **Jalankan** atau ⏭ **Satu langkah**. Warna sorotan menunjukkan aturan yang dipakai pada setiap langkah. Tekan **Soal baru** dan naikkan tingkatnya kalau sudah lancar.

COBA SENDIRI **Soal berlapis**

Hitunglah $(-2)^3 - 3 \times (4 - 10) : (-2)$**.**

1. Kurung: $4 - 10 = -6$. Soalnya menjadi $(-2)^3 - 3 \times (-6) : (-2)$.
2. Pangkat: $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.
3. Kali-bagi dari kiri: $3 \times (-6) = -18$, lalu $-18 : (-2) = 9$.
4. Terakhir: $-8 - 9 = -17$.

Hasilnya –17. Kalau pengurangan dikerjakan terlalu awal, $(-8 - 3) \times (-6) : (-2)$, kamu akan mendapat –33, jawaban yang keliru.

2.5 Nilai mutlak dan jarak

Kadang kita tidak peduli arah, hanya peduli seberapa jauh. Penyelam di kedalaman 30 m dan burung elang di ketinggian 30 m sama-sama berjarak 30 m dari permukaan laut.

DEFINISI

Nilai mutlak bilangan a, ditulis $|a|$, adalah jarak a ke 0 pada garis bilangan. Karena jarak tidak pernah negatif, $|a| \geq 0$. Contoh: $|7| = 7$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$.
Jarak antara dua bilangan a dan b pada garis bilangan adalah $|a - b|$.

Bahasa sederhana · Nilai mutlak artinya "berapa langkah dari nol", tidak peduli ke kiri atau ke kanan. Jadi, tanda minusnya cukup dibuang: $|-9| = 9$.

RUMUS HIDUP

Jarak dua titik di garis bilangan

$$d = |a - b|$$

Kurangkan kedua bilangan, lalu buang tandanya. Jarak tidak pernah negatif.



Selisihnya a − b = **-11**, dan nilai mutlaknya **11**. Dari a ke b kamu berjalan **11** satuan, arahnya **ke kanan**. Dibalik pun sama: |b − a| = **11**.

Cek satuan: jarak memakai satuan yang sama dengan garis bilangannya (meter, °C, lantai, dan sebagainya).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JARAK-GARIS-BILANGAN

KERJAKAN BERSAMA

Helikopter dan kapal selam

Sebuah helikopter SAR melayang 350 m di atas permukaan laut, tepat di atas kapal selam yang berada 120 m di bawah permukaan laut. Berapa jarak keduanya?

1. Tulis posisinya sebagai bilangan bulat: helikopter $+350$, kapal selam -120.
2. Jarak $= |350 - (-120)| = |350 + 120| = 470$.
3. Cek dengan cara lain: 350 m dari helikopter ke permukaan laut, ditambah 120 m dari permukaan laut ke kapal selam, sama dengan 470 m. ✓

Jaraknya 470 m. Bila tandanya berbeda, jaraknya sama dengan jumlah nilai mutlak keduanya.

AWAS JEBAKAN

$|a - b|$ tidak sama dengan $|a| - |b|$. Jarak dari –4 ke 3 adalah $|-4 - 3| = |-7| = 7$, bukan $|-4| - |3| = 1$. Kurangkan dulu, baru ambil nilai mutlaknya.

LIFT DAN KALENDER YANG TIDAK PUNYA NOL

Di banyak gedung, lantai di atas B1 langsung lantai 1, tanpa lantai 0. Kalender Masehi juga begitu: setelah tahun 1 SM langsung tahun 1 M, tidak ada tahun 0. Akibatnya, dari B2 ke lantai 3 kamu hanya naik 4 lantai, bukan $3 - (-2) = 5$. Dari tahun 5 SM sampai tahun 5 M hanya ada 9 tahun, bukan 10. Rumus $|a - b|$ hanya tepat bila angka nol ikut menjadi satu titik di garis bilangan.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

HALTE TERBAIK DAN MEDIAN

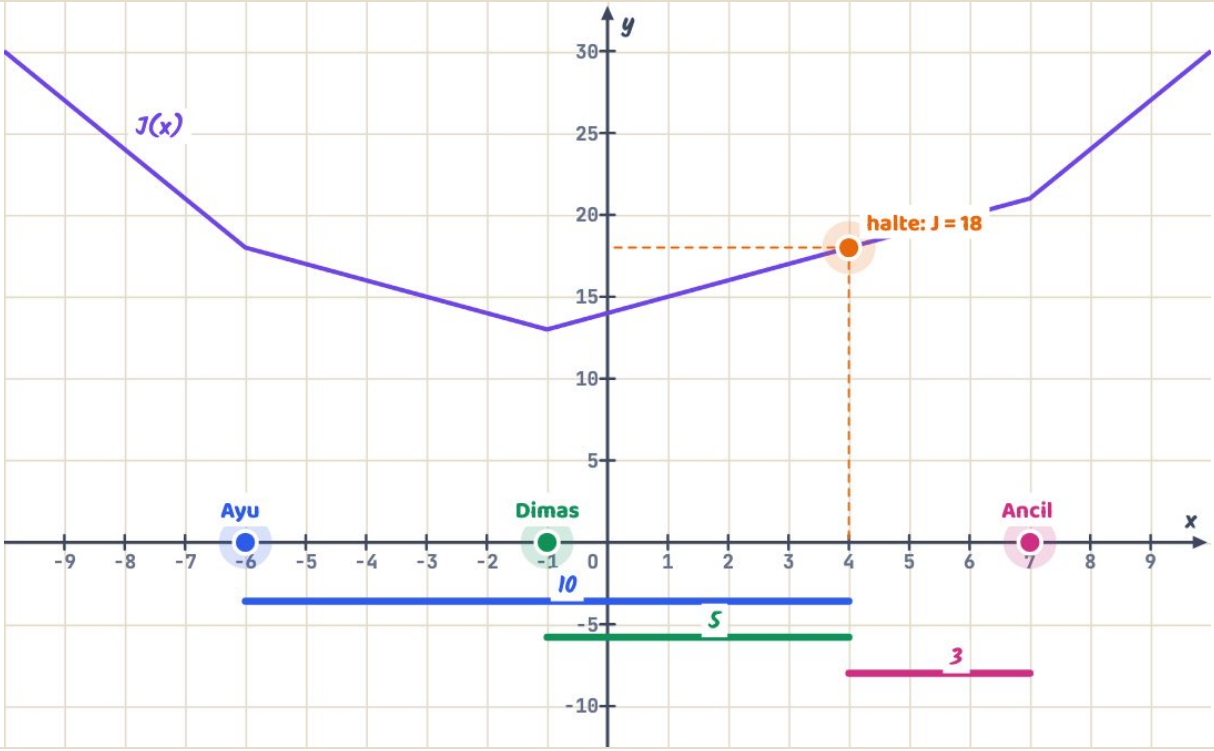
Rumah Ayu, Dimas, dan Ancil berada di titik a, b, dan c pada jalan lurus. Di titik h mana halte angkot sebaiknya dibangun agar total jarak $J = |h - a| + |h - b| + |h - c|$ paling kecil? Jawabannya mengejutkan: tepat di rumah yang letaknya di **tengah** (median), bukan di rata-ratanya! Alasannya: jika halte belum di tengah, menggesernya satu langkah ke arah sisi yang berisi dua rumah memperpendek dua jarak dan hanya memperpanjang satu jarak. Total minimumnya sama dengan jarak dua rumah terjauh. Coba buktikan sendiri dengan grafik berikut.

GRAFIK HIDUP **Di mana halte angkot sebaiknya dibangun?**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

$$J = |h - a| + |h - b| + |h - c|$$

$$J = 10 + 5 + 3 = 18$$



Total jarak J
18

J terkecil yang mungkin
13

Seret titik oranye (halte) sepanjang lembah ungu. Tiga batang berwarna di bawah sumbu menunjukkan jarak halte ke tiap rumah. Di mana J paling kecil? Lalu seret rumah-rumahnya: apakah halte terbaik selalu di rumah yang di tengah?

2.6 Sifat-sifat operasi dan pola bilangan bulat

Bilangan bulat mengikuti beberapa "aturan main" yang selalu berlaku. Aturan ini membuat hitungan panjang bisa disusun ulang menjadi hitungan pendek.

SIFAT OPERASI BILANGAN BULAT

Untuk semua bilangan bulat a, b, dan c:

Sifat	Bentuk umum	Contoh
Komutatif (pertukaran)	$a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$	$(-3) + 5 = 5 + (-3) = 2$
Asosiatif (pengelompokan)	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	$(-7 + 7) + 9 = -7 + (7 + 9) = 9$
Distributif (penyebaran)	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	$-4 \times (10 + 3) = -40 + (-12) = -52$
Unsur identitas	$a + 0 = a$, $a \times 1 = a$	$-8 + 0 = -8$
Lawan (invers penjumlahan)	$a + (-a) = 0$	$13 + (-13) = 0$

Pengurangan dan pembagian **tidak** komutatif dan tidak asosiatif: $5 - 2 \neq 2 - 5$ dan $(8 - 4) - 2 \neq 8 - (4 - 2)$. Hasil penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dua bilangan bulat selalu bilangan bulat, tetapi hasil pembagiannya belum tentu: $3 : 4$ bukan bilangan bulat.

Lanjut · Untuk penjelajah: karena memenuhi sifat-sifat di atas, himpunan $\mathbb{Z}$ beserta operasi + dan × disebut sebuah *gelanggang* (*ring*) dalam aljabar abstrak. Banyak struktur lain, seperti polinomial dan matriks, ternyata juga gelanggang, sehingga trik hitung di bab ini berlaku juga di sana.

TRIK KAK LINTANG

Susun ulang supaya hitungannya ramah. $25 \times (-7) \times 4$: tukar urutannya menjadi $25 \times 4 \times (-7) = 100 \times (-7) = -700$. Atau pakai distributif: $99 \times (-6) = (100 - 1) \times (-6) = -600 + 6 = -594$.

MITOS

"Bilangan negatif cuma ada di buku matematika."

FAKTA

Suhu di puncak Jayawijaya, saldo yang berutang, tombol B2 di lift, selisih gol di klasemen liga, dan zona waktu UTC−5 semuanya memakai bilangan negatif.

MITOS

"Dua tanda negatif selalu menghasilkan positif."

FAKTA

Hanya pada perkalian dan pembagian! Pada penjumlahan, dua bilangan negatif makin negatif: $(-3)+(-4)=-7$. Utang ditambah utang tetap utang, malah makin besar.

MITOS

"Nol itu bukan bilangan, atau nol termasuk bilangan positif."

FAKTA

Nol adalah bilangan bulat yang tidak positif dan tidak negatif. Ia menjadi patokan garis bilangan dan satu-satunya bilangan yang sama dengan lawannya sendiri.

Sekarang sebuah pola yang cantik. Berapa $-10+(-9)+\cdots+11+12$? Setiap bilangan negatif bertemu lawannya dan saling menghapus, sehingga yang tersisa hanya $11+12=23$. Rumus Hidup berikut menghitung jumlah bilangan bulat berurutan dengan cara Gauss: jumlahkan suku pertama dan terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua.

RUMUS HIDUP

Jumlah bilangan bulat berurutan

$$S = \frac{(m+n) \times (n-m+1)}{2}$$

Jumlahkan suku pertama dan suku terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua. Bilangan negatif ikut dihitung!

m Mulai dari m

n Sampai n

S Jumlah

JUMLAH

23

pasangan –k dan k saling menghapus

Ada **23** suku. (m + n) × banyak suku : 2 = **2** × **23** : 2 = **23**. Jika hasilnya tampil '—', berarti n masih lebih kecil daripada m.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-BULAT-BERURUTAN

COBA SENDIRI

Jumlah raksasa yang menyusut

Hitunglah $-20 + (-19) + (-18) + \cdots + 24 + 25$**.**

1. Pasangkan setiap bilangan negatif dengan lawannya: $(-20) + 20 = 0$, $(-19) + 19 = 0$, ..., $(-1) + 1 = 0$. Angka 0 juga tidak menambah apa-apa.
2. Yang tersisa hanya $21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 115$.
3. Cek dengan rumus: banyak suku $25 - (-20) + 1 = 46$, jumlahnya $\frac{(-20 + 25) \times 46}{2} = 115$. ✓

Jumlahnya 115. Dari 46 suku, 41 suku saling menghapus!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

PARITAS: SENJATA RAHASIA OLIMPIADE

Bisakah kamu mengisi setiap kotak pada $1 \square 2 \square 3 \square \cdots \square 10$ dengan + atau − sehingga hasilnya 0? Cobalah sebentar... Ternyata **mustahil**, dan buktinya hanya beberapa baris. Jika semua kotak diisi +, hasilnya 55, bilangan ganjil. Mengganti tanda di depan bilangan k dari + menjadi − mengurangi hasil sebesar $2k$, bilangan genap. Ganjil dikurangi genap tetap ganjil, jadi hasilnya selalu ganjil dan tidak mungkin 0. Sifat genap atau ganjil ini disebut **paritas**. Untuk 1 sampai 12 (jumlahnya 78, genap) ternyata bisa: $1+2+3+4+5-6+7+8+9-10-11-12=0$.

Es di khatulistiwa

Puncak Jaya di Papua (±4.884 m) begitu tinggi sehingga suhunya sering di bawah 0 °C dan masih ada es di sana, walaupun dekat khatulistiwa.

Lift dan lantai bawah tanah

Tombol B1 dan B2 di lift adalah lantai −1 dan −2. Hati-hati, banyak gedung tidak punya lantai 0!

Saldo dan bayar nanti

Belanja dengan fitur bayar nanti membuat saldomu "minus": utang dicatat sebagai bilangan negatif sampai dilunasi.

Klasemen liga

Kolom selisih gol = gol yang dicetak − gol yang kemasukan. Tim yang sering kalah telak punya selisih gol negatif.

Zona waktu

WIB = UTC+7, WITA = UTC+8, WIT = UTC+9. Selisih jam Jakarta dengan kota yang memakai UTC−5 adalah $7-(-5)=12$ jam.

Menyelam di Bunaken

Kedalaman penyelam dicatat negatif terhadap permukaan laut. Naik 10 m dari −25 m berarti tiba di −15 m.

Cek Cepat

$-7-(-2)=\ldots$

- -9
- -5
- 5
- 9

Hasil $(-4) \times (-5) : (-2)$ **adalah...**

- 10
- -40
- 40
- -10

Nilai $|3 - 8| - |-4|$ **adalah...**

- 1
- -9
- 9
- -1

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: perang kartu merah-hitam

Bahan: satu set kartu remi (singkirkan kartu J, Q, K, dan joker), kertas, pensil, dan seorang teman atau anggota keluarga.

1. Kartu hitam (♠ ♣) bernilai positif, kartu merah (♥ ♦) bernilai negatif. Kartu As bernilai 1, kartu angka sesuai angkanya. Jadi 7♥ bernilai –7.
2. Kocok kartu. Setiap pemain mengambil 5 kartu dan menghitung jumlahnya. Jumlah yang lebih besar menang satu poin.
3. Pakai trik pasangan nol: kartu merah dan hitam yang angkanya sama boleh disisihkan lebih dulu, karena jumlahnya 0.
4. Ronde khusus: lawanmu boleh mengambil satu kartu dari tanganmu. Catat apakah jumlahmu naik atau turun.
5. Mainkan 5 ronde dan tulis semua hitungannya di kertas.

Pertanyaan: Jika ke-40 kartu (As sampai 10 dari keempat jenis) dijumlahkan semuanya, berapa hasilnya? Jelaskan tanpa menjumlahkan satu per satu. Lalu, mengapa kehilangan kartu merah justru menguntungkan? Hubungkan dengan $a - (-b) = a + b$.

⚡ RINGKASAN KILAT — Bab 2 dalam 3 menit

☑️ Kamu sekarang bisa...

- menempatkan dan membandingkan **bilangan bulat** pada garis bilangan, termasuk bilangan negatif
- menjumlahkan dan mengurangkan bilangan bulat dengan **lompatan katak** dan **koin pasangan nol**
- menjelaskan mengapa **negatif × negatif = positif** dan memakai aturan tanda
- menghitung soal campuran dengan **urutan operasi** yang benar
- memakai **nilai mutlak** untuk menghitung jarak, selisih suhu, dan selisih ketinggian

🗝️ Istilah kunci

garis bilangan · Bilangan bulat · bilangan bulat positif · bilangan bulat negatif · lawan · pasangan nol · KaBaTaKu · Nilai mutlak · Jarak · Komutatif · Asosiatif · Distributif · paritas

🧮 Rumus penting

$$T = T_0 + \Delta T$$

Suhu akhir. Suhu akhir sama dengan suhu awal ditambah perubahannya. Suhu naik berarti perubahannya positif; suhu turun berarti perubahannya negatif.

$$d = |a - b|$$

Jarak dua titik di garis bilangan. Kurangkan kedua bilangan, lalu buang tandanya. Jarak tidak pernah negatif.

$$S = \frac{(m + n) \times (n - m + 1)}{2}$$

Jumlah bilangan bulat berurutan. Jumlahkan suku pertama dan suku terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua. Bilangan negatif ikut dihitung!

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Bilangan negatif yang angkanya lebih besar justru lebih kecil.
- -3^2 tidak sama dengan $(-3)^2$.
- $|a - b|$ tidak sama dengan $|a| - |b|$.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=2

Teka-teki untuk Bab 3

Di garis bilangan, bilangan bulat berdiri berjajar rapi dengan jarak 1. Bilangan bulat ditambah, dikurang, atau dikali bilangan bulat, hasilnya selalu bilangan bulat. Tetapi suatu sore Kak Lintang membawa 3 martabak untuk dibagi rata kepada 4 orang: Dimas, Ayu, Ancil, dan dirinya sendiri. Hasil $3 : 4$ bukan bilangan bulat! Berapa bagian yang didapat setiap orang, dan di mana letak bilangan itu pada garis bilangan?

▼ **Intip petunjuk**

Potong setiap martabak menjadi 4 potong yang sama besar. Ada 12 potong, jadi setiap orang mendapat 3 potong seperempatan, yaitu $\frac{3}{4}$ martabak. Letaknya di antara 0 dan 1, lebih dekat ke 1. Bab 3 membahas pecahan, desimal, dan persen: bilangan-bilangan yang mengisi celah di antara bilangan bulat!

BAB 3 · BILANGAN

03 Pecahan, Desimal & Persen: Seni Membagi dengan Adil

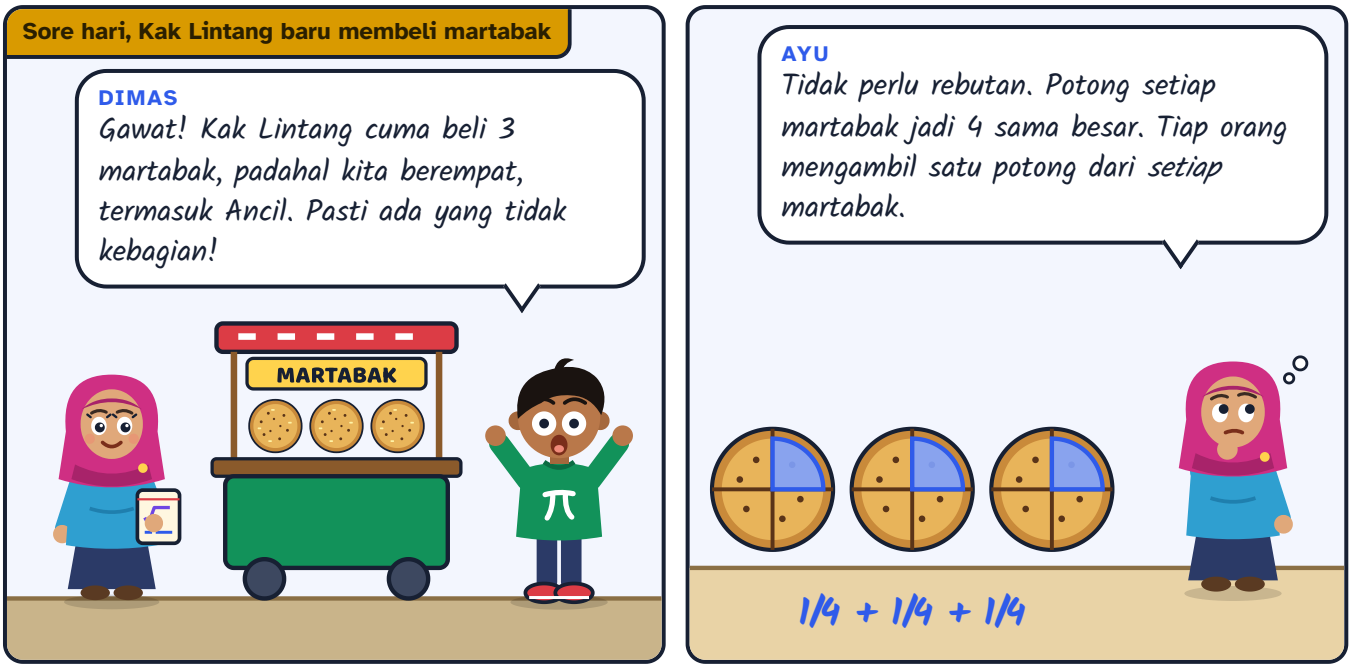
Tiga martabak untuk empat orang: siapa yang tidak kebagian? Diskon 50% lalu 20%: benarkah totalnya 70%? Membagi dengan adil, berbelanja dengan cerdik, dan membaca angka di belakang koma ternyata satu keterampilan yang sama.

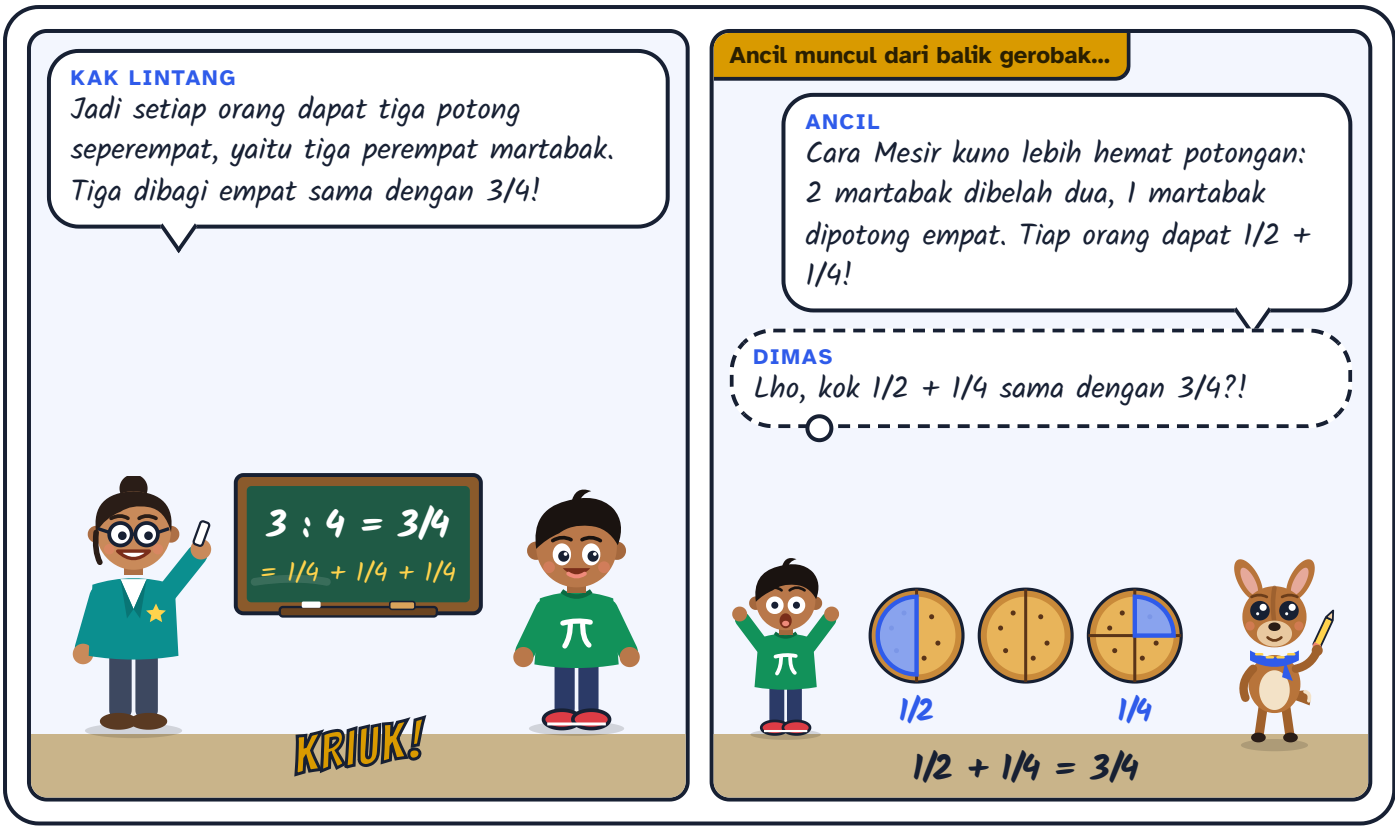
Setelah bab ini, kamu bisa

- memaknai **pecahan** sebagai bagian dari keseluruhan, sebagai hasil bagi, dan sebagai titik di garis bilangan;
- membuat **pecahan senilai**, menyederhanakan, dan membandingkan pecahan;
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi pecahan dengan alasan yang masuk akal, bukan sekadar hafalan;
- mengubah pecahan ↔ **desimal** ↔ **persen**, termasuk desimal berulang seperti $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$;
- menghitung diskon, PPN, zakat, bunga, **persen perubahan**, dan harga sebelum diskon (**persen balik**).

TIGA MARTABAK, EMPAT PERUT

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Martabak A dipotong menjadi 6 potong sama besar. Martabak B, yang ukurannya sama, dipotong menjadi 8. Kamu boleh mengambil satu potong. Mana yang kamu pilih supaya dapat lebih banyak?

- Potongan martabak B, karena 8 lebih besar daripada 6.
- Potongan martabak A, karena dibagi ke lebih sedikit bagian.
- Sama saja, karena sama-sama satu potong.
- Tidak bisa ditentukan tanpa menimbang.

Jawabannya: potongan martabak A. Makin banyak potongannya, makin kecil setiap potong. Jadi $\frac{1}{6}$ lebih besar daripada $\frac{1}{8}$, walaupun 6 lebih kecil daripada 8. Penyebut memberi tahu "dibagi menjadi berapa", bukan "seberapa banyak yang kamu dapat".

3.1 Apa itu pecahan? Bagian, pembagian, dan titik

Bilangan bulat dari Bab 2 cocok untuk menghitung benda utuh: 3 martabak, 4 orang, –5 °C. Padahal hidup penuh dengan benda yang *tidak* utuh: separuh gelas teh, seperempat kilo cabai, tiga perempat martabak. Untuk itulah manusia menciptakan **pecahan**.

DEFINISI

Pecahan $\frac{a}{b}$ (dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$) berarti: keseluruhan dibagi menjadi b bagian **sama besar**, lalu diambil a bagian. Bilangan a di atas disebut **pembilang**, sedangkan bilangan b di bawah disebut **penyebut**.

Satu pecahan punya tiga wajah yang sama pentingnya.

- **Bagian dari keseluruhan.** Sepotong lapis legit punya 20 lapis tipis. Kalau kamu mengupas dan memakan 7 lapis teratas, kamu memakan $\frac{7}{20}$ potongan itu.
- **Hasil bagi.** $\frac{a}{b} = a : b$. Tiga martabak dibagi empat orang: setiap orang mendapat $3 : 4 = \frac{3}{4}$ martabak. Inilah jawaban teka-teki di akhir Bab 2!
- **Titik di garis bilangan.** Bagi jarak 0 sampai 1 menjadi empat bagian sama panjang. Tanda ketiga adalah $\frac{3}{4}$. Di antara dua bilangan bulat ternyata ada banyak sekali "penghuni".



Setiap orang mengambil satu potong seperempat dari **setiap** martabak. Tiga potong seperempat $= \frac{3}{4}$ martabak. Jadi $3 : 4 = \frac{3}{4}$, dan tidak ada yang kelaparan.

Bahasa sederhana · Gampangnya: **penyebut** (angka bawah) = martabaknya dipotong menjadi berapa. **Pembilang** (angka atas) = berapa potong yang kamu ambil. Satu syarat penting: semua potongan harus sama besar.

PECAHAN YANG LEBIH DARI SATU

Jika pembilang lebih besar daripada penyebut, nilainya lebih dari 1. Misalnya $\frac{7}{4}$: tujuh potong seperempat sama dengan satu martabak utuh ditambah tiga potong lagi. Kita bisa menulisnya sebagai **pecahan campuran** $1\frac{3}{4}$. Caranya: $7 : 4 = 1$ sisa 3.

AWAS JEBAKAN

Pecahan hanya bermakna jika bagian-bagiannya sama besar. Kalau martabak dipotong 4 tetapi ada potongan yang jumbo dan ada yang mungil, satu potongnya **bukan** $\frac{1}{4}$. Saat membaca gambar pecahan, periksa dulu apakah petaknya sama besar.

CONTOH **Pecahan dari sebuah bilangan**

Kelas Ayu berisi 32 siswa. Sebanyak $\frac{3}{8}$ dari mereka berangkat sekolah naik sepeda. Berapa siswa yang naik sepeda?

1. Penyebut 8: bagi 32 siswa menjadi 8 kelompok sama besar. Setiap kelompok berisi $32 : 8 = 4$ siswa.
2. Pembilang 3: ambil 3 kelompok, yaitu $3 \times 4 = 12$ siswa.

Ada 12 siswa yang naik sepeda. Ringkasnya: $\frac{3}{8} \times 32 = 12$. Kata "dari" pada pecahan berarti kali.

3.2 Pecahan senilai: beda potongan, sama banyak

Ambil separuh martabak. Potong separuh itu menjadi dua: kamu memegang 2 potong dari 4, yaitu $\frac{2}{4}$. Potong lagi: 4 potong dari 8, yaitu $\frac{4}{8}$. Martabak di tanganmu tidak bertambah sedikit pun! Pecahan-pecahan yang nilainya sama seperti ini disebut **pecahan senilai**.

SIFAT PECAHAN SENILAI

Untuk setiap bilangan bulat $k \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

Pembilang dan penyebut boleh dikali atau dibagi dengan bilangan yang **sama** (bukan nol). Nilai pecahannya tidak berubah.

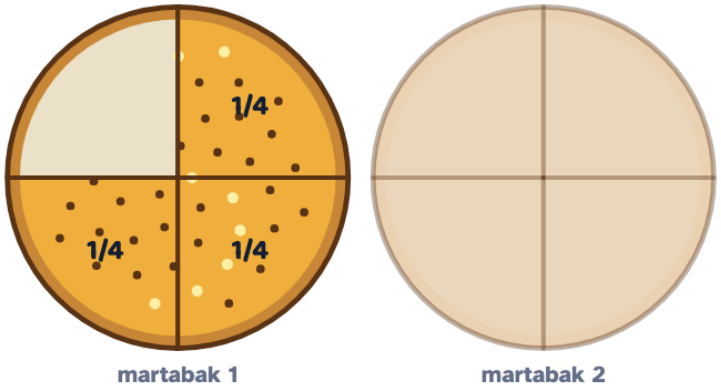
Mengapa boleh? (bukti dengan pisau martabak)

Potong *setiap* potongan martabak menjadi k potongan yang lebih kecil. Banyak potongan seluruhnya menjadi $b \times k$, dan potongan yang kamu pegang menjadi $a \times k$. Pisau hanya membuat potongan lebih kecil; pisau tidak menambah atau mengurangi martabak. Jadi $\frac{a}{b}$ dan $\frac{a \times k}{b \times k}$ menyatakan banyak martabak yang sama.

LAB MINI Pemotong martabak ajaib

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3

klik potongan untuk mengambil atau mengembalikannya



$\frac{3}{4}$

kurang dari 1 martabak

paling sederhana: 3/4

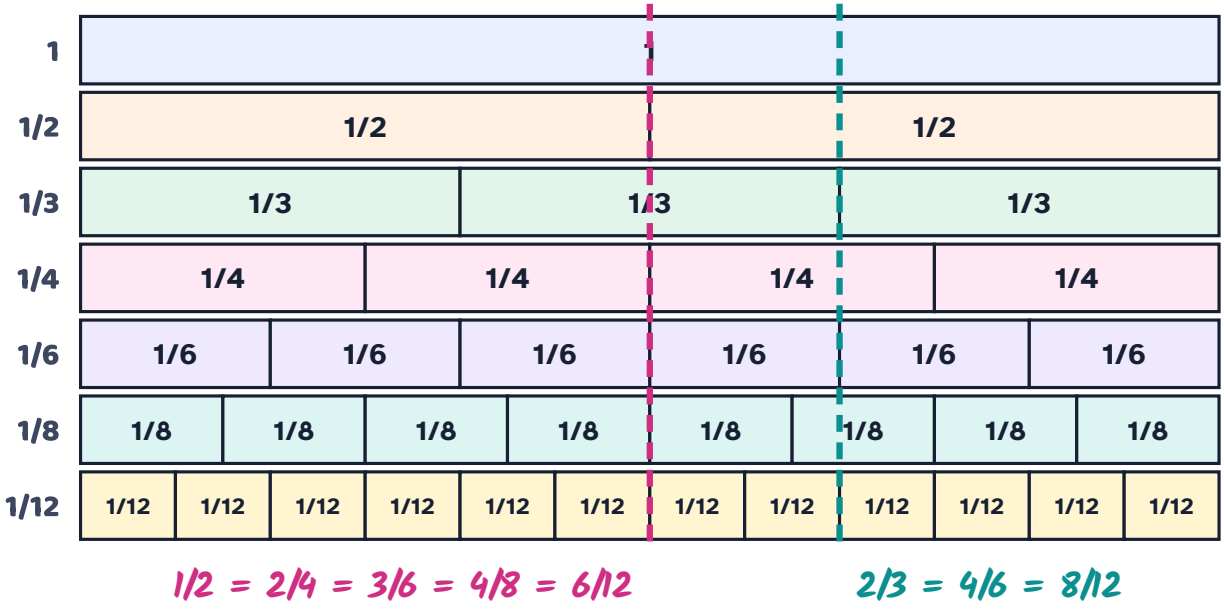
desimal: 0,75

persen: 75%



Pecahan	Senilai dengan	Paling sederhana	Desimal	Persen
3/4	6/8 = 9/12	3/4	0,75	75 %

Klik potongan martabak untuk mengambil atau mengembalikannya, atau klik langsung di garis bilangan. Lalu geser **"Potong lagi"**: potongannya makin kecil, angkanya berubah, tetapi titik di garis bilangan tidak bergeser sedikit pun. Bisakah kamu membuat $\frac{9}{12}$? Pecahan sederhana apa yang muncul?



Dinding pecahan. Garis putus-putus menembus batas potongan di beberapa baris sekaligus: itulah pecahan senilai. Dinding ini juga membantu membandingkan, misalnya $\frac{3}{4}$ (tiga ubin merah muda) lebih panjang daripada $\frac{2}{3}$.

Kebalikan dari memperbanyak potongan adalah **menyederhanakan**: membagi pembilang dan penyebut dengan bilangan yang sama. Pecahan berada dalam **bentuk paling sederhana** jika pembilang dan penyebutnya tidak lagi punya faktor persekutuan selain 1. Cara tercepat: bagi keduanya dengan FPB (faktor persekutuan terbesar) yang akan kamu kuasai di Bab 4.

CONTOH **Menyederhanakan 18/24**

Sederhanakan $\frac{18}{24}$.

1. Keduanya genap, bagi 2: $\frac{18}{24} = \frac{9}{12}$.
2. Keduanya habis dibagi 3: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
3. 3 dan 4 tidak punya faktor persekutuan selain 1, jadi berhenti di sini. (Langsung bagi FPB-nya, yaitu 6, juga boleh.)

$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. Coba buat $\frac{18}{24}$ di Lab Mini: pilih penyebut 4, ambil 3 potong, lalu potong lagi menjadi 6.

Membandingkan pecahan. Jika penyebutnya sama, bandingkan pembilangnya: $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$. Jika pembilangnya sama, yang penyebutnya lebih kecil justru lebih besar: $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$. Jika keduanya berbeda, samakan dulu penyebutnya, atau pakai trik berikut.

✏️ **TRIK KAK LINTANG · PERKALIAN KUPU-KUPU**

Untuk membandingkan $\frac{5}{8}$ dan $\frac{3}{5}$, kalikan menyilang seperti sayap kupu-kupu: $5 \times 5 = 25$ (untuk pecahan kiri) dan $3 \times 8 = 24$ (untuk pecahan kanan). Karena $25 > 24$, maka $\frac{5}{8} > \frac{3}{5}$. Diam-diam kamu sebenarnya menyamakan penyebut menjadi 40: $\frac{25}{40}$ melawan $\frac{24}{40}$.

3.3 Operasi pecahan: menjumlah, mengali, membagi

Menjumlah dan mengurangkan. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$: satu potong seperempat ditambah dua potong seperempat menjadi tiga potong seperempat. Penyebutnya tetap 4 karena ukuran potongannya tidak berubah. Lalu bagaimana dengan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$? Ukuran potongannya berbeda, jadi harus **disamakan** dulu: potong ulang keduanya menjadi perenaman. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ dan $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, sehingga jumlahnya $\frac{5}{6}$.

Bahasa sederhana · Gampangnya: kamu tidak bisa menjumlahkan 1 potong besar dan 1 potong kecil lalu menyebutnya "2 potong". Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru hitung banyak potongannya (pembilang).

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ bukan $\frac{2}{5}$: pembilang dan penyebut tidak boleh dijumlahkan begitu saja. Cek dengan akal sehat: $\frac{2}{5}$ malah lebih kecil daripada $\frac{1}{2}$, padahal kita menambahkan sesuatu ke $\frac{1}{2}$!

RUMUS HIDUP

Penjumlah pecahan

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$$

Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru jumlahkan banyak potongannya (pembilang).

- a Pembilang 1
- b Penyebut 1
- c Pembilang 2
- d Penyebut 2
- s Jumlah `martabak`

JUMLAH

0,8333

martabak

Penyebut persekutuan terkecil = KPK(**2**, **3**) = **6**. Jadi **1/2** + **1/3** = **3/6** + **2/6** = **5/6**. Bentuk paling sederhananya **5/6**, dalam desimal **0,8333**.

Cek satuan: kedua pecahan harus bagian dari benda yang sama (sama-sama martabak), barulah boleh dijumlahkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-PECAHAN

KERJAKAN BERSAMA

Tepung untuk dua kue

Ibu memakai $\frac{2}{3}$ kg tepung untuk bolu dan $\frac{3}{4}$ kg tepung untuk kue lapis. Berapa kg tepung yang dipakai seluruhnya?

1. Penyebutnya 3 dan 4. Kelipatan persekutuan terkecilnya 12, jadi ubah keduanya menjadi perduabelasan.
2. $\frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{8}{12}$ dan $\frac{3}{4} = \frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12}$.
3. $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.

Seluruhnya $1\frac{5}{12}$ kg, sedikit di atas $1\frac{1}{3}$ kg. Masuk akal, karena $\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{4}$ masing-masing lebih dari setengah.

ADU CEPAT

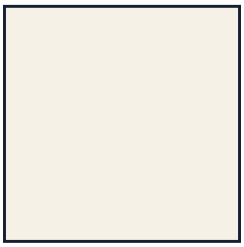
Jumlahkan pecahan kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

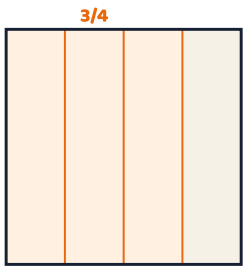
Samakan penyebut (pakai KPK), lalu jumlahkan pembilangnya. Jawab dalam bentuk pecahan, misalnya 7/6 atau 1 1/6.

Mengalikan. "$\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$ kue" berarti $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. Apa hasilnya? Jangan menghafal dulu. Lihat bukti tanpa kata ini.



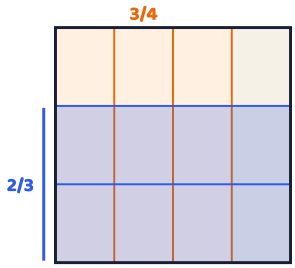
Persegi ini = 1 kue utuh.
Kita mencari 2/3 dari 3/4 kue.
Tanpa rumus, hanya memotong.

Langkah 1. Persegi ini adalah satu kue utuh. Kita ingin tahu berapa $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$ kue.



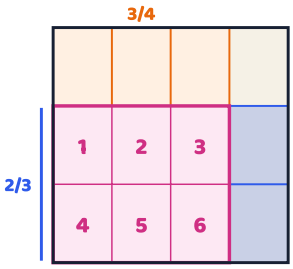
Potong tegak jadi 4 lajur.
Ambil 3 lajur:
itulah 3/4 kue (oranye).

Langkah 2. Potong tegak menjadi 4 lajur sama lebar dan ambil 3 lajur. Bagian oranye adalah $\frac{3}{4}$ kue.



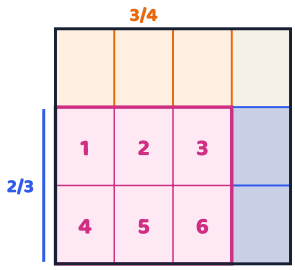
Potong mendatar jadi 3 baris.
Dari bagian oranye, ambil
2 baris dari 3: itulah 2/3-nya.

Langkah 3. Potong mendatar menjadi 3 baris sama tinggi. Dari bagian oranye, ambil 2 baris dari 3. Itulah $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$.



Hitung kotaknya!
Seluruh kue: 4 × 3 = 12 kotak.
Bagian ungu: 3 × 2 = 6 kotak.
Jadi 2/3 dari 3/4 = 6/12.

Langkah 4. Kue kini terbagi menjadi $4 \times 3 = 12$ kotak sama besar, dan bagian ungu berisi $3 \times 2 = 6$ kotak. Jadi hasilnya $\frac{6}{12}$.



Banyak kotak = hasil kali.
Pembilang dikali pembilang,
penyebut dikali penyebut.

2/3 × 3/4 = 6/12
= 1/2

Langkah 5. Penyebut baru = banyak semua kotak = 3×4. Pembilang baru = banyak kotak ungu = 2×3. Jadi $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2\times3}{3\times4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Separuh kue!

Membagi. $3 : \frac{1}{4}$ bertanya: "ada berapa potong seperempat di dalam 3 martabak?" Setiap martabak berisi 4 potong, jadi 3 martabak berisi 12 potong. Maka $3 : \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12$. Membagi dengan pecahan sama dengan mengalikan dengan **kebalikannya** (pembilang dan penyebut ditukar).

ATURAN OPERASI PECAHAN

Untuk pecahan dengan penyebut bukan nol:

- **Jumlah dan selisih:** samakan penyebut, $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$. Lebih hemat jika memakai KPK penyebut.
- **Kali:** $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.
- **Bagi:** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (dengan $c \neq 0$).

Mengapa membagi sama dengan mengalikan kebalikan?

Samakan dulu penyebutnya: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$. Kini kedua pecahan memakai potongan yang sama ukurannya (per-bd). Membagi cukup dengan bertanya "berapa kali bc potong muat di dalam ad potong?", yaitu $ad : bc = \frac{ad}{bc}$. Hasil ini persis sama dengan $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. ∎

∎

KERJAKAN BERSAMA **Berapa gelas es buah?**

Ayu membuat $2\frac{1}{4}$ liter es buah untuk acara arisan. Satu gelas berisi $\frac{3}{8}$ liter. Berapa gelas yang dapat diisi penuh?

1. Pertanyaannya: berapa kali $\frac{3}{8}$ muat di dalam $2\frac{1}{4}$? Itu pembagian.
2. Ubah pecahan campuran: $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.
3. $\frac{9}{4} : \frac{3}{8} = \frac{9}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{72}{12} = 6$.

Tepat 6 gelas. Cek: $6 \times \frac{3}{8} = \frac{18}{8} = 2\frac{1}{4}$ liter. ✓

LANJUT · IB & OLIMPIADE

"PENJUMLAHAN ALA DIMAS" TERNYATA BERGUNA

Dimas pernah menulis $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Salah sebagai penjumlahan, tetapi pecahan $\frac{a+c}{b+d}$ punya nama: *mediant*. Sifat ajaibnya: jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (dengan $b, d > 0$), maka

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Buktinya singkat: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ berarti $ad < bc$, sehingga $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$; sisi kanan serupa.

Mediant juga muncul di lapangan basket. Dimas memasukkan 1 dari 2 tembakan di babak pertama dan 1 dari 3 di babak kedua. Rasio keseluruhannya $\frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$, terletak di antara $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{3}$. Jadi "penjumlahan ala Dimas" cocok untuk menggabungkan **rasio keberhasilan**, bukan untuk menjumlahkan potongan martabak.

3.4 Desimal dan pecahan berulang

Desimal adalah cara menulis pecahan berpenyebut 10, 100, 1000, dan seterusnya dengan koma. Setiap angka di belakang koma punya nilai tempat: persepuluhan, perseratusan, perseribuan.

$$0{,}375 = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$$

Sebaliknya, untuk mengubah pecahan menjadi desimal, **bagi pembilang dengan penyebut**: $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$. Kadang pembagiannya berhenti, seperti $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Kadang tidak pernah berhenti: $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ dan $\frac{1}{7} = 0{,}142857\,142857\ldots$

DEFINISI

Desimal yang memiliki blok angka yang terus berulang tanpa akhir disebut **desimal berulang**. Blok itu disebut **periode** dan ditandai dengan garis di atasnya: $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$, $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$, dan $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$.

LAB MINI **Mesin desimal & jam sisa**

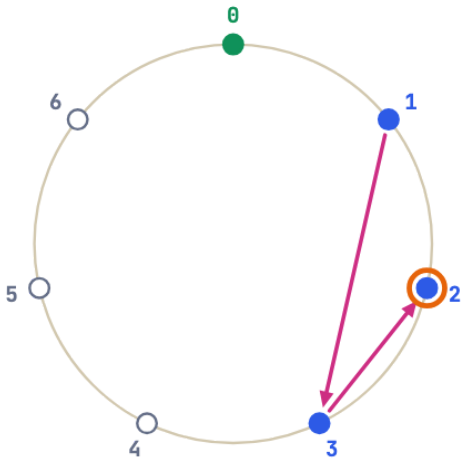
LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3

1 : 7 = 0,14

Langkah pembagian (sisa × 10, lalu bagi lagi):

```
10 : 7 = 1   sisa 3
30 : 7 = 4   sisa 2
```

Jam sisa: sisa hanya bisa 0 sampai 6



Desimal	Blok berulang	Panjang periode	Penyebut sederhana
0,142857142857…	142857	6	7 (prima)

Jenis: **berulang murni**

Pilih pembilang dan penyebut, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat pembagian bersusun berjalan langkah demi langkah. Setiap sisa berpindah di "jam sisa". Begitu ada sisa yang muncul untuk kedua kalinya, desimalnya pasti berulang. Penyebut mana yang selalu membuat desimal berhenti?

Mengapa pasti berulang? Saat membagi dengan 7, sisanya hanya bisa 0, 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Kalau sisa 0 muncul, pembagian berhenti. Kalau tidak, sisanya hanya punya 6 pilihan (1 sampai 6). Jadi paling lambat pada langkah ketujuh pasti ada sisa yang muncul untuk kedua kalinya, dan sejak itu semua langkah terulang persis sama. Kesimpulannya: **setiap pecahan menjadi desimal berhenti atau desimal berulang**.

KAPAN DESIMAL BERHENTI?

Pecahan $\frac{a}{b}$ dalam bentuk paling sederhana menjadi desimal berhenti **jika dan hanya jika** penyebut b tidak memiliki faktor prima selain 2 dan 5. Contoh: $\frac{7}{40} = 0{,}175$ berhenti karena $40 = 2^3 \times 5$, sedangkan $\frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$ berulang karena $12 = 2^2 \times 3$ memuat faktor 3.

Bukti (dua arah)

(⇐) Jika $b = 2^m 5^n$, kalikan pembilang dan penyebut dengan 2 atau 5 secukupnya sampai penyebutnya menjadi 10^k. Contoh: $\frac{7}{40} = \frac{7\times25}{40\times25} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$. Pecahan berpenyebut 10^k jelas desimal berhenti.

(⇒) Jika desimalnya berhenti setelah k angka, maka $\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$ untuk suatu bilangan bulat N, sehingga $a \times 10^k = N \times b$. Karena a dan b tidak punya faktor persekutuan, b harus membagi $10^k = 2^k 5^k$. Jadi faktor prima b hanya 2 dan 5. ∎

Bagaimana kalau kita ingin berjalan mundur, dari desimal berulang ke pecahan? Ada trik geser koma yang cantik.

x = 0,272727…

Langkah 1. Misalkan $x = 0{,}272727\ldots$, dengan blok "27" berulang terus.

100x = 27,272727… × 100 koma bergeser 2 langkah

x = 0,272727…

Langkah 2. Bloknya 2 angka, jadi kalikan dengan 100. Koma bergeser 2 langkah: $100x = 27{,}272727\ldots$

100x = 27,272727… ekornya kembar!

x = 0,272727…

Langkah 3. Perhatikan: ekor di belakang koma pada kedua baris sama persis, sampai tak terhingga.

100x = 27,272727…

\- x = 0,272727…

99x = 27 (ekornya habis!)

Langkah 4. Kurangkan baris atas dengan baris bawah. Ekornya saling menghapus: $100x - x = 99x = 27$.

100x = 27,272727…

\- x = 0,272727…

99x = 27 (ekornya habis!)

x = 27/99 = 3/11

Cek: 3 : 11 = 0,2727… ✓

Langkah 5. Jadi $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ (pembilang dan penyebut dibagi FPB-nya, 9). Cek dengan membagi: $3 : 11 = 0{,}2727\ldots$ ✓

TRIK KAK LINTANG · TRIK SEMBILAN

Jika blok berulang langsung dimulai di belakang koma, tulis bloknya sebagai pembilang dan angka 9 sebanyak panjang blok sebagai penyebut: $0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$, $0{,}\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$, bahkan $0{,}\overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

COBA SENDIRI **Desimal berulang campuran**

Ubah $0{,}1\overline{6} = 0{,}1666\ldots$ menjadi pecahan paling sederhana.

1. Angka 1 tidak ikut berulang, jadi trik sembilan tidak bisa langsung dipakai. Misalkan $x = 0{,}1666\ldots$
2. Geser koma sampai ekornya hanya berisi angka berulang: $10x = 1{,}666\ldots$ dan $100x = 16{,}666\ldots$
3. Kurangkan: $100x - 10x = 90x = 16{,}666\ldots - 1{,}666\ldots = 15$.
4. $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

$0{,}1\overline{6} = \frac{1}{6}$. **Cek:** $1 : 6 = 0{,}1666\ldots$ ✓

Bilangan yang dapat ditulis sebagai $\frac{a}{b}$ disebut **bilangan rasional**. Dari pembahasan di atas: **bilangan rasional selalu berdesimal berhenti atau berulang**, dan sebaliknya setiap desimal berhenti atau berulang adalah bilangan rasional. Bilangan seperti $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ dan $\pi = 3{,}14159265\ldots$ desimalnya tidak berhenti dan tidak berulang. Mereka disebut irasional (Bab 6 dan Bab 35).

TAMU DARI MASA LALU

Pada 1585, insinyur dan matematikawan asal Flandria, Simon Stevin, menerbitkan buku tipis *De Thiende* ("Persepuluhan"). Ia mengajak pedagang, juru ukur, dan pembuat koin memakai pecahan desimal agar hitungan sehari-hari semudah menghitung bilangan bulat. Matematikawan Persia al-Kashi sudah memakai pecahan desimal sekitar satu setengah abad sebelumnya (±1427). Penulisan Stevin masih kikuk: ia memberi angka kecil berlingkar pada setiap digit untuk menunjukkan tempatnya. Tanda pemisah berupa koma atau titik baru lazim belakangan. Itulah sebabnya Indonesia, seperti banyak negara Eropa, menulis 3,14, sedangkan negara berbahasa Inggris menulis 3.14.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BILANGAN SIKLIK 142857

Kalikan 142857 dengan 2, 3, 4, 5, dan 6:

$$285714, \quad 428571, \quad 571428, \quad 714285, \quad 857142.$$

Keenam angkanya hanya berputar! Rahasianya ada di jam sisa: saat membagi 1 dengan 7, sisanya beredar melalui 1, 3, 2, 6, 4, 5, yaitu *semua* sisa yang mungkin. Akibatnya $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \ldots, \frac{6}{7}$ hanyalah putaran dari blok yang sama. Puncaknya, $142857 \times 7 = 999999$. Untuk bilangan prima p selain 2 dan 5, panjang periode $\frac{1}{p}$ selalu membagi $p - 1$: $\frac{1}{7}$ berperiode 6, $\frac{1}{13}$ berperiode 6, $\frac{1}{17}$ berperiode 16, dan $\frac{1}{11}$ berperiode 2. Fakta ini adalah buah dari Teorema Fermat kecil yang akan kamu temui di Bab 38.

MITOS

"Pecahan yang penyebutnya lebih besar pasti lebih besar."

FAKTA

Penyebut besar berarti potongannya kecil: $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$. Untuk membandingkan, samakan penyebut atau pakai perkalian kupu-kupu.

MITOS

"Mengalikan selalu membuat bilangan makin besar."

FAKTA

Mengalikan dengan pecahan di antara 0 dan 1 justru memperkecil: $12 \times \frac{1}{2} = 6$. Sebaliknya, membagi dengan $\frac{1}{2}$ memperbesar: $12 : \frac{1}{2} = 24$.

MITOS

"0,999... itu sedikit lebih kecil daripada 1."

FAKTA

Keduanya sama persis! Karena $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, kalikan 3: $1 = 0{,}999\ldots$ Trik sembilan juga memberi $0{,}\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$.

3.5 Persen: bahasa diskon, pajak, dan zakat

Mana yang lebih besar, $\frac{7}{20}$ atau $\frac{9}{25}$? Sulit menjawabnya sekilas. Bagaimana jika keduanya diubah ke penyebut 100? $\frac{7}{20} = \frac{35}{100}$ dan $\frac{9}{25} = \frac{36}{100}$. Sekarang jelas! Penyebut 100 begitu berguna sampai diberi nama dan lambang sendiri.

DEFINISI

Persen (dari bahasa Latin *per centum*, "per seratus") berarti perseratus:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Jadi $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$, dan "35% dari 200" berarti $\frac{35}{100} \times 200 = 70$.

Bahasa sederhana · Bayangkan kertas berpetak $10 \times 10 = 100$ kotak. 30% berarti 30 kotak dari 100 kotak itu. 100% berarti semua kotak, alias seluruhnya. 50% berarti separuhnya.

Pecahan	Desimal	Persen	Kamu menjumpainya di...
$\frac{1}{2}$	0,5	50%	"separuh harga", setengah kilo gula
$\frac{1}{4}$	0,25	25%	seperempat kilo cabai
$\frac{3}{4}$	0,75	75%	tiga perempat martabak
$\frac{1}{5}$	0,2	20%	diskon 20%
$\frac{1}{8}$	0,125	12,5%	sepotong martabak yang dipotong 8
$\frac{1}{3}$	$0{,}\overline{3}$	$33\frac{1}{3}\%$	membagi tiga sama rata
$\frac{11}{100}$	0,11	11%	PPN pada struk belanja
$\frac{1}{40}$	0,025	2,5%	zakat mal

ADU CEPAT **Pecahan → persen kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Ubah penyebutnya menjadi 100: 3/20 = 15/100 = 15%. Untuk perdelapanan, ingat 1/8 = 12,5%. Untuk per-40, ingat 1/40 = 2,5% (zakat!).

Tebak Dulu!

Toko Baju A memasang spanduk "Diskon 50% + 20%" (diskon 20% dihitung setelah diskon 50%). Toko Baju B memasang "Diskon 70%". Harga awal bajunya sama. Di toko mana bajunya lebih murah?

Sama saja, karena 50 + 20 = 70.

Toko A, karena diskonnya dua kali.

Toko B.

Tergantung harga awalnya.

Jawabannya: Toko B. Di Toko A, diskon 20% dihitung dari harga yang sudah turun separuh, jadi nilainya hanya 10% dari harga awal. Total diskonnya 60%, bukan 70%. Lab Mini di bawah membuktikannya dengan 100 kotak.

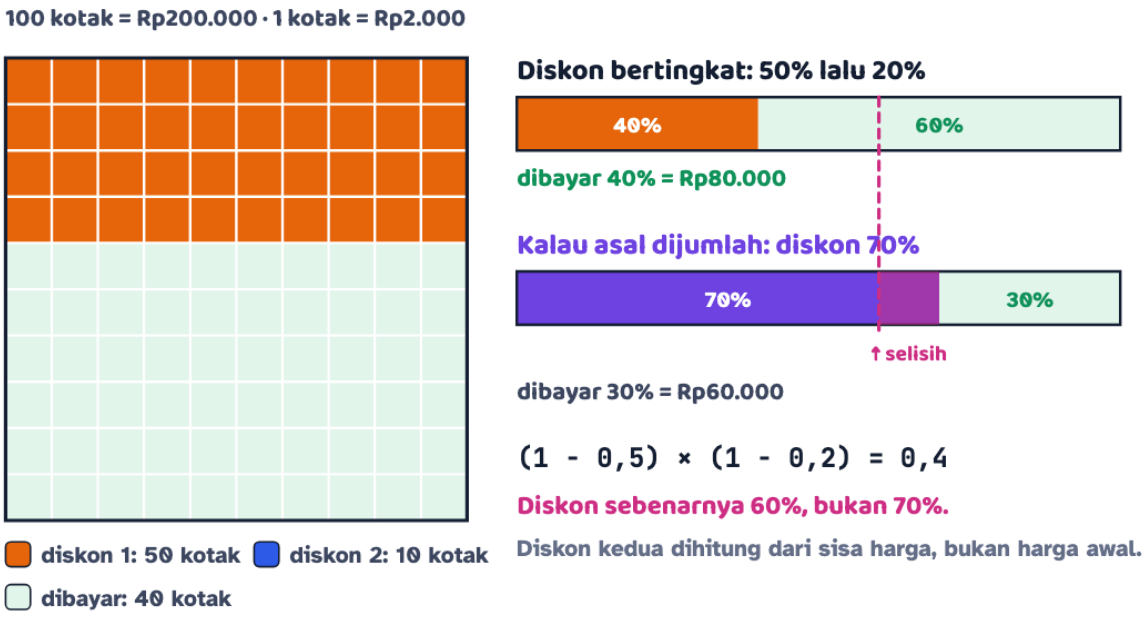
AWAS JEBAKAN

Persen selalu persen **dari sesuatu**, sehingga diskon 50% lalu 20% bukan diskon 70%. Diskon kedua dihitung dari harga yang sudah turun. Sebelum menghitung, selalu tanyakan: "persen dari apa?"

LAB MINI

Kertas 100 kotak: diskon bertingkat

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3



Diskon sebenarnya	Kalau asal dijumlah	Selisih	Harga akhir
60 %	70 %	10 %	Rp80.000

Atur diskon pertama dan kedua, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat kotak harga dicoret satu per satu. Kotak oranye hilang karena diskon pertama, kotak biru karena diskon kedua. Bandingkan dengan batang ungu "asal dijumlah". Kapan selisihnya paling besar?

RUMUS HIDUP

Harga setelah diskon

$$H = H_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Diskon p% artinya kamu hanya membayar (100 − p)% dari harga awal.

H_0 Harga awal `rupiah` | p Diskon `%` | H Harga yang dibayar `rupiah`

HARGA YANG DIBAYAR

160.000

rupiah

Diskon **20**% dari Rp**200.000** adalah potongan Rp**40.000**. Kamu membayar **80**% harga awal, yaitu Rp**160.000**.

Cek satuan: persen tidak bersatuan, jadi harga akhir tetap dalam rupiah seperti harga awal.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-HARGA-DISKON



TRIK KAK LINTANG · MULAI DARI 10%

10% suatu harga didapat dengan menggeser koma satu langkah ke kiri: 10% dari Rp85.000 adalah Rp8.500. Dari situ, 5% = separuhnya (Rp4.250), 20% = dua kalinya (Rp17.000), dan 15% = 10% + 5% (Rp12.750). Kamu bisa menghitung diskon di pasar tanpa kalkulator!

CONTOH

Zakat mal 2,5%

Tabungan Pak Harun sebesar Rp120.000.000 sudah mencapai nisab dan tersimpan genap satu tahun. Berapa zakat mal yang ia keluarkan jika besarnya 2,5%?

1. $2{,}5\% = \frac{2{,}5}{100} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$.
2. Zakat $= \frac{1}{40} \times 120.000.000 = 120.000.000 : 40 = 3.000.000$.

Zakatnya Rp3.000.000. Trik praktis: 2,5% sama dengan "bagi 40".

KERJAKAN BERSAMA **Membaca struk: diskon lalu PPN**

Harga sepatu Rp250.000 diberi diskon 20%. Setelah itu dikenai PPN 11% dari harga setelah diskon. Berapa rupiah yang dibayar?

1. Diskon: $20\% \times 250.000 = 50.000$, jadi harga menjadi 200.000.
2. PPN: $11\% \times 200.000 = 22.000$, jadi yang dibayar $200.000 + 22.000 = 222.000$.
3. Cara kilat dengan faktor pengali: $250.000 \times 0{,}8 \times 1{,}11 = 222.000$.

Yang dibayar Rp222.000. Perhatikan: diskon 20% lalu pajak 11% tidak sama dengan diskon 9%. (Diskon 9% akan memberi Rp227.500.)

MATEMATIKA NUSANTARA

Di pasar tradisional, pedagang dan pembeli fasih berpecahan: "setengah kilo bawang", "seperempat cabai rawit", "dua ons teri". Di Indonesia satu ons berarti 100 gram, yaitu $\frac{1}{10}$ kg, jadi setengah kilo sama dengan 5 ons (berbeda dengan *ounce* Inggris yang hanya ±28 gram). Di pedesaan Jawa juga dikenal bagi hasil sawah: *maro*, hasil panen dibagi dua sama besar antara pemilik dan penggarap (masing-masing $\frac{1}{2}$), dan *mertelu*, penggarap mendapat $\frac{1}{3}$ dan pemilik $\frac{2}{3}$. Sejak lama pecahan menjadi alat untuk berbagi dengan adil.

3.6 Persen naik-turun dan persen balik

Berita sering menulis "harga cabai naik 40%" atau "harga tiket turun 15%". Persentase perubahan selalu dibandingkan dengan **nilai lama**:

$$\text{persen perubahan} = \frac{\text{nilai baru} - \text{nilai lama}}{\text{nilai lama}} \times 100\%$$

RUMUS HIDUP **Persen perubahan**

$$P = \frac{B - L}{L} \times 100\%$$

Selisih nilai baru dan nilai lama, dibandingkan dengan nilai LAMA, lalu dijadikan persen.

L Harga lama `rupiah/kg` | B Harga baru `rupiah/kg` | P Persen perubahan `%`



Harga cabai berubah dari Rp**60.000** menjadi Rp**84.000** per kg, selisihnya **24.000** rupiah. Dibagi harga lama: **0,4**, atau **40**%. **Harga naik.**

Cek satuan: satuan harga (rupiah/kg) habis saat dibagi, jadi hasilnya murni persen.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERSEN-UBAH

Ada cara yang lebih sakti untuk menghitung perubahan persen: ubah setiap perubahan menjadi sebuah **faktor pengali**.

FAKTOR PENGALI

- Naik $p\%$ sama dengan dikali $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Contoh: naik 11% berarti dikali 1,11.
- Turun $p\%$ sama dengan dikali $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Contoh: diskon 20% berarti dikali 0,8.
- Beberapa perubahan berturut-turut: **kalikan** faktor-faktornya, jangan menjumlahkan persennya.
- Untuk berjalan mundur (persen balik): nilai awal $=$ nilai akhir : faktor pengali.

Tebak Dulu!

Harga cabai naik 50% pada minggu pertama, lalu turun 50% pada minggu kedua. Dibandingkan harga awal, harganya sekarang...

- sama dengan harga awal.
- naik 25%.
- turun 25%.
- turun 50%.

Jawabannya: turun 25%. Misalkan awalnya Rp40.000. Naik 50% menjadi Rp60.000. Turun 50% dari Rp60.000 berarti turun Rp30.000, jadi harganya Rp30.000, yaitu 75% dari harga awal. Dengan faktor pengali: $1{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$. Penurunan dihitung dari angka yang lebih besar, jadi "memakan" lebih banyak.

GRAFIK HIDUP

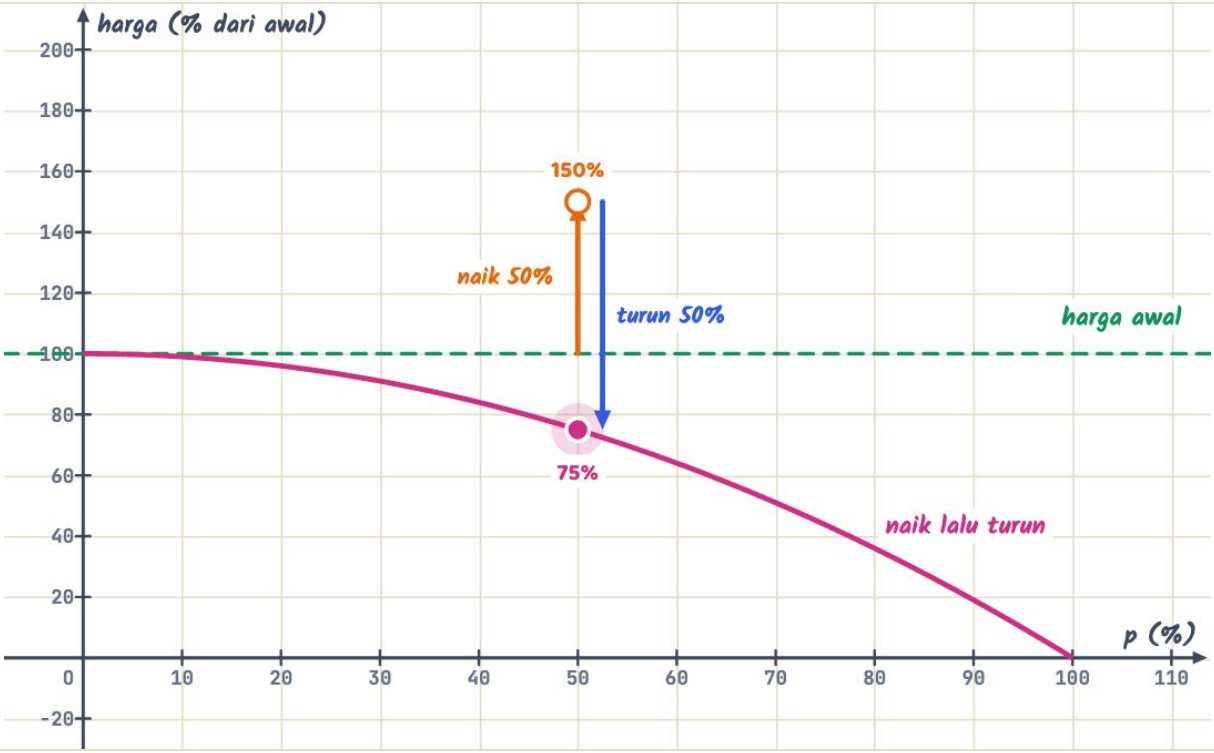
Naik p%, lalu turun p%: kembali ke harga awal?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3

$$H_{\text{akhir}} = 100\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 100 - \frac{p^2}{100}$$

$$100 \times 1{,}5 \times 0{,}5 = 75\%$$

Kenaikan dihitung dari harga awal, tetapi penurunan dihitung dari harga yang sudah naik (lebih besar). Hasilnya selalu di bawah harga awal.



rugi tepat p²/100 = 25% dari harga awal

Setelah naik	Setelah turun	Hilang dari harga awal
150 %	75 %	25 %

Seret titik magenta atau geser slider. Panah oranye naik $p\%$ dari harga awal, panah biru turun $p\%$ dari harga yang sudah naik. Apakah pernah ada $p > 0$ yang membuat harga kembali tepat ke 100%? Apa yang terjadi kalau urutannya dibalik (turun dulu, baru naik)?

KERJAKAN BERSAMA

Naik 25%, lalu turun 20%

Harga tiket bus naik 25% saat musim mudik Lebaran, lalu turun 20% setelah musim mudik usai. Apakah harganya kembali seperti semula?

1. Faktor pengali naik 25%: 1,25. Faktor pengali turun 20%: 0,8.
2. Perubahan total: $1{,}25 \times 0{,}8 = 1$.
3. Cek dengan harga Rp200.000: naik menjadi Rp250.000, lalu turun 20% dari Rp250.000 (yaitu Rp50.000) menjadi Rp200.000.

Ya, kembali tepat seperti semula! Rahasianya: $1{,}25 = \frac{5}{4}$ dan $0{,}8 = \frac{4}{5}$ saling berkebalikan. Naik 25% dibatalkan oleh turun 20%, bukan turun 25%.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

PERSEN YANG BERULANG: BUNGA MAJEMUK

Bank memberi bunga 6% per tahun. Pada *bunga tunggal*, bunga selalu dihitung dari setoran awal. Pada *bunga majemuk*, bunga tahun lalu ikut berbunga, sehingga setiap tahun saldo dikali 1,06. Setelah n tahun,

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dengan setoran Rp10.000.000 selama 10 tahun, bunga tunggal menghasilkan Rp16.000.000, sedangkan bunga majemuk menghasilkan $10.000.000 \times 1{,}06^{10} \approx$ Rp17.908.477. Selisih hampir Rp1,9 juta itu adalah "bunga dari bunga". Rumus yang sama dipakai untuk penyusutan (faktornya kurang dari 1), pertumbuhan penduduk, dan inflasi. Di Bab 6 dan bab fungsi eksponen kamu akan melihat grafiknya melengkung makin curam.

Sekarang kebalikannya. Di etalase tertulis: "Harga setelah diskon 20%: Rp120.000". Berapa harga sebelum diskon? Rp120.000 itu adalah 80% dari harga awal. Jadi $1\% = 120.000 : 80 = 1.500$ dan $100\% = 150.000$. Dengan faktor pengali: harga awal $= 120.000 : 0{,}8 = 150.000$. Cara berjalan mundur ini disebut **persen balik** (*reverse percentage*).

AWAS JEBAKAN

Harga sebelum diskon tidak didapat dengan menambahkan persen diskon ke harga sesudah diskon. $120.000 + 20\% \times 120.000 = 144.000$, padahal jawabannya 150.000. Diskon 20% itu dihitung dari harga **awal** yang belum kita ketahui, bukan dari harga akhir.

RUMUS HIDUP

Persen balik: harga sebelum diskon

$$H_0 = \frac{H}{1 - \frac{p}{100}}$$

Harga setelah diskon adalah (100 − p)% dari harga awal. Bagi dengan faktor pengalinya untuk kembali ke 100%.

- H Harga setelah diskon `rupiah`
- p Diskon `%`
- H_0 Harga sebelum diskon `rupiah`

HARGA SEBELUM DISKON

150.000

rupiah

Rp**120.000** adalah **80**% dari harga awal. Jadi 1% = Rp**1.500** dan 100% = Rp**150.000**. Jebakan: Rp**120.000** + **20**% × Rp**120.000** = Rp**144.000**, dan itu bukan harga awal!

Cek satuan: faktor pengali tidak bersatuan, jadi harga awal dan harga akhir sama-sama dalam rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERSEN-BALIK

COBA SENDIRI

Harga coret Harbolnas

Saat Harbolnas, sebuah headphone dijual Rp195.000 setelah diskon 35%. Berapa harga sebelum diskon, dan berapa rupiah kamu berhemat?

1. Setelah diskon 35%, yang dibayar adalah $100\% - 35\% = 65\%$ harga awal. Faktor pengalinya 0,65.
2. Harga awal $= 195.000 : 0{,}65 = 300.000$.
3. Hemat $= 300.000 - 195.000 = 105.000$. Cek: $35\% \times 300.000 = 105.000$. ✓

Harga sebelum diskon Rp300.000 dan kamu berhemat Rp105.000. (Jebakan: $195.000 \times 1{,}35 \approx 263.250$ **bukanlah harga awal.)**

Harbolnas & flash sale

Diskon bertingkat dan *cashback* lebih mudah dibandingkan jika setiap potongan diubah menjadi faktor pengali lalu dikalikan.

Struk belanja

PPN 11% berarti harga sebelum pajak dikali 1,11. Dari total struk, harga sebelum pajak didapat dengan persen balik.

Zakat mal

Zakat 2,5% dari harta yang mencapai nisab dan tersimpan setahun. Karena $2{,}5\% = \frac{1}{40}$, cukup bagi 40.

Resep kue

Resep bolu untuk 8 orang mau dibuat untuk 12 orang? Kalikan setiap bahan dengan $\frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$.

Baterai ponsel

Indikator 20% berarti tersisa $\frac{1}{5}$ dari kapasitas penuh baterai, bukan 20 menit lagi.

Hitung cepat pemilu

Lembaga survei menghitung persentase suara dari ribuan TPS sampel untuk memperkirakan hasil nasional.

3.7 Pecahan Mesir dan jumlah teleskop

Ingat trik Ancil di komik? Ia membagi 3 martabak untuk 4 orang sebagai $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ per orang, bukan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Pecahan berpembilang 1 seperti $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{4}$ disebut **pecahan satuan**. Menulis pecahan sebagai jumlah pecahan satuan yang **berbeda-beda** adalah kebiasaan bangsa Mesir kuno.

TAMU DARI MASA LALU

Papirus Rhind, yang disalin juru tulis Mesir bernama Ahmes sekitar 1650 SM, adalah salah satu buku matematika tertua di dunia. Bangsa Mesir kuno menulis hampir semua pecahan sebagai jumlah pecahan satuan yang berbeda, misalnya $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ dan $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. Papirus itu memuat tabel $\frac{2}{n}$ untuk bilangan ganjil n sampai 101, semacam "tabel perkalian" pecahan zaman itu. Pecahan istimewa $\frac{2}{3}$ bahkan punya lambang sendiri.

KERJAKAN BERSAMA **5 roti untuk 6 orang ala Mesir**

Lima roti dibagi rata untuk enam orang. Bagaimana cara memotongnya ala Mesir, dengan sesedikit mungkin potongan?

1. Setiap orang harus mendapat $5 : 6 = \frac{5}{6}$ roti.
2. Tulis sebagai pecahan satuan berbeda: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (cek: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$).
3. Belah 3 roti menjadi setengahan (6 potong) dan potong 2 roti menjadi pertigaan (6 potong).
4. Setiap orang mendapat satu potong setengah dan satu potong sepertiga.

Hanya 12 potongan, padahal kalau setiap roti dipotong enam, ada 30 potongan kecil. Pecahan Mesir ternyata sangat praktis!

Sekarang perhatikan pola kecil ini: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\times 3}$ dan $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3\times 4}$. Secara umum,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Akibatnya, penjumlahan panjang bisa "dilipat" seperti teropong. Suku-suku di tengah saling menghapus:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Jumlah seperti ini disebut **jumlah teleskop**. Hasilnya selalu sedikit kurang dari 1, dan makin dekat ke 1 saat n bertambah.

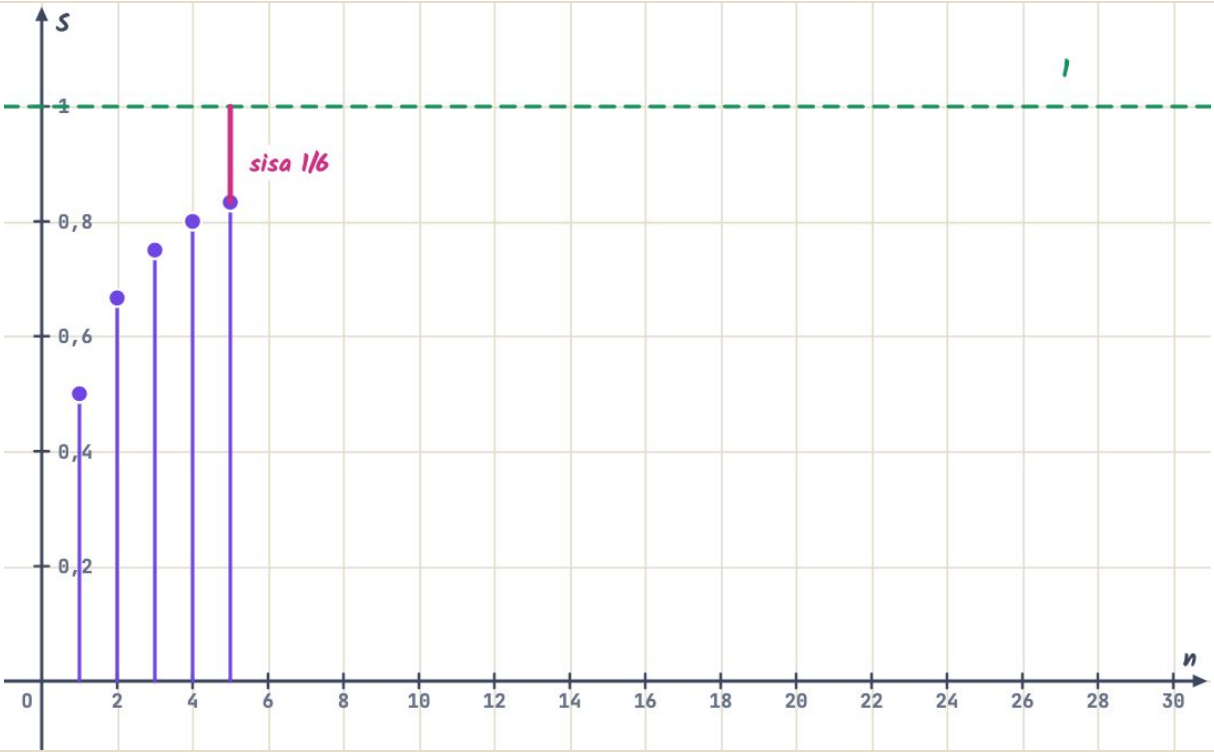
GRAFIK HIDUP

Tangga teleskop menuju 1

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333$$



Jumlah S
0,8333

Jarak ke 1
0,1667

Tambah banyak suku n. Setiap batang ungu adalah jumlah sementara S_n. Celah magenta di atasnya tepat $\frac{1}{n+1}$: makin kecil, tetapi tidak pernah nol. Kapan jumlahnya pertama kali melewati 0,9?

COBA SENDIRI **Jumlah lima suku tanpa repot**

Hitung $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$.

1. Kenali penyebutnya: $2 = 1 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $12 = 3 \times 4$, $20 = 4 \times 5$, $30 = 5 \times 6$.
2. Jadi ini S_5, jumlah teleskop dengan $n = 5$.
3. $S_5 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Hasilnya $\frac{5}{6}$. Bandingkan dengan cara biasa: samakan kelima penyebut menjadi 60, lalu $\frac{30+10+5+3+2}{60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$. Sama, tetapi jauh lebih repot!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RESEP RAKUS FIBONACCI

Apakah *setiap* pecahan antara 0 dan 1 bisa ditulis sebagai jumlah pecahan satuan yang berbeda? Bisa! Leonardo Fibonacci (1202) memberi resep "rakus": kurangkan pecahan satuan terbesar yang tidak melebihi sisa, lalu ulangi. Contoh $\frac{4}{13}$: karena $13 : 4 = 3{,}25$, pecahan satuan terbesar yang tidak melebihinya adalah $\frac{1}{4}$. Sisanya $\frac{4}{13} - \frac{1}{4} = \frac{3}{52}$. Karena $52 : 3 \approx 17{,}3$, berikutnya $\frac{1}{18}$, dengan sisa $\frac{3}{52} - \frac{1}{18} = \frac{1}{468}$. Jadi

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}.$$

Pembilang sisanya selalu mengecil (4 → 3 → 1), sehingga resep ini pasti berhenti. Masih banyak misteri terbuka tentang pecahan Mesir, misalnya dugaan Erdős–Straus bahwa $\frac{4}{n}$ selalu dapat ditulis sebagai jumlah tiga pecahan satuan.

Cek Cepat

$\frac{3}{5}$ sama dengan...

- 35%
- 53%
- 60%
- 0,6%

Harga Rp80.000 naik 25%. Harga barunya...

- Rp100.000
- Rp105.000
- Rp60.000
- Rp82.500

Bentuk pecahan paling sederhana dari $0{,}\overline{6} = 0{,}666\ldots$ adalah...

- $\frac{3}{5}$
- $\frac{6}{10}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{2}{3}$

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: dinding pecahan dari kertas

Bahan: 6 pita kertas yang sama panjang (misalnya 24 cm × 3 cm dari kertas bekas), pensil warna, penggaris, gunting.

1. Biarkan pita pertama utuh dan tulis "1".
2. Lipat pita kedua menjadi dua sama panjang, buka, lalu tulis $\frac{1}{2}$ pada setiap bagian.
3. Lipat pita ketiga dua kali (dua, lalu dua lagi) untuk membuat perempatan, dan pita keempat tiga kali untuk perdelapanan.
4. Lipat pita kelima menjadi tiga sama panjang seperti melipat surat. Lipat pita keenam menjadi tiga, lalu lipat dua: perenaman.
5. Warnai setiap pita dan susun berjajar seperti dinding bata, mirip gambar dinding pecahan di subbab 3.2.

Pertanyaan: Temukan minimal empat pasang pecahan senilai di dindingmu. Mana yang lebih besar: $\frac{2}{3}$ atau $\frac{5}{8}$? $\frac{3}{4}$ atau $\frac{5}{6}$? Mengapa panjang 24 cm dipilih? Lalu coba tantangan sulit: bagaimana membuat perlimaan hanya dengan melipat?

⚡ RINGKASAN KILAT — Bab 3 dalam 3 menit

☑️ Kamu sekarang bisa...

- memaknai **pecahan** sebagai bagian dari keseluruhan, sebagai hasil bagi, dan sebagai titik di garis bilangan
- membuat **pecahan senilai**, menyederhanakan, dan membandingkan pecahan
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi pecahan dengan alasan yang masuk akal, bukan sekadar hafalan
- mengubah pecahan ↔ **desimal** ↔ **persen**, termasuk desimal berulang seperti $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$
- menghitung diskon, PPN, zakat, bunga, **persen perubahan**, dan harga sebelum diskon (**persen balik**)

🔑 Istilah kunci

pecahan · pembilang · penyebut · pecahan campuran · pecahan senilai · menyederhanakan · kebalikannya · Desimal · desimal berulang · periode · bilangan rasional · Persen · faktor pengali · persen balik · pecahan satuan · jumlah teleskop

🧮 Rumus penting

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$$

Penjumlah pecahan. Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru jumlahkan banyak potongannya (pembilang).

$$H = H_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Harga setelah diskon. Diskon p% artinya kamu hanya membayar (100 − p)% dari harga awal.

$$P = \frac{B - L}{L} \times 100\%$$

Persen perubahan. Selisih nilai baru dan nilai lama, dibandingkan dengan nilai LAMA, lalu dijadikan persen.

$$H_0 = \frac{H}{1 - \frac{p}{100}}$$

Persen balik: harga sebelum diskon. Harga setelah diskon adalah (100 − p)% dari harga awal. Bagi dengan faktor pengalinya untuk kembali ke 100%.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Pecahan hanya bermakna jika bagian-bagiannya sama besar.
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ bukan $\frac{2}{5}$: pembilang dan penyebut tidak boleh dijumlahkan begitu saja.
- Persen selalu persen dari sesuatu, sehingga diskon 50% lalu 20% bukan diskon 70%.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=3

Teka-teki untuk Bab 4

Di perempatan dekat sekolah, lampu kuning A berkedip setiap 6 detik dan lampu kuning B berkedip setiap 8 detik. Tepat pukul 07.00.00 keduanya berkedip bersamaan. Pukul berapa keduanya pertama kali berkedip bersamaan lagi? Dan anehnya, jawabannya ada hubungannya dengan menjumlahkan $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$. Mengapa?

▼ **Intip petunjuk**

Tulis kelipatan 6: 6, 12, 18, 24, … dan kelipatan 8: 8, 16, 24, … Bilangan pertama yang muncul di kedua daftar adalah 24, jadi keduanya berkedip bersamaan lagi pukul 07.00.24. Angka 24 itu juga penyebut terkecil yang cocok untuk $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$. Bab 4 memberinya nama: KPK, kelipatan persekutuan terkecil.

BAB 4 · BILANGAN

04 Bilangan Prima: Atom Penyusun Semua Bilangan

Dua lampu berkedip dengan irama berbeda. Kapan keduanya menyala bersamaan? Bagaimana membagi bingkisan Lebaran serata mungkin? Mengapa kode rahasia di ponselmu sulit dibobol? Semua jawabannya bersembunyi di balik bilangan yang tidak mau dibagi oleh siapa pun.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menemukan semua **faktor** dan **kelipatan** sebuah bilangan, serta menjelaskan mengapa faktor selalu berpasangan;
- mengenali **bilangan prima** dan menyaringnya dengan **saringan Eratosthenes**;
- menuliskan **faktorisasi prima** dengan pohon faktor dan menghitung banyak faktor tanpa mendaftarnya;
- menghitung **FPB** dan **KPK**, lalu memilih yang tepat untuk soal cerita;
- memakai **ciri habis dibagi** 3, 9, dan 11, serta membuktikan bahwa bilangan prima **tidak pernah habis**.

LAMPU KEDIP DI PEREMPATAN

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Lampu A berkedip setiap 6 detik dan lampu B setiap 8 detik. Keduanya baru saja berkedip bersamaan. Kapan mereka berkedip bersamaan lagi?

14 detik lagi, karena 6 + 8 = 14.

48 detik lagi, karena 6 × 8 = 48.

24 detik lagi.

Tidak akan pernah bersamaan lagi.

Jawabannya: 24 detik lagi. Lampu A menyala pada detik ke-6, 12, 18, **24**, ..., sedangkan lampu B pada detik ke-8, 16, **24**, ... Angka pertama yang muncul di kedua daftar adalah 24. Mengalikan 6 × 8 memang menghasilkan waktu bersamaan (detik ke-48), tetapi itu sudah yang *kedua kalinya*. Jadi teka-teki dari Bab 3 terjawab: kalau mulai pukul 07.00.00, kedua lampu berkedip bersamaan lagi pukul 07.00.24. Bilangan 24 punya nama khusus: **KPK**. Bilangan yang sama juga menjadi penyebut terkecil untuk $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24}$, karena penyebut persekutuan terkecil tidak lain adalah KPK dari penyebut-penyebutnya. Di bab ini kamu akan tahu cara menemukan KPK tanpa mendaftar satu per satu.

4.1 Faktor dan kelipatan: dua sisi perkalian

Perhatikan perkalian $3 \times 4 = 12$. Kalimat ini bisa dibaca dari dua arah. Dari arah kiri: 3 dan 4 adalah **pembentuk** 12. Dari arah kanan: 12 adalah **hasil** dari mengalikan 3 (atau 4) dengan bilangan asli. Dua cara membaca ini melahirkan dua istilah penting.

DEFINISI

Bilangan asli a disebut **faktor** (pembagi) dari n jika n **habis dibagi** a, yaitu $n = a \times b$ untuk suatu bilangan asli b. Sebaliknya, n disebut **kelipatan** dari a.
Contoh: faktor 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 12. Kelipatan 4 adalah 4, 8, 12, 16, 20, ... (tidak ada habisnya).

Bahasa sederhana · Gampangnya begini. Kamu punya 12 permen dan ingin membaginya rata ke beberapa teman tanpa sisa. Kamu bisa membaginya ke 1, 2, 3, 4, 6, atau 12 orang. Itulah **faktor** 12. Sementara itu, kalau setiap bungkus berisi 4 permen, banyak permen di 1, 2, 3, ... bungkus adalah 4, 8, 12, ... Itulah **kelipatan** 4.

Ada cara yang sangat menyenangkan untuk "melihat" faktor: susunlah ubin. Dua belas ubin persegi bisa disusun menjadi persegi panjang 1×12, 2×6, atau 3×4. Setiap sisi persegi panjang itu adalah faktor 12. Coba sendiri di lab berikut, lalu cari bilangan yang *keras kepala*: bilangan yang hanya mau disusun menjadi satu baris panjang.

LAB MINI **Susun ubin: setiap sisi adalah faktor**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

13 ubin → 1 persegi panjang berbeda

PRIMA: cuma bisa 1 baris!

Faktor: 1, 13

1 × 13

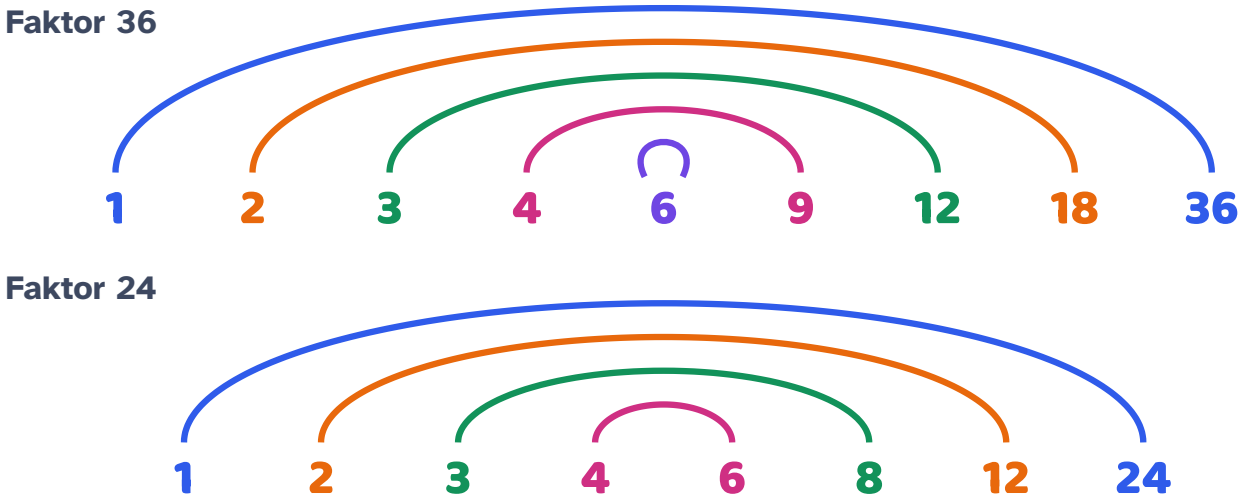


13 ubin tidak bisa disusun lebih dari 1 baris tanpa sisa.

Faktor	Banyak faktor	Jenis bilangan
1, 13	2	PRIMA (tepat 2 faktor)

Geser banyak ubin dari 1 sampai 60. Setiap persegi panjang menunjukkan satu pasangan faktor. Tekan ▶ **Jalankan** untuk parade bilangan: bilangan mana yang hanya punya **satu** persegi panjang? Bilangan mana yang bisa membentuk **persegi** sempurna?

Kalau kamu mendaftar faktor sambil berpasangan, terlihat pola yang indah. Hubungkan setiap pasangan yang hasil kalinya n dengan busur, dan jadilah sebuah **pelangi faktor**.



Pasangan faktor yang hasil kalinya 36 (atau 24) dihubungkan dengan busur sewarna. Pada 36, faktor 6 berpasangan dengan dirinya sendiri karena $6 \times 6 = 36$, sehingga banyak faktornya **ganjil** (9 buah). Pada 24, semua faktor punya pasangan berbeda, jadi banyaknya **genap** (8 buah).

CONTOH **Mendaftar semua faktor 48**

Tentukan semua faktor dari 48. Berapa banyaknya?

1. Cari pasangan perkalian, dimulai dari 1: 1×48, 2×24, 3×16, 4×12, 6×8. (Bilangan 5 dilewati karena 48 tidak habis dibagi 5.)
2. Berhenti di 7, karena $7 \times 7 = 49$ sudah melebihi 48. Pasangan sesudahnya hanya mengulang pasangan yang sudah ditemukan (8×6, 12×4, ...).
3. Kumpulkan: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Faktor 48 ada 10 buah. Trik "berhenti saat pasangan mulai berulang" membuat pencarian jauh lebih cepat.

FAKTOR TERBATAS, KELIPATAN TAK TERBATAS

Setiap faktor dari n paling besar n itu sendiri, jadi banyak faktornya selalu terbatas. Sebaliknya, kelipatan n bisa terus bertambah: $n, 2n, 3n, \ldots$ tanpa ujung. Bilangan 1 adalah faktor dari **semua** bilangan, dan setiap bilangan adalah faktor (sekaligus kelipatan) dari dirinya sendiri.

4.2 Bilangan prima dan saringan Eratosthenes

Di lab ubin tadi, kamu pasti menemukan bilangan keras kepala seperti 2, 3, 5, 7, 11, dan 13. Bilangan itu hanya bisa disusun menjadi satu baris. Faktornya cuma dua: 1 dan dirinya sendiri.

DEFINISI

Bilangan prima adalah bilangan asli yang tepat mempunyai **dua** faktor berbeda, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan asli lebih dari 1 yang bukan prima disebut **bilangan komposit** (bilangan tersusun). Bilangan 1 **bukan** prima dan **bukan** komposit, karena faktornya hanya satu.

Bahasa sederhana · Cara mudah mengingatnya: bilangan prima adalah bilangan yang "tidak bisa dibagi rata" kecuali menjadi 1 kelompok besar atau kelompok berisi 1. Contohnya 7 kelereng: tidak bisa dibagi rata ke 2, 3, 4, 5, atau 6 anak.

Tebak Dulu!

Dari 1 sampai 100, ada berapa bilangan prima?

- Sekitar 10, karena prima itu langka.
- Tepat 25.
- Sekitar 50, karena hampir semua bilangan ganjil adalah prima.
- Tidak ada yang tahu pasti.

Jawabannya: tepat 25. Separuh bilangan dari 1 sampai 100 memang ganjil, tetapi banyak di antaranya komposit: 9, 15, 21, 25, 27, 33, ... Kamu bisa menemukan ke-25 prima itu sendiri dengan saringan berumur lebih dari 2.000 tahun di bawah ini.

Bagaimana menemukan semua prima sampai 100 tanpa memeriksa satu per satu? Seorang ilmuwan Yunani memberi resep yang sangat cerdik: **jangan cari primanya, buang yang bukan prima**. Coret 1. Lingkari 2, lalu coret semua kelipatan 2. Bilangan terkecil yang tersisa (3) pasti prima. Lingkari, lalu coret kelipatannya. Ulangi. Yang tidak pernah tercoret adalah bilangan prima.

LAB MINI Saringan Eratosthenes: menangkap semua prima

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Para pencoret

(2) mencoret 4

Prima: 1

klik bilangan terkecil yang belum dicoret

Prima ditemukan
1

Belum diperiksa
94

Sekarang
`2 prima! Coret kelipatannya, mulai dari 2 × 2 = 4`

Klik bilangan terkecil yang belum dicoret: ia prima, dan semua kelipatannya akan dicoret otomatis. Atau tekan ▶ **Jalankan** untuk menonton seluruh saringan. Perhatikan: 3 mulai mencoret dari 9, 5 dari 25, dan 7 dari 49. Mengapa tidak dari 6, 10, dan 14? Lalu, mengapa saringan sudah boleh berhenti setelah 7? Terakhir, ganti susunan menjadi **6 kolom** dan temukan pola yang mengejutkan!

TRIK KAK LINTANG

Untuk memeriksa apakah sebuah bilangan prima, kamu **tidak** perlu mencoba semua pembagi. Cukup coba bilangan prima yang kuadratnya tidak melebihi bilangan itu. Mengapa? Faktor selalu berpasangan, dan dalam setiap pasangan pasti ada satu yang $\leq \sqrt{n}$. Contoh: untuk 97, cukup coba 2, 3, 5, dan 7 (karena $11^2 = 121 > 97$). Tidak ada yang membagi habis, jadi 97 prima.

RUMUS HIDUP

Batas uji bilangan prima

$$d_{\max} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

Untuk memeriksa apakah n prima, cukup coba bagi n dengan bilangan prima yang tidak lebih dari akar n. Kalau tidak ada yang membagi habis, n pasti prima.

n Bilangan yang diuji

$d_{\max}$ Pembagi terbesar yang perlu dicoba

PEMBAGI TERBESAR YANG PERLU DICOBA

9

komposit

Akar dari **91** kira-kira **9,539**, jadi cukup coba pembagi prima sampai **9**. Hanya ada **4** bilangan prima yang perlu dicoba. Hasil pemeriksaan: **91 = 7 × 13, jadi 91 BUKAN prima.**

Cek satuan: Batas uji adalah bilangan asli tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-UJI-PRIMA-AKAR

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Bilangan yang "kelihatan prima" belum tentu prima. Bilangan 51, 57, 87, dan 91 sering dikira prima, padahal $51 = 3 \times 17$, $57 = 3 \times 19$, $87 = 3 \times 29$, dan $91 = 7 \times 13$. Sebelum menyebut sebuah bilangan prima, ujilah dengan pembagi prima sampai akarnya.

ADU CEPAT

Prima atau bukan? Buktikan!

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bilangan genap dan kelipatan 5 sudah disingkirkan. Cukup uji 3 dan 7, karena $11 \times 11 = 121$ sudah lebih besar daripada 119.

TAMU DARI MASA LALU

Saringan ini dinamai menurut **Eratosthenes dari Kirene** (±276–194 SM), kepala perpustakaan besar Aleksandria di Mesir. Ia serba bisa: ahli matematika, geografi, astronomi, sekaligus penyair. Eratosthenes juga terkenal karena menaksir keliling Bumi dengan bayangan tongkat di dua kota, dan hasilnya cukup dekat dengan nilai sebenarnya. Lebih dari 2.000 tahun kemudian, gagasan saringannya masih dipakai komputer untuk mencari bilangan prima.

MITOS

"1 adalah bilangan prima karena hanya habis dibagi 1 dan dirinya sendiri."

FAKTA

Prima harus punya **tepat dua** faktor berbeda, sedangkan 1 hanya punya satu. Kalau 1 dianggap prima, faktorisasi tidak lagi tunggal: $6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 3$, dan seterusnya.

MITOS

"Semua bilangan ganjil adalah prima, dan semua bilangan genap bukan prima."

FAKTA

Bilangan 9, 15, 21, 25, dan 27 ganjil tetapi komposit. Sebaliknya, 2 genap tetapi prima. Bahkan 2 adalah **satu-satunya** prima genap, karena bilangan genap lain selalu habis dibagi 2.

MITOS

"Kalau dicari cukup jauh, bilangan prima lama-lama akan habis."

FAKTA

Prima memang makin jarang, tetapi **tidak pernah habis**. Euclid membuktikannya lebih dari 2.000 tahun lalu dengan cara yang sangat cerdik. Kamu akan melihat buktinya di subbab 4.6.

4.3 Faktorisasi prima: pohon faktor

Air tersusun dari atom hidrogen dan oksigen. Garam dapur tersusun dari atom natrium dan klorin. Dalam dunia bilangan, "atomnya" adalah bilangan prima: setiap bilangan komposit bisa dipecah terus sampai tinggal bilangan prima. Memecah bilangan menjadi perkalian bilangan prima disebut **faktorisasi prima**.

Alat yang paling menyenangkan untuk itu adalah **pohon faktor**. Tulis bilangannya di atas, pecah menjadi dua faktor, lalu pecah lagi setiap cabang yang belum prima. Cabang berhenti tumbuh ketika sampai di bilangan prima: itulah **daun**-nya.

LAB MINI Pohon faktor: pohon beda, daun sama

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4



$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Tekan 🌳 untuk memecah dengan cara lain. Apakah daunnya berubah?

Daun-daunnya	Bentuk pangkat	Pohon ke-
$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3^2 \times 5$	1

Pilih sebuah bilangan, lalu tekan 🌪 **Tumbuhkan pohon lain** berkali-kali. Setiap kali, bilangan dipecah dengan cara berbeda sehingga bentuk pohonnya berubah. Perhatikan daun-daunnya (lingkaran berwarna). Apakah daunnya pernah berubah?

TEOREMA DASAR ARITMETIKA

Setiap bilangan asli lebih dari 1 dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima, dan cara penulisannya **tunggal** (hanya satu), jika urutan faktornya tidak diperhatikan.

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Seperti sidik jari, faktorisasi prima adalah tanda pengenal unik setiap bilangan.

CONTOH **Faktorisasi prima 360 dengan dua cara**

Tuliskan faktorisasi prima dari 360 dalam bentuk pangkat.

1. **Cara pohon:** $360 = 36 \times 10$, lalu $36 = 6 \times 6 = (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ dan $10 = 2 \times 5$.
2. **Cara tangga (pembagian berulang):** bagi terus dengan prima terkecil yang mungkin: $360 : 2 = 180$, $180 : 2 = 90$, $90 : 2 = 45$, $45 : 3 = 15$, $15 : 3 = 5$, $5 : 5 = 1$.
3. Kedua cara menghasilkan daun yang sama: tiga buah 2, dua buah 3, dan satu buah 5.

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. **Cek:** $8 \times 9 \times 5 = 360$. ✓

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pohon faktor harus berhenti di bilangan prima, dan angka 1 tidak pernah boleh menjadi daun. Menulis $12 = 1 \times 12$ tidak memecah apa pun, sedangkan $12 = 4 \times 3$ belum selesai karena 4 masih bisa dipecah menjadi 2×2. Selalu periksa: kalikan lagi semua daunnya, hasilnya harus kembali ke bilangan semula.

Faktorisasi prima juga membuka rahasia **banyak faktor**. Ambil $72 = 2^3 \times 3^2$. Setiap faktor 72 dibentuk dengan memilih pangkat 2 (yaitu 0, 1, 2, atau 3: ada 4 pilihan) dan pangkat 3 (0, 1, atau 2: ada 3 pilihan). Susun semua pilihan itu dalam tabel:

×	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^0 = 1$	1	2	4	8
$3^1 = 3$	3	6	12	24
$3^2 = 9$	9	18	36	**72**

Tabel 4×3 itu memuat **semua** faktor 72, masing-masing tepat sekali. Jadi 72 punya $4 \times 3 = 12$ faktor. Inilah aturan umumnya: tambah 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan.

SIFAT BANYAK FAKTOR

Jika $n = p^a \times q^b \times r^c$ dengan p, q, r bilangan prima berbeda, banyak faktor positif n adalah

$$\tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1)$$

Contoh: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ punya $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ faktor.

RUMUS HIDUP **Banyak faktor dari faktorisasi prima**

$$\tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1)$$

Untuk n = $2^a \times 3^b \times 5^c$: tambahkan 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan semuanya. Itulah banyak faktor n, tanpa perlu mendaftarnya satu per satu.

- a Pangkat dari 2
- b Pangkat dari 3
- c Pangkat dari 5
- $\tau(n)$ Banyak faktor `faktor`

BANYAK FAKTOR

24

faktor

Di sini n = **360**. Pangkat 2 bisa dipilih dengan **4** cara (0 sampai **3**), pangkat 3 dengan **3** cara, dan pangkat 5 dengan **2** cara. Jadi n punya **4 × 3 × 2 = 24** faktor.

Cek satuan: Banyak faktor selalu bilangan asli, tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BANYAK-FAKTOR

Mengapa rumusnya (a + 1)(b + 1)?

Menurut Teorema Dasar Aritmetika, setiap faktor d dari $n = p^a q^b$ hanya boleh memuat prima p dan q, dengan pangkat yang tidak melebihi pangkatnya di n. Jadi $d = p^i q^j$ dengan $0 \le i \le a$ (ada $a+1$ pilihan) dan $0 \le j \le b$ (ada $b+1$ pilihan). Setiap pasangan pilihan (i, j) menghasilkan faktor yang berbeda, karena faktorisasi prima itu tunggal. Menurut aturan perkalian, banyak pasangan adalah $(a+1)(b+1)$. Untuk tiga prima atau lebih, alasannya sama persis.

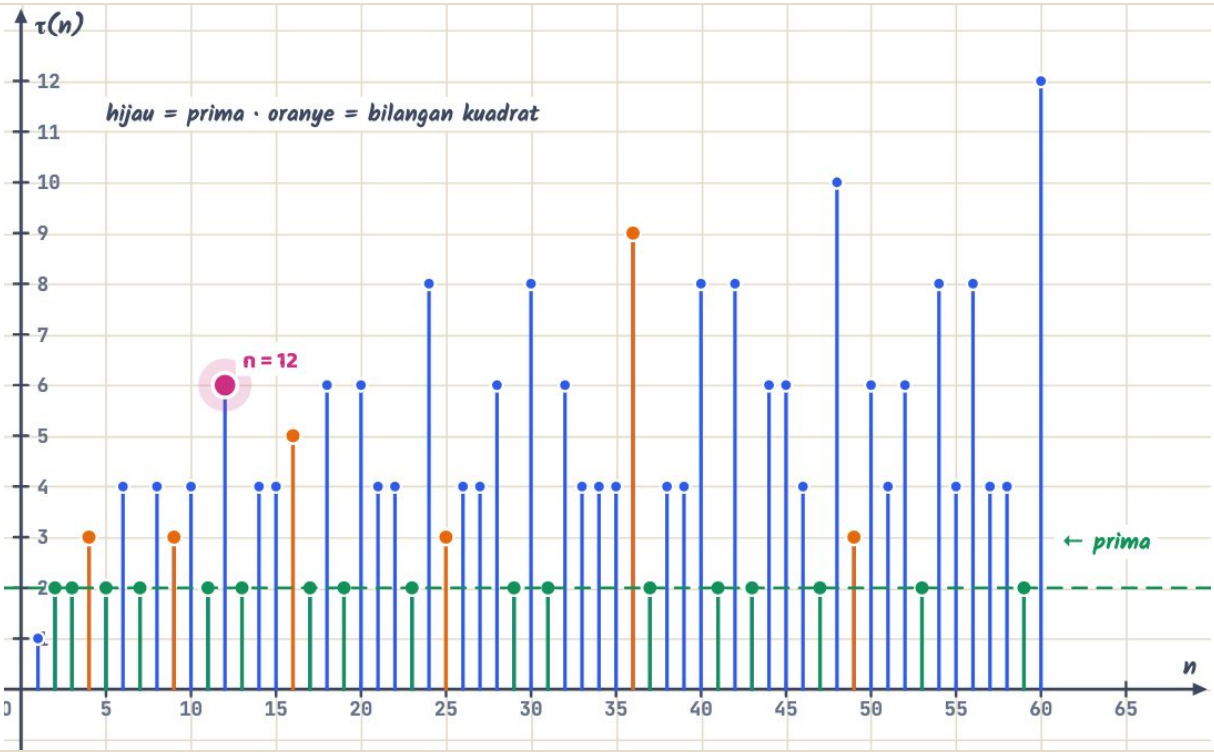
GRAFIK HIDUP

Grafik banyak faktor: prima selalu di lantai 2

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

$$\tau(n) = \text{banyak faktor dari } n$$

$$\tau(12) = 6$$



Faktor dari n

1, 2, 3, 4, 6, 12

Banyak faktor

6

Setiap tiang menunjukkan banyak faktor sebuah bilangan. Seret titik magenta ke kiri dan ke kanan. Perhatikan: tiang hijau (prima) **tidak pernah** lebih tinggi dari 2, dan tiang oranye (bilangan kuadrat) selalu bernilai ganjil. Bilangan mana di bawah 60 yang paling "kaya" faktor?

COBA SENDIRI **Bilangan terkecil dengan tepat 6 faktor**

Tentukan bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 6 faktor.

1. Banyak faktor adalah hasil kali (pangkat + 1). Angka 6 bisa ditulis sebagai 6 atau 3×2.
2. Bentuk 6: satu prima berpangkat 5, yaitu p^5. Yang terkecil $2^5 = 32$.
3. Bentuk 3×2: $p^2 \times q^1$. Agar kecil, beri pangkat besar pada prima kecil: $2^2 \times 3 = 12$.
4. Bandingkan: $12 < 32$. Cek faktor 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Tepat 6. ✓

Jawabannya 12. Strategi "pangkat terbesar untuk prima terkecil" sering muncul di soal olimpiade.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BILANGAN SEMPURNA

Jumlahkan semua faktor 6 selain 6 itu sendiri: $1 + 2 + 3 = 6$. Pas kembali ke 6! Bilangan seperti ini disebut **bilangan sempurna**. Berikutnya $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, lalu 496 dan 8.128. Euclid menemukan resepnya: jika $2^p - 1$ prima, maka $2^{p-1}(2^p - 1)$ sempurna. Contoh: $p = 3$ memberi $2^2 \times 7 = 28$. Sampai hari ini belum ada yang tahu apakah ada bilangan sempurna yang **ganjil**. Misteri berusia lebih dari 2.000 tahun ini masih menunggu pemecahnya. Siapa tahu kamu!

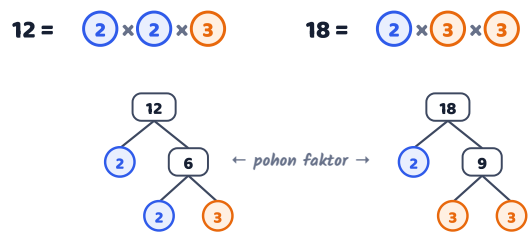
4.4 FPB dan KPK: membagi rata dan bertemu lagi

Ingat lampu kedip di komik? Waktu ketika dua lampu menyala bersamaan adalah kelipatan dari *kedua* selang kedipnya. Ada pula soal kebalikannya: membagi beberapa barang ke dalam kelompok yang sama persis, yang membutuhkan faktor dari *semua* bilangannya. Dua jenis soal ini punya dua alat.

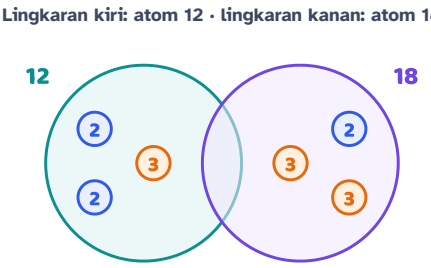
DEFINISI

FPB (faktor persekutuan terbesar) dari dua bilangan atau lebih adalah bilangan terbesar yang menjadi faktor dari semua bilangan itu.
KPK (kelipatan persekutuan terkecil) adalah bilangan positif terkecil yang menjadi kelipatan dari semua bilangan itu.
Contoh: faktor 12 adalah 1, 2, 3, 4, **6**, 12 dan faktor 18 adalah 1, 2, 3, **6**, 9, 18, jadi $\mathrm{FPB}(12, 18) = 6$.
Kelipatan 12 adalah 12, 24, **36**, ... dan kelipatan 18 adalah 18, **36**, ..., jadi $\mathrm{KPK}(12, 18) = 36$.

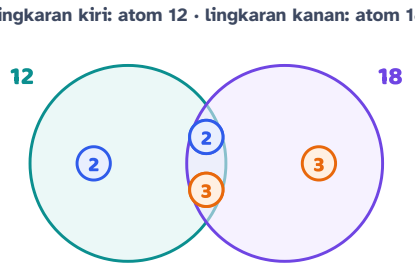
Mendaftar memang ampuh untuk bilangan kecil, tetapi melelahkan untuk bilangan besar. Cara yang lebih cerdas memakai faktorisasi prima. Tonton animasi berikut: setiap bola adalah satu "atom" prima.



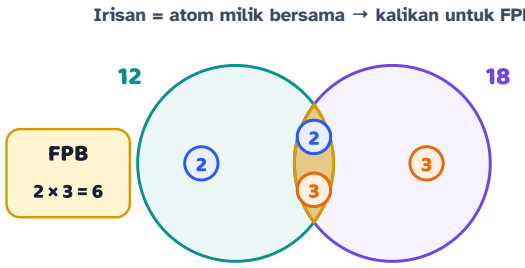
Langkah 1. Pecah kedua bilangan menjadi atom prima: $12 = 2 \times 2 \times 3$ dan $18 = 2 \times 3 \times 3$.



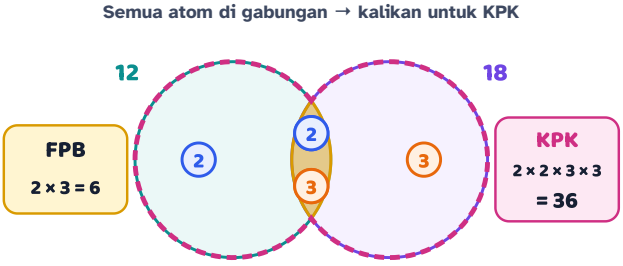
Langkah 2. Masukkan atom 12 ke lingkaran kiri dan atom 18 ke lingkaran kanan.



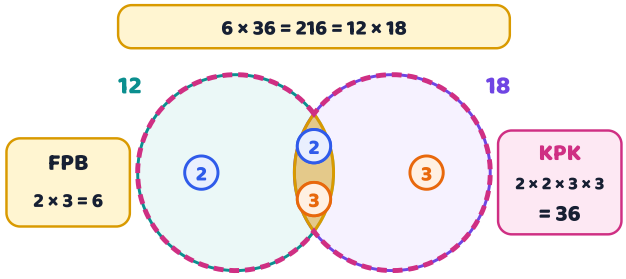
Langkah 3. Atom yang dimiliki **keduanya** (satu buah 2 dan satu buah 3) dipindah ke irisan dan dipakai bersama.



Langkah 4. FPB adalah hasil kali atom di **irisan**: $2 \times 3 = 6$. Itulah bagian terbesar yang dimiliki 12 dan 18 sekaligus.



Langkah 5. KPK adalah hasil kali **semua** atom di kedua lingkaran: $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$. Setiap atom dihitung sekali saja.



Langkah 6. Bonus ajaib: $\mathrm{FPB} \times \mathrm{KPK} = 6 \times 36 = 216$, sama persis dengan 12×18. Kebetulan? Tidak! Atom di irisan terpakai dua kali (sekali di FPB, sekali di KPK) dan atom lainnya sekali, persis seperti atom-atom pada 12×18.

ATURAN FPB DAN KPK LEWAT FAKTORISASI PRIMA

Tulis setiap bilangan dalam bentuk pangkat prima.

- **FPB:** ambil prima yang muncul di **semua** bilangan, dengan pangkat **terkecil**.
- **KPK:** ambil **semua** prima yang muncul, dengan pangkat **terbesar**.

Untuk dua bilangan a dan b selalu berlaku

$$\mathrm{FPB}(a,b) \times \mathrm{KPK}(a,b) = a \times b$$

▾ **Bukti singkat FPB × KPK = a × b**

Lihat satu prima p yang muncul dengan pangkat x di a dan pangkat y di b. Di FPB, pangkatnya $\min(x, y)$. Di KPK, pangkatnya $\max(x, y)$. Karena $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ (bilangan yang lebih kecil ditambah yang lebih besar sama dengan jumlah keduanya), pangkat p di $\text{FPB} \times \text{KPK}$ sama dengan pangkat p di $a \times b$. Ini berlaku untuk setiap prima, jadi kedua hasil kali sama.

RUMUS HIDUP

KPK dari FPB (dua lampu kedip)

$$\text{KPK}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{FPB}(a, b)}$$

Kalikan kedua bilangan, lalu bagi dengan FPB-nya. Hasilnya adalah KPK: waktu tunggu sampai dua lampu menyala bersamaan lagi.

a Lampu A berkedip tiap detik

b Lampu B berkedip tiap detik

KPK Nyala bersamaan setiap detik

NYALA BERSAMAAN SETIAP

36

detik

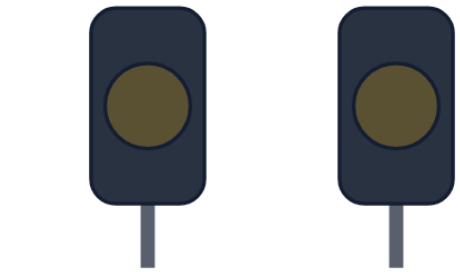
FPB(**12**, **18**) = **6**, jadi KPK = **12** × **18** : **6** = **36** detik. Cek: FPB × KPK = **6** × **36** = **216**, sama persis dengan a × b = **216**.

Cek satuan: KPK selang kedip dalam detik juga bersatuan detik.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KPK-DARI-FPB

LAB MINI Lampu kedip: kapan nyala bersamaan?

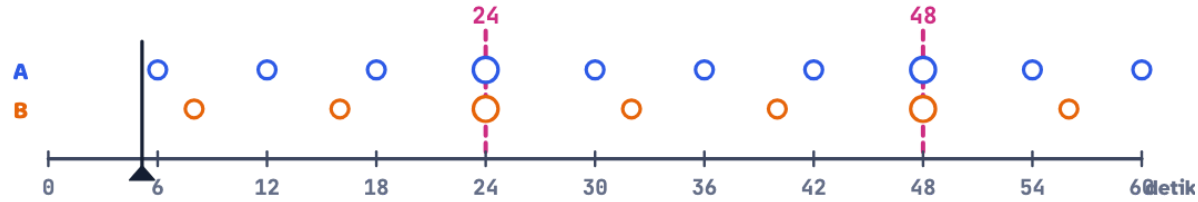
LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4



Kelipatan 6: 6, 12, 18, 24, 30, …

Kelipatan 8: 8, 16, 24, 32, 40, …

Bareng tiap KPK = 24 detik



Waktu	Bareng setiap (KPK)	Sudah bareng
5,1 detik	24 detik	0

Atur selang kedip lampu A dan B, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Titik-titik di garis waktu adalah kelipatan masing-masing; garis magenta menandai saat lampu menyala bersamaan. Coba 6 dan 8 (lampu di komik), lalu 4 dan 5, lalu 7 dan 11 (pertanyaan Ancil!). Kapan KPK sama dengan hasil kali kedua bilangan? Nyalakan lampu C untuk tantangan tiga bilangan.

TRIK KAK LINTANG

Bingung memilih FPB atau KPK di soal cerita? Tanyakan: **apakah barangnya dibagi, atau peristiwanya berulang?**

- Kata kunci *dibagi rata, sebanyak-banyaknya, ukuran terbesar, tanpa sisa* → **FPB**. Hasilnya tidak lebih besar daripada bilangan terkecil.
- Kata kunci *bersamaan lagi, serentak, bertemu kembali, setiap … sekali* → **KPK**. Hasilnya tidak lebih kecil daripada bilangan terbesar.

KERJAKAN BERSAMA

Bingkisan Lebaran (FPB)

Bu RT punya 60 bungkus kurma, 48 botol sirup, dan 36 kaleng biskuit. Semuanya akan dibagi rata ke dalam bingkisan Lebaran sebanyak-banyaknya, tanpa sisa. Berapa bingkisan yang bisa dibuat, dan apa isi setiap bingkisan?

1. "Dibagi rata, sebanyak-banyaknya" → cari FPB.
2. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $48 = 2^4 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$.
3. Prima yang ada di ketiganya: 2 (pangkat terkecil 2) dan 3 (pangkat terkecil 1). FPB $= 2^2 \times 3 = 12$.
4. Isi tiap bingkisan: $60 : 12 = 5$ kurma, $48 : 12 = 4$ sirup, $36 : 12 = 3$ biskuit.

Ada 12 bingkisan, masing-masing berisi 5 bungkus kurma, 4 botol sirup, dan 3 kaleng biskuit.

KERJAKAN BERSAMA

Jadwal ronda (KPK)

Pak Joko mendapat giliran ronda setiap 4 hari, sedangkan Pak Made setiap 6 hari. Malam ini, Senin, mereka ronda bersama. Pada hari apa mereka ronda bersama lagi untuk pertama kalinya?

1. "Bersama lagi" → cari KPK. $4 = 2^2$ dan $6 = 2 \times 3$, jadi $\text{KPK} = 2^2 \times 3 = 12$.
2. Mereka ronda bersama lagi 12 hari kemudian.
3. Satu minggu 7 hari, dan $12 = 7 + 5$. Jadi harinya maju 5 dari Senin: Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu.

Mereka ronda bersama lagi pada hari Sabtu, 12 hari dari sekarang.

COBA SENDIRI

Bus di halte

Di sebuah halte, bus jurusan A berangkat setiap 8 menit dan bus jurusan B setiap 12 menit. Pukul 05.30 keduanya berangkat bersamaan. Pukul berapa mereka berangkat bersamaan untuk ketiga kalinya setelah itu?

1. $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$, jadi $\mathrm{KPK} = 2^3 \times 3 = 24$ menit.
2. Keberangkatan bersama berikutnya: 05.30 + 24 menit = 05.54, lalu 06.18, lalu 06.42.
3. Cek: dari 05.30 ke 06.42 adalah 72 menit $= 3 \times 24$. ✓

Pukul 06.42. Hati-hati menghitung "ketiga kalinya": 05.30 adalah titik awal, belum dihitung.

⚠

AWAS JEBAKAN

KPK dua bilangan tidak selalu sama dengan hasil kalinya. $\mathrm{KPK}(4, 6) = 12$, bukan 24. KPK sama dengan $a \times b$ hanya jika kedua bilangan **relatif prima**, yaitu FPB-nya 1 (misalnya 4 dan 5, atau 7 dan 11). Periksa juga kewajaran: FPB tidak mungkin lebih besar daripada bilangan terkecil, dan KPK tidak mungkin lebih kecil daripada bilangan terbesar.

ADU CEPAT

KPK kilat: kapan lampu bareng?

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Daftar kelipatan bilangan yang lebih besar, lalu pilih yang pertama kali habis dibagi bilangan yang lebih kecil. Contoh: 6 dan 8 → 8, 16, 24 → 24.

ID

MATEMATIKA NUSANTARA

Kalender Jawa memadukan **minggu tujuh hari** (Senin sampai Minggu) dengan **pasaran lima hari** (Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon). Gabungan keduanya disebut *weton*, misalnya Kamis Legi. Kapan weton yang sama datang lagi? Setiap $\mathrm{KPK}(7, 5) = 35$ hari, yang disebut satu *selapan*. Di Bali, kalender *Pawukon* menjalankan sepuluh "minggu" sekaligus, dari yang panjangnya 1 hari sampai 10 hari, dalam satu siklus 210 hari. Bilangan $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ habis dibagi 1, 2, 3, 5, 6, 7, dan 10, tetapi tidak habis dibagi 4, 8, dan 9. Karena itu, minggu 4, 8, dan 9 hari dalam Pawukon memakai aturan sisipan khusus. Para penyusun kalender Nusantara sudah bermain KPK sejak berabad-abad lalu!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

ALGORITMA EUCLID: FPB TANPA FAKTORISASI

Memfaktorkan bilangan besar itu sulit, tetapi FPB-nya tetap mudah dicari! Kuncinya: setiap faktor persekutuan a dan b juga membagi selisihnya, sehingga $\mathrm{FPB}(a,b) = \mathrm{FPB}(b, a \bmod b)$, dengan $a \bmod b$ adalah sisa pembagian a oleh b. Ulangi sampai sisanya 0:

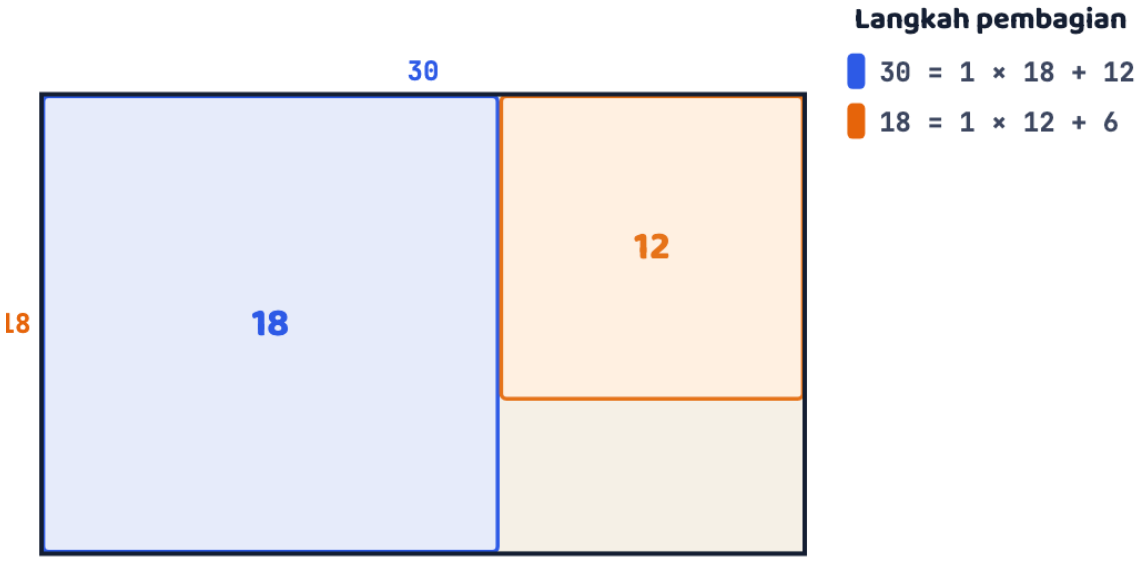
$$\mathrm{FPB}(1071, 462): \quad 1071 = 2 \times 462 + 147, \quad 462 = 3 \times 147 + 21, \quad 147 = 7 \times 21 + 0.$$

Jadi $\mathrm{FPB}(1071, 462) = 21$, tanpa pernah memfaktorkan apa pun. Algoritma berumur lebih dari 2.000 tahun ini termuat dalam kitab *Elemen* karya Euclid dan masih dipakai setiap hari oleh komputer, termasuk dalam kriptografi.

LAB MINI

Ubin terbesar: potong persegi demi persegi

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4



Persegi dipotong	Persegi terakhir	FPB
2	–	–

Lantai berukuran panjang × lebar (dalam desimeter) akan ditutup ubin persegi sebesar mungkin tanpa dipotong. Tekan ▶ **Jalankan**: dari lantai itu dipotong persegi terbesar berulang-ulang. Persegi terakhir yang pas tanpa sisa berukuran FPB! Bandingkan dengan langkah pembagian di kanan, lalu nyalakan **Tampilkan ubin FPB**. Coba juga dua bilangan relatif prima seperti 13 dan 8.

4.5 Ciri habis dibagi: detektif tanpa kalkulator

Koperasi sekolah menerima 7.416 buku tulis. Bisakah buku itu dibagi rata ke 9 kelas? Tanpa membagi panjang, jawabannya bisa diketahui dalam tiga detik: jumlahkan angka-angkanya. $7 + 4 + 1 + 6 = 18$, dan 18 habis dibagi 9. Jadi bisa! Berikut daftar ciri yang paling berguna.

Habis dibagi	Cirinya	Contoh
2	angka satuannya genap (0, 2, 4, 6, 8)	3.41**8**
3	jumlah semua angkanya habis dibagi 3	4.821 → 4 + 8 + 2 + 1 = 15
4	dua angka terakhirnya habis dibagi 4	7.3**16** → 16 = 4 × 4
5	angka satuannya 0 atau 5	2.02**5**
6	habis dibagi 2 **dan** 3	5.394 → genap, 5 + 3 + 9 + 4 = 21
8	tiga angka terakhirnya habis dibagi 8	13.**112** → 112 = 8 × 14
9	jumlah semua angkanya habis dibagi 9	7.416 → 7 + 4 + 1 + 6 = 18
11	selisih jumlah angka di posisi berselang-seling habis dibagi 11 (boleh 0)	9.273 → (9 + 7) − (2 + 3) = 11

SIFAT SISA BAGI 9 DAN 11

Sebuah bilangan dan **jumlah angka-angkanya** memiliki sisa yang sama jika dibagi 9 (juga jika dibagi 3). Sebuah bilangan dan **jumlah berselang-seling** angkanya (tambah, kurang, tambah, ..., dimulai dari angka satuan) memiliki sisa yang sama jika dibagi 11.

Bukti: mengapa jumlah angka bisa "membocorkan" sisa bagi 9?

Kuncinya: $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$. Setiap puluhan, ratusan, dan ribuan selalu "kelebihan 1" dari kelipatan 9. Untuk bilangan empat angka $\overline{abcd}$:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = \underbrace{(999a + 99b + 9c)}_{\text{kelipatan } 9} + (a + b + c + d).$$

Jadi sisa $\overline{abcd}$ dibagi 9 sama dengan sisa $a + b + c + d$ dibagi 9. Untuk 11, kuncinya $10 = 11 - 1$, $100 = 99 + 1$, dan $1000 = 1001 - 1$, sehingga $\overline{abcd} = (1001a + 99b + 11c) - a + b - c + d$. Bagian dalam kurung kelipatan 11, jadi yang menentukan adalah $d - c + b - a$.

Bahasa sederhana · Versi gampangnya: kalau jumlah angka sebuah bilangan habis dibagi 3, bilangan itu habis dibagi 3. Kalau jumlah angkanya habis dibagi 9, bilangan itu habis dibagi 9. Contoh: 126 → 1 + 2 + 6 = 9, jadi 126 habis dibagi 3 dan juga habis dibagi 9.

ADU CEPAT **Sisa bagi 9 kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Jumlahkan angka-angkanya, lalu cari sisa jumlah itu dibagi 9. Contoh: 4.728 → 4 + 7 + 2 + 8 = 21 → 21 dibagi 9 sisa 3. Kalau habis, ketik 0.



SULAP 1001 ALA ANCIL

Minta temanmu menulis bilangan tiga angka, misalnya 365, lalu menulisnya dua kali menjadi 365.365. Kamu bisa langsung menebak bahwa bilangan itu habis dibagi 7, 11, **dan** 13. Lebih ajaib lagi: kalau dibagi 7, lalu 11, lalu 13, hasilnya kembali menjadi 365! Rahasianya: $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1001$, dan $1001 = 7 \times 11 \times 13$.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

ANGKA SATUAN: HANYA SATUAN YANG PENTING

Angka satuan hasil kali hanya bergantung pada angka satuan bilangan yang dikalikan. Akibatnya, angka satuan pangkat selalu berputar dalam siklus. Untuk pangkat 3: $3, 9, 27, 81, 243, \ldots$ memiliki angka satuan $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$ dengan siklus 4. Karena 100 habis dibagi 4, angka satuan 3^{100} sama dengan angka satuan 3^4, yaitu 1. Gagasan "siklus sisa" ini akan menjadi senjata utama di Bab 38.

4.6 Prima tak berhingga dan kode rahasia

Makin jauh kita melangkah, prima makin jarang. Dari 1 sampai 100 ada 25 prima, tetapi dari 901 sampai 1.000 hanya ada 14. Apakah suatu saat prima akan habis, sehingga ada "prima terbesar"? Sekitar tahun 300 SM, Euclid menjawab: **tidak pernah**. Buktinya pendek dan sangat cerdik.



TEOREMA EUCLID

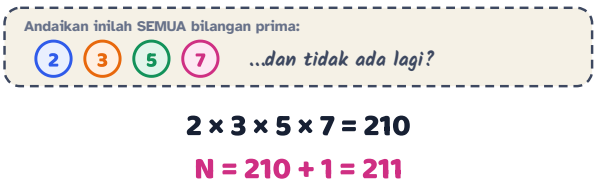
Banyaknya bilangan prima **tak berhingga**. Daftar prima mana pun yang terbatas pasti belum lengkap.



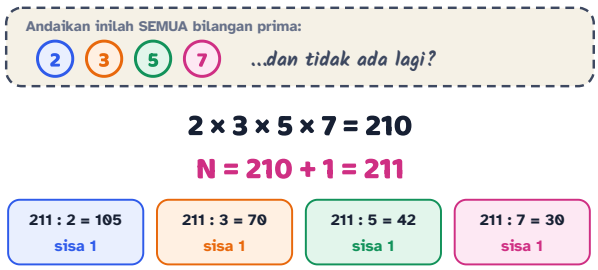
Langkah 1. Andaikan bilangan prima hanya sedikit, misalnya cuma 2, 3, 5, dan 7. (Cara ini berlaku untuk daftar terbatas apa pun.)



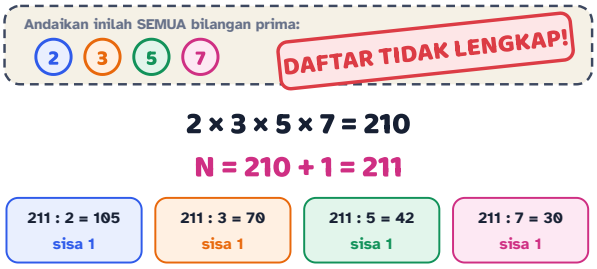
Langkah 2. Kalikan **semua** prima dalam daftar: $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.



Langkah 3. Tambahkan 1. Kita mendapat bilangan baru $N = 211$.



Langkah 4. Bagilah N dengan setiap prima di daftar. Sisanya **selalu 1**, karena 210 habis dibagi semuanya dan masih ada kelebihan 1. Jadi tidak ada prima di daftar yang membagi habis N.



Langkah 5. Padahal, menurut Teorema Dasar Aritmetika, N pasti punya faktor prima. Faktor itu tidak ada di daftar, jadi pasti ada prima **baru**. Daftar terbatas mana pun selalu bolong, sehingga prima tak berhingga banyaknya!

Tebak Dulu!

Bilangan $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30.031$. Apakah N pasti bilangan prima?

Ya, bukti Euclid menjamin N selalu prima.

Tidak. Ternyata $30.031 = 59 \times 509$.

Tidak, karena N habis dibagi 13.

Ya, karena N ganjil.

Jawabannya: tidak! $30.031 = 59 \times 509$. Bukti Euclid tidak menjanjikan N prima. Yang dijanjikan hanyalah bahwa faktor prima N **tidak ada** di daftar semula. Benar saja, 59 dan 509 adalah prima baru yang tidak termasuk 2, 3, 5, 7, 11, atau 13.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Bilangan "hasil kali prima ditambah 1" tidak selalu prima. Kesalahan yang sering terjadi adalah menyimpulkan bahwa N pasti prima. Bukti Euclid hanya menjamin bahwa faktor prima N adalah prima **baru**, entah N sendiri atau faktor-faktornya.

RUMUS HIDUP

Bilangan Euclid: kalikan prima, tambah 1

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$$

Kalikan k bilangan prima pertama, lalu tambahkan 1. Hasilnya tidak habis dibagi satu pun prima di dalam daftar itu.

k Banyak prima pertama

N Bilangan Euclid

BILANGAN EUCLID

211

✨ **kebetulan N prima**

Hasil kali **4** prima pertama (**2 × 3 × 5 × 7**) adalah **210**. Ditambah 1, hasilnya **211**. Dibagi prima mana pun di daftar itu, sisanya selalu 1. **211 adalah prima.**

Cek satuan: N adalah bilangan asli tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BILANGAN-EUCLID

GRAFIK HIDUP

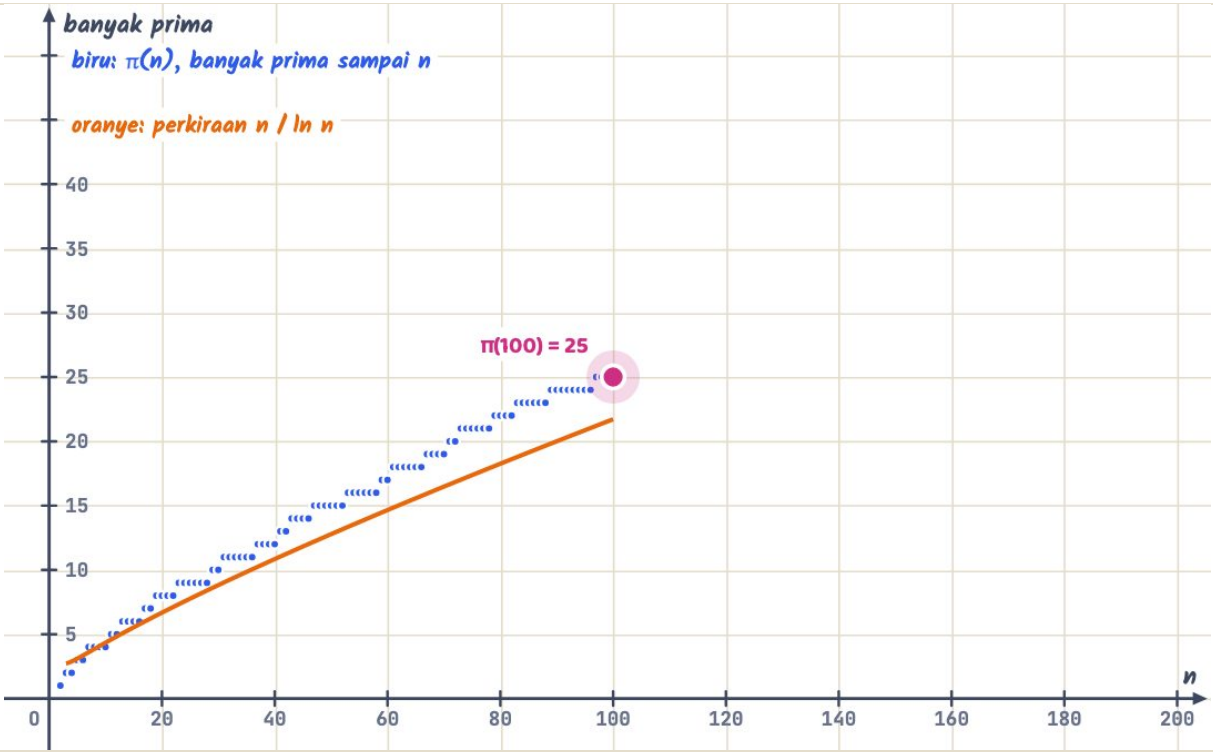
Prima makin jarang... tetapi tidak pernah habis

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$$

$$\pi(100) = 25 \qquad \frac{100}{\ln 100} \approx 21{,}71$$

π(n) adalah banyak bilangan prima dari 1 sampai n. Titik biru terus naik walaupun makin landai: prima makin jarang, tetapi tidak pernah berhenti muncul.



π(n)	n / ln n	Persentase prima
25	21,7	25 %

Seret titik magenta atau tekan ▶ **Jalankan**. Perhatikan persentase prima yang terus mengecil: sekitar 25% sampai 100, sekitar 23% sampai 200, dan hanya 16,8% sampai 1.000. Namun, tangga biru tidak pernah berhenti naik. Kurva oranye adalah perkiraan yang ditemukan Gauss muda saat berusia sekitar 15 tahun.

TAMU DARI MASA LALU

Euclid dari Aleksandria (±300 SM) menuliskan bukti di atas dalam kitab *Elemen*, salah satu buku pelajaran paling berpengaruh sepanjang sejarah. Lebih dari 2.000 tahun kemudian, orang masih berlomba mencari prima raksasa dengan komputer. Pada akhir 2024 ditemukan prima $2^{136.279.841} - 1$, yang jika ditulis memiliki lebih dari 41 juta angka! Prima berbentuk $2^p - 1$ seperti ini disebut **prima Mersenne**, sesuai nama biarawan Prancis Marin Mersenne (1588–1648).

Prima juga menjaga rahasiamu. Mengalikan dua prima itu mudah: $89 \times 97 = 8.633$ bisa dihitung dalam satu menit. Kebalikannya jauh lebih sulit. Coba temukan dua prima yang hasil kalinya 8.633 tanpa kalkulator! Untuk bilangan ratusan angka, komputer tercepat pun butuh waktu yang sangat lama. Ketimpangan "mudah dikalikan, sulit difaktorkan" inilah fondasi banyak sistem **kriptografi** (ilmu penyandian) yang melindungi pesan, mobile banking, dan transaksi digital.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

GEMBOK RSA DALAM SATU PARAGRAF

Sistem RSA memilih dua prima rahasia p dan q yang sangat besar, lalu mengumumkan hasil kalinya $n = pq$ sebagai "gembok terbuka". Siapa pun bisa mengunci pesan dengan n, tetapi untuk membuka kuncinya diperlukan p dan q. Pada kunci RSA 2.048 bit, n memiliki sekitar 617 angka. Dengan algoritma terbaik yang diketahui saat ini, memfaktorkan bilangan sebesar itu dianggap mustahil dalam waktu yang wajar. Contoh mini: $n = 8.633 = 89 \times 97$. Gembok ini mudah dibobol, karena kamu cukup mencoba pembagi prima sampai $\sqrt{8.633} \approx 93$.

MISTERI YANG BELUM TERPECAHKAN

Prima menyimpan teka-teki yang belum terjawab sampai sekarang. **Dugaan Goldbach** (1742): setiap bilangan genap lebih dari 2 adalah jumlah dua prima, misalnya $10 = 3 + 7$ dan $28 = 11 + 17$. Komputer sudah memeriksanya sampai bilangan yang sangat besar, tetapi belum ada yang bisa membuktikannya untuk *semua* bilangan. **Dugaan prima kembar**: pasangan prima yang berselisih 2, seperti (11, 13), (17, 19), dan (41, 43), tak berhingga banyaknya. Belum terbukti juga!

Jadwal ronda

Warga yang bergiliran ronda setiap 3, 4, atau 5 hari bertemu di pos ronda pada hari ke-KPK.

Bingkisan Lebaran

Membagi kue, sirup, dan kurma serata mungkin ke bingkisan sebanyak-banyaknya memakai FPB.

Bus di halte

Bus dua jurusan dengan selang keberangkatan berbeda kembali berangkat bersamaan setiap KPK menit.

Kode rahasia digital

Pesan di ponsel dan transaksi bank dilindungi kunci yang dibuat dari hasil kali dua prima raksasa.

Roda gigi mesin

Banyak gigi dua roda gigi yang bersinggungan sering dipilih relatif prima, agar setiap gigi bergiliran bertemu semua gigi lawannya dan ausnya merata.

Ubin lantai

Ukuran ubin persegi terbesar yang pas menutup lantai tanpa dipotong adalah FPB panjang dan lebar lantai.

Cek Cepat

Pasangan bilangan manakah yang relatif prima (FPB-nya 1)?

- 12 dan 18
- 9 dan 16
- 14 dan 21
- 15 dan 25

Bilangan manakah yang habis dibagi 11?

- 1.234
- 5.678
- 2.519
- 3.412

Banyak faktor positif dari $2^3 \times 3 \times 5^2$ adalah...

- 24
- 6
- 30
- 600

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: orkestra tepuk KPK

Bahan: dua atau tiga teman atau anggota keluarga, kertas, pensil (boleh memakai aplikasi metronom di HP).

1. Hitung bersama dengan suara keras dan irama tetap: 1, 2, 3, ..., sampai 36.
2. Pemain A bertepuk tangan setiap hitungan kelipatan 4. Pemain B menghentakkan kaki setiap kelipatan 6.
3. Setiap kali tepuk dan hentak terjadi **bersamaan**, semua berteriak "BARENG!". Catat hitungan ke berapa saja itu terjadi.
4. Ulangi dengan pasangan irama lain: 3 dan 5, 6 dan 9, serta 2 dan 7.
5. Tantangan akhir: tambahkan pemain C yang bersiul setiap kelipatan 5 (hitung sampai 60) untuk irama 4, 6, dan 5.

Pertanyaan: Untuk setiap pasangan, tebak dulu kapan "BARENG!" pertama terjadi, lalu cocokkan dengan percobaanmu. Mengapa irama 4 dan 6 bertemu lebih cepat daripada $4 \times 6 = 24$, tetapi irama 3 dan 5 baru bertemu tepat di $3 \times 5 = 15$?

RINGKASAN KILAT Bab 4 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menemukan semua **faktor** dan **kelipatan** sebuah bilangan, serta menjelaskan mengapa faktor selalu berpasangan
- mengenali **bilangan prima** dan menyaringnya dengan **saringan Eratosthenes**
- menuliskan **faktorisasi prima** dengan pohon faktor dan menghitung banyak faktor tanpa mendaftarnya
- menghitung **FPB** dan **KPK**, lalu memilih yang tepat untuk soal cerita
- memakai **ciri habis dibagi** 3, 9, dan 11, serta membuktikan bahwa bilangan prima **tidak pernah habis**

Istilah kunci

faktor · kelipatan · Bilangan prima · bilangan komposit · faktorisasi prima · pohon faktor · FPB · KPK · relatif prima · kriptografi

Rumus penting

$$d_{\max} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

Batas uji bilangan prima. Untuk memeriksa apakah n prima, cukup coba bagi n dengan bilangan prima yang tidak lebih dari akar n. Kalau tidak ada yang membagi habis, n pasti prima.

$$\tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1)$$

Banyak faktor dari faktorisasi prima. Untuk n = $2^a \times 3^b \times 5^c$: tambahkan 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan semuanya. Itulah banyak faktor n, tanpa perlu mendaftarnya satu per satu.

$$\text{KPK}(a,b) = \frac{a \times b}{\text{FPB}(a,b)}$$

KPK dari FPB (dua lampu kedip). Kalikan kedua bilangan, lalu bagi dengan FPB-nya. Hasilnya adalah KPK: waktu tunggu sampai dua lampu menyala bersamaan lagi.

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$$

Bilangan Euclid: kalikan prima, tambah 1. Kalikan k bilangan prima pertama, lalu tambahkan 1. Hasilnya tidak habis dibagi satu pun prima di dalam daftar itu.

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- Bilangan yang "kelihatan prima" belum tentu prima.
- Pohon faktor harus berhenti di bilangan prima, dan angka 1 tidak pernah boleh menjadi daun.
- KPK dua bilangan tidak selalu sama dengan hasil kalinya.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=4

🧩 Teka-teki untuk Bab 5

Kak Lintang membentangkan peta Sumatra berskala 1 : 250.000. Ayu mengukur jarak dua kota di peta: 8 cm. Dimas langsung bertanya, "Kenapa skalanya tidak ditulis 4 : 1.000.000 saja? Bukankah sama?" Siapa yang benar, dan berapa kilometer jarak sebenarnya kedua kota itu?

▼ **Intip petunjuk**

Dimas benar: kalikan kedua ruas $1 : 250.000$ dengan 4, dan perbandingannya tetap sama, persis seperti pecahan senilai. Kebalikannya, membagi kedua ruas dengan FPB menyederhanakan perbandingan. Untuk jarak: 1 cm di peta mewakili 250.000 cm = 2,5 km. Jadi 8 cm mewakili … km? Bab 5 membahas rasio, skala, dan perbandingan sampai tuntas!

BAB 5 · BILANGAN

05 Rasio, Proporsi & Laju: Seni Membandingkan

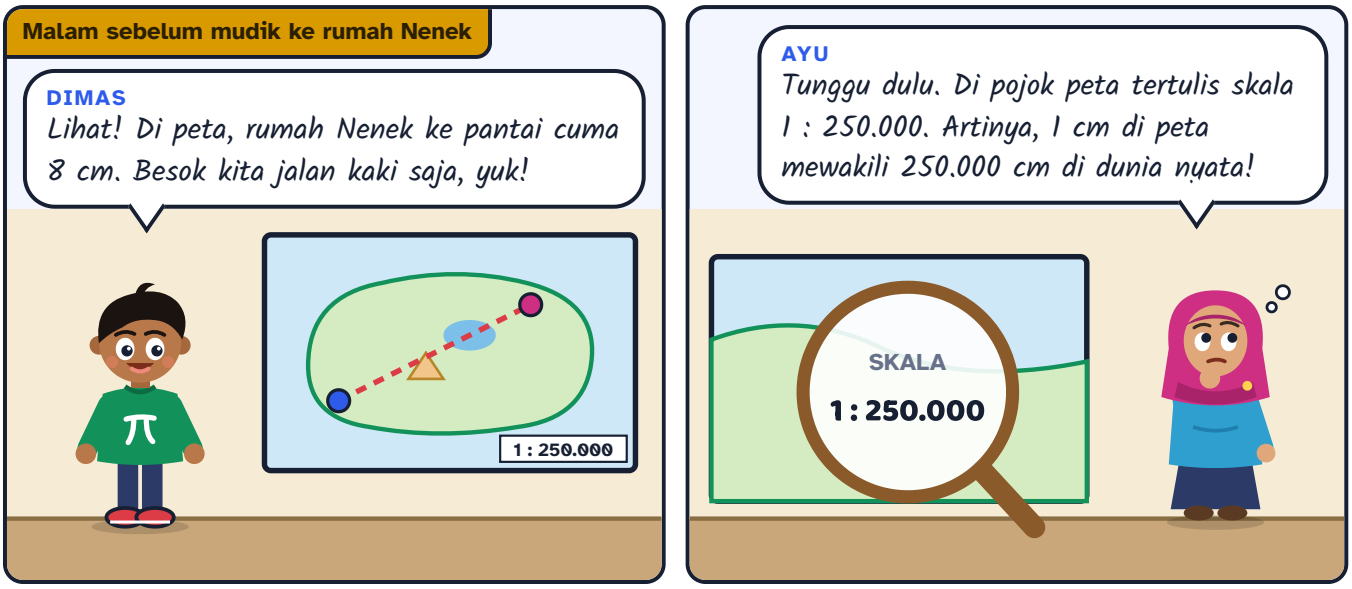
Mengapa 8 cm di peta bisa berarti 20 km perjalanan? Kalau 4 tukang membangun rumah dalam 30 hari, berapa lama jika tukangnya 6 orang? Semua jawabannya berawal dari satu ide sederhana: membandingkan dengan cara membagi.

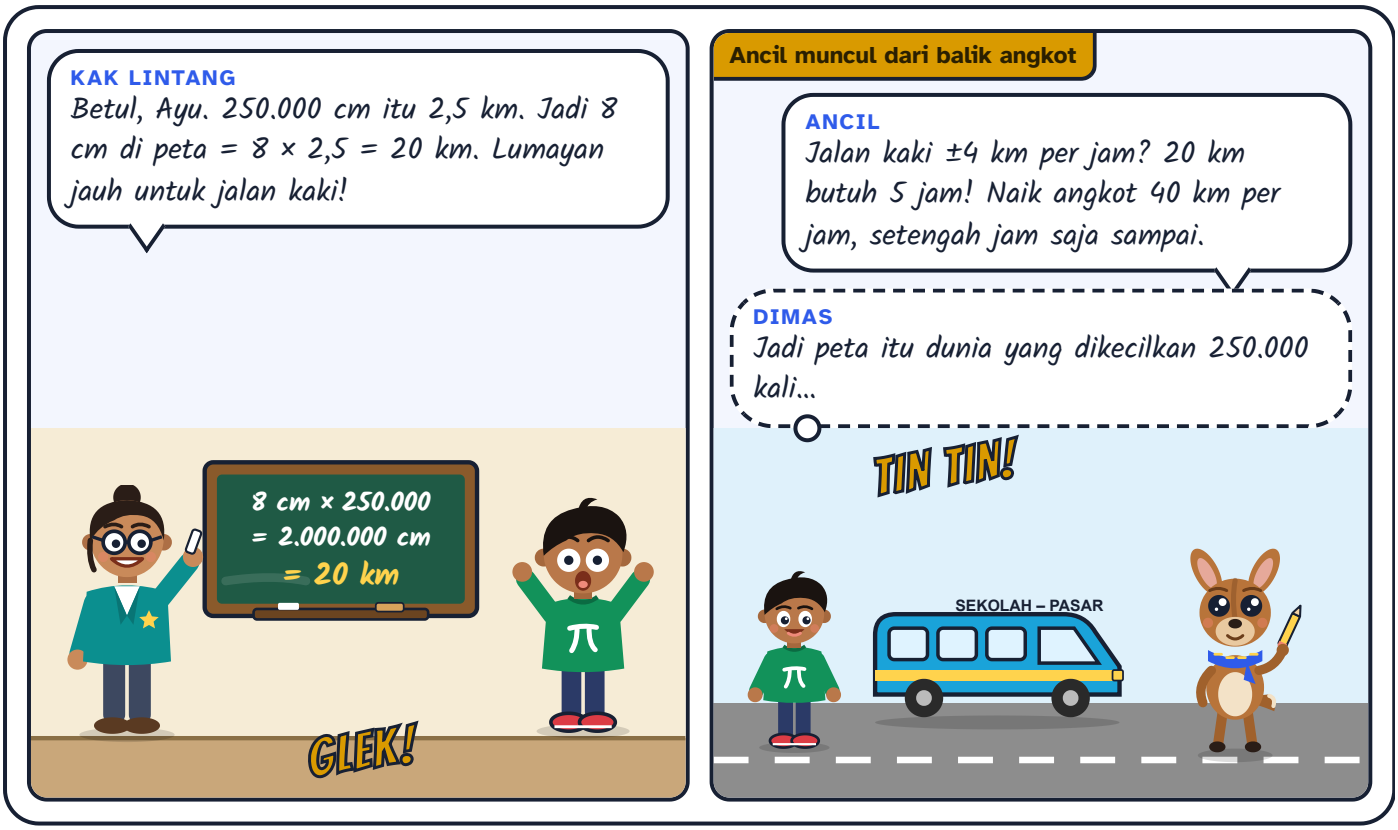
Setelah bab ini, kamu bisa

- menyatakan perbandingan dua besaran sebagai **rasio** paling sederhana dan **membagi** suatu jumlah menurut rasio;
- memakai **skala** untuk mengubah jarak di peta atau denah menjadi jarak sebenarnya, dan sebaliknya;
- membedakan **perbandingan senilai** dan **berbalik nilai**, lalu menyelesaikan soal ceritanya dengan tabel, perkalian silang, atau grafik;
- menghitung **laju** (kecepatan, debit, harga satuan), termasuk kecepatan rata-rata dan kerja bersama;
- mengenali **variasi langsung dan invers** $y = kx^n$ beserta grafiknya.

PETA MUDIK DIMAS

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Ayu mencampur 2 gelas sirup dengan 3 gelas air. Dimas mencampur 4 gelas sirup dengan 5 gelas air. Minuman siapa yang terasa lebih manis?

- Sama manisnya, karena pada keduanya air hanya 1 gelas lebih banyak daripada sirup.
- Minuman Ayu, karena airnya lebih sedikit.
- Minuman Dimas, karena bagian sirupnya lebih besar.
- Tidak bisa ditentukan tanpa mencicipinya.

Jawabannya: minuman Dimas. Yang menentukan rasa bukan *selisih* gelas, melainkan **perbandingan**. Pada minuman Ayu, sirup mengisi $\frac{2}{5} = 40\%$ campuran. Pada minuman Dimas, sirup mengisi $\frac{4}{9} \approx 44\%$. Membandingkan dengan cara **membagi**, bukan mengurangi, adalah inti seluruh bab ini.

5.1 Rasio: membandingkan dengan cara membagi

Dimas punya 12 kelereng, Ayu punya 4. Ada dua cara membandingkannya. Dengan **mengurangi**: "Kelereng Dimas 8 butir lebih banyak." Dengan **membagi**: "Kelereng Dimas 3 kali kelereng Ayu." Cara kedua inilah yang disebut **rasio** atau perbandingan.

DEFINISI

Rasio dua besaran sejenis a dan b (dengan $b \neq 0$) ditulis $a : b$ dan dibaca "a berbanding b". Nilainya sama dengan pecahan $\frac{a}{b}$. Seperti pecahan, rasio dapat **disederhanakan** dengan membagi kedua sukunya dengan bilangan yang sama, paling cepat dengan FPB-nya (ingat Bab 4).

$$12 : 4 = 3 : 1 \qquad 12 : 18 = 2 : 3 \ \text{(dibagi FPB 6)}$$

Bahasa sederhana · Rasio itu seperti resep. "Gula dan tepung 2 : 3" artinya setiap 2 sendok gula dipasangkan dengan 3 sendok tepung. Kalau gulanya 4 sendok, tepungnya 6 sendok. Angkanya boleh membesar, asalkan **pasangannya tetap seimbang**.

Rasio juga bisa membandingkan lebih dari dua besaran. Adonan kue dengan tepung : gula : mentega = 4 : 2 : 1 berarti tepungnya dua kali gula, dan gulanya dua kali mentega. Dua rasio yang nilainya sama, seperti 2 : 3 dan 4 : 6, disebut **rasio senilai**.

AWAS JEBAKAN

Sebelum menulis rasio, samakan dulu satuannya. Rasio 20 cm terhadap 1 m **bukan** 20 : 1, melainkan 20 cm : 100 cm = 1 : 5. Setelah satuannya sama, satuan itu boleh dihilangkan, karena rasio adalah bilangan tanpa satuan.

CONTOH **Pensil dan meja**

Panjang pensil Ayu 18 cm, sedangkan panjang mejanya 1,2 m. Tentukan rasio panjang pensil terhadap panjang meja dalam bentuk paling sederhana.

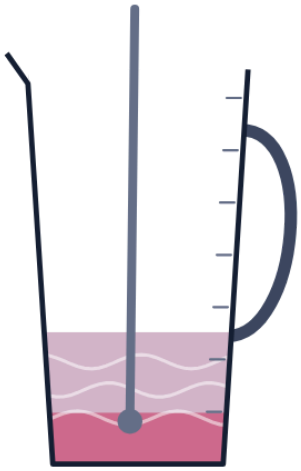
1. Samakan satuan: 1,2 m = 120 cm.
2. Rasionya 18 : 120. FPB dari 18 dan 120 adalah 6.
3. Bagi kedua suku dengan 6: $18 : 120 = 3 : 20$.

Rasionya 3 : 20. Artinya, panjang meja $\frac{20}{3} \approx 6{,}7$ kali panjang pensil: kira-kira tujuh pensil yang dijajarkan.

LAB MINI

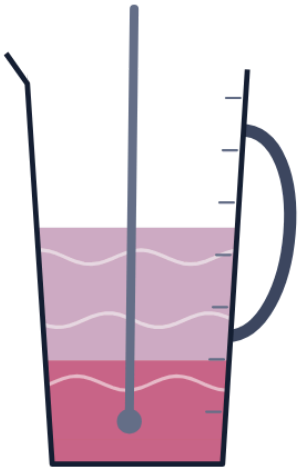
Dapur sirup: rasio senilai, rasa pun sama

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5



Teko A

sirup : air = 2 : 3



Teko B

sirup : air = 4 : 5

Bagian sirup

A: 2 dari 5 bagian — 40%

pecahan 2/5

B: 4 dari 9 bagian — 44,4%

pecahan 4/9

Uji perkalian silang:

2×9 = 18 < 20 = 4×5

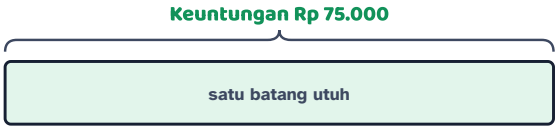
B lebih manis

Mengaduk...

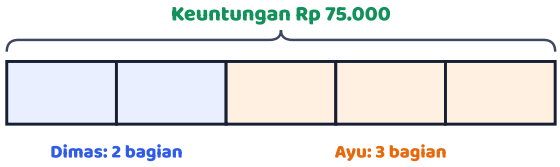
Kadar sirup A	Kadar sirup B	Lebih manis
40 %	44,4 %	teko B

Atur takaran sirup dan air di kedua teko, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk mengaduk. Tekan ⚖ **Gandakan A ke B**: teko B berisi dua kali sirup *dan* dua kali air teko A. Apakah warnanya berbeda? Bisakah kamu membuat dua campuran yang sama manis dengan angka yang berlainan?

Soal rasio yang paling sering muncul dalam kehidupan adalah **membagi menurut rasio**: membagi uang, hasil panen, atau tugas secara adil sesuai kesepakatan. Kuncinya, ubah rasio menjadi **bagian-bagian yang sama besar**. Model batang di bawah ini membuatnya terlihat jelas.



Langkah 1. Dimas dan Ayu berjualan es teh di bazar sekolah. Modal Dimas Rp 20.000 dan modal Ayu Rp 30.000. Keuntungannya, Rp 75.000, akan dibagi menurut rasio modal mereka.



Langkah 2. Rasio modal Rp 20.000 : Rp 30.000 = 2 : 3. Potong batang keuntungan menjadi 2 + 3 = 5 bagian yang sama besar: 2 bagian untuk Dimas dan 3 bagian untuk Ayu.



Langkah 3. Satu bagian bernilai Rp 75.000 ÷ 5 = Rp 15.000.



Langkah 4. Dimas mendapat 2 × Rp 15.000 = Rp 30.000, sedangkan Ayu mendapat 3 × Rp 15.000 = Rp 45.000.



Langkah 5. Selalu cek dua hal: jumlahnya kembali utuh (Rp 30.000 + Rp 45.000 = Rp 75.000) dan rasionya tetap (30.000 : 45.000 = 2 : 3). Keduanya benar!

ATURAN MEMBAGI MENURUT RASIO

Jika jumlah T dibagi menurut rasio $a : b$, maka

$$\text{bagian pertama} = \frac{a}{a+b} \times T, \qquad \text{bagian kedu}$$

Penyebutnya $a + b$, yaitu banyak seluruh bagian, bukan b.

RUMUS HIDUP **Membagi menurut rasio**

$$A = \frac{a}{a+b} \times T$$

Jumlahkan suku-suku rasio untuk mendapat banyak bagian, bagi totalnya, lalu kalikan dengan suku milikmu.

a Suku pertama `bagian` | b Suku kedua `bagian` | T Total `ribu Rp` | A Bagian pertama `ribu Rp`

BAGIAN PERTAMA

30

`ribu Rp`

✨ **setiap bagian bernilai bulat**

Total **75** ribu dibagi menjadi **5** bagian sama besar, masing-masing **15** ribu. Orang pertama mendapat **2** bagian = **30** ribu, orang kedua **3** bagian = **45** ribu. Jumlahnya kembali **75** ribu.

Cek satuan: ribu rupiah × (bagian ÷ bagian) = ribu rupiah. Suku-suku rasio tidak bersatuan, jadi satuan hasilnya sama dengan satuan total.

`RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BAGI-RASIO`

MATEMATIKA NUSANTARA

Petani di pedesaan Jawa sejak lama mengenal bagi hasil sawah antara pemilik lahan dan penggarap. Dalam sistem *maro*, hasil panen dibagi dua sama besar (rasio 1 : 1). Dalam sistem *mertelu*, hasil panen dibagi menjadi tiga bagian: satu pihak menerima satu bagian dan pihak lain dua bagian (rasio 1 : 2), sesuai kesepakatan. Nelayan pun membagi hasil tangkapan antara pemilik perahu dan para awak dengan rasio yang disepakati sebelum melaut. Membagi menurut rasio adalah cara leluhur kita menjaga keadilan!

5.2 Skala: dunia yang dikecilkan

Teka-teki di akhir Bab 4 menyinggung peta berskala 1 : 250.000. Saatnya membongkar artinya. Peta, denah rumah, dan maket adalah gambar dunia nyata yang **diperkecil dengan rasio yang sama** ke segala arah. Rasio itu disebut **skala**.

DEFINISI

Skala adalah rasio antara jarak pada gambar (peta, denah, atau maket) dan jarak sebenarnya, dengan **satuan yang sama**:

$$\text{skala} = \text{jarak pada peta} : \text{jarak sebenarnya}$$

Skala 1 : 250.000 berarti 1 cm pada peta mewakili 250.000 cm di dunia nyata.

DUA RUMUS KEMBAR

Untuk peta berskala $1 : n$:

$$\text{jarak sebenarnya} = \text{jarak pada peta} \times n, \qquad \text{jarak pada peta} = \frac{\text{jarak sebenarnya}}{n}.$$

Bahasa sederhana · Bayangkan dunia dimasukkan ke "mesin pengecil" yang mengecilkan semuanya 250.000 kali. Satu langkah kakimu (±50 cm) di peta itu hanya 0,0002 cm, jauh lebih tipis daripada sehelai rambut! Sebaliknya, 8 cm di peta Dimas mewakili **20 km** di dunia nyata.



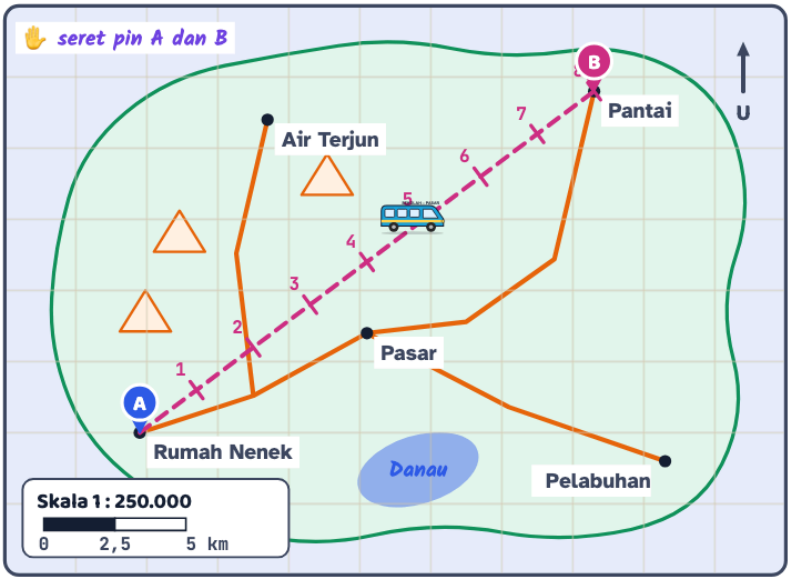
Tiga cara menulis skala yang sama. Kelebihan skala garis: tetap benar walaupun gambarnya diperbesar atau diperkecil saat difotokopi, karena garisnya ikut berubah ukuran.

TRIK KAK LINTANG

Ingat **1 km = 100.000 cm** (lima nol). Untuk tahu "1 cm di peta = berapa km?", bagi penyebut skala dengan 100.000, yaitu geser koma lima langkah ke kiri. Skala 1 : 250.000 → 1 cm = 2,5 km. Skala 1 : 50.000 → 1 cm = 0,5 km. Skala 1 : 1.000.000 → 1 cm = 10 km.

LAB MINI Angkot di peta: ganti skalanya!

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5



Skala 1 : 250.000
1 cm ↔ 2,5 km

Penggaris di peta:
8 cm

Jarak sebenarnya:
8 × 2,5 = 20 km

Laju 40 km/jam
20 ÷ 40 = 0,5 jam
≈ 30 menit

di perjalanan
18 menit

Skala	Jarak di peta	Jarak sebenarnya	Waktu tempuh
1 : 250.000	8 cm	20 km	30 menit

Seret pin **A** dan **B** ke mana saja di pulau, lalu ganti **skala peta**. Gambar pulaunya mengecil dan jarak di peta berubah, tetapi jarak sebenarnya tetap sama! Tekan ▶ **Jalankan** untuk mengirim angkot dari A ke B dengan kecepatan pilihanmu. (Jaraknya diukur lurus seperti penggaris; jalan sungguhan biasanya lebih panjang.)

RUMUS HIDUP

Dari peta ke jarak sebenarnya

$$J = \frac{p \times n}{100.000}$$

Kalikan jarak di peta dengan penyebut skala untuk mendapat jarak sebenarnya dalam cm, lalu bagi 100.000 untuk mengubahnya menjadi km.

- p Jarak di peta cm
- n Penyebut skala (1 : n)
- J Jarak sebenarnya km

JARAK SEBENARNYA

20

km

peta skala kecil: muat satu pulau atau provinsi

Skala 1 : **250.000** berarti 1 cm di peta mewakili **250.000** cm = **2,5** km. Jadi **8** cm di peta mewakili **20** km, atau **20.000** m.

Cek satuan: cm dikali n (tanpa satuan) tetap cm; lalu cm ÷ 100.000 = km, karena 1 km = 1.000 m = 100.000 cm.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SKALA-PETA

KERJAKAN BERSAMA

Peta tanpa skala tertulis

Di sebuah peta, jarak dua kota 7,2 cm, padahal jarak sebenarnya 36 km. (a) Tentukan skala peta itu. (b) Pada peta yang sama, jarak dua desa 1,5 cm. Berapa km jarak sebenarnya?

1. Samakan satuan: 36 km = 36 × 100.000 cm = 3.600.000 cm.
2. Skala = 7,2 : 3.600.000. Bagi kedua suku dengan 7,2: $1 : \frac{3.600.000}{7,2} = 1 : 500.000$.
3. Pada skala 1 : 500.000, 1 cm mewakili 5 km. Jadi 1,5 cm mewakili 1,5 × 5 = 7,5 km.

(a) Skala 1 : 500.000. (b) Jarak kedua desa 7,5 km.

ADU CEPAT **Skala kilat: dari peta ke km**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Geser koma penyebut skala lima langkah ke kiri untuk mendapat "1 cm = … km", lalu kalikan dengan jarak di peta. Contoh: 1 : 200.000 → 1 cm = 2 km, jadi 7 cm = 14 km.

PETA RUPABUMI INDONESIA

Badan Informasi Geospasial (BIG) menerbitkan peta resmi Indonesia dalam beberapa skala, antara lain 1 : 25.000, 1 : 50.000, dan 1 : 250.000. Peta berpenyebut kecil disebut **berskala besar**: wilayahnya sempit, tetapi rinciannya banyak. Peta berpenyebut besar disebut **berskala kecil**: muat satu pulau, tetapi jalan kampung tidak lagi tampak.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

SKALA UNTUK LUAS DAN VOLUME

Jika skala panjang $1 : n$, maka skala luas $1 : n^2$ dan skala volume $1 : n^3$. Alasannya, luas adalah panjang × lebar, dan *keduanya* diperbesar n kali. Kamar 3 cm × 4 cm pada denah 1 : 100 luasnya 12 cm² di kertas, tetapi $12 \times 100^2 = 120.000$ cm² $= 12$ m² di dunia nyata, bukan 1.200 cm². Maket gedung berskala 1 : 100 yang volumenya 1 liter mewakili gedung bervolume $100^3 = 1.000.000$ liter, yaitu 1.000 m³.

5.3 Perbandingan senilai: naik bersama, rasionya tetap

Di pasar, harga beras Rp 14.000 per kg. Dua kg harganya Rp 28.000, tiga kg Rp 42.000. Setiap kali beratnya dikali 2, harganya juga dikali 2. Pasangan besaran seperti ini disebut **perbandingan senilai** (berbanding lurus).

Berat beras x (kg)	0,5	1	2	3	5
Harga y (Rp)	7.000	14.000	28.000	42.000	70.000
$y : x$ (Rp per kg)	14.000	14.000	14.000	14.000	14.000

DEFINISI

Dua besaran x dan y disebut **senilai** jika rasio $\dfrac{y}{x}$ selalu sama, yaitu $y = kx$ untuk suatu bilangan tetap k yang disebut **konstanta perbandingan**. Jika x dikali berapa pun, y ikut dikali bilangan yang sama.

SIFAT PROPORSI (PERKALIAN SILANG)

Kesamaan dua rasio disebut **proporsi**. Untuk $b \neq 0$ dan $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$$

Mengapa perkalian silang boleh dipakai?

Kalikan kedua ruas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dengan bd, yang tidak nol: $\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$, sehingga $ad = bc$. Sebaliknya, jika $ad = bc$, bagi kedua ruas dengan bd untuk kembali ke $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Jadi perkalian silang bukan sulap: ia hanya "mengalikan kedua ruas dengan bilangan yang sama".

CONTOH **Harga beras: satuan dulu atau kali silang**

Harga 3 kg beras Rp 42.000. Berapa harga 5 kg beras yang sama?

1. **Cara satuan:** harga 1 kg = Rp 42.000 ÷ 3 = Rp 14.000, jadi harga 5 kg = 5 × Rp 14.000 = Rp 70.000.
2. **Cara proporsi:** $\frac{3}{42.000} = \frac{5}{y}$, sehingga $3y = 5 \times 42.000 = 210.000$ dan $y = 70.000$.

Harga 5 kg beras Rp 70.000. Dua cara, satu jawaban!

TRIK KAK LINTANG

Bingung mana yang dikali dan mana yang dibagi? Pakai **cara satuan**: cari dulu nilai untuk *satu* (1 kg, 1 porsi, 1 jam), lalu kalikan. Rp 42.000 untuk 3 kg → Rp 14.000 untuk 1 kg → Rp 70.000 untuk 5 kg. Cara ini hampir tidak pernah tersesat.

Kalau pasangan (x, y) yang senilai digambar di bidang koordinat, titik-titiknya selalu berada pada **garis lurus yang melewati titik asal O**. Mengapa harus lewat O? Karena 0 kg beras harganya Rp 0!

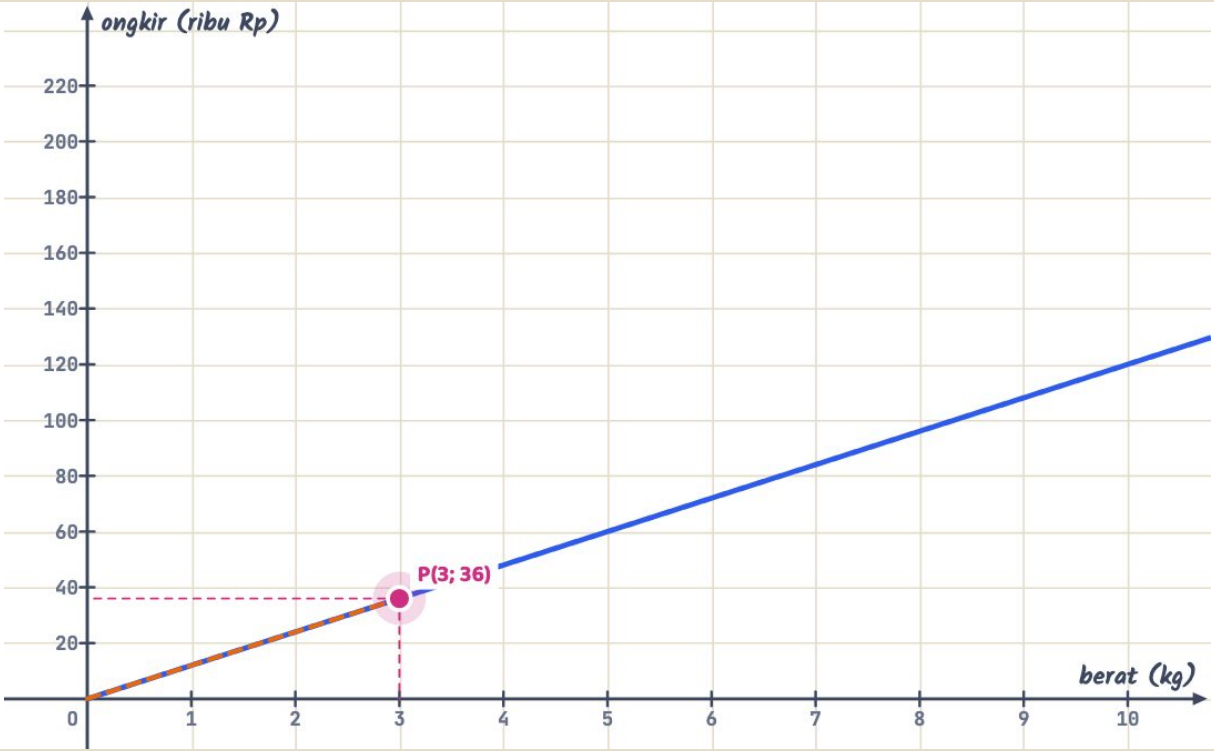
GRAFIK HIDUP

Ongkos kirim paket: kapan senilai?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

$$y = k\,m + b$$

$$y = 12m + 0 \qquad \frac{y}{m} = \frac{36}{3} = 12$$



☑ **senilai: y : m selalu 12, dan garisnya melewati O**

berat m	ongkir y	y : m
3 kg	36 ribu Rp	12

Seret titik P di sepanjang garis. Selama biaya admin $b = 0$, ruas putus-putus OP menempel pada garis dan $y : m$ tidak pernah berubah. Sekarang naikkan b. Garisnya masih lurus, tetapi apa yang terjadi pada $y : m$?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Garis lurus belum tentu senilai. Ongkos kirim Rp 12.000 per kg **ditambah** biaya admin Rp 5.000 memang naik bersama beratnya, tetapi ongkos 2 kg (Rp 29.000) tidak sama dengan dua kali ongkos 1 kg (Rp 34.000). Uji senilai yang sahih: apakah $y : x$ selalu sama, atau apakah grafiknya melewati O?

KERJAKAN BERSAMA

Rendang untuk arisan

Resep rendang untuk 8 porsi memerlukan 1 kg daging, 3 butir kelapa (untuk santan), dan 200 g cabai merah giling. Ibu ingin memasak 20 porsi. Berapa banyak setiap bahan?

1. Banyak porsi dan banyak bahan senilai. Faktor pengalinya $\frac{20}{8} = 2{,}5$.
2. Daging: $1 \times 2{,}5 = 2{,}5$ kg. Cabai: $200 \times 2{,}5 = 500$ g.
3. Kelapa: $3 \times 2{,}5 = 7{,}5$ butir. Karena kelapa dibeli utuh, praktisnya beli 8 butir.

2,5 kg daging, 8 butir kelapa (tepatnya 7,5), dan 500 g cabai. Matematika memberi 7,5; akal sehat membulatkannya ke atas!

ADU CEPAT

Lengkapi proporsinya

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Sederhanakan dulu pasangan pertama. Contoh: 6 : 9 = 2 : 3, jadi 10 : ? juga harus 2 : 3, yaitu 10 : 15.

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 240 SM, Eratosthenes, kepala perpustakaan besar di Aleksandria (Mesir), mendengar bahwa pada tengah hari tertentu di kota Syene, sinar matahari jatuh tegak lurus sampai menerangi dasar sumur yang dalam. Pada saat yang sama di Aleksandria, tiang tegak masih membuat bayangan dengan sudut sekitar 7,2°, yaitu $\frac{1}{50}$ lingkaran penuh. Dengan perbandingan senilai ia menalar: jarak Aleksandria–Syene (±5.000 stadia) juga $\frac{1}{50}$ keliling Bumi, jadi keliling Bumi ±250.000 stadia. Panjang satu stadion pada zaman itu tidak diketahui pasti, tetapi menurut banyak perkiraan hasilnya tidak jauh dari nilai modern, sekitar 40.000 km. Hanya dengan tongkat, bayangan, dan proporsi!

5.4 Perbandingan berbalik nilai: yang satu naik, yang lain turun

Tebak Dulu!

Tiga tukang cat dapat mengecat pagar sekolah dalam 12 jam. Jika ada 6 tukang yang sama cekatannya, berapa lama pekerjaan itu selesai?

- 24 jam, karena tukangnya dua kali lipat.
- 6 jam.
- 9 jam, karena ada 3 tukang tambahan.
- 12 jam, karena pagarnya tetap sama.

Jawabannya: 6 jam. Pekerjaannya $3 \times 12 = 36$ "tukang-jam". Dibagi kepada 6 tukang, masing-masing cukup bekerja $36 \div 6 = 6$ jam. Banyak tukang dikali 2, waktunya justru **dibagi** 2. Inilah perbandingan berbalik nilai.

Sebuah rumah sederhana membutuhkan pekerjaan sebanyak **120 orang-hari**: satu tukang butuh 120 hari, dua tukang 60 hari, empat tukang 30 hari. Makin banyak tukang, makin *sedikit* harinya, tetapi hasil kali keduanya selalu 120.

Banyak tukang x	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Lama kerja y (hari)	120	60	40	30	24	20	15	12	10
$x \times y$	120	120	120	120	120	120	120	120	120

DEFINISI

Dua besaran x dan y disebut **berbalik nilai** (berbanding terbalik) jika hasil kalinya selalu sama:

$$x \times y = k \qquad \text{atau} \qquad y = \frac{k}{x}$$

Jika x dikali 2, y dibagi 2; jika x dikali 3, y dibagi 3.

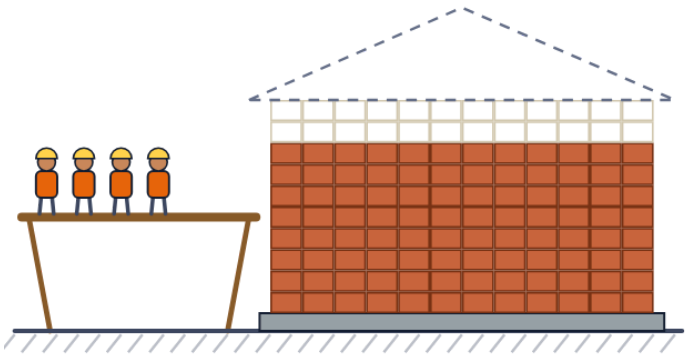
Bahasa sederhana · Bayangkan sekotak kue yang dibagi rata. Makin banyak temanmu yang ikut makan, makin sedikit kue yang kamu dapat. Banyak teman dikali 2, bagianmu dibagi 2. Kuenya sendiri tidak berubah: itulah "hasil kali yang tetap".

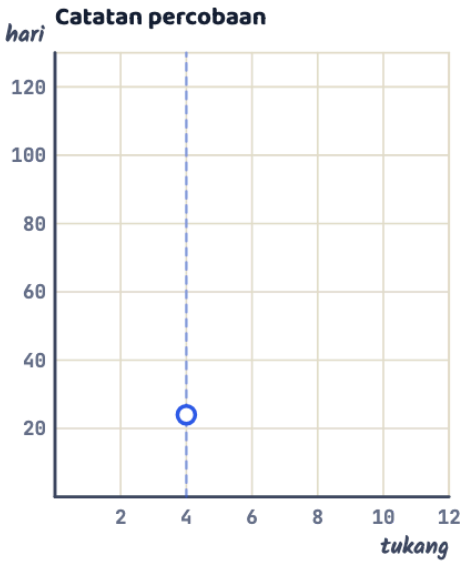
LAB MINI **Tukang dan tembok: catat, lalu lihat polanya**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

Hari ke-24

Rumah butuh 120 orang-hari kerja.
1 bata = kerja 1 tukang selama 1 hari.





Selesai dalam	tukang × hari	Titik tercatat
–	–	0

Pilih banyak tukang, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Setiap kali rumah selesai, titik (tukang, hari) dicatat di grafik kanan. Coba 1, 2, 3, 4, 6, dan 12 tukang. Apakah titik-titiknya membentuk garis lurus atau lengkungan? Hitung juga tukang × hari untuk setiap titik!

RUMUS HIDUP

Waktu kerja berbalik nilai

$$t = \frac{k}{n}$$

Waktu selesai sama dengan beban kerja dibagi banyak pekerja. Pekerjanya dikali dua, waktunya tinggal separuh.

- k Beban kerja `orang-hari`
- n Banyak tukang `orang`
- t Waktu selesai `hari`

WAKTU SELESAI

30

hari

✨ **selesai dalam hari bulat**

4 tukang × **30** hari = **120** orang-hari. Kalau tukangnya dua kali lipat (**8** orang), waktunya tinggal **15** hari. Kalau hanya ada 1 tukang, waktunya **120** hari.

Cek satuan: orang-hari ÷ orang = hari. Satuan "orang" saling mencoret.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KERJA-TUKANG

Kurva lengkung yang muncul di Lab Mini tadi disebut **hiperbola**. Rahasianya terlihat jelas di Grafik Hidup berikut: dari titik mana pun pada kurva, persegi panjang yang ditarik ke sumbu-sumbu **selalu sama luasnya**.

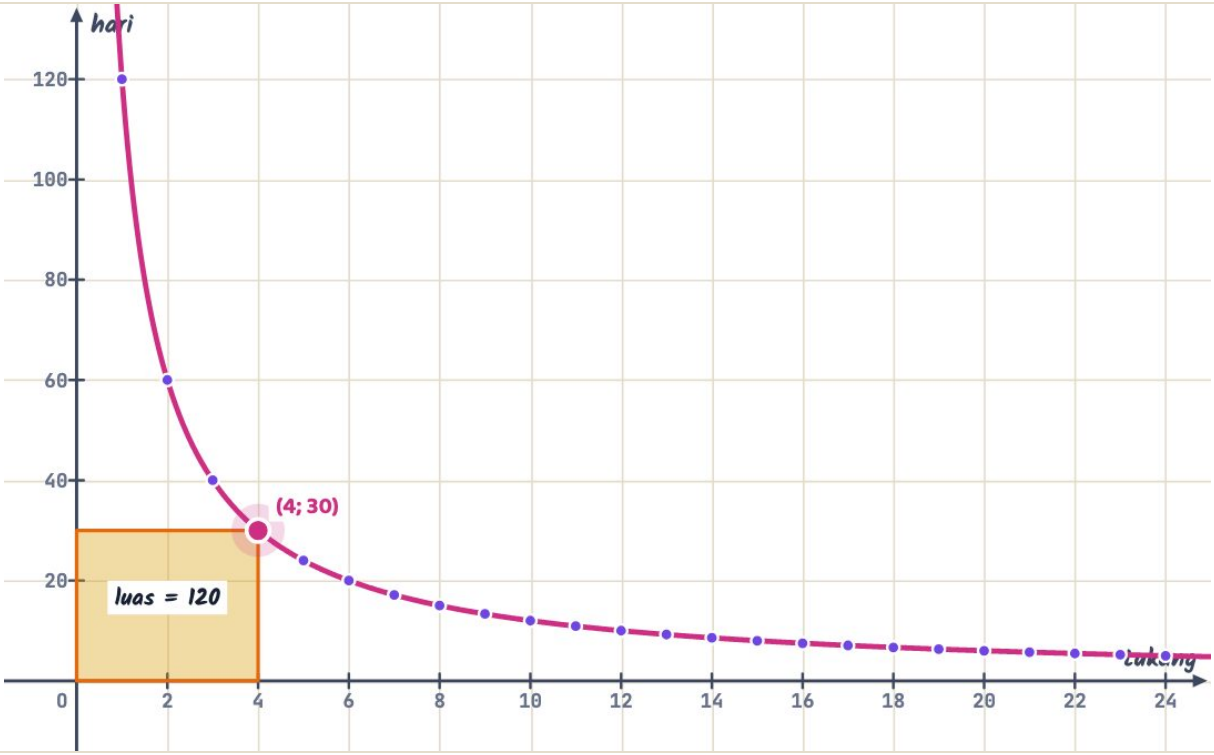
GRAFIK HIDUP

Hiperbola tukang: luas persegi panjangnya tak pernah berubah

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

$$y = \frac{k}{x} \iff x \times y = k$$

$$x \times y = 4 \times 30 = 120$$



✨ banyak hari juga bulat

tukang x	hari y	x × y
4	30	120

Seret titik di kurva. Persegi panjang kuning berubah dari tinggi-kurus menjadi pendek-lebar, tetapi luasnya tetap k. Titik ungu kecil menandai banyak tukang yang bulat: data sungguhan, sedangkan kurvanya menunjukkan polanya.

	Senilai	Berbalik nilai
Yang selalu tetap	rasio $y : x = k$	hasil kali $x \times y = k$
Rumus	$y = kx$	$y = \frac{k}{x}$

Jika x dikali 2	y dikali 2	y dibagi 2
Grafik	garis lurus melewati O	hiperbola yang tidak pernah menyentuh sumbu
Hitung cepat	kali silang: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	kali lurus: $x_1 y_1 = x_2 y_2$
Contoh	berat & harga, porsi & bahan, jarak peta & jarak sebenarnya	tukang & hari, kecepatan & waktu tempuh, banyak ayam & lama pakan

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Sebelum menghitung, ajukan satu pertanyaan: "Kalau yang satu **dikali 2**, yang lain **dikali 2** atau **dibagi 2**?" Dikali 2 → senilai, pakai kali silang. Dibagi 2 → berbalik nilai, pakai kali lurus. Pertanyaan sepuluh detik ini menyelamatkan banyak nilai ulangan!

COBA SENDIRI **Tukang tambahan di tengah jalan**

Sebuah rumah direncanakan selesai dikerjakan 4 tukang dalam 30 hari. Setelah 10 hari bekerja, datang 2 tukang lagi yang sama cekatannya. Pada hari ke berapa rumah itu selesai?

1. Seluruh pekerjaan: $4 \times 30 = 120$ orang-hari.
2. Selama 10 hari pertama: $4 \times 10 = 40$ orang-hari selesai. Sisanya $120 - 40 = 80$ orang-hari.
3. Sisa itu dikerjakan 6 tukang: $80 \div 6 = 13\frac{1}{3}$ hari.
4. Total $10 + 13\frac{1}{3} = 23\frac{1}{3}$ hari.

Rumah selesai pada hari ke-24 (pada hari itu mereka hanya perlu bekerja sepertiga hari), 6 hari lebih cepat daripada rencana semula.

MITOS

"Rasio 2 : 3 berarti bagian pertama adalah $\frac{2}{3}$ dari seluruhnya."

FAKTA

Rasio 2 : 3 membagi keseluruhan menjadi 5 bagian. Bagian pertama $\frac{2}{5}$ dari total. Pecahan $\frac{2}{3}$ membandingkan bagian pertama dengan bagian *kedua*, bukan dengan keseluruhan.

MITOS

"Kalau dua besaran sama-sama naik, pasti senilai."

FAKTA

Umur dan tinggi badan sama-sama naik, tetapi anak 10 tahun tidak dua kali lebih tinggi daripada anak 5 tahun. Senilai berarti rasionya **tetap**, bukan sekadar naik bersama.

MITOS

"Peta 1 : 1.000.000 lebih rinci daripada peta 1 : 50.000, karena angkanya lebih besar."

FAKTA

Kebalikannya! Penyebut besar berarti dunia dikecilkan lebih banyak. Peta 1 : 50.000 masih menampilkan jalan desa, sedangkan peta 1 : 1.000.000 hanya muat kota-kota besar.

MITOS

"Makin banyak pekerja, pekerjaan apa pun makin cepat selesai."

FAKTA

Hanya jika pekerjaannya bisa dibagi. Induk ayam mengerami telur sekitar 21 hari; tiga induk ayam tidak bisa menetaskan telur yang sama dalam 7 hari!

5.5 Laju: kecepatan, debit, dan harga satuan

Rasio biasanya membandingkan besaran yang *sejenis*. Bagaimana kalau jenisnya berbeda, misalnya kilometer dan jam, atau rupiah dan kilogram? Hasil baginya disebut **laju**, dan satuannya selalu memuat kata **"per"**.

DEFINISI

Laju adalah rasio dua besaran yang berbeda satuan, yaitu "banyaknya sesuatu per satu satuan besaran lain".

- **Kecepatan** = jarak ÷ waktu, misalnya km/jam atau m/detik: $v = \frac{s}{t}$.
- **Debit** = volume ÷ waktu, misalnya liter/detik: $Q = \frac{V}{t}$.
- **Harga satuan** = harga ÷ banyak barang, misalnya rupiah/kg.
- **Kurs** = rupiah per satu satuan mata uang asing. Misalkan 1 dolar AS = Rp 16.000; maka 50 dolar = Rp 800.000.

Kereta cepat **Whoosh** Jakarta–Bandung dirancang melaju hingga ±350 km/jam, hampir 100 m setiap detik! Panjang jalurnya ±142 km. Seandainya kereta itu bisa melaju 350 km/jam dari awal sampai akhir tanpa berhenti, perjalanannya hanya ±24 menit. Kenyataannya perjalanan lebih lama, karena kereta perlu mempercepat, memperlambat, dan berhenti di stasiun. Coba hitung sendiri dengan Rumus Hidup ini.

RUMUS HIDUP

Waktu tempuh

$$t = \frac{s}{v} \times 60$$

Jarak dibagi kecepatan menghasilkan waktu dalam jam; kalikan dengan 60 untuk mendapat menit.

s Jarak km

v Kecepatan km/jam

t Waktu tempuh menit

WAKTU TEMPUH

24,3

menit

secepat kereta cepat

142 km dengan kecepatan tetap **350** km/jam butuh **0,406** jam, yaitu **24,3** menit (sekitar **0** jam **24** menit). Kecepatan ini sama dengan **97,222** m/detik.

Cek satuan: km ÷ (km/jam) = jam. Satuan km saling mencoret dan tersisa jam; dikali 60 menjadi menit.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-WAKTU-TEMPUH

Tebak Dulu!

Dimas bersepeda ke rumah Nenek sejauh 12 km. Berangkatnya jalan menurun, jadi kecepatannya 12 km/jam. Pulangnya menanjak, hanya 6 km/jam. Berapa kecepatan rata-ratanya untuk perjalanan pulang-pergi?

9 km/jam, rata-rata dari 12 dan 6.

8 km/jam.

6 km/jam, karena yang lambat selalu menentukan.

18 km/jam, jumlah kedua kecepatan.

Jawabannya: 8 km/jam. Berangkat butuh $12 \div 12 = 1$ jam, pulang $12 \div 6 = 2$ jam. Total jarak 24 km dalam 3 jam, jadi rata-ratanya $24 \div 3 = 8$ km/jam. Hasilnya lebih dekat ke 6 daripada ke 12, karena Dimas menghabiskan **lebih banyak waktu** di tanjakan yang lambat.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Kecepatan rata-rata bukan rata-rata kecepatan. Selalu hitung dengan **total jarak ÷ total waktu**. Merata-ratakan dua kecepatan hanya benar jika *waktu* tempuh keduanya sama, bukan jaraknya.

CONTOH **Mana yang lebih hemat?**

Di warung, minyak goreng kemasan 1 liter dijual Rp 18.000, sedangkan kemasan 2 liter Rp 34.000. Mana yang lebih hemat?

1. Bandingkan harga satuannya (harga per liter). Kemasan 1 liter: Rp 18.000 per liter.
2. Kemasan 2 liter: Rp 34.000 ÷ 2 = Rp 17.000 per liter.

Kemasan 2 liter lebih hemat Rp 1.000 per liter. Harga satuan adalah cara paling adil untuk membandingkan kemasan yang berbeda ukuran.

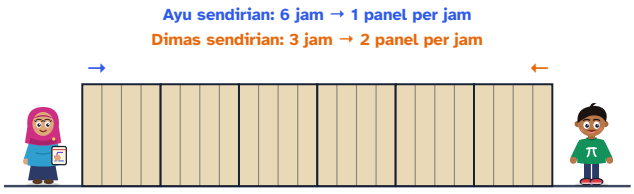
KERJAKAN BERSAMA **Mengisi bak mandi**

Bak mandi berkapasitas 120 liter diisi dari keran berdebit 0,25 liter/detik. (a) Berapa menit bak kosong itu penuh? (b) Berapa menit jika bak sudah berisi 30 liter?

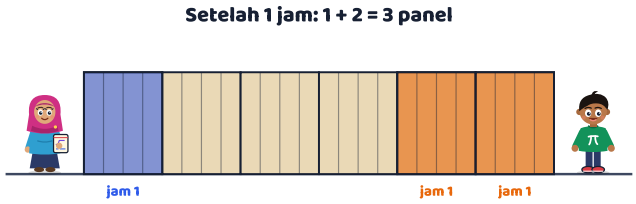
1. Dari $Q = \frac{V}{t}$ diperoleh $t = \frac{V}{Q}$.
2. (a) $t = \frac{120}{0{,}25} = 480$ detik $= 8$ menit.
3. (b) Yang perlu diisi tinggal $120 - 30 = 90$ liter, jadi $t = \frac{90}{0{,}25} = 360$ detik $= 6$ menit.

(a) 8 menit; (b) 6 menit. Cek cepat: 0,25 liter/detik sama dengan 15 liter/menit, dan 120 ÷ 15 = 8. Cocok!

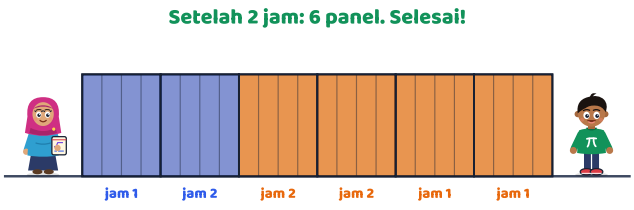
Laju juga menjadi kunci soal **kerja bersama**. Rahasianya: jangan menjumlahkan waktunya, tetapi **jumlahkan lajunya**.



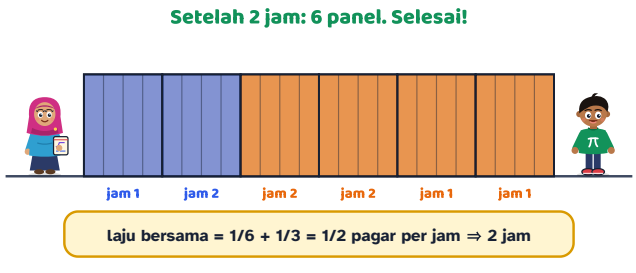
Langkah 1. Ayu sendirian mengecat pagar 6 panel ini dalam 6 jam, jadi lajunya 1 panel per jam. Dimas lebih cepat: 3 jam, jadi lajunya 2 panel per jam. Mereka mulai bersamaan dari dua ujung.



Langkah 2. Setelah 1 jam, Ayu menyelesaikan 1 panel (biru) dan Dimas 2 panel (oranye). Total 3 panel, separuh pagar.



Langkah 3. Pada jam kedua, 3 panel lagi selesai. Keenam panel tuntas dalam 2 jam!



Langkah 4. Dalam pecahan: laju bersama $= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ pagar per jam, jadi waktunya $1 \div \frac{1}{2} = 2$ jam. Cek kewajaran: berdua harus **lebih cepat** daripada yang tercepat (3 jam). Jawaban 4,5 jam (rata-rata 6 dan 3) pasti salah.

ATURAN KERJA BERSAMA

Jika A sendirian menyelesaikan suatu pekerjaan dalam a jam dan B dalam b jam, maka bersama-sama mereka butuh t jam dengan

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Yang dijumlahkan adalah **laju** (bagian pekerjaan per jam), bukan waktunya.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RATA-RATA HARMONIK DAN DUA TEKA-TEKI LAJU

Jika jarak yang sama ditempuh dengan kecepatan v_1, lalu dengan v_2, kecepatan rata-ratanya

$$\bar{v} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2},$$

yang disebut **rata-rata harmonik**. Untuk 12 dan 6 hasilnya $\frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{18} = 8$, cocok dengan Tebak Dulu tadi.

Teka-teki 1. Sebuah mobil mendaki bukit sejauh 2 km dengan kecepatan 30 km/jam. Berapa kecepatan turunnya (juga 2 km) agar rata-rata seluruh perjalanan 60 km/jam? Jawabannya mengejutkan: **tidak mungkin**! Rata-rata 60 km/jam untuk 4 km berarti total waktunya 4 menit, padahal mendaki saja sudah menghabiskan 4 menit.

Teka-teki 2. Dua kereta berjarak 120 km saling mendekat dengan kecepatan 40 km/jam dan 60 km/jam. Seekor burung walet terbang bolak-balik di antara keduanya dengan kecepatan 90 km/jam sampai kedua kereta bertemu. Berapa total jarak terbang walet? Tidak perlu menjumlahkan deret tak hingga! Kereta bertemu setelah $120 \div (40 + 60) = 1{,}2$ jam, jadi walet terbang $90 \times 1{,}2 = 108$ km. Konon, matematikawan John von Neumann langsung menjawab teka-teki semacam ini dengan menjumlahkan deretnya di kepala.

5.6 Variasi langsung dan invers: keluarga y = kx^n

Senilai ($y = kx$) dan berbalik nilai ($y = \frac{k}{x}$) ternyata kakak-beradik dalam satu keluarga besar. Di kurikulum internasional seperti IGCSE dan IB, keluarga ini disebut *variation*.

DEFINISI

Untuk $n > 0$ dan konstanta k:

- y **berbanding lurus** dengan x^n (variasi langsung, *direct variation*) jika $y = kx^n$;
- y **berbanding terbalik** dengan x^n (variasi invers, *inverse variation*) jika $y = \dfrac{k}{x^n}$.

Jika x dikali 2, maka y dikali 2^n pada variasi langsung, dan dibagi 2^n pada variasi invers.

Hubungan	Rumus	x dikali 2 ⇒ y dikali
Harga beras & berat	$y = kx$	2
Luas martabak & diameter	$L = kd^2$ $\left(k = \frac{\pi}{4}\right)$	4
Volume bola & jari-jari	$V = kr^3$ $\left(k = \frac{4\pi}{3}\right)$	8
Lama kerja & banyak tukang	$t = \dfrac{k}{n}$	$\frac{1}{2}$
Terang cahaya & jarak dari lampu	$I = \dfrac{k}{d^2}$	$\frac{1}{4}$
Waktu jatuh bebas & tinggi jatuh	$t = k\sqrt{h}$	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$

Soal variasi gaya IGCSE selalu bisa diselesaikan dengan **tiga langkah**: (1) tulis bentuk umumnya, misalnya $y = kx^2$; (2) cari k dari pasangan data yang diketahui; (3) pakai rumus lengkapnya untuk nilai yang ditanyakan.

KERJAKAN BERSAMA **Terang lampu belajar**

Terang cahaya I dari lampu belajar berbanding terbalik dengan kuadrat jarak d. Pada jarak 30 cm, terangnya 400 lux. Berapa terangnya pada jarak 60 cm?

1. Bentuk umum: $I = \dfrac{k}{d^2}$.
2. Cari k: $k = Id^2 = 400 \times 30^2 = 360.000$.
3. Untuk $d = 60$: $I = \dfrac{360.000}{60^2} = \dfrac{360.000}{3.600} = 100$ lux.

Terangnya 100 lux, tinggal seperempat. Jarak dikali 2, terang dibagi $2^2 = 4$. Itulah sebabnya buku sebaiknya tidak terlalu jauh dari lampu!

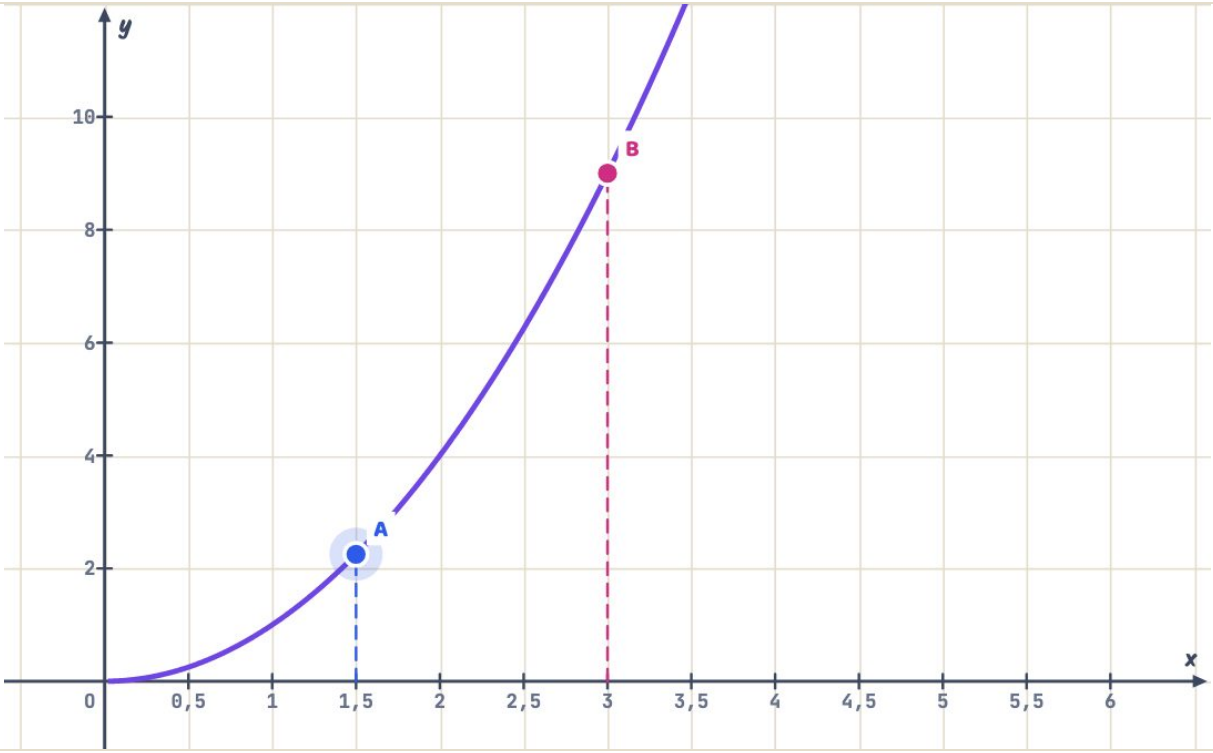
GRAFIK HIDUP

Keluarga $y = kx^n$: kalikan x dengan 2, apa yang terjadi pada y?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

$$y = k\,x^{n}$$

$$y = 1\,x^{2} \qquad x \times 2 \;\Rightarrow\; y \times 2^{2} = y \times 4$$



variasi langsung: x naik, y ikut naik

y di A	y di B	y(B) : y(A)
2,25	9	4

Titik B selalu berada di x yang dua kali x titik A. Seret titik A ke kiri dan ke kanan: rasio $y(B) : y(A)$ tidak berubah! Lalu ganti pangkat n. Kapan rasionya 4? Kapan $\frac{1}{4}$?

COBA SENDIRI

Martabak besar atau kecil?

Martabak manis berdiameter 20 cm dijual Rp 30.000, sedangkan yang berdiameter 30 cm Rp 60.000. Ketebalannya sama. Mana yang lebih hemat?

1. Luas lingkaran berbanding lurus dengan kuadrat diameter: $L = kd^2$.
2. Diameternya dikali $\frac{30}{20} = 1{,}5$, jadi luasnya dikali $1{,}5^2 = 2{,}25$.
3. Harganya hanya dikali Rp 60.000 ÷ Rp 30.000 = 2. Kamu mendapat 2,25 kali martabak dengan membayar 2 kali lipat.
4. Harga per cm² martabak besar hanya $\frac{2}{2{,}25} \approx 0{,}89$ kali harga per cm² martabak kecil, sekitar 11% lebih murah.

Martabak 30 cm lebih hemat. Intuisi "1,5 kali lebih lebar, jadi 1,5 kali lebih banyak" keliru: luas tumbuh menurut kuadrat!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA TIDAK ADA SEMUT SEBESAR GAJAH?

Bayangkan seekor semut diperbesar 100 kali ke segala arah. Kekuatan otot sebanding dengan **luas penampang** otot, jadi naik $100^2 = 10.000$ kali. Berat badan sebanding dengan **volume**, jadi naik $100^3 = 1.000.000$ kali. Rasio kekuatan terhadap berat turun menjadi $\frac{1}{100}$ semula! Semut raksasa itu akan kesulitan menopang tubuhnya sendiri. Galileo Galilei menjelaskan "hukum kuadrat-kubus" ini dalam bukunya tahun 1638. Itulah sebabnya hewan besar seperti gajah butuh kaki yang sangat tebal.

Resep rendang

Memasak untuk arisan 40 orang dari resep 8 porsi? Semua bahan dikali 5: itulah perbandingan senilai.

Peta di ponselmu

Saat kamu mencubit layar peta digital, skalanya berubah, dan garis skala di pojok layar ikut menyesuaikan.

Kurs rupiah

Penukaran uang memakai kurs, yaitu laju rupiah per satu mata uang asing. Makin banyak dolar, makin banyak rupiahnya.



Kereta cepat

Pada ±350 km/jam, kereta menempuh hampir 100 m setiap detik, kira-kira sepanjang lapangan sepak bola.



Tagihan PDAM

Pemakaian air dihitung per meter kubik dengan tarif bertingkat: makin boros, makin mahal tarif per m^3. Jadi tagihan tidak selalu senilai dengan pemakaian!



Maket & denah

Arsitek membuat denah 1 : 100 dan maket 1 : 200 agar calon pemilik bisa membayangkan bangunannya sebelum dibangun.

Cek Cepat

Rasio 24 : 36 dalam bentuk paling sederhana adalah...

- 4 : 6
- 12 : 18
- 2 : 3
- 3 : 2

Pada peta berskala 1 : 200.000, jarak dua kota 7 cm. Jarak sebenarnya adalah...

- 14 km
- 1,4 km
- 140 km
- 28 km

Lima keran yang sama mengisi kolam dalam 12 jam. Jika hanya 3 keran yang dipakai, waktunya...

- 7,2 jam
- 10 jam
- 15 jam
- 20 jam

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: denah harta karun

Bahan: kertas berpetak (atau kertas biasa dan penggaris), pensil, meteran atau langkah kakimu, dan sebuah benda kecil sebagai "harta".

1. Ukur panjang langkahmu: berjalanlah 10 langkah biasa, ukur jaraknya dengan meteran, lalu bagi 10. (Contoh: 5 m ÷ 10 = 50 cm per langkah.)
2. Ukur panjang dan lebar sebuah ruangan di rumahmu dengan langkah, lalu ubah ke meter.
3. Gambar denah ruangan itu dengan skala 1 : 50 (2 cm di kertas = 1 m sebenarnya), lengkap dengan meja, lemari, atau kasur.
4. Sembunyikan "harta" di ruangan itu, lalu tandai lokasinya dengan × di denah.
5. Minta anggota keluarga menemukan harta itu hanya dengan membaca denah dan memakai penggaris.

Pertanyaan: Jika ruanganmu berukuran 4 m × 3 m, berapa ukuran gambarnya pada skala 1 : 50? Muatkah denah itu di kertas A4 (21 cm × 29,7 cm)? Skala berapa yang akan kamu pilih untuk menggambar denah seluruh rumah di kertas yang sama?

RINGKASAN KILAT

Bab 5 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menyatakan perbandingan dua besaran sebagai **rasio** paling sederhana dan **membagi** suatu jumlah menurut rasio
- memakai **skala** untuk mengubah jarak di peta atau denah menjadi jarak sebenarnya, dan sebaliknya
- membedakan **perbandingan senilai** dan **berbalik nilai**, lalu menyelesaikan soal ceritanya dengan tabel, perkalian silang, atau grafik

- menghitung **laju** (kecepatan, debit, harga satuan), termasuk kecepatan rata-rata dan kerja bersama
- mengenali **variasi langsung dan invers** $y = kx^n$ beserta grafiknya

🔑 Istilah kunci

rasio · disederhanakan · rasio senilai · membagi menurut rasio · skala · Skala · perbandingan senilai · senilai · konstanta perbandingan · proporsi · berbalik nilai · hiperbola · laju · Laju · Kecepatan · Debit

🧮 Rumus penting

$$A = \frac{a}{a+b} \times T$$

Membagi menurut rasio. Jumlahkan suku-suku rasio untuk mendapat banyak bagian, bagi totalnya, lalu kalikan dengan suku milikmu.

$$J = \frac{p \times n}{100.000}$$

Dari peta ke jarak sebenarnya. Kalikan jarak di peta dengan penyebut skala untuk mendapat jarak sebenarnya dalam cm, lalu bagi 100.000 untuk mengubahnya menjadi km.

$$t = \frac{k}{n}$$

Waktu kerja berbalik nilai. Waktu selesai sama dengan beban kerja dibagi banyak pekerja. Pekerjanya dikali dua, waktunya tinggal separuh.

$$t = \frac{s}{v} \times 60$$

Waktu tempuh. Jarak dibagi kecepatan menghasilkan waktu dalam jam; kalikan dengan 60 untuk mendapat menit.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Sebelum menulis rasio, samakan dulu satuannya.
- Garis lurus belum tentu senilai.
- Kecepatan rata-rata bukan rata-rata kecepatan.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=5

🧩 Teka-teki untuk Bab 6

Selembar kertas HVS tebalnya sekitar 0,1 mm. Setiap kali dilipat dua, tebalnya menjadi dua kali lipat: rasio tebal baru terhadap tebal lama selalu 2 : 1. Seandainya kertas itu bisa dilipat 42 kali, apakah tumpukannya bisa mencapai Bulan, yang jaraknya sekitar 384.000 km dari Bumi?

▼ **Intip petunjuk**

Hitung beberapa lipatan pertama: 0,2 mm, 0,4 mm, 0,8 mm, dan seterusnya. Setelah 10 lipatan, tebalnya $0{,}1 \times 2^{10} = 102{,}4$ mm, sekitar 10 cm. Setelah 20 lipatan, sudah lebih dari 100 m! Mengalikan 2 berulang-ulang seperti ini disebut **pemangkatan**, dan bilangan raksasa yang muncul paling enak ditulis dengan **notasi ilmiah**. Semuanya menunggumu di Bab 6.

BAB 6 · BILANGAN

06 Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah: Melipat Kertas sampai ke Bulan

Bisakah selembar kertas tipis menjulang sampai ke Bulan hanya dengan 42 kali lipatan? Di bab ini kamu akan melihat betapa liarnya perkalian berulang, menjinakkan akar, dan menulis bilangan sebesar alam semesta atau sekecil atom dengan beberapa angka saja.

Setelah bab ini, kamu bisa

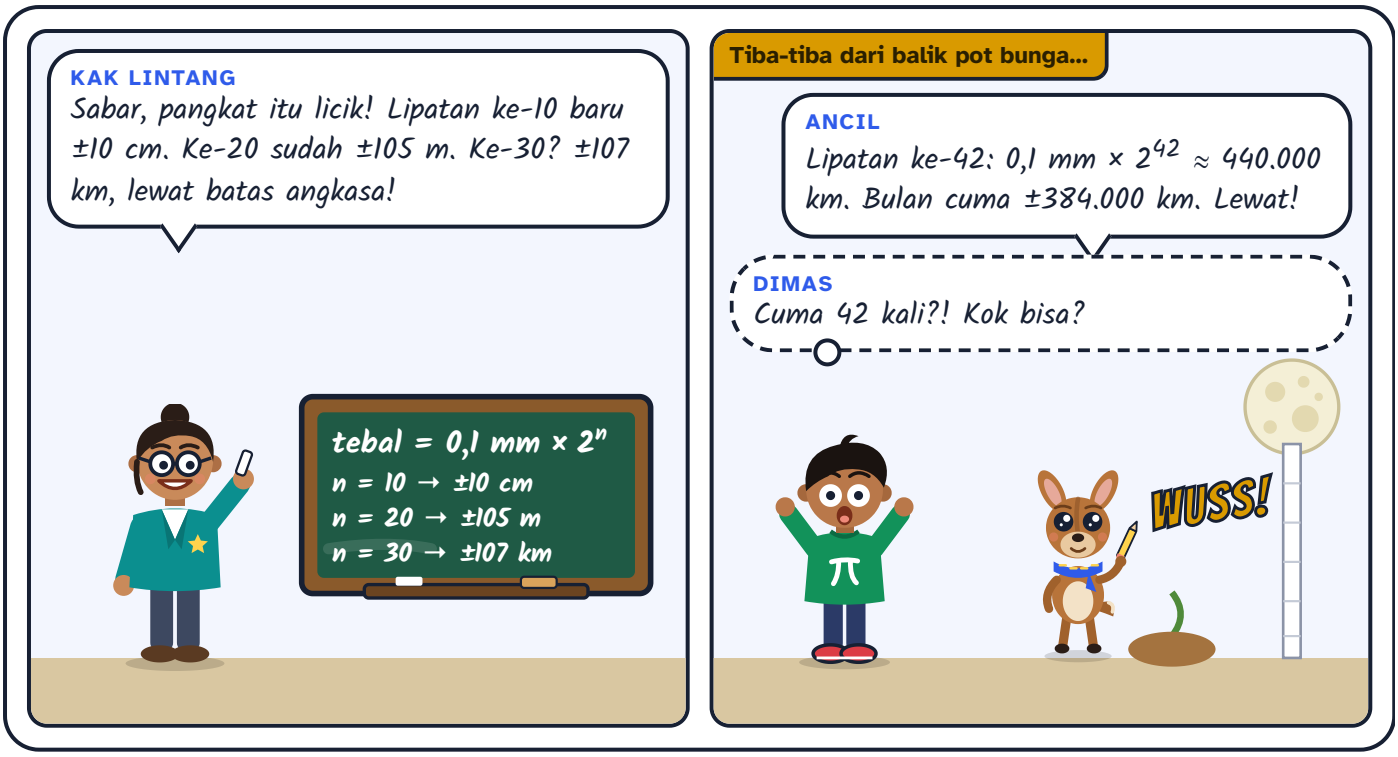
- menulis perkalian berulang sebagai **bilangan berpangkat** dan merasakan betapa cepat pangkat tumbuh;
- memakai **sifat-sifat pangkat** dan menjelaskan mengapa sifat itu benar dengan menghitung banyak faktor;
- memaknai **pangkat nol, pangkat negatif, dan pangkat pecahan**;
- menyederhanakan **bentuk akar** dan **merasionalkan penyebut**;
- menulis bilangan raksasa dan bilangan mungil dalam **notasi ilmiah**, menghitung dengannya, dan memakai **angka penting**.

KERTAS MENUJU BULAN

KOMIK · 4 PANEL







Tebak Dulu!

Kamu boleh memilih uang saku selama 30 hari. Pilihan A: Rp1.000.000 setiap hari. Pilihan B: Rp1 pada hari pertama, Rp2 pada hari kedua, Rp4 pada hari ketiga, dan seterusnya (selalu dua kali lipat hari sebelumnya). Mana yang totalnya lebih besar?

- Pilihan A, jauh lebih besar. Rp1 kan kecil sekali!
- Kira-kira sama saja.
- Pilihan B, jauh lebih besar.
- Pilihan B, tetapi hanya menang sedikit.

Jawabannya: Pilihan B, dan menangnya telak! Pilihan A memberi Rp30.000.000. Pilihan B lama sekali tertinggal: setelah dua minggu, totalnya baru Rp16.383. Namun pada hari ke-25 B menyalip, dan pada hari ke-30 saja kamu menerima 2^{29} = Rp536.870.912. Totalnya $2^{30} - 1$ = Rp1.073.741.823, lebih dari **satu miliar rupiah**! Perkalian berulang selalu menyalip pada akhirnya. Itulah kekuatan **pangkat**.

6.1 Pangkat: perkalian berulang yang meledak

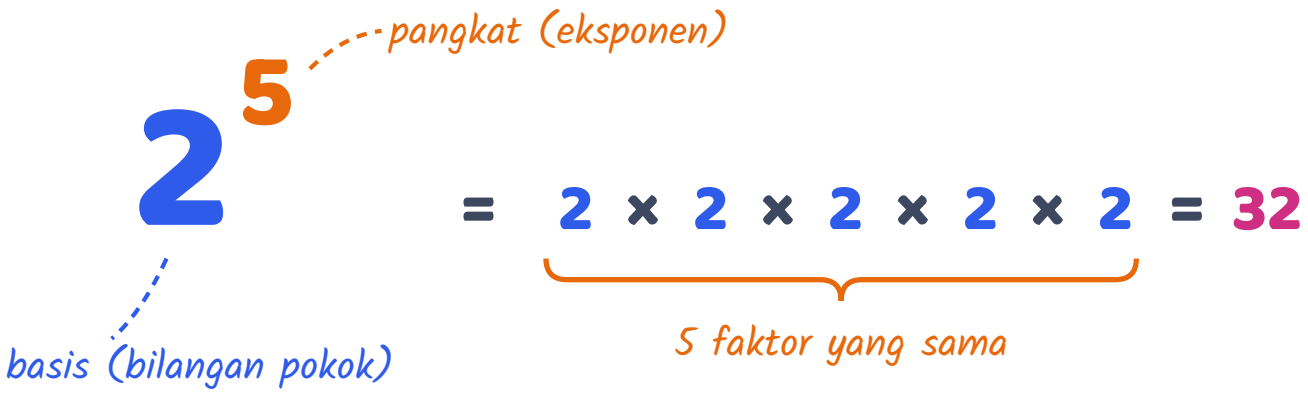
Setiap kali kertas dilipat, banyak lapisannya menjadi dua kali lipat: 1, 2, 4, 8, 16, ... Setelah 5 lipatan ada $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ lapis. Menulis "2 × 2 × 2 × ..." sebanyak 42 kali tentu melelahkan. Maka matematikawan membuat singkatan yang hemat tinta: **bilangan berpangkat**.

DEFINISI

Untuk bilangan a dan bilangan asli n,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Bilangan a disebut **basis** (bilangan pokok), sedangkan n disebut **pangkat** atau **eksponen**. Bentuk a^n dibaca "a pangkat n". Khusus a^2 dibaca "a kuadrat" dan a^3 dibaca "a pangkat tiga".



Pangkat memberi tahu **berapa banyak faktor** yang dikalikan, bukan bilangan pengali.

Bahasa sederhana · Gampangnya: angka kecil di kanan atas memberi tahu berapa kali angka besar dikalikan dengan **dirinya sendiri**. Jadi $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, bukan 3×4.

Sekarang kita lihat mengapa Kak Lintang menyebut pangkat "licik". Kertas HVS biasa tebalnya sekitar 0,1 mm. Perhatikan apa yang terjadi bila lipatan terus ditambah.

Lipatan n	Banyak lapis 2^n	Tebal tumpukan	Setinggi apa?
0	1	0,1 mm	selembar kertas
5	32	3,2 mm	sebuah koin
10	1.024	±10 cm	sebuah gelas
20	1.048.576	±105 m	hampir setinggi Monas (132 m)
30	1.073.741.824	±107 km	melewati batas angkasa (100 km)
42	±4,4 triliun	**±440.000 km**	**melewati Bulan** (**±384.400 km**)

Sepuluh lipatan pertama hanya menghasilkan setinggi gelas. Namun setiap lipatan berikutnya menggandakan *semua* yang sudah ada, sehingga pertumbuhannya makin lama makin buas. Pertumbuhan seperti ini disebut **pertumbuhan eksponensial**.

RUMUS HIDUP

Tebal kertas terlipat

$$t = t_0 \cdot 2^n$$

Setiap lipatan menggandakan tebal. Jadi tebal awal dikalikan 2 sebanyak n kali.

t_0 Tebal awal `mm` | n Banyak lipatan `kali` | t Tebal tumpukan `m`

TEBAL TUMPUKAN

104,858

m

lebih tinggi daripada Dimas

Ada **1,049 × 10⁶** lapis kertas. Tebalnya **0,1** mm × **1,049 × 10⁶** = **104.857,6** mm, atau **104,858** m.

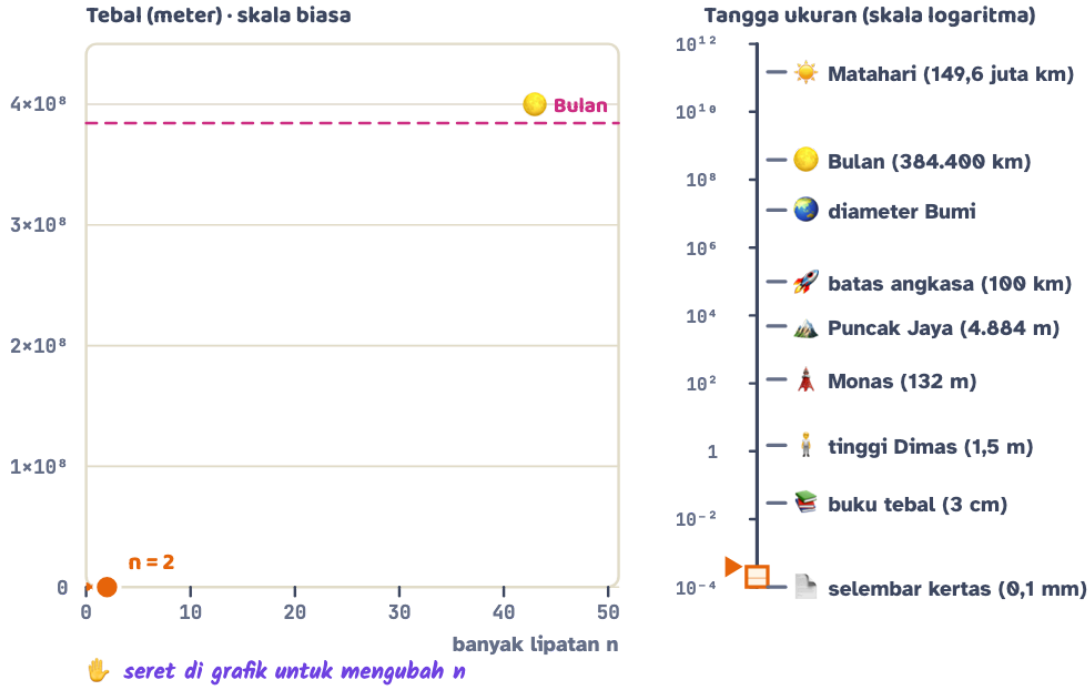
Satuan Nusantara: ≈ 100% dari panjang lapangan sepak bola · ≈ 79% dari tinggi Monas · ≈ 2% dari tinggi Puncak Jaya

Cek satuan: t_0 ditulis dalam mm, lalu hasilnya dibagi 1.000 agar menjadi meter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEBAL-LIPATAN-KERTAS

LAB MINI Lipat kertas sampai ke Bulan

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6



Banyak lapisan 2^n	Tebal tumpukan	Terakhir dilewati
4	0,4 mm	belum ada

Tekan ▶ **Jalankan** dan lihat kertas dilipat satu per satu. Pada skala biasa, tebalnya seperti diam di dasar lalu tiba-tiba meroket. Sekarang nyalakan **skala logaritma**: kurvanya berubah menjadi garis lurus! Pada skala ini setiap garis bantu berarti 100 kali lebih besar, dan setiap lipatan menaikkan titik dengan jarak yang sama. Di lipatan ke berapa kertasmu melewati Monas? Bulan? Matahari?

TRIK KAK LINTANG

Hafalkan satu fakta ajaib: $2^{10} = 1.024 \approx 1.000 = 10^3$. Dengan itu kamu bisa menaksir pangkat dua yang besar tanpa kalkulator. Contoh: $2^{42} = 2^2 \times (2^{10})^4 \approx 4 \times (10^3)^4 = 4 \times 10^{12}$. Kalikan dengan 0,1 mm $= 10^{-4}$ m, hasilnya $\approx 4 \times 10^8$ m = 400.000 km. Bulan pun terlewati!

CONTOH **Bakteri di nasi yang lupa disimpan**

Dalam suasana hangat, satu bakteri dapat membelah menjadi dua setiap 20 menit. Sepiring nasi tertinggal di meja dengan 1 bakteri di atasnya. Berapa banyak bakteri setelah 4 jam?

1. 4 jam = 240 menit. Banyak pembelahan: $240 : 20 = 12$ kali.
2. Setiap pembelahan menggandakan jumlah bakteri, jadi banyaknya 2^{12}.
3. $2^{12} = 2^{10} \times 2^2 = 1.024 \times 4 = 4.096$.

Ada 4.096 bakteri setelah 4 jam. Setelah 8 jam (24 kali pembelahan): $2^{24} = 16.777.216$, lebih dari 16 juta! Itulah sebabnya makanan matang sebaiknya tidak dibiarkan berjam-jam di suhu ruang.

BISAKAH KERTAS SUNGGUHAN DILIPAT 42 KALI?

Tidak! Setiap lipatan juga membagi dua **luas** kertas, dan kertas yang makin tebal makin sulit ditekuk. Kertas HVS biasanya menyerah setelah 7 atau 8 lipatan. Pada 2002, seorang pelajar SMA di Amerika Serikat, Britney Gallivan, memecahkan rekor dengan melipat kertas yang sangat panjang (±1,2 km) sebanyak 12 kali. Jadi "kertas sampai ke Bulan" adalah percobaan pikiran: hitungannya benar, tetapi tak mungkin dilakukan.

6.2 Sifat-sifat pangkat: cukup hitung faktornya

Karena pangkat hanyalah "banyak faktor yang sama", semua sifatnya bisa ditemukan dengan **menghitung faktor**. Tidak ada yang perlu dihafal buta. Tonton animasi di bawah langkah demi langkah.



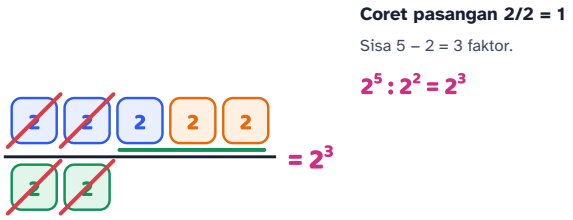
Langkah 1. 2^3 adalah tiga faktor 2 (biru), dan 2^2 adalah dua faktor 2 (oranye).



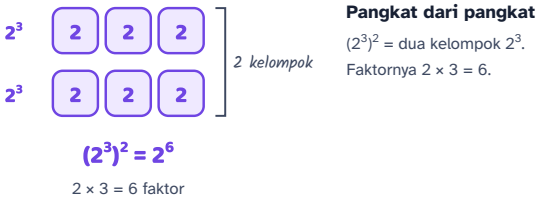
Langkah 2. Mengalikan berarti menggabungkan semua faktor dalam satu barisan: ada $3 + 2 = 5$ faktor, jadi $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$.



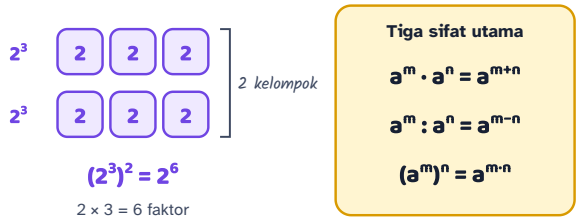
Langkah 3. Untuk membagi 2^5 dengan 2^2, tulis sebagai pecahan: lima faktor 2 di pembilang, dua faktor 2 di penyebut.



Langkah 4. Setiap pasangan $\frac{2}{2} = 1$ boleh dicoret. Tersisa $5 - 2 = 3$ faktor, jadi $2^5 : 2^2 = 2^3$.



Langkah 5. $(2^3)^2$ berarti dua kelompok 2^3. Banyak faktornya $2 \times 3 = 6$, jadi $(2^3)^2 = 2^6$.



Langkah 6. Ganti 2 dengan basis apa pun dan banyak faktor dengan m, n: kamu mendapat tiga sifat utama pangkat.

SIFAT-SIFAT PANGKAT

Untuk bilangan $a, b \neq 0$ dan bilangan asli m, n:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ *(kali: pangkat dijumlahkan)*
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ *(bagi: pangkat dikurangkan)*
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ *(pangkat dari pangkat: dikalikan)*
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ *(pangkat menyebar ke setiap faktor)*
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Mengapa $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$?

Tulis panjang, lalu atur ulang urutan faktornya (perkalian boleh ditukar urutannya):

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ kali}} = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n} = a^n b^n.$$

Contoh: $(2\times 5)^3 = 10^3 = 1.000$ dan $2^3\times 5^3 = 8\times 125 = 1.000$. Cocok!

RUMUS HIDUP **Mengalikan pangkat sebasis**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Basisnya sama? Pangkatnya tinggal dijumlahkan, karena semua faktornya digabung dalam satu barisan.

a Basis | m Pangkat pertama | n Pangkat kedua | a^{m+n} Hasil kali

HASIL KALI
128

2^3 × 2^4: ada **3** faktor **2**, lalu **4** faktor **2** lagi, total **7** faktor. Hasilnya **8** × **16** = **128**.

Cek satuan: tidak ada satuan; ini perkalian bilangan murni.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KALI-PANGKAT-SEBASIS

Sifat pertama juga bisa dilihat pada grafik. Pada kurva $y = a^x$, menjumlahkan dua langkah di sumbu mendatar sama dengan **mengalikan** dua tinggi di sumbu tegak.

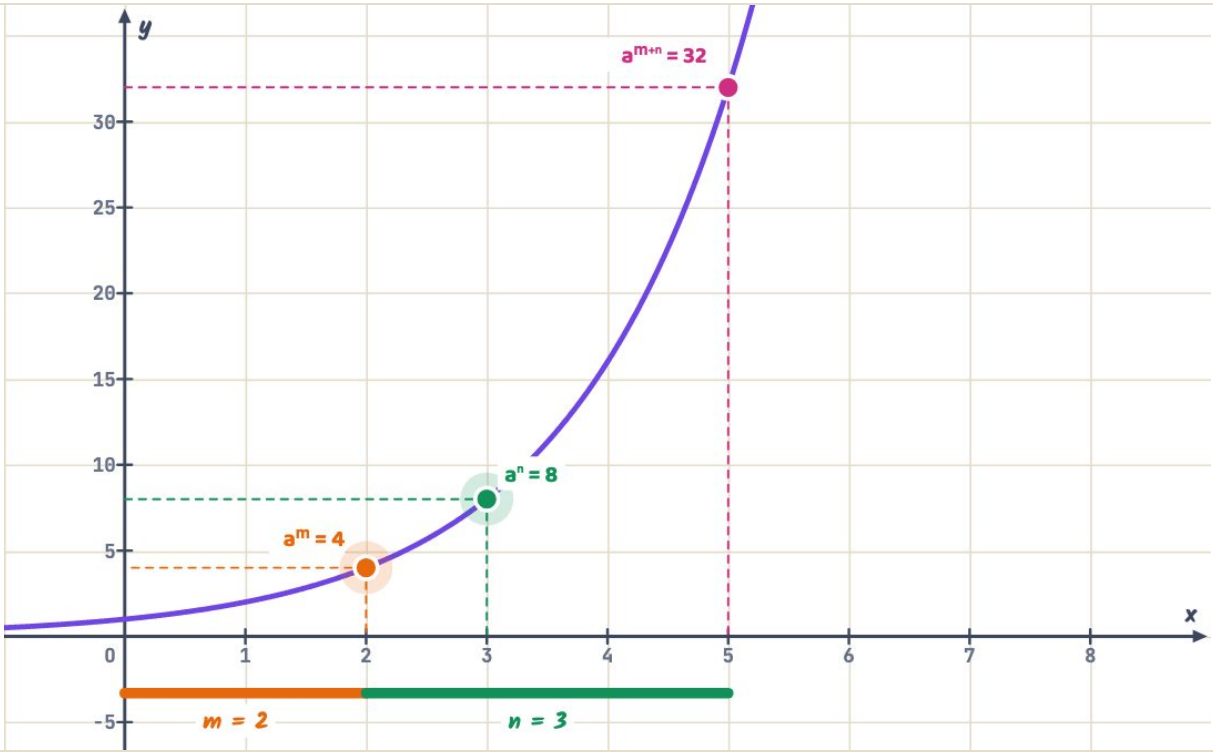
GRAFIK HIDUP

Kurva y = a^x: tambah di bawah, kali di atas

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32 = 2^5$$



a^m	a^n	$a^m \times a^n$	a^{m+n}
4	8	32	32

Seret titik oranye (m) dan hijau (n) di sepanjang kurva. Titik magenta selalu berada di $x = m + n$, dan tingginya selalu sama dengan **hasil kali** tinggi titik oranye dan hijau. Coba juga pangkat pecahan seperti 1,5!

AWAS JEBAKAN

Pangkat hanya boleh dijumlahkan jika basisnya sama **dan** keduanya dikalikan. $2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$, bukan $2^5 = 32$. Basis yang berbeda juga tidak bisa digabung: $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$, bukan 6^5. Dan ingat, $(2^3)^2 = 2^6$, bukan 2^9.

TRIK KAK LINTANG

Bertemu basis yang berbeda-beda? **Samakan dulu basisnya!** Kenali pangkat-pangkat kecil: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $25 = 5^2$, $125 = 5^3$. Setelah basisnya sama, sifat pangkat bekerja seperti sulap.

KERJAKAN BERSAMA

Hitung tanpa kalkulator

Hitung $\dfrac{4^5 \times 8^2}{16^3}$.

1. Samakan basis menjadi 2: $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$, $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$.
2. Pembilang: $2^{10} \times 2^6 = 2^{16}$.
3. Bagi: $2^{16} : 2^{12} = 2^4 = 16$.

Hasilnya 16. Cek dengan kalkulator: $1.024 \times 64 : 4.096 = 16$**. Cocok!**

COBA SENDIRI

Sederhanakan bentuk aljabar

Sederhanakan $\dfrac{(2x^3)^2 \cdot x^4}{4x^5}$ untuk $x \neq 0$.

1. Pangkat menyebar ke setiap faktor: $(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2 = 4x^6$.
2. Pembilang: $4x^6 \cdot x^4 = 4x^{10}$.
3. Bagi: $\dfrac{4x^{10}}{4x^5} = \dfrac{4}{4} \cdot x^{10-5} = x^5$.

Bentuk sederhananya x^5. Cek dengan $x = 2$: $\dfrac{(16)^2 \cdot 16}{4 \cdot 32} = \dfrac{4.096}{128} = 32 = 2^5$**.** ✓

ADU CEPAT

Sifat pangkat kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Isi kotak dengan pangkatnya saja. Pangkat dari pangkat → kalikan, kali → jumlahkan, bagi → kurangkan. Contoh: $(2^3)^2 \times 2^4 : 2^5 = 2$ pangkat $6 + 4 - 5 = 5$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

DUEL RAKSASA DAN ANGKA SATUAN

Mana lebih besar, 2^{300} atau 3^{200}? Kalkulator biasa menyerah, tetapi sifat pangkat tidak. Tulis keduanya dengan pangkat 100: $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ dan $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$. Jelas $9^{100} > 8^{100}$, jadi 3^{200} menang.

Trik kedua: **angka satuan**. Angka satuan pangkat 3 berulang dengan pola 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... (periode 4). Karena $100 = 4 \times 25$, angka satuan 3^{100} sama dengan angka satuan $3^4 = 81$, yaitu 1. Pola berulang seperti ini adalah senjata favorit di soal olimpiade.

6.3 Pangkat nol, pangkat negatif, dan pangkat pecahan

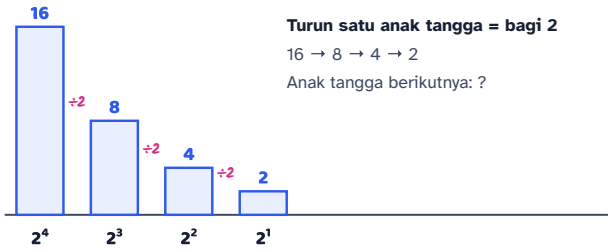
Definisi a^n tadi hanya masuk akal untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$. Lalu apa arti "2 dikalikan dengan dirinya sendiri nol kali", atau "minus tiga kali"? Matematikawan memilih arti yang membuat **pola dan sifat pangkat tetap berlaku**. Mari kita tebak dulu.

Tebak Dulu!

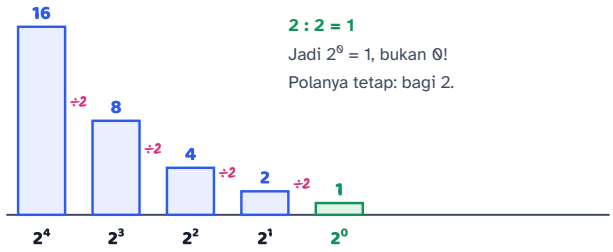
$2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$. **Menurutmu, berapa 2^0?**

- 0, karena dikalikan nol kali berarti tidak ada apa-apa.
- 1
- 2
- Tidak punya arti.

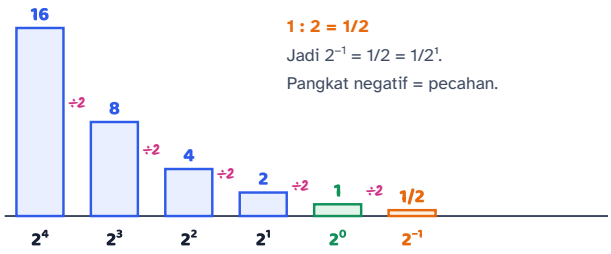
Jawabannya: 1. Perhatikan polanya: setiap pangkat turun satu, nilainya dibagi 2 (8 → 4 → 2). Turun sekali lagi dari $2^1 = 2$: $2 : 2 = 1$. Jadi $2^0 = 1$. Lihat tangganya di bawah.



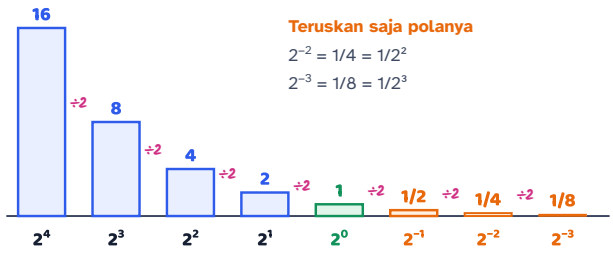
Langkah 1. Pada tangga pangkat dua, setiap turun satu anak tangga, nilainya dibagi 2: 16, 8, 4, 2.



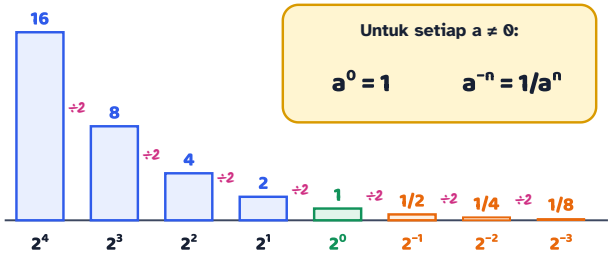
Langkah 2. Turun sekali lagi dari $2^1 = 2$: $2 : 2 = 1$. Jadi $2^0 = 1$.



Langkah 3. Turun lagi: $1 : 2 = \frac{1}{2}$. Jadi $2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$.



Langkah 4. Polanya berlanjut: $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ dan $2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$.



Langkah 5. Kesimpulan untuk basis $a \neq 0$ mana pun: $a^0 = 1$ dan $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

DEFINISI PANGKAT NOL, NEGATIF, DAN PECAHAN

Untuk $a \neq 0$ dan bilangan asli n:

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Untuk $a > 0$ dan bilangan bulat m, bilangan asli n:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dengan definisi ini, kelima sifat pangkat di subbab 6.2 tetap berlaku untuk **semua** pangkat bulat dan pecahan.

Mengapa $a^0 = 1$ dan $a^{1/2} = \sqrt{a}$? (bukti dengan sifat pangkat)

Pangkat nol. Menurut sifat pembagian, $\dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. Padahal bilangan apa pun (selain nol) dibagi dirinya sendiri sama dengan 1. Jadi $a^0 = 1$.

Pangkat negatif. $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$. Dua bilangan yang hasil kalinya 1 saling berkebalikan, jadi $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Pangkat setengah. $a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a$. Jadi $a^{1/2}$ adalah bilangan (positif) yang kuadratnya a, yaitu $\sqrt{a}$. Dengan cara yang sama, $\left(a^{1/3}\right)^3 = a$, sehingga $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$.

Bahasa sederhana · Ingat tangganya: setiap turun satu pangkat, nilainya dibagi dua. Jadi pangkat nol menghasilkan 1, pangkat -1 menghasilkan setengah, dan pangkat -2 menghasilkan seperempat. Pangkat negatif membuat bilangan menjadi **pecahan kecil**, bukan bilangan negatif.

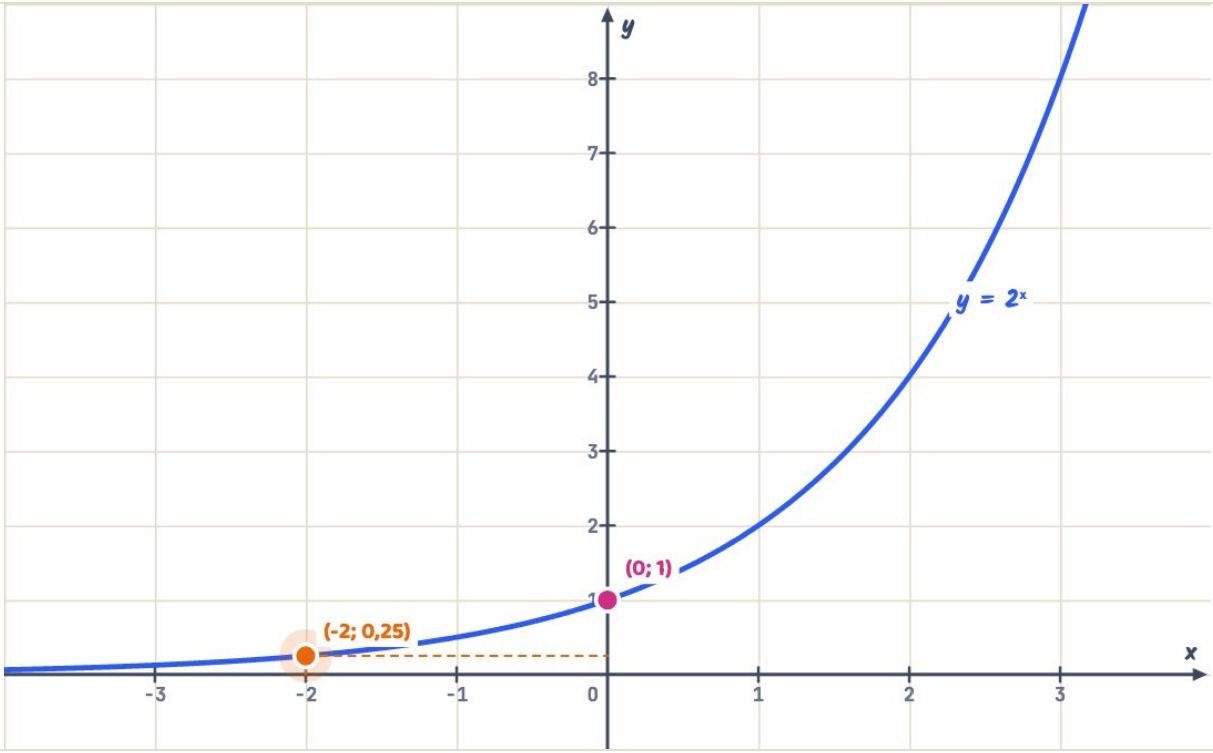
GRAFIK HIDUP

Kurva y = a^x: ke kanan berlipat, ke kiri menjadi pecahan

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(2)^{-2} = \frac{1}{(2)^2} = 0{,}25$$



pangkat negatif ⇒ kebalikan, hasilnya tetap positif

a^x	$a^{-x} = 1/a^x$	$a^x \cdot a^{-x}$
0,25	4	1

Seret titik oranye ke kiri melewati sumbu y. Nilainya tidak pernah negatif, hanya makin mendekati nol. Lalu nyalakan cermin (geser ke 1): kurva $y = (1/a)^x$ adalah bayangan cermin $y = a^x$, karena $a^{-x} = (1/a)^x$. Taruh titik di $x = 0{,}5$ dan bandingkan nilainya dengan $\sqrt{a}$.

RUMUS HIDUP

Pangkat pecahan = akar lalu pangkat

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Penyebut pecahan menjadi akarnya, pembilang menjadi pangkatnya. Ambil akarnya dulu supaya angkanya kecil.

- a Basis
- m Pembilang (pangkat)
- n Penyebut (akar ke-n)
- $a^{m/n}$ Hasil

HASIL

4

✨ **hasilnya bilangan bulat!**

Akar pangkat **3** dari **8** adalah **2**. Dipangkatkan **2**, hasilnya **4**. Cara lain: $\mathbf{8^2 = 64}$, lalu diakarkan pangkat **3**, hasilnya sama.

Cek satuan: tanpa satuan. Coba a = 8, m = 2, n = 3: akar pangkat tiga dari 8 adalah 2, dan $2^2 = 4$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PANGKAT-PECAHAN-AKAR

CONTOH

Pangkat pecahan dan negatif

Hitung $8^{2/3}$ dan $16^{-3/4}$.

1. $8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$. (Akar pangkat tiga dari 8 adalah 2, karena $2^3 = 8$.)
2. $16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$.
3. Pangkat negatif berarti kebalikan: $16^{-3/4} = \dfrac{1}{16^{3/4}} = \dfrac{1}{8}$.

$8^{2/3} = 4$ dan $16^{-3/4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Ambil akarnya dulu, baru dipangkatkan: angkanya tetap kecil dan ramah.

AWAS JEBAKAN

Tanda kurung mengubah segalanya: $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$, tetapi $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$, karena pangkat dikerjakan sebelum tanda minus. Selain itu, 0^{-1} tidak terdefinisi (tidak boleh membagi dengan nol), dan di sekolah 0^0 biasanya dibiarkan tidak didefinisikan.

6.4 Akar dan bentuk akar

Akar adalah kebalikan dari kuadrat. Jika sebuah ubin persegi luasnya 49 cm², sisinya 7 cm, karena $7^2 = 49$. Kita menulisnya $\sqrt{49} = 7$.

DEFINISI

Untuk $a \geq 0$, **akar kuadrat** $\sqrt{a}$ adalah bilangan **tak negatif** yang kuadratnya sama dengan a. Akar pangkat tiga $\sqrt[3]{a}$ adalah bilangan yang pangkat tiganya sama dengan a (di sini a boleh negatif, misalnya $\sqrt[3]{-8} = -2$).

Akar yang hasilnya bukan bilangan rasional, seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, dan $\sqrt{5}$, disebut **bentuk akar**. Bilangan $\sqrt{9} = 3$ bukan bentuk akar.

Bahasa sederhana · Cara membaca $\sqrt{}$: "bilangan berapa yang kalau dikalikan dengan dirinya sendiri menghasilkan angka di dalam akar?" Misalnya $\sqrt{64} = 8$ karena $8 \times 8 = 64$.

Tebak Dulu!

Dimas menulis $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Benarkah?

- Benar, akar boleh dipecah seperti itu.
- Benar, tetapi hanya untuk bilangan kuadrat.
- Salah, karena $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
- Salah, seharusnya $\sqrt{9+16} = 25$.

Jawabannya: salah. Hitung dulu isi akarnya: $9 + 16 = 25$, dan $\sqrt{25} = 5$, bukan 7. Akar boleh dipecah pada **perkalian** ($\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$), tetapi **tidak** pada penjumlahan. (Diam-diam, 3, 4, dan 5 ini akan kamu temui lagi di Bab 18!)

SIFAT-SIFAT AKAR

Untuk $a, b \geq 0$:

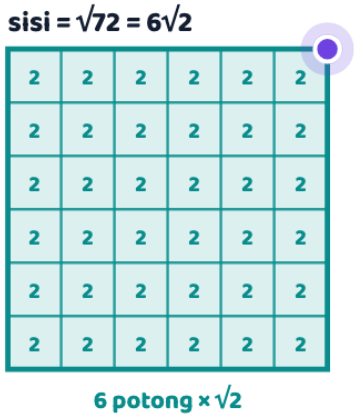
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dan $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (untuk $b > 0$);
- $(\sqrt{a})^2 = a$;
- bentuk akar sejenis bisa dijumlahkan seperti suku sejenis: $p\sqrt{a} + q\sqrt{a} = (p+q)\sqrt{a}$.

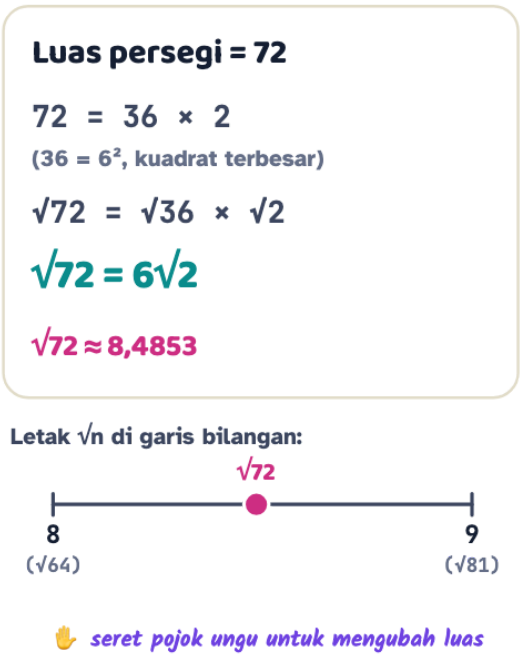
Sifat pertama adalah sifat pangkat $(ab)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2}$ yang menyamar!

Sifat pertama membuat kita bisa **menyederhanakan** bentuk akar: cari bilangan kuadrat terbesar yang membagi isi akar, lalu keluarkan. Contohnya $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Lab di bawah memperlihatkan mengapa ini masuk akal: persegi seluas 72 bisa dipotong menjadi 6×6 persegi kecil yang masing-masing luasnya 2.

LAB MINI **Potong persegi, keluarkan akarnya**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6





√n ≈	Kuadrat terbesar yang membagi n	Bentuk paling sederhana
8,4853	36	√72 = 6√2

Seret pojok ungu atau geser slider untuk mengubah luas persegi n. Persegi dipotong menjadi $k \times k$ persegi kecil yang sama, masing-masing seluas b. Sisinya k potong kali $\sqrt{b}$, jadi $\sqrt{n} = k\sqrt{b}$. Coba cari: luas berapa saja yang tidak bisa dipotong (selain 1×1)? Luas berapa yang menghasilkan persegi hijau?

ADU CEPAT **Keluarkan dari akar**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Isi kotak dengan bilangan bulat. Cari kuadrat sempurna terbesar yang membagi isi akar: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

KERJAKAN BERSAMA **Menjumlahkan bentuk akar**

Sederhanakan $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}$.

1. Sekilas tidak sejenis. Sederhanakan dulu masing-masing: $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$ dan $\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$.
3. Sekarang semuanya sejenis: $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$.

Hasilnya $10\sqrt{2}\approx 14{,}14$. Perhatikan, $\sqrt{8+18+50}=\sqrt{76}\approx 8{,}72$ hasilnya berbeda jauh!

COBA SENDIRI **Mana yang lebih besar?**

Tanpa kalkulator, manakah yang lebih besar: $3\sqrt{5}$ atau $5\sqrt{2}$?

1. Masukkan angka di depan ke dalam akar: $3\sqrt{5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=\sqrt{45}$.
2. Dengan cara yang sama, $5\sqrt{2}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{50}$.
3. Karena $50>45$, maka $\sqrt{50}>\sqrt{45}$.

$5\sqrt{2}$ lebih besar ($\approx 7{,}07$ dibanding $\approx 6{,}71$). Trik "masukkan ke dalam akar" membuat perbandingan menjadi sangat mudah.

TEOREMA: $\sqrt{2}$ ADALAH BILANGAN IRASIONAL

Tidak ada pecahan $\frac{p}{q}$ (dengan p, q bilangan bulat) yang kuadratnya tepat 2. Akibatnya, desimal $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$ tidak pernah berhenti dan tidak pernah berulang.

Bukti dengan kontradiksi (bukti klasik berumur lebih dari 2.000 tahun)

Andaikan $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dengan p, q bilangan asli dan pecahannya sudah paling sederhana (p dan q tidak punya faktor persekutuan).

Kuadratkan: $p^2 = 2q^2$. Jadi p^2 genap, sehingga p juga genap (kuadrat bilangan ganjil selalu ganjil). Tulis $p = 2s$.

Maka $4s^2 = 2q^2$, atau $q^2 = 2s^2$. Jadi q^2 genap dan q juga genap.

Sekarang p dan q sama-sama genap, berarti keduanya punya faktor persekutuan 2. Ini bertentangan dengan pengandaian bahwa pecahannya sudah paling sederhana. Jadi $\sqrt{2}$ tidak mungkin berupa pecahan. ∎

∎

TAMU DARI MASA LALU

Sebuah lempeng tanah liat Babilonia yang dikenal sebagai *YBC 7289* (±1800–1600 SM) menggambar sebuah persegi dengan dua diagonalnya. Di sepanjang diagonal tertulis bilangan dalam sistem basis 60 yang nilainya sekitar 1,414213, yaitu $\sqrt{2}$ yang tepat hingga lima angka di belakang koma! Lambang $\sqrt{}$ sendiri jauh lebih muda: lambang ini dipopulerkan oleh matematikawan Jerman Christoph Rudolff pada 1525, mungkin dari huruf *r* untuk *radix* (bahasa Latin untuk "akar").

AWAS JEBAKAN

Akar tidak bisa dipecah pada penjumlahan atau pengurangan: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Selain itu, $\sqrt{9} = 3$, bukan ± 3. Memang $x^2 = 9$ punya dua penyelesaian ($x = 3$ atau $x = -3$), tetapi lambang $\sqrt{}$ selalu berarti akar yang **tak negatif**.

MITOS

"
2^3
sama dengan
$2 \times 3 = 6$
."

FAKTA

Pangkat adalah perkalian **berulang**:
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
. Yang sama dengan 6 adalah
$2 \times 3 = 2 + 2 + 2$
, yaitu penjumlahan berulang.

MITOS

"Pangkat negatif menghasilkan bilangan negatif."

FAKTA

$2^{-3} = \frac{1}{8}$
, tetap positif! Tanda minus pada pangkat berarti "ambil kebalikannya", bukan "jadikan negatif".

MITOS

"
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
."

FAKTA

Coba
$a = 9$
dan
$b = 16$
: ruas kiri
$\sqrt{25} = 5$
, ruas kanan
$3 + 4 = 7$
. Akar hanya akrab dengan perkalian dan pembagian, bukan penjumlahan.

MITOS

"Angka nol tidak pernah termasuk angka penting."

FAKTA

Nol di antara angka lain (2,05) dan nol di belakang koma desimal (3,40) termasuk angka penting. Hanya nol di depan, seperti pada 0,004, yang sekadar penunjuk letak koma.

6.5 Merasionalkan penyebut

Coba hitung $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dengan tangan. Kamu harus membagi 1 dengan 1,41421..., pembagian yang menyiksa. Bandingkan dengan $\frac{\sqrt{2}}{2}$: cukup bagi 1,41421 dengan 2, hasilnya 0,70711. Padahal keduanya bernilai **sama**! Mengubah penyebut berbentuk akar menjadi bilangan rasional disebut **merasionalkan penyebut**. Selain memudahkan hitungan, bentuk ini juga disepakati sebagai bentuk "rapi" sebuah jawaban.

CARA MERASIONALKAN PENYEBUT

Kalikan pecahan dengan "1 yang cerdik", yaitu pecahan yang pembilang dan penyebutnya sama:

- $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$
- $\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{c\,(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$
- $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

Bentuk $a - \sqrt{b}$ disebut **sekawan** dari $a + \sqrt{b}$. Rahasianya: $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$. Akarnya lenyap!

Mengapa sekawan menghapus akar? Kalikan satu per satu: $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - a\sqrt{b} + a\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b$. Dua suku tengah saling menghapus. Kamu akan melihat pola $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ ini lagi di bab aljabar.

CONTOH **Penyebut berupa satu akar**

Rasionalkan penyebut $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

1. Kalikan dengan $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$: $\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$.

2. Sederhanakan: $\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

$\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$. **Cek:** $6 : 1{,}732 \approx 3{,}46$. ✓

KERJAKAN BERSAMA **Memakai sekawan**

Rasionalkan penyebut $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$.

1. Sekawan dari $3-\sqrt{3}$ adalah $3+\sqrt{3}$. Kalikan pembilang dan penyebut dengannya.

2. Penyebut: $(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) = 9-3 = 6$.

3. Pembilang: $6(3+\sqrt{3})$. Jadi $\frac{6(3+\sqrt{3})}{6} = 3+\sqrt{3}$.

$\frac{6}{3-\sqrt{3}} = 3+\sqrt{3} \approx 4{,}732$. **Cek:** $6 : (3-1{,}732) = 6 : 1{,}268 \approx 4{,}732$. ✓

LANJUT · IB & OLIMPIADE

AKAR BERSARANG

Kadang akar bersembunyi di dalam akar. Misalnya $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. Tebak bentuknya $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, lalu kuadratkan: $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy}$. Kita butuh $x+y=5$ dan $xy=6$, yaitu $x=3$, $y=2$. Jadi

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Tantangan untukmu: tunjukkan bahwa $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$. (Petunjuk: $4\sqrt{3} = 2\sqrt{12}$, dan hati-hati memilih tanda supaya hasilnya positif.)

6.6 Notasi ilmiah dan angka penting

Jarak Bumi ke Matahari sekitar 149.600.000.000 m. Diameter sebuah virus sekitar 0,000 000 1 m. Menulis nol sebanyak itu melelahkan dan rawan salah hitung. Para ilmuwan memakai cara yang jauh lebih hemat.

DEFINISI

Sebuah bilangan ditulis dalam **notasi ilmiah** (bentuk baku, *standard form*) jika berbentuk

$$a \times 10^{n}, \qquad 1 \le |a| < 10, \quad n \text{ bilangan bulat}.$$

Contoh: $149.600.000.000 = 1{,}496 \times 10^{11}$ dan $0{,}0000001 = 1 \times 10^{-7}$.

TRIK KAK LINTANG

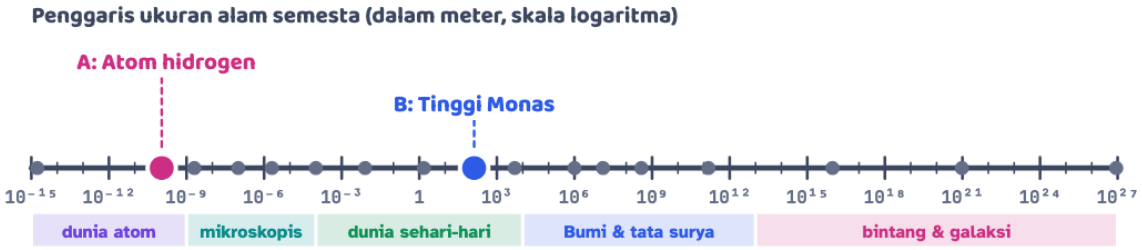
Bayangkan koma sebagai katak yang melompat. Lompatkan koma sampai tersisa **satu** angka bukan nol di depannya, lalu hitung lompatannya. Lompat ke **kiri** (bilangan besar) → pangkatnya **positif**. Lompat ke **kanan** (bilangan kecil) → pangkatnya **negatif**. Contoh: 0,00052 → koma melompat 4 kali ke kanan → $5{,}2 \times 10^{-4}$.

Bahasa sederhana · Notasi ilmiah itu seperti singkatan. Angka di depan memberi tahu "berapa", dan pangkat 10 memberi tahu "berapa banyak nol". Jadi 3×10^{6} artinya 3 diikuti 6 nol: 3.000.000.

Dengan notasi ilmiah, kita bisa menyusun seluruh alam semesta pada satu penggaris: setiap anak tangga berarti 10 kali lebih besar. Jarak dari inti atom sampai alam semesta yang teramati hanya sekitar 42 anak tangga!

LAB MINI **Penggaris alam semesta: dari atom sampai galaksi**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6



A: Atom hidrogen

Notasi ilmiah $1{,}1 \times 10^{-10}$ m

Bentuk biasa

0,000 000 000 11 m

B: Tinggi Monas

Notasi ilmiah $1{,}32 \times 10^{2}$ m

Bentuk biasa

132 m

$$A : B = (1{,}1 : 1{,}32) \times 10^{-10-2} \approx 8{,}33 \times 10^{-13}$$

Artinya, B sekitar 1,2 triliun kali lebih besar daripada A.

A (notasi ilmiah)	B (notasi ilmiah)	A : B
$1{,}1 \times 10^{-10}$ m	$1{,}32 \times 10^{2}$ m	$8{,}33 \times 10^{-13}$

Pilih benda A dan B, atau klik sebuah titik di penggaris untuk memilih A. Bandingkan cara menulis bentuk biasa (yang panjang!) dengan notasi ilmiahnya. Lihat bagaimana membagi dua bilangan cukup dengan membagi angka depan dan **mengurangkan** pangkatnya. Tekan ▶ **Jalankan** untuk berkelana dari inti atom sampai tepi alam semesta.

Satuan yang sering kamu jumpai sebenarnya adalah pangkat 10 yang menyamar sebagai **awalan satuan**:

Awalan	Lambang	Nilai	Contoh
tera	T	10^{12}	hard disk 1 TB ($\pm 10^{12}$ byte)
giga	G	10^{9}	kuota internet 10 GB
mega	M	10^{6}	pembangkit listrik ratusan MW
kilo	k	10^{3}	1 km, 1 kg
mili	m	10^{-3}	tablet obat 500 mg
mikro	µ	10^{-6}	bakteri ±2 µm
nano	n	10^{-9}	virus korona ±100 nm
piko	p	10^{-12}	atom hidrogen ±100 pm

Menghitung dengan notasi ilmiah sangat mudah karena sifat pangkat bekerja untuk kita. Saat mengalikan, kalikan angka depannya dan **jumlahkan** pangkatnya. Saat membagi, bagi angka depannya dan **kurangkan** pangkatnya. Terakhir, rapikan agar angka depan kembali di antara 1 dan 10:

$$(6 \times 10^4) \times (5 \times 10^3) = 30 \times 10^7 = 3 \times 10^8$$

RUMUS HIDUP

Waktu tempuh cahaya

$$t = \frac{m \times 10^{k}\ \text{km}}{3 \times 10^5\ \text{km/s}}$$

Cahaya menempuh 300.000 km setiap detik. Bagi angka depan jarak dengan 3, lalu kurangkan pangkat sepuluhnya dengan 5.

- m Angka depan jarak
- k Pangkat sepuluh jarak
- t Waktu tempuh cahaya s

WAKTU TEMPUH CAHAYA

1,28

s

◯ **kira-kira jarak Bumi–Bulan**

Jarak **3,84** × 10**5** km = **384.000** km. Waktunya (**3,84** : 3) × 10**0** = **1,28** × 10**0** = **1,28** detik, atau sekitar **0,021** menit.

Satuan Nusantara: ≈ 4,3 × kedipan mata · ≈ 2% dari satu menit

Cek satuan: km dibagi km/s menghasilkan s (detik).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEMPUH-CAHAYA

CONTOH **Menulis jarak Bumi–Matahari**

Jarak rata-rata Bumi ke Matahari sekitar 149.600.000 km. Tuliskan dalam notasi ilmiah, dalam km lalu dalam meter.

1. Lompatkan koma ke kiri sampai tersisa satu angka di depannya: 1,49600000. Koma melompat 8 kali, jadi $1{,}496 \times 10^{8}$ km.
2. 1 km $= 10^{3}$ m, jadi jaraknya $1{,}496 \times 10^{8} \times 10^{3} = 1{,}496 \times 10^{11}$ m.

$1{,}496 \times 10^{8}$ **km** $= 1{,}496 \times 10^{11}$ **m. Jauh lebih ringkas daripada menulis 149.600.000.000 m!**

KERJAKAN BERSAMA **Cahaya Matahari yang terlambat**

Cahaya merambat dengan kecepatan 3×10^{8} m/s. Berapa lama cahaya Matahari menempuh $1{,}5 \times 10^{11}$ m sampai ke Bumi?

1. Waktu = jarak : kecepatan $= \dfrac{1{,}5 \times 10^{11}}{3 \times 10^{8}}$.
2. Bagi angka depan: $1{,}5 : 3 = 0{,}5$. Kurangkan pangkat: $10^{11-8} = 10^{3}$.
3. $0{,}5 \times 10^{3} = 5 \times 10^{2} = 500$ detik.

Sekitar 500 detik, atau 8 menit 20 detik. Jadi saat melihat Matahari terbenam, kamu sedang melihat Matahari 8 menit yang lalu!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Dalam notasi ilmiah, angka depan harus memenuhi $1 \le a < 10$. Bentuk 34×10^{5} dan $0{,}34 \times 10^{7}$ bernilai benar, tetapi belum baku; bentuk bakunya $3{,}4 \times 10^{6}$. Hati-hati juga dengan tanda pangkat: $10^{-3} = 0{,}001$ adalah bilangan positif yang kecil, bukan bilangan negatif.

Hasil pengukuran tidak pernah tepat sempurna. Penggaris berskala milimeter bisa mengukur 12,3 cm, tetapi tidak bisa memastikan 12,34 cm. Angka-angka yang benar-benar bermakna dalam hasil pengukuran disebut **angka penting**. Notasi ilmiah membuat banyaknya angka penting terlihat jelas: semua angka pada bagian a adalah angka penting.

Aturan angka penting	Contoh	Banyak angka penting

Semua angka bukan nol adalah angka penting.	254	3
Nol di antara angka bukan nol adalah angka penting.	2,05 · 1.007	3 · 4
Nol di depan angka bukan nol pertama **bukan** angka penting.	0,0042	2
Nol di belakang koma desimal adalah angka penting.	3,40 · 2,000	3 · 4
Nol di ujung bilangan bulat meragukan; pakai notasi ilmiah.	$1{,}5 \times 10^3 \cdot 1{,}500 \times 10^3$	2 · 4

Untuk **membulatkan** ke k angka penting, lihat angka ke-$(k+1)$: bulatkan ke atas jika angka itu 5 atau lebih. Contoh: 384.400 dibulatkan ke 2 angka penting menjadi $380.000 = 3{,}8 \times 10^5$, dan 0,004567 menjadi 0,0046. Saat mengalikan atau membagi hasil ukur, tulis hasilnya dengan banyak angka penting **paling sedikit** di antara bilangan yang dihitung. Misalnya $2{,}5\ \text{cm} \times 3{,}47\ \text{cm} = 8{,}675\ \text{cm}^2$, ditulis $8{,}7\ \text{cm}^2$ (2 angka penting, mengikuti 2,5).

COBA SENDIRI **Menaksir butir nasi se-Indonesia**

Kira-kira berapa butir beras yang dimakan seluruh penduduk Indonesia dalam setahun? Anggap setiap orang makan ±250 g beras sehari, sebutir beras beratnya ±0,02 g, dan penduduk Indonesia ±$2{,}8 \times 10^8$ jiwa.

1. Butir per orang per hari: $250 : 0{,}02 = 12.500 = 1{,}25 \times 10^4$ butir.
2. Per orang per tahun: $1{,}25 \times 10^4 \times 365 \approx 4{,}56 \times 10^6$ butir.
3. Seluruh penduduk: $4{,}56 \times 10^6 \times 2{,}8 \times 10^8 \approx 12{,}8 \times 10^{14} \approx 1{,}3 \times 10^{15}$ butir.

Sekitar $1{,}3 \times 10^{15}$ butir, yaitu angka 13 diikuti 14 angka nol! Taksiran kasar seperti ini disebut estimasi Fermi. Hasilnya cukup ditulis dengan 2 angka penting, karena data awalnya pun hanya perkiraan.

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 250 SM, Archimedes dari Syrakusa menulis karya yang dikenal sebagai *Sang Penghitung Pasir*. Ia ingin membuktikan bahwa banyaknya butir pasir yang dapat mengisi seluruh alam semesta (menurut ukuran yang dikenal saat itu) tetap bisa dihitung, tidak "tak terhingga". Bahasa Yunani saat itu hanya punya nama bilangan sampai *myriad* (10.000), maka Archimedes menciptakan sistem bertingkat "myriad dari myriad" yang mirip pangkat. Taksirannya: tidak lebih dari sekitar 10^{63} butir. Gagasan menulis bilangan raksasa dengan pangkat ternyata sudah berumur lebih dari 2.000 tahun.

MATEMATIKA NUSANTARA

Jauh sebelum notasi ilmiah dikenal, bahasa Melayu sudah punya nama untuk bilangan besar: **laksa** (10.000 = 10^4), **keti** (100.000 = 10^5), dan **juta** (1.000.000 = 10^6). Bahasa Jawa punya kata serupa: *leksa*, *kethi*, dan *yuta*. Kata laksa dan keti berasal dari bahasa Sanskerta (*lakṣa* dan *koṭi*), tetapi nilainya bergeser: di India, *lakh* berarti 100.000 dan *crore* berarti 10.000.000. Ungkapan "beribu-ribu laksa" dalam hikayat lama berarti "banyak sekali". Coba tanyakan kakek atau nenekmu: pernahkah mereka mendengar kata s*elaksa*?



Nasi basi

Dalam suhu hangat, bakteri bisa berlipat dua setiap ±20 menit. Dalam 8 jam, satu bakteri bisa menjadi 2^{24}, lebih dari 16 juta. Simpan makanan matang di kulkas!



Memori HP

Komputer bekerja dengan pangkat dua, misalnya $2^{10} = 1.024$ byte. Itulah sebabnya kapasitas memori HP berupa 32, 64, 128, atau 256 GB.



Pesan berantai

Jika setiap orang meneruskan hoaks ke 5 orang, setelah 10 putaran penerima barunya $5^{10} \approx 9{,}8$ juta orang. Periksa dulu sebelum ikut menyebarkan!



Observatorium Bosscha

Astronom di Lembang menyatakan jarak bintang dalam tahun cahaya ($\approx 9{,}46 \times 10^{15}$ m). Tanpa notasi ilmiah, angkanya tak muat di buku catatan.



Label obat & gizi

Kandungan vitamin ditulis dalam mg (10^{-3} g) atau µg (10^{-6} g). Salah membaca awalan berarti salah seribu kali lipat!



Kalkulator ilmiah

Layar kalkulator menampilkan `3.2E12` untuk $3{,}2 \times 10^{12}$. Huruf E artinya "kali sepuluh pangkat".

Cek Cepat

Bentuk sederhana dari $\dfrac{3^5 \times 3^2}{3^4}$ adalah...

- 3^{10}
- 3^2
- 3^3
- 9^3

Bentuk paling sederhana dari $\sqrt{48}$ adalah...

- $4\sqrt{3}$
- $2\sqrt{12}$
- $16\sqrt{3}$
- $3\sqrt{4}$

Massa Bumi sekitar 5.970.000.000.000.000.000.000.000 kg. Dalam notasi ilmiah, massa itu ditulis...

- 597×10^{22} kg
- $5{,}97 \times 10^{25}$ kg
- $5{,}97 \times 10^{-24}$ kg
- $5{,}97 \times 10^{24}$ kg

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: berapa kali kertasmu bisa dilipat?

Bahan: selembar kertas HVS, selembar kertas koran, penggaris, buku catatan (opsional: satu rim kertas HVS berisi 500 lembar).

1. Ukur tebal satu rim kertas (biasanya ±5 cm), lalu bagi dengan 500 untuk mendapatkan tebal selembar. Tuliskan hasilnya dalam meter dengan notasi ilmiah.
2. Lipat kertas HVS menjadi dua, lalu dua lagi, dan seterusnya. Setiap kali melipat, catat banyak lapisannya (2, 4, 8, ...).
3. Setelah lipatan ke-5 atau ke-6, ukur tebal tumpukan dengan penggaris. Bandingkan dengan perkiraan $t_0 \times 2^n$.
4. Teruskan sampai kertas benar-benar tidak bisa dilipat lagi. Catat lipatan terakhirmu.
5. Ulangi dengan kertas koran yang lebih lebar dan lebih tipis.

Pertanyaan: Berapa lipatan terbanyak yang berhasil kamu buat? Berapa lapis kertas pada lipatan itu? Mengapa melipat makin lama makin sulit? (Petunjuk: setiap lipatan, tebal dikalikan 2 dan luas dibagi 2.) Apakah kertas koran bisa dilipat lebih banyak? Jelaskan dengan pangkat.

⚡ RINGKASAN KILAT — Bab 6 dalam 3 menit

☑️ Kamu sekarang bisa...

- menulis perkalian berulang sebagai **bilangan berpangkat** dan merasakan betapa cepat pangkat tumbuh
- memakai **sifat-sifat pangkat** dan menjelaskan mengapa sifat itu benar dengan menghitung banyak faktor
- memaknai **pangkat nol, pangkat negatif, dan pangkat pecahan**
- menyederhanakan **bentuk akar** dan **merasionalkan penyebut**
- menulis bilangan raksasa dan bilangan mungil dalam **notasi ilmiah**, menghitung dengannya, dan memakai **angka penting**

🔑 Istilah kunci

bilangan berpangkat · basis · pangkat · eksponen · pertumbuhan eksponensial · akar kuadrat · bentuk akar · merasionalkan penyebut · sekawan · notasi ilmiah · awalan satuan · angka penting

🧮 Rumus penting

$$t = t_0 \cdot 2^n$$

Tebal kertas terlipat. Setiap lipatan menggandakan tebal. Jadi tebal awal dikalikan 2 sebanyak n kali.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Mengalikan pangkat sebasis. Basisnya sama? Pangkatnya tinggal dijumlahkan, karena semua faktornya digabung dalam satu barisan.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Pangkat pecahan = akar lalu pangkat. Penyebut pecahan menjadi akarnya, pembilang menjadi pangkatnya. Ambil akarnya dulu supaya angkanya kecil.

$$t = \frac{m \times 10^k \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

Waktu tempuh cahaya. Cahaya menempuh 300.000 km setiap detik. Bagi angka depan jarak dengan 3, lalu kurangkan pangkat sepuluhnya dengan 5.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Pangkat hanya boleh dijumlahkan jika basisnya sama dan keduanya dikalikan.
- Tanda kurung mengubah segalanya: $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$, tetapi $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$, karena pangkat dikerjakan sebelum tanda minus.
- Akar tidak bisa dipecah pada penjumlahan atau pengurangan: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=6

Teka-teki untuk Bab 7

Ancil punya trik sulap. "Pikirkan sebuah bilangan bulat, rahasiakan! Kuadratkan bilangan *sesudahnya*, lalu kurangi dengan kuadrat bilangan *sebelumnya*. Bagi hasilnya dengan 4." Lalu Ancil berseru, "Hasilnya pasti bilangan yang kamu pikirkan!" Coba dengan 7: $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$, dan $28 : 4 = 7$. Tepat! Apakah trik ini selalu berhasil, bahkan untuk bilangan negatif? Mengapa?

▼ **Intip petunjuk**

Sebut bilangan rahasiamu sebagai "kotak misteri" n. Bilangan sesudahnya $n + 1$ dan sebelumnya $n - 1$. Hitunglah $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$. Bab 7 akan mengajarimu **bahasa aljabar** untuk membongkar trik sulap seperti ini, lengkap dengan bentuk $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ yang ajaib.

BAB 7 · ALJABAR & FUNGSI

07 Bahasa Aljabar: Kotak Misteri dan Sulap Bilangan

Ancil bisa menebak hasil hitunganmu tanpa mengintip. Ilmu sihir? Bukan! Rahasianya adalah sebuah bahasa yang memakai huruf sebagai kotak misteri. Kuasai bahasa ini, dan kamu bisa membongkar trik sulap, menghitung 99^2 di luar kepala, serta menulis satu aturan yang berlaku untuk semua bilangan sekaligus.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai huruf sebagai **variabel** (kotak misteri) dan menghitung nilai sebuah **ekspresi aljabar**;
- menerjemahkan cerita sehari-hari, seperti tarif ojek dan paket kuota, menjadi ekspresi aljabar;
- menyederhanakan ekspresi dengan mengumpulkan **suku sejenis**;
- melakukan **ekspansi** dengan sifat distributif dan model luas, serta **memfaktorkan** dengan faktor persekutuan;
- membongkar trik sulap bilangan dan berhitung kilat dengan identitas $(a+b)^2$ dan a^2-b^2.

ANCIL MEMBACA PIKIRAN?

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Ancil yakin triknya selalu menghasilkan 5. Bagaimana jika Dimas memilih bilangan negatif, misalnya –3, atau pecahan ½?

- Hasilnya ikut negatif, karena bilangan awalnya negatif.
- Triknya gagal untuk pecahan, karena langkah "bagi 2" membuat hasilnya berkoma.
- Tetap 5, untuk bilangan apa pun.
- Trik itu hanya berhasil untuk bilangan 1 sampai 10.

Jawabannya: tetap 5. Coba –3: dikali 2 menjadi –6, ditambah 10 menjadi 4, dibagi 2 menjadi 2, lalu dikurangi –3 menjadi 2 + 3 = 5. Coba ½: menjadi 1, lalu 11, lalu 5½, dan akhirnya 5½ – ½ = 5. Tetapi mencoba seribu contoh pun belum membuktikan bahwa trik itu *selalu* berhasil. Kita butuh alat yang mewakili semua bilangan sekaligus. Alat itu bernama aljabar.

7.1 Variabel: kotak misteri

Mari bongkar trik Ancil. Kita tidak tahu bilangan pilihan Dimas, jadi kita tulis saja sebagai **kotak misteri**. Matematikawan biasanya memakai huruf, misalnya x. Sekarang ikuti setiap perintah Ancil, dengan angka dan dengan kotak misteri:

Perintah Ancil	Dimas memilih 7	Ayu memilih 1.000.000	Kotak misteri x
Pikirkan sebuah bilangan	7	1.000.000	x
Kalikan 2	14	2.000.000	$2x$
Tambah 10	24	2.000.010	$2x + 10$
Bagi 2	12	1.000.005	$x + 5$
Kurangi bilangan awal	**5**	**5**	**5**

Lihat kolom terakhir. Kotak misterinya **lenyap** pada langkah terakhir, dan yang tersisa hanya 5. Artinya, hasilnya 5 *apa pun* isi kotaknya: 7, satu juta, −3, atau ½. Ancil tidak membaca pikiran. Ia membaca aljabar!

Masih ingat teka-teki Ancil di akhir Bab 6? Kuadrat bilangan sesudahnya dikurangi kuadrat bilangan sebelumnya, lalu dibagi 4, dan hasilnya selalu bilangan awalmu. Trik itu bekerja dengan rahasia yang sama. Kita akan membongkarnya di subbab 7.6, setelah kamu punya alat yang tepat.

Bahasa sederhana · Bayangkan x seperti kotak kado yang masih tertutup. Kita belum tahu isinya, tetapi kita tetap bisa berhitung dengannya. Dua kotak yang sama ditambah 10 permen kita tulis $2x + 10$. Kalau kotaknya dibuka dan isinya 7, nilainya $2 \times 7 + 10 = 24$.



DEFINISI

Variabel adalah huruf (atau lambang) yang mewakili sebuah bilangan yang belum diketahui atau yang nilainya boleh berubah-ubah. Gabungan bilangan, variabel, dan operasi hitung disebut **ekspresi aljabar** (atau *bentuk aljabar*), misalnya $2x + 10$, $3a - 5b$, atau $x^2 + 1$. Mengganti variabel dengan sebuah bilangan disebut **substitusi**.

Tebak Dulu!

Jika $x = 4$, berapakah nilai $3x$?

34, karena angka 3 ditulis di depan 4.

7, karena 3 ditambah 4.

12.

3,4.

Jawabannya: 12. Dalam aljabar, $3x$ berarti $3 \times x$; tanda kalinya hanya disembunyikan. Saat x diganti 4, tanda kali itu muncul lagi: $3 \times 4 = 12$. Supaya tidak keliru, tulislah substitusi dengan kurung: $3(4) = 12$.

TATA BAHASA ALJABAR

- $2x$ berarti $2 \times x$. Angka ditulis di depan: $2x$, bukan $x2$.
- ab berarti $a \times b$, dan $ab = ba$.
- $1x$ cukup ditulis x, dan $-1x$ ditulis $-x$.
- x^2 berarti $x \times x$, sedangkan $2x$ berarti $x + x$. Keduanya berbeda!
- $\frac{x}{3}$ berarti $x \div 3$.
- Saat substitusi bilangan negatif, **pakai kurung**: untuk $x = -3$, $x^2 = (-3)^2 = 9$ dan $5 - 2x = 5 - 2(-3) = 11$.

CONTOH

Mengisi kotak misteri

Hitung nilai $5n - 2$ untuk $n = 4$, lalu untuk $n = -1$.

1. Untuk $n = 4$: $5n - 2 = 5(4) - 2 = 20 - 2 = 18$.
2. Untuk $n = -1$: $5n - 2 = 5(-1) - 2 = -5 - 2 = -7$.

Nilainya 18 dan –7. Satu ekspresi bisa punya banyak nilai, tergantung isi kotak misterinya.

ADU CEPAT **Isi kotak misteri**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Ganti x dengan bilangannya, kalikan dulu, baru tambah atau kurangi. Contoh: x = −2 ⇒ 3x + 4 = 3·(−2) + 4 = −2.

TAMU DARI MASA LALU

Kata *aljabar* berasal dari judul buku karya Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi**, ilmuwan di Baghdad, sekitar tahun 820 M: *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala*. Kata *al-jabr* berarti "memulihkan" atau "menyatukan kembali". Uniknya, al-Khwarizmi menulis semua soalnya dengan **kata-kata**, tanpa satu huruf x pun! Lambang huruf baru dipakai secara luas ratusan tahun kemudian: François Viète (Prancis, akhir abad ke-16) memakai huruf untuk mewakili besaran, lalu René Descartes (1637) mempopulerkan x, y, z untuk besaran yang belum diketahui. Nama al-Khwarizmi sendiri berubah menjadi kata *algoritma*.

7.2 Menyusun ekspresi dari cerita

Aljabar adalah sebuah bahasa. Seperti menerjemahkan bahasa Jawa ke bahasa Indonesia, kita bisa menerjemahkan cerita menjadi ekspresi. Kata "lebihnya" atau "ditambah" menjadi $+$; "kurangnya" atau "selisih" menjadi $-$; "kali", "lipat", atau "per" menjadi $\times$; "dibagi" atau "setengah" menjadi $\div$.

Bahasa sehari-hari	Bahasa aljabar
lima lebihnya dari sebuah bilangan n	$n + 5$
lima kurangnya dari n	$n - 5$ (bukan $5 - n$!)
tiga kali sebuah bilangan, lalu dikurangi 2	$3n - 2$
setengah dari jumlah a dan b	$\frac{a+b}{2}$
kuadrat dari jumlah a dan b	$(a+b)^2$
jumlah kuadrat a dan b	$a^2 + b^2$
harga p pensil @Rp2.000 dan q buku @Rp5.000	$2.000p + 5.000q$

Bahasa sederhana · Perhatikan urutannya. "Lima kurangnya dari n" berarti n dikurangi 5. Kalau Dimas punya n kelereng dan Ayu punya lima kurangnya dari Dimas, kelereng Ayu $n - 5$.

Ambil contoh **ongkos ojek daring**. Ada **biaya dasar** yang dibayar sekali di awal, lalu tarif untuk setiap kilometer. Jaraknya berubah-ubah, jadi jarak adalah variabel. Biaya dasar tidak ikut berubah: itulah **konstanta**. Tarif per km menempel di depan variabel jarak: itulah **koefisien**.

RUMUS HIDUP

Ongkos ojek daring

$$T = d + p \times k$$

Ongkos ojek = biaya dasar (dibayar sekali di awal) ditambah tarif per kilometer dikali jarak tempuh.

- d Biaya dasar `rupiah`
- p Tarif per km `rupiah/km`
- k Jarak tempuh `km`
- T Ongkos total `rupiah`



ongkos jarak sudah lebih besar daripada biaya dasar

Biaya dasar Rp**5.000** ditambah Rp**2.500** × **6** km = Rp**15.000**. Ongkos totalnya Rp**20.000**. Setiap kilometer tambahan selalu menambah Rp**2.500**, berapa pun jaraknya.

Cek satuan: rupiah + (rupiah/km) × km = rupiah. Satuan km saling meniadakan.

`RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ALJABAR-OJEK`

TRIK KAK LINTANG

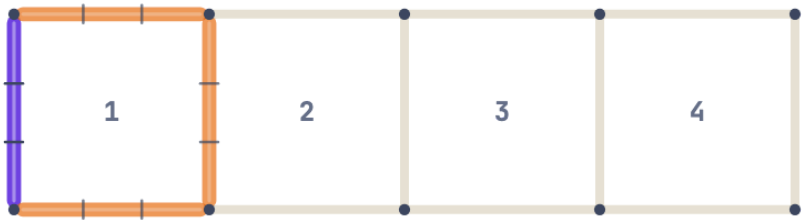
Saat menerjemahkan cerita, tanyakan tiga hal. **Apa yang berubah-ubah?** Itu variabelnya. **Apa yang dibayar atau ditambahkan sekali saja?** Itu konstantanya. **Ada kata "per" atau "setiap"?** Angka di dekatnya biasanya menjadi koefisien, yang menempel di depan variabel.

Ekspresi juga bisa lahir dari **pola gambar**. Pak Sastro membuat pagar bambu berpetak-petak. Satu petak butuh 4 batang, dua petak 7 batang, tiga petak 10 batang. Berapa batang untuk n petak? Ada banyak cara menghitungnya. Hebatnya, semua cara yang benar berujung pada ekspresi yang sama.

LAB MINI

Pagar bambu: dari pola ke ekspresi

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7



Cara A · 1 batang awal, lalu tambah per petak

$$1 + 3n = 3n + 1$$

1 = 1 …

petak	batang (dihitung satu per satu)	ekspresi cara ini	disederhanakan
4	13	1 + 3n	3n + 1

Pilih bentuk pagar dan cara menghitung, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat bambu dihitung kelompok demi kelompok. Setiap cara menghasilkan ekspresi yang tampak berbeda. Setelah disederhanakan, apakah semuanya sama?

KERJAKAN BERSAMA

Uang kembalian Ayu

Ayu membeli p pensil seharga Rp3.000 per buah dan 2 buku tulis seharga Rp7.000 per buah. Ia membayar dengan selembar Rp50.000. Tuliskan ekspresi uang kembaliannya, lalu hitung kembaliannya jika ia membeli 4 pensil.

1. Harga pensil: $3.000p$ (berubah sesuai banyak pensil). Harga buku: $2 \times 7.000 = 14.000$ (tetap).
2. Total belanja $3.000p + 14.000$. Kembalian $= 50.000 - (3.000p + 14.000) = 36.000 - 3.000p$.
3. Untuk $p = 4$: $36.000 - 3.000(4) = 36.000 - 12.000 = 24.000$.

Kembaliannya $36.000 - 3.000p$ rupiah; untuk 4 pensil, Rp24.000. Cek: belanja $12.000 + 14.000 = 26.000$, dan $50.000 - 26.000 = 24.000$ ✓.

Ongkos ojek daring

Aplikasi menghitung $T = d + pk$: biaya dasar, tarif per km, dan jarak. Hanya k yang berubah di setiap perjalanan.

Paket kuota

Paket Rp30.000 berisi 12 GB, lalu Rp4.000 per GB tambahan. Untuk g GB biayanya $30.000 + 4.000(g - 12)$.

Lembar kerja (*spreadsheet*)

Rumus seperti `=B2*C2+5000` adalah ekspresi aljabar. Sel B2 dan C2 berperan sebagai variabel.

Resep kolak

Untuk n orang: pisang $2n$ buah dan gula merah $50n$ gram. Satu ekspresi melayani arisan kecil maupun hajatan besar.

Skor gim

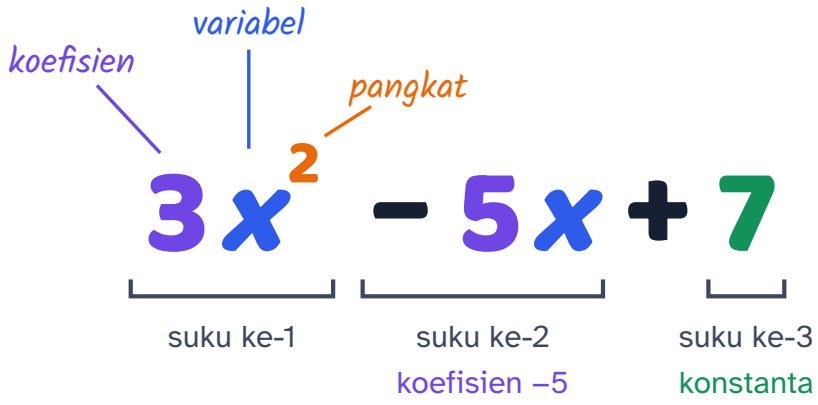
Skor $= 10k + 50b$ untuk k koin dan b bintang. Pembuat gim menulis aturannya sekali, dan aturan itu berlaku untuk jutaan pemain.

7.3 Suku sejenis dan menyederhanakan

Di pasar, Bu Darmi menghitung belanjaan: 3 mangga, 2 salak, lalu 4 mangga lagi. Ia tidak menulis "9 buah campur", tetapi "7 mangga dan 2 salak". Mangga dijumlahkan dengan mangga, salak dengan salak. Aljabar bekerja persis seperti itu: $3m + 2s + 4m = 7m + 2s$.

DEFINISI: SUKU, KOEFISIEN, KONSTANTA

Bagian-bagian ekspresi yang dipisahkan tanda $+$ atau $-$ disebut **suku**. Bilangan di depan variabel disebut **koefisien** (tandanya ikut!), dan suku tanpa variabel disebut **konstanta**. Dua suku disebut **suku sejenis** jika variabel **dan** pangkatnya sama persis; hanya koefisiennya yang boleh berbeda.



Sejenis?

3x dan −7x	✓
2x dan 2x²	✗
ab dan 5ba	✓
4 dan 4x	✗

ingat: ab = ba

Ekspresi $3x^2 - 5x + 7$ punya tiga suku. Suku $3x^2$ dan $-5x$ **tidak** sejenis karena pangkat x-nya berbeda.

ATURAN MENYEDERHANAKAN

Suku sejenis dijumlahkan atau dikurangkan dengan mengoperasikan **koefisiennya**, sedangkan variabelnya tetap:

$$3x + 5x = 8x \qquad 7a^2 - a^2 = 6a^2 \qquad 4xy - 9y$$

Suku yang tidak sejenis dibiarkan berdampingan, seperti mangga dan salak.

Mengapa boleh begitu?

Karena sifat distributif (yang akan kita bahas di subbab 7.4): $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$. Dalam bahasa kotak misteri: 3 kotak ditambah 5 kotak sama dengan 8 kotak, apa pun isi kotaknya. Sebaliknya, $3x + 5y$ tidak bisa digabung karena kotak x dan kotak y boleh berisi bilangan yang berbeda.

Bahasa sederhana · Ingat pasar: mangga dengan mangga, salak dengan salak. Suku x dikumpulkan dengan suku x, suku x^2 dengan suku x^2, dan angka biasa dengan angka biasa.

AWAS JEBAKAN

$x + x = 2x$, bukan x^2; begitu pula $2x + 3y$ tidak bisa ditulis $5xy$. Menjumlahkan dua kotak yang sama menghasilkan "dua kotak" ($2x$), sedangkan x^2 berarti kotak dikali kotak. Coba $x = 3$: $x + x = 6$, padahal $x^2 = 9$.

CONTOH **Kumpulkan yang sejenis**

Sederhanakan $5a + 3b - 2a + 4b - b$**.**

1. Kelompokkan suku sejenis (bawa tandanya!): $(5a - 2a) + (3b + 4b - b)$.
2. Operasikan koefisiennya: $5 - 2 = 3$ dan $3 + 4 - 1 = 6$.

$5a + 3b - 2a + 4b - b = 3a + 6b$**. Ingat,** $-b$ **berarti** $-1b$**.**

KERJAKAN BERSAMA **Paket kuota internet**

Paket bulanan Rp30.000 berisi 12 GB. Setiap GB tambahan dikenai Rp4.000. Tuliskan biaya untuk pemakaian g **GB (dengan** $g > 12$**) dalam bentuk paling sederhana, lalu hitung biayanya untuk 17 GB.**

1. Kelebihan pemakaian $g - 12$ GB, jadi biayanya $30.000 + 4.000(g - 12)$.
2. Kalikan 4.000 dengan setiap suku dalam kurung (sifat distributif, lihat 7.4): $30.000 + 4.000g - 48.000$.
3. Kumpulkan konstanta: $4.000g - 18.000$.
4. Untuk $g = 17$: $4.000(17) - 18.000 = 68.000 - 18.000 = 50.000$.

Biayanya $4.000g - 18.000$ **rupiah, dan untuk 17 GB Rp50.000. Cek dengan cerita: 5 GB tambahan × Rp4.000 = Rp20.000, ditambah Rp30.000 = Rp50.000 ✓.**

7.4 Ekspansi: sifat distributif dan model luas

Bagaimana menghitung 7×104 di luar kepala? Pecah 104 menjadi $100 + 4$: tujuh kali seratus ditambah tujuh kali empat, yaitu $700 + 28 = 728$. Kamu baru saja memakai aturan terpenting dalam aljabar.

SIFAT DISTRIBUTIF

Untuk semua bilangan a, b, dan c,

$$a(b+c) = ab + ac$$

Rumus ini bercerita: *persegi panjang selebar a dan sepanjang $b + c$ dapat dipotong menjadi dua persegi panjang, ab dan ac.* Mengubah bentuk berkurung menjadi jumlah suku-suku disebut **ekspansi** (menjabarkan).

Contohnya, $3(2x + 5) = 6x + 15$ dan $x(x - 4) = x^2 - 4x$. Pengali di luar kurung harus "mengetuk pintu" **setiap** suku di dalam kurung, tanpa ada yang terlewat.

AWAS JEBAKAN

Tanda minus di depan kurung ikut mengalikan setiap suku di dalamnya: $-(x - 3) = -x + 3$, bukan $-x - 3$. Begitu pula $-2(5x - 7) = -10x + 14$, karena minus kali minus menjadi plus.

Tebak Dulu!

Martabak manis berbentuk persegi bersisi 30 cm. Pak Udin membuat versi jumbo: setiap sisinya ditambah 10 cm. Berapa pertambahan luasnya?

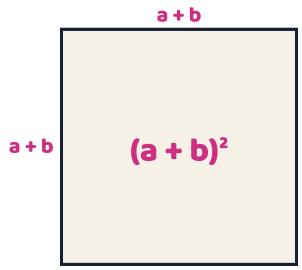
100 cm², karena $10^2 = 100$.

400 cm².

700 cm².

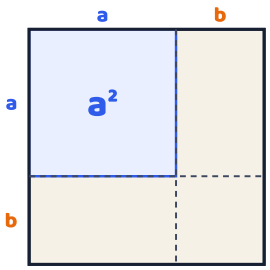
1.600 cm².

Jawabannya: 700 cm². Luas baru $(30 + 10)^2 = 40^2 = 1.600$ cm², luas lama $30^2 = 900$ cm², jadi luasnya bertambah 700 cm². Pojok kecil 10×10 hanya 100 cm². Sisa 600 cm² berasal dari dua "pita" martabak berukuran 30×10 di tepi kanan dan tepi bawah. Animasi berikut menunjukkannya.



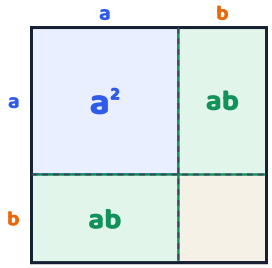
Persegi bersisi a + b.
Luasnya $(a + b)^2$.
Kita potong per bagian.

Langkah 1. Sebuah persegi bersisi $a + b$ mempunyai luas $(a + b)^2$. Kita hitung luasnya per bagian.



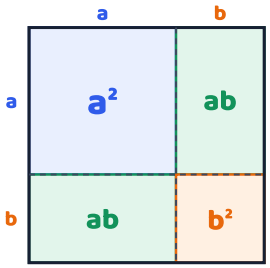
Pecah sisinya: a dan b.
Pojok kiri atas adalah persegi a × a = a^2.

Langkah 2. Pecah setiap sisi menjadi a dan b. Pojok kiri atas menjadi persegi bersisi a, luasnya a^2.



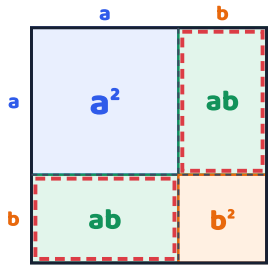
Dua persegi panjang a × b.
Masing-masing luasnya ab, jadi bersama-sama 2ab.

Langkah 3. Di kanan atas dan kiri bawah ada dua persegi panjang berukuran $a \times b$. Luas keduanya $2ab$.



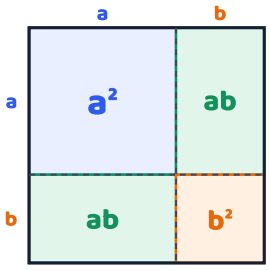
Pojok kanan bawah:
persegi b × b = b^2.

Langkah 4. Pojok kanan bawah adalah persegi bersisi b, luasnya b^2.



Kalau hanya $a^2 + b^2$...
dua persegi panjang bergaris merah ini terlupakan!

Langkah 5. Jebakan klasik: menulis $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ sama saja dengan melupakan dua persegi panjang ini.



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$40^2 = 900 + 600 + 100 = 1.600$

Langkah 6. Jumlahkan keempat bagian: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Untuk martabak Pak Udin: $30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 10 + 10^2 = 1.600$.

PERKALIAN DUA SUKU DUA

Dengan sifat distributif (atau model luas):

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2a$$

Bukti dengan sifat distributif

Pandang $(x + a)$ sebagai satu pengali, lalu distribusikan dua kali:

$$(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Untuk $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, distribusikan dengan cara yang sama: $a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Untuk $(a - b)^2$, ganti b dengan $-b$: suku tengahnya menjadi $-2ab$, sedangkan $(-b)^2 = b^2$ tetap positif.

RUMUS HIDUP **Model luas (a + b)²**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Persegi bersisi a + b terbelah menjadi empat bagian: persegi a², persegi b², dan DUA persegi panjang ab.

a Sisi a cm | b Tambahan b cm | $(a+b)^2$ Luas persegi besar cm²

LUAS PERSEGI BESAR

1.600

cm²

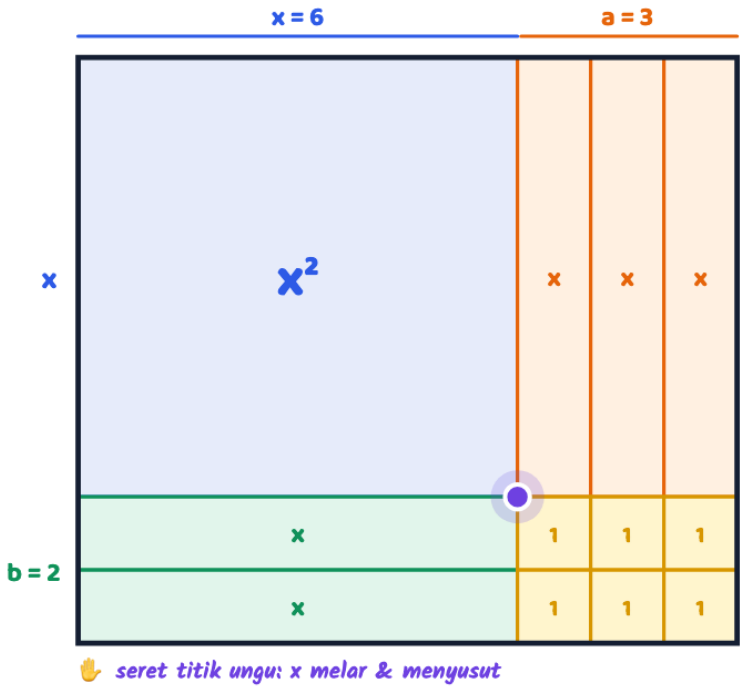
Persegi a² = **900**, persegi b² = **100**, dan dua persegi panjang 2ab = **600**. Jumlahnya **1.600** cm². Kalau kamu hanya menghitung a² + b² = **1.000**, ada **600** cm² yang hilang!

Cek satuan: cm × cm = cm².

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ALJABAR-KUADRAT

LAB MINI **Ubin aljabar: kotak misteri yang bisa melar**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7



(x + 3)(x + 2)

= x² + 3x + 2x + 6

= x² + 5x + 6

Jika x = 6:

luas utuh

9 × 8 = 72

jumlah ubin

36 + 30 + 6

= 72

✓ selalu sama!

x² x 1

ubin

ubin x^2	batang (a + b)·x	kotak satuan ab	luas total	Keadaan
36	30	6	72	mengalikan

Ubin biru adalah x^2, batang oranye dan hijau adalah x, dan kotak kuning bernilai 1. Atur a dan b, lalu seret titik ungu (atau tekan ▶ **Jalankan**) untuk membuat x melar dan menyusut. Ukuran ubinnya berubah, tetapi **banyaknya** ubin tidak pernah berubah. Itulah sebabnya $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ berlaku untuk setiap x. Pilih mode **Teka-teki faktor** untuk tantangan kebalikannya!

KERJAKAN BERSAMA **Ekspansi dengan tabel luas**

Ekspansikan $(x + 4)(x + 3)$.

1. Gambar persegi panjang bersisi $x + 4$ dan $x + 3$, lalu bagi menjadi empat petak: $x \cdot x$, $x \cdot 3$, $4 \cdot x$, dan $4 \cdot 3$.
2. Luas keempat petak: x^2, $3x$, $4x$, dan 12.
3. Jumlahkan dan kumpulkan suku sejenis: $x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$.

$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 7x + 12$. **Perhatikan polanya:** $7 = 4 + 3$ **dan** $12 = 4 \times 3$.

COBA SENDIRI **Ada tanda minusnya**

Ekspansikan $(2x-3)(x+5)$, lalu periksa hasilmu dengan $x=1$.

1. Setiap suku di kurung pertama mengetuk setiap suku di kurung kedua: $2x \cdot x + 2x \cdot 5 + (-3) \cdot x + (-3) \cdot 5$.
2. $= 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$.
3. Cek dengan $x = 1$: ruas kiri $(2-3)(1+5) = -6$; ruas kanan $2 + 7 - 15 = -6$ ✓.

$(2x-3)(x+5) = 2x^2 + 7x - 15$.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

$(a+b)^2$ **tidak sama** dengan $a^2 + b^2$. Coba $a = 3$ dan $b = 4$: $(3+4)^2 = 49$, padahal $3^2 + 4^2 = 25$. Selisihnya $24 = 2ab$, yaitu dua persegi panjang yang terlupakan.

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Uji dengan angka. Setelah mengekspansi atau menyederhanakan, ganti x dengan angka kecil (misalnya 2) di soal dan di jawabanmu. Kalau hasilnya berbeda, pasti ada yang salah. Kalau sama, kemungkinan besar benar; uji sekali lagi dengan angka lain agar lebih yakin. Grafik Hidup berikut menunjukkan alasannya.

GRAFIK HIDUP

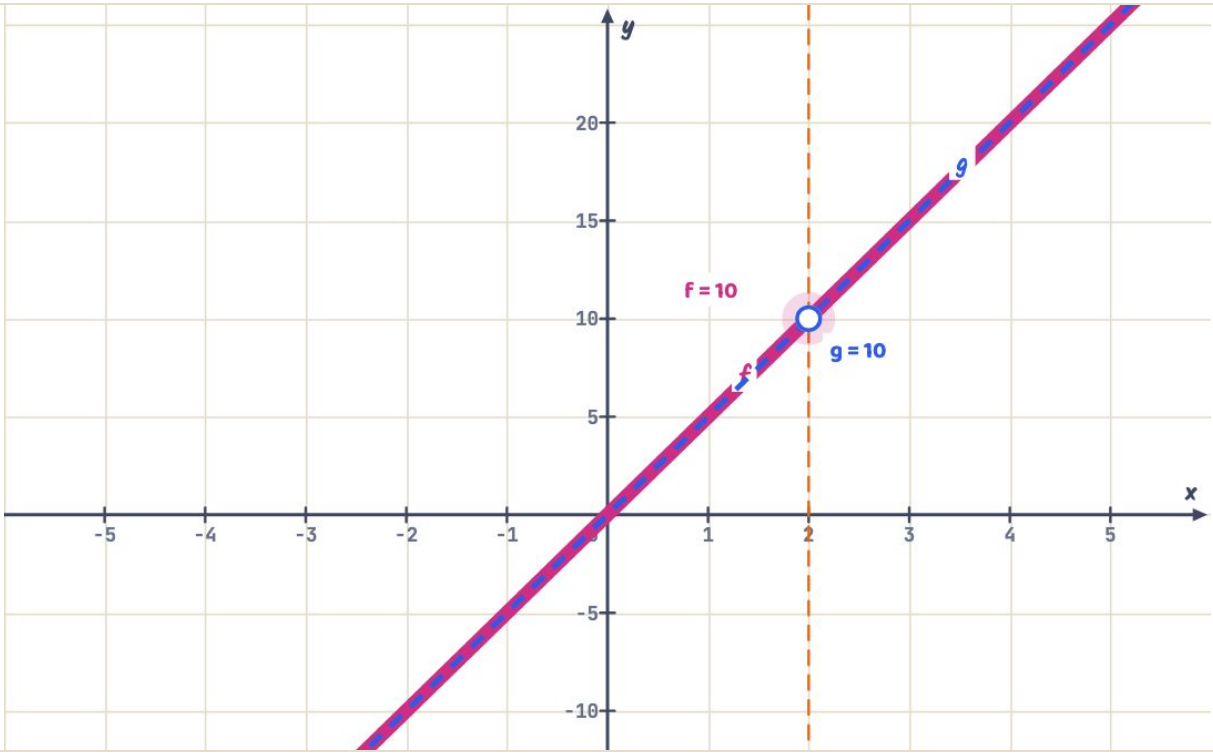
Kembar atau bukan? Uji dua ekspresi

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7

$$f(x) \stackrel{?}{=} g(x)$$

$$f(x) = 2x + 3x \qquad g(x) = 5x$$

Dua ekspresi disebut setara (kembar) jika nilainya sama untuk SETIAP x. Di grafik, kedua kurvanya berimpit sempurna.



✅ **Kembar: grafiknya berimpit, nilainya sama untuk SEMUA x**

f(x uji)	g(x uji)	selisih f – g
10	10	0

Geser **Pasangan ke-** untuk menguji delapan pasangan ekspresi. Kurva magenta adalah f, kurva biru putus-putus adalah g. Seret titik magenta untuk mengganti x uji. Pada pasangan 2, coba $x = 2$: nilainya sama, padahal grafiknya berbeda! Tak perlu tahu cara menggambar kurvanya; cukup perhatikan apakah keduanya berimpit.

ADU CEPAT **Ekspansi kilat: isi kotaknya**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bilangan di kotak adalah a + b, sedangkan konstantanya ab. Contoh: (x + 5)(x – 2) = x² + 3x – 10, jadi kotaknya 3.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

NAIK SATU DIMENSI: $(A+B)^3$

Model luas punya saudara tiga dimensi. Kubus bersisi $a+b$ dapat dipotong menjadi 8 balok: satu kubus a^3, satu kubus b^3, tiga balok $a \times a \times b$, dan tiga balok $a \times b \times b$. Jadi

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Koefisien 1, 3, 3, 1 adalah baris ke-3 segitiga Pascal. Bentuk lain yang sering berguna di olimpiade: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Contohnya, jika $a+b=5$ dan $ab=6$, maka $a^3+b^3 = 125 - 90 = 35$ tanpa perlu mencari a dan b.

7.5 Faktorisasi: membungkus kembali

Ekspansi itu seperti membuka bungkusan: $3(2x+5)$ dibuka menjadi $6x+15$. **Faktorisasi** adalah kebalikannya, yaitu membungkus kembali sebuah jumlah menjadi perkalian. Caranya, cari sesuatu yang dimiliki **semua** suku, lalu keluarkan ke depan kurung.

FAKTOR PERSEKUTUAN

Jika setiap suku memuat faktor k yang sama, faktor itu dapat dikeluarkan:

$$ka + kb = k(a+b)$$

Faktor terbaik adalah **faktor persekutuan terbesar**: FPB dari koefisien-koefisiennya dikali variabel yang muncul di setiap suku, masing-masing dengan pangkat terkecilnya.

1. Cari FPB dari semua koefisien.
2. Cari variabel yang muncul di **setiap** suku, ambil pangkat terkecilnya.
3. Bagi setiap suku dengan faktor persekutuan itu, lalu tulis hasilnya di dalam kurung.
4. Cek dengan mengekspansi kembali. Hasilnya harus sama dengan soal semula.

Bahasa sederhana · Contoh gampang: $10x+15$. Angka 10 dan 15 sama-sama habis dibagi 5. Keluarkan 5 ke depan: $5(2x+3)$. Cek: $5 \times 2x = 10x$ dan $5 \times 3 = 15$ ✓.

KERJAKAN BERSAMA **Keluarkan faktor persekutuan terbesar**

Faktorkan $6x^2 + 9x$ sepenuhnya.

1. FPB dari 6 dan 9 adalah 3.
2. Variabel x ada di kedua suku; pangkat terkecilnya 1. Jadi faktor persekutuan terbesarnya $3x$.
3. Bagi setiap suku dengan $3x$: $6x^2 \div 3x = 2x$ dan $9x \div 3x = 3$. Hasilnya $3x(2x + 3)$.
4. Cek: $3x \cdot 2x + 3x \cdot 3 = 6x^2 + 9x$ ✓.

$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$. **Bentuk $3(2x^2 + 3x)$ juga benar, tetapi belum "sepenuhnya" karena masih ada x yang bisa dikeluarkan.**

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Saat sebuah suku habis dikeluarkan, di dalam kurung tersisa angka 1, bukan nol: $4x + 4 = 4(x + 1)$, bukan $4x$ atau $4(x + 0)$. Cek dengan ekspansi: $4(x + 1) = 4x + 4$ ✓.

COBA SENDIRI **Faktorisasi untuk berhitung kilat**

Hitung $47 \times 36 + 47 \times 64$ tanpa kalkulator.

1. Kedua suku memuat faktor 47. Keluarkan: $47 \times (36 + 64)$.
2. $36 + 64 = 100$, jadi hasilnya $47 \times 100 = 4.700$.

Hasilnya 4.700. Faktorisasi mengubah dua perkalian sulit menjadi satu perkalian mudah.

ID **MATEMATIKA NUSANTARA**

Di puncak **Candi Borobudur** ada tiga teras melingkar yang mengelilingi stupa induk. Teras-teras itu memuat 32, 24, dan 16 stupa berlubang. Perhatikan: semuanya kelipatan 8! Dengan faktorisasi, $32 + 24 + 16 = 8 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 8(4 + 3 + 2) = 8 \times 9 = 72$ stupa. Pola berkelipatan seperti ini memudahkan para pembangun menata stupa secara simetris di sekeliling lingkaran.

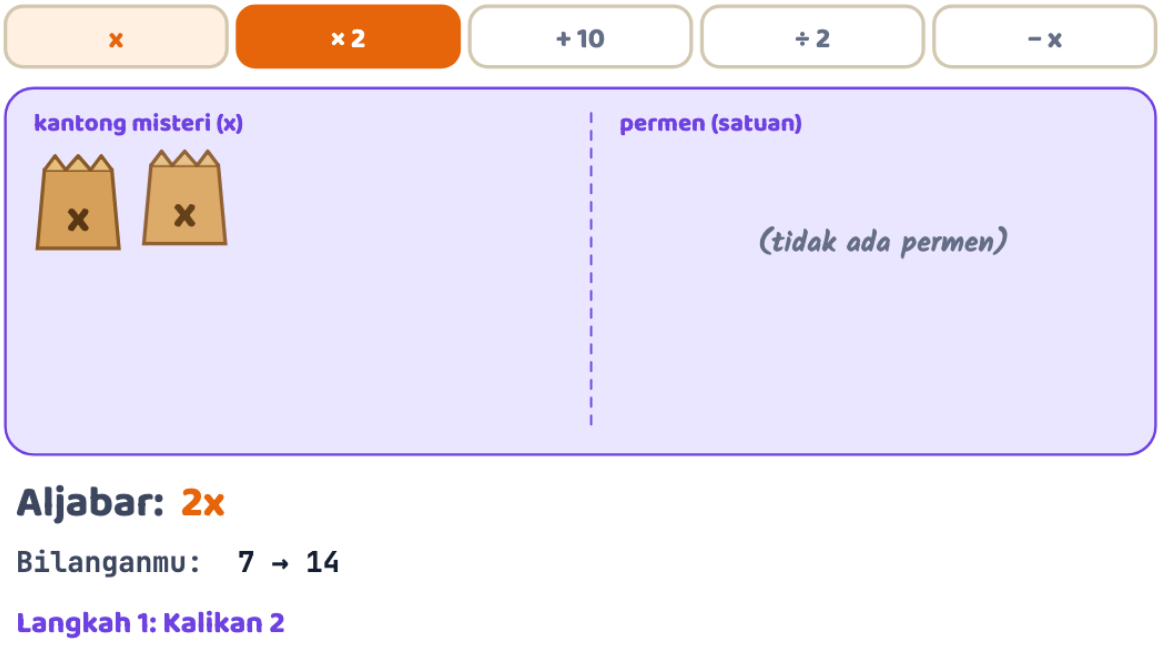
Kembalilah ke Lab Ubin di atas dan pilih **Teka-teki faktor**. Kamu diberi ekspresi seperti $x^2 + 5x + 6$ dan harus menyusunnya menjadi persegi panjang $(x + a)(x + b)$. Itu faktorisasi dengan tangan! Di Bab 11 kamu akan memfaktorkan bentuk seperti ini secara sistematis.

7.6 Trik sulap bilangan dibongkar aljabar

Setiap trik "pikirkan sebuah bilangan" bekerja dengan cara yang sama: perintah-perintahnya disusun agar kotak misteri x **lenyap** (hasilnya selalu sama) atau **mudah dibongkar** (hasilnya bisa diubah kembali menjadi bilanganmu). Lab berikut menggambarkan x sebagai kantong misteri dan konstanta sebagai permen.

LAB MINI **Mesin sulap: kantong misteri dan permen**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7



Aljabar: 2x

`Bilanganmu: 7 → 14`

Langkah 1: Kalikan 2

bilangan awal	nilai sekarang	bentuk aljabar	langkah
7	14	2x	1 dari 4

Pilih trik dan bilanganmu, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Perhatikan kantong-kantongnya: berapa yang tersisa di akhir? Pada trik "Tebak bilanganmu", mengapa Ancil cukup membuang angka 0 di belakang hasilmu?

Kita juga bisa melihat trik yang sama sebagai **grafik**. Untuk setiap bilangan awal, gambar titik (bilangan awal; nilai sekarang). Semua titik itu membentuk garis. Saat trik berjalan, garisnya berputar, naik, lalu rebah mendatar, tanda bahwa hasilnya tidak lagi bergantung pada bilangan awal.

GRAFIK HIDUP

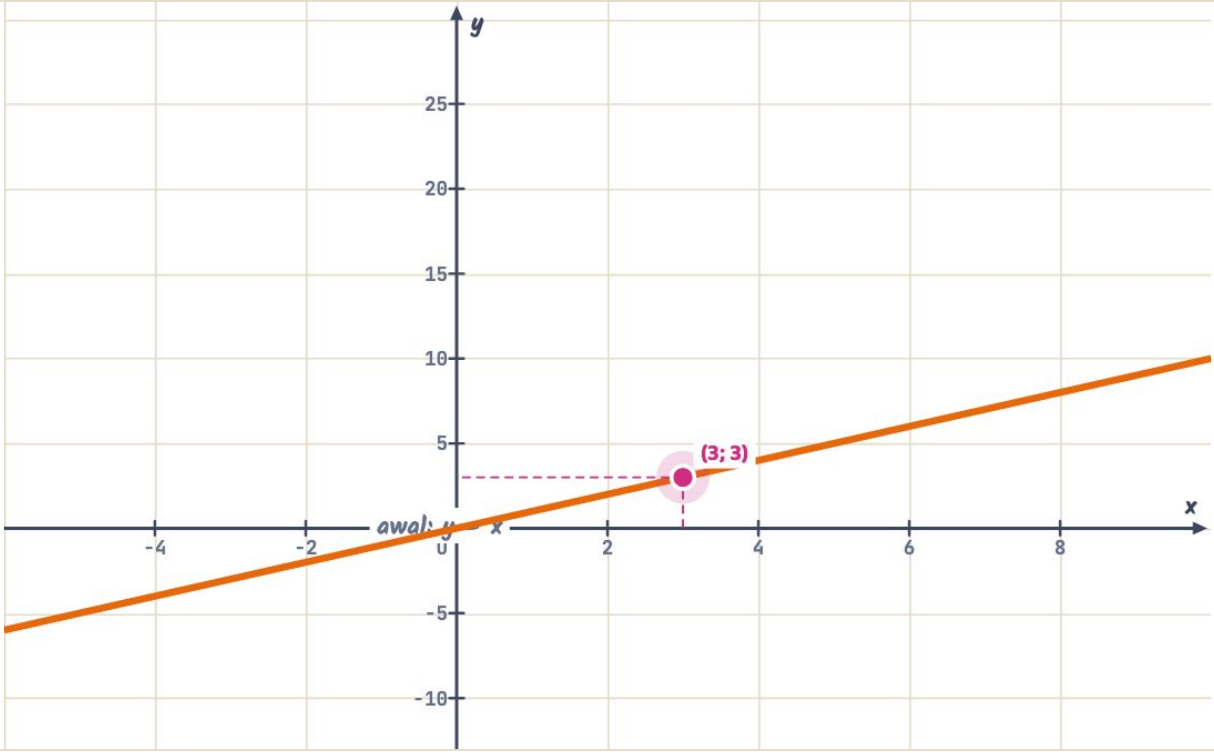
Garis sulap yang rebah

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7

$$x \;\to\; 2x \;\to\; 2x + 10 \;\to\; x + 5 \;\to\; 5$$

$$\text{nilai} = 1\,x + 0$$

Setiap titik di garis oranye adalah pasangan (bilangan awal; nilai sekarang). Saat sulap berjalan, garisnya berputar, naik, lalu rebah mendatar.



Mulai: nilai sekarang = bilangan awal, jadi titiknya di garis y = x

Langkah	Bentuk aljabar	Nilai untuk bilanganmu
1. Pikirkan bilangan	x	3

Tekan ▶ **Jalankan** atau geser **Langkah sulap**. Garis oranye memuat semua bilangan awal sekaligus. Seret titik magenta untuk memilih bilanganmu. Saat garisnya rebah mendatar, berapa pun bilanganmu, nilainya 5. (Garis seperti ini akan kamu pelajari lebih dalam di Bab 9.)

COBA SENDIRI **Trik 1089**

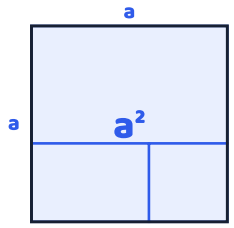
Pilih bilangan tiga angka yang angka pertama dan terakhirnya berselisih minimal 2, misalnya 741. Balik urutan angkanya (147), lalu kurangkan yang besar dengan yang kecil: $741 - 147 = 594$. Balik lagi hasilnya (495) dan jumlahkan: $594 + 495 = 1.089$. Buktikan bahwa hasilnya selalu 1.089.

1. Tulis bilangannya sebagai $100a + 10b + c$ dengan $a > c$. Bilangan yang dibalik adalah $100c + 10b + a$.
2. Selisihnya $99a - 99c = 99(a - c)$. Jadi hasil pengurangan selalu kelipatan 99: 198, 297, 396, ..., 891.
3. Misalkan $k = a - c$. Bilangan $99k = 100(k - 1) + 10 \cdot 9 + (10 - k)$, jadi angka-angkanya $k - 1$, 9, dan $10 - k$.
4. Dibalik menjadi $100(10 - k) + 90 + (k - 1)$. Jumlahkan: $100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1.089$. Variabel k lenyap!

Hasilnya selalu 1.089, apa pun bilangan awalmu. Kuncinya menuliskan nilai tempat dengan aljabar: $100a + 10b + c$.

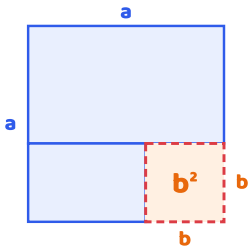
Identitas cerdik untuk berhitung kilat

Ada satu identitas lagi yang membuat orang mengira kamu kalkulator berjalan. Potong persegi kecil dari pojok persegi besar, lalu susun ulang sisanya:



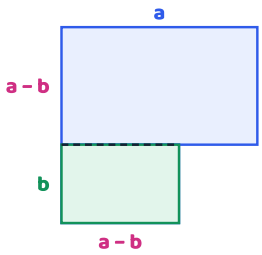
Persegi bersisi a.
Luasnya a^2.

Langkah 1. Mulai dari persegi bersisi a. Luasnya a^2.



Potong persegi kecil
bersisi b di pojoknya.
Sisa luas: $a^2 - b^2$

Langkah 2. Potong persegi kecil bersisi b dari pojok kanan bawah. Luas yang tersisa $a^2 - b^2$.



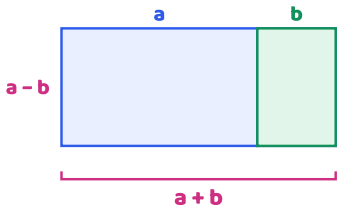
Sisanya berbentuk L.
Potong menjadi dua persegi panjang.

Langkah 3. Sisanya berbentuk huruf L. Potong menjadi dua persegi panjang: yang atas berukuran $a \times (a - b)$, yang bawah berukuran $(a - b) \times b$.



Putar yang hijau 90°,
lalu tempel di kanan.
Luasnya tidak berubah.

Langkah 4. Putar persegi panjang hijau 90° dan tempelkan di sebelah kanan. Memutar dan menggeser tidak mengubah luas.



Jadilah persegi panjang
(a + b) × (a – b).

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$52 \times 48 = 50^2 - 2^2 = 2.496$

Langkah 5. Hasilnya persegi panjang dengan panjang $a + b$ dan lebar $a - b$. Jadi $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

SELISIH DUA KUADRAT

Untuk semua bilangan a dan b,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Dua bilangan yang sama jauhnya dari m mempunyai hasil kali $(m + d)(m - d) = m^2 - d^2$. Contoh: $99 \times 101 = 100^2 - 1^2 = 9.999$, dan $99^2 = (99^2 - 1^2) + 1 = 98 \times 100 + 1 = 9.801$.

▾ **Bukti dengan ekspansi**

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$. Suku $-ab$ dan $+ba$ saling menghapus, sehingga hanya dua kuadrat yang tersisa.

KERJAKAN BERSAMA **Membongkar teka-teki Ancil dari Bab 6**

Pikirkan sebuah bilangan bulat n. Kuadratkan bilangan sesudahnya, kurangi dengan kuadrat bilangan sebelumnya, lalu bagi 4. Benarkah hasilnya selalu n, bahkan untuk bilangan negatif?

1. Bilangan sesudahnya $n+1$ dan bilangan sebelumnya $n-1$. Kita perlu menghitung $(n+1)^2 - (n-1)^2$.
2. Pakai selisih dua kuadrat: $\big[(n+1)+(n-1)\big]\big[(n+1)-(n-1)\big] = 2n \cdot 2 = 4n$.
3. Cara ekspansi memberi hasil yang sama: $(n^2+2n+1) - (n^2-2n+1) = 4n$. Dibagi 4, hasilnya n.
4. Cek dengan $n = -5$: $(-4)^2 - (-6)^2 = 16 - 36 = -20$, dan $-20 : 4 = -5$ ✓.

Hasilnya selalu n, untuk bilangan bulat apa pun (bahkan untuk pecahan). Kali ini kotak misterinya tidak lenyap, tetapi terbungkus rapi menjadi $4n$. Ancil tinggal membaginya dengan 4.

RUMUS HIDUP

Perkalian kembar: selisih dua kuadrat

$$(m + d)(m - d) = m^2 - d^2$$

Persegi panjang (m + d) × (m − d) luasnya sama dengan persegi m² dikurangi persegi kecil d². Jadi 52 × 48 = 50² − 2².

m Bilangan tengah m cm

d Jarak d cm

P Luas persegi panjang cm²

LUAS PERSEGI PANJANG

2.496

cm²

✨ **m kelipatan 10: m² gampang dihitung di kepala**

Persegi panjang **52 × 48**: luasnya **50² − 2² = 2.500 − 4 = 2.496** cm². Tanpa perkalian bersusun!

Cek satuan: cm × cm = cm².

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ALJABAR-KEMBAR

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Kuadrat bilangan berakhiran 5. Bilangan seperti 35 dapat ditulis $10a + 5$ dengan $a = 3$. Ekspansikan: $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a(a + 1) + 25$. Jadi kalikan angka puluhannya dengan bilangan sesudahnya, lalu tempelkan 25 di belakangnya: 35^2: $3 \times 4 = 12$, hasilnya 1.225. Coba 65^2: $6 \times 7 = 42$, hasilnya 4.225!

ADU CEPAT

Kuadrat kilat dengan (m ± d)²

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pecah menjadi kelipatan 10 ± sedikit: $49^2 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$, dan $102^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

IDENTITAS SOPHIE GERMAIN

Matematikawan Prancis Sophie Germain (1776–1831) memakai trik "tambah lalu kurangi" yang cerdik:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2).$$

Langkah pertama menambahkan $4a^2b^2$ agar terbentuk kuadrat sempurna, lalu menguranginya lagi sebagai $(2ab)^2$. Setelah itu, selisih dua kuadrat menyelesaikan sisanya. Akibatnya, $n^4 + 4$ dengan $n > 1$ **tidak pernah prima**, karena $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ dan faktor keduanya $(n-1)^2 + 1 > 1$. Contoh: $3^4 + 4 = 85 = 17 \times 5$.

MITOS

"Huruf x selalu menyembunyikan satu bilangan rahasia."

FAKTA

Dalam persamaan, ya. Tetapi pada identitas seperti $2(x + 3) = 2x + 6$, x boleh diisi bilangan apa saja dan kedua ruas tetap sama. Karena nilainya boleh berubah-ubah, huruf ini disebut **variabel**.

MITOS

"$(a + b)^2 = a^2 + b^2$, kan tinggal kuadratkan masing-masing."

FAKTA

Coba $a = 3$, $b = 4$: $7^2 = 49$, sedangkan $9 + 16 = 25$. Selisih 24 itu adalah $2ab$, yaitu dua persegi panjang yang terlupakan di model luas.

MITOS

"Aljabar cuma permainan huruf, tidak berguna dalam hidup sehari-hari."

FAKTA

Tarif ojek di aplikasi, rumus di lembar kerja, dan skor gim semuanya ditulis dalam bahasa aljabar. Aljabar adalah cara menulis satu aturan yang berlaku untuk jutaan bilangan sekaligus.

Cek Cepat

Bentuk sederhana dari $4x + 3 - x + 5$ adalah...

- $11x$
- $5x + 8$
- $3x + 8$
- $3x + 2$

Hasil ekspansi $x(x + 6)$ adalah...

- $x^2 + 6x$
- $x^2 + 6$
- $2x + 6$
- $7x$

Faktor persekutuan terbesar dari $6x^2$ dan $9x$ adalah...

- 3
- x
- $18x^2$
- $3x$

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: sulap kalender

Bahan: kalender bulanan (kalender dinding atau di HP), pensil, kertas, kalkulator boleh.

1. Pilih kotak berukuran 3 × 3 tanggal pada kalender (9 tanggal).
2. Jumlahkan kesembilan tanggal itu. Bandingkan dengan 9 × tanggal di tengahnya.
3. Sekarang pilih kotak 2 × 2 tanggal. Kalikan tanggal kiri atas dengan kanan bawah, lalu kanan atas dengan kiri bawah. Hitung selisih kedua hasil kali itu.
4. Ulangi langkah 1–3 di tempat lain dan di bulan lain. Catat hasilnya dalam tabel.
5. Pamerkan sebagai trik sulap: minta temanmu memilih kotak 3 × 3 diam-diam dan menyebut tanggal tengahnya. Kamu langsung tahu jumlahnya!

Pertanyaan: Mengapa jumlah kotak 3 × 3 selalu 9 kali tanggal tengahnya, dan selisih pada kotak 2 × 2 selalu 7? Petunjuk: misalkan tanggal tengah n. Tanggal di atasnya $n - 7$, di kirinya $n - 1$. Tuliskan kesembilan tanggal dalam n, lalu sederhanakan.

RINGKASAN KILAT

Bab 7 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- memakai huruf sebagai **variabel** (kotak misteri) dan menghitung nilai sebuah **ekspresi aljabar**
- menerjemahkan cerita sehari-hari, seperti tarif ojek dan paket kuota, menjadi ekspresi aljabar
- menyederhanakan ekspresi dengan mengumpulkan **suku sejenis**
- melakukan **ekspansi** dengan sifat distributif dan model luas, serta **memfaktorkan** dengan faktor persekutuan
- membongkar trik sulap bilangan dan berhitung kilat dengan identitas $(a+b)^2$ dan $a^2 - b^2$

Istilah kunci

Variabel · ekspresi aljabar · substitusi · biaya dasar · konstanta · koefisien · suku · suku sejenis · ekspansi · Faktorisasi · faktor persekutuan terbesar

Rumus penting

$$T = d + p \times k$$

Ongkos ojek daring. Ongkos ojek = biaya dasar (dibayar sekali di awal) ditambah tarif per kilometer dikali jarak tempuh.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Model luas (a + b)². Persegi bersisi a + b terbelah menjadi empat bagian: persegi a², persegi b², dan DUA persegi panjang ab.

$$(m+d)(m-d) = m^2 - d^2$$

Perkalian kembar: selisih dua kuadrat. Persegi panjang (m + d) × (m – d) luasnya sama dengan persegi m² dikurangi persegi kecil d². Jadi 52 × 48 = 50² – 2².

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- $x + x = 2x$, bukan x^2; begitu pula $2x + 3y$ tidak bisa ditulis $5xy$.
- Tanda minus di depan kurung ikut mengalikan setiap suku di dalamnya: $-(x - 3) = -x + 3$, bukan $-x - 3$.
- $(a + b)^2$ tidak sama dengan $a^2 + b^2$.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=7

🧩 Teka-teki untuk Bab 8

Di pasar, Bu Darmi memakai timbangan dua lengan. Di piring kiri ia menaruh 3 kantong gula pasir yang sama beratnya dan anak timbangan 2 kg. Di piring kanan ada 1 kantong gula yang sama dan anak timbangan 8 kg. Ajaib, timbangannya seimbang! Berapa kilogram isi satu kantong gula?

▼ **Intip petunjuk**

Dalam bahasa aljabar, ceritanya menjadi $3x + 2 = x + 8$. Timbangan tetap seimbang jika kamu mengambil benda yang sama dari kedua piring. Coba ambil 1 kantong dan 2 kg dari setiap piring. Apa yang tersisa? Bab 8 mengajarimu menyelesaikan persamaan dengan cara "timbangan" ini.

BAB 8 · ALJABAR & FUNGSI

08 Persamaan & Pertidaksamaan: Seni Menjaga Timbangan

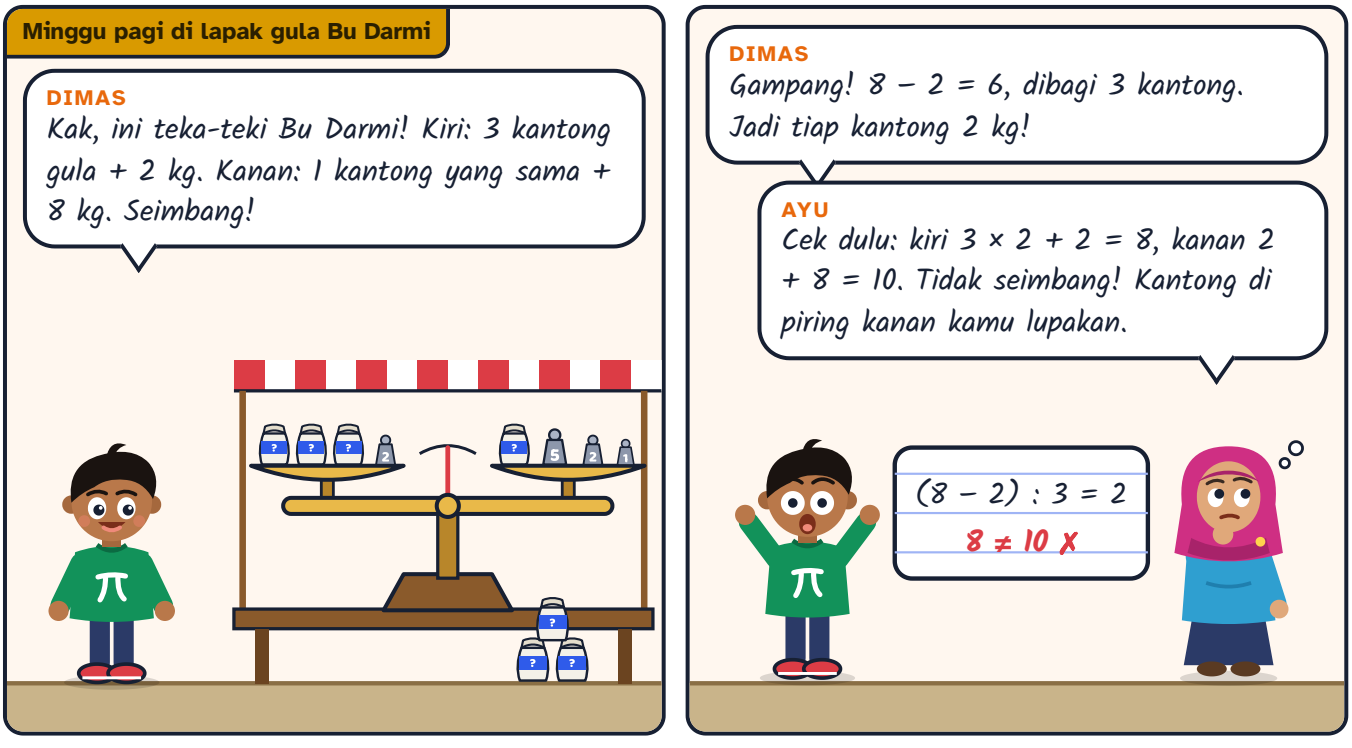
Bagaimana Bu Darmi tahu berat sekantong gula tanpa membukanya? Mengapa tanda "<" tiba-tiba berbalik arah ketika dikali bilangan negatif? Semua rahasianya tersimpan di sebuah timbangan pasar.

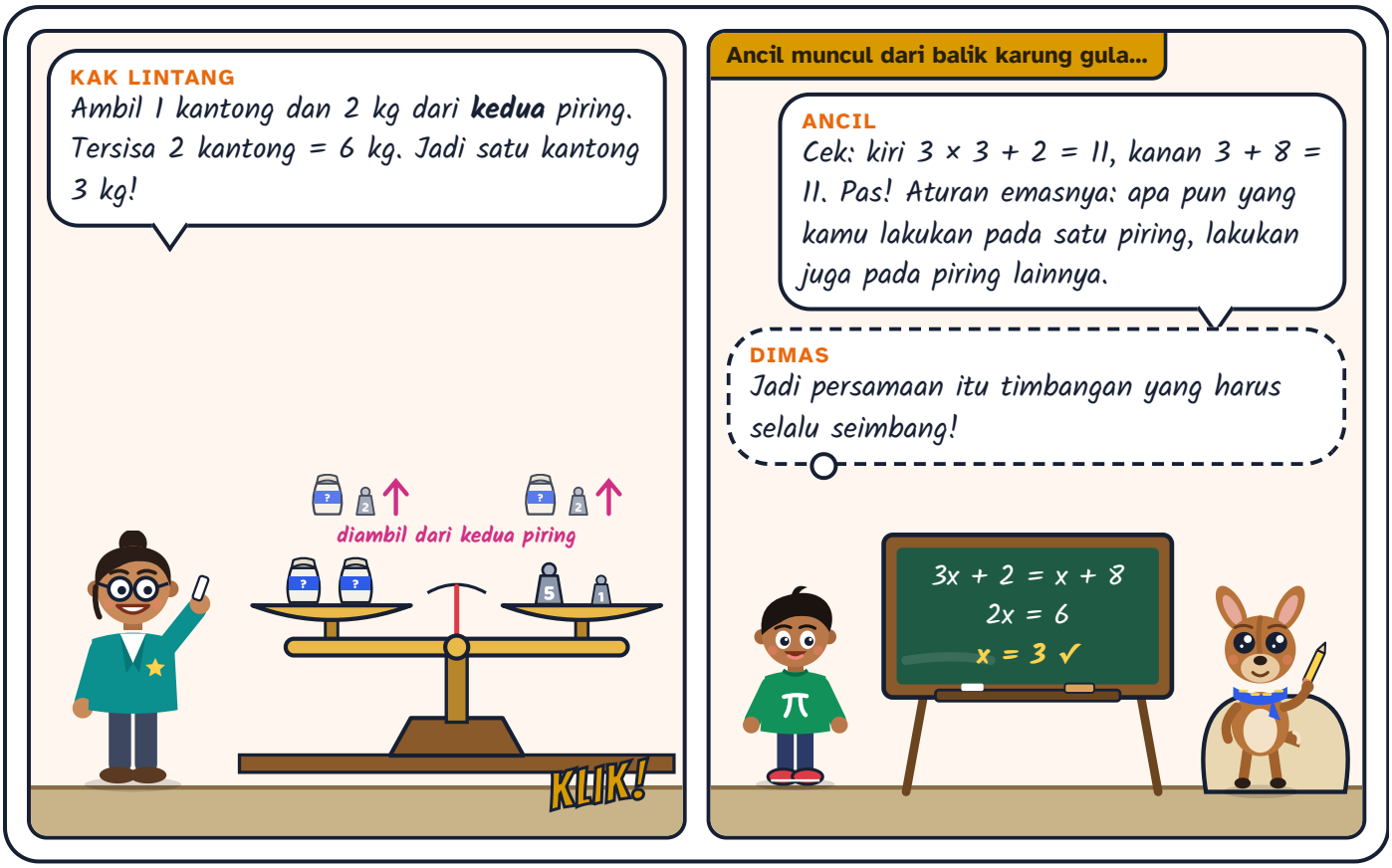
Setelah bab ini, kamu bisa

- memandang persamaan sebagai **timbangan seimbang** dan menyelesaikan persamaan linear satu variabel dengan operasi yang sama pada kedua ruas;
- menyelesaikan persamaan yang memuat **kurung dan pecahan**, serta mengenali persamaan yang tidak punya penyelesaian atau punya tak hingga banyak penyelesaian;
- mengubah **soal cerita** (parkir, kuota internet, nilai KKM, umur, digit) menjadi model persamaan atau pertidaksamaan;
- menyelesaikan **pertidaksamaan linear**, menggambarnya di garis bilangan, dan menjelaskan mengapa tandanya **dibalik** saat dikali bilangan negatif;
- menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan **nilai mutlak** sederhana sebagai soal jarak.

TEKA-TEKI TIMBANGAN BU DARMI

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Timbangan Bu Darmi seimbang: 3 kantong gula + 2 kg di kiri, 1 kantong + 8 kg di kanan. Tindakan manakah yang membuat timbangan itu tetap seimbang?

- Mengambil 1 kantong dari piring kiri dan 2 kg dari piring kanan.
- Mengambil 2 kg dari piring kiri, lalu menaruhnya di piring kanan.
- Menggandakan isi kedua piring: semua benda di kiri dan di kanan dibuat dua kali lipat.
- Menambah 1 kantong gula di piring kiri saja.

Jawabannya: menggandakan isi kedua piring. Kedua piring sama-sama dikali 2: kiri menjadi 6 kantong + 4 kg (22 kg), kanan 2 kantong + 16 kg (juga 22 kg). Pilihan pertama mengambil benda yang *berbeda* (3 kg dari kiri, hanya 2 kg dari kanan), jadi timbangan miring. Rahasianya: perlakuan pada kedua piring harus **sama persis**, entah menambah, mengurangi, mengali, atau membagi.

8.1 Persamaan adalah timbangan yang seimbang

Di Bab 7 kamu belajar menulis ekspresi seperti $3x + 2$. Begitu ekspresi itu diberi tanda sama dengan, misalnya $3x + 2 = 11$, ia berubah menjadi sebuah **persamaan**: kalimat yang menyatakan bahwa dua ruas bernilai sama,

persis seperti dua piring timbangan yang seimbang.

DEFINISI

Persamaan adalah kalimat matematika yang memuat tanda "=". Bagian di kiri tanda disebut **ruas kiri**, bagian di kanannya **ruas kanan**. **Persamaan linear satu variabel** (PLSV) memuat satu variabel berpangkat satu dan dapat ditulis dalam bentuk

$$ax + b = c, \qquad a \neq 0.$$

Nilai variabel yang membuat kedua ruas sama besar disebut **penyelesaian** (atau akar) persamaan itu.

Bahasa sederhana · Bayangkan kantong gula yang beratnya belum kamu ketahui. Huruf x adalah nama untuk berat itu. Menyelesaikan persamaan artinya menemukan isi kantong **tanpa merobeknya**, cukup dengan menambah atau mengambil benda di timbangan.

Bagaimana cara menemukan penyelesaian tanpa menebak-nebak? Timbangan memberi kita aturan yang sangat sederhana.

ATURAN EMAS TIMBANGAN (SIFAT KESETARAAN)

Penyelesaian sebuah persamaan **tidak berubah** jika kedua ruasnya

- ditambah bilangan yang sama, atau dikurangi bilangan yang sama;
- dikali bilangan yang sama yang **bukan nol**, atau dibagi bilangan yang sama yang bukan nol.

Dua persamaan yang penyelesaiannya sama disebut **persamaan setara** (ekuivalen), ditulis dengan tanda $\Leftrightarrow$. Contoh: $3x + 2 = 11 \;\Leftrightarrow\; 3x = 9 \;\Leftrightarrow\; x = 3$.

Mengapa dikali nol dilarang?

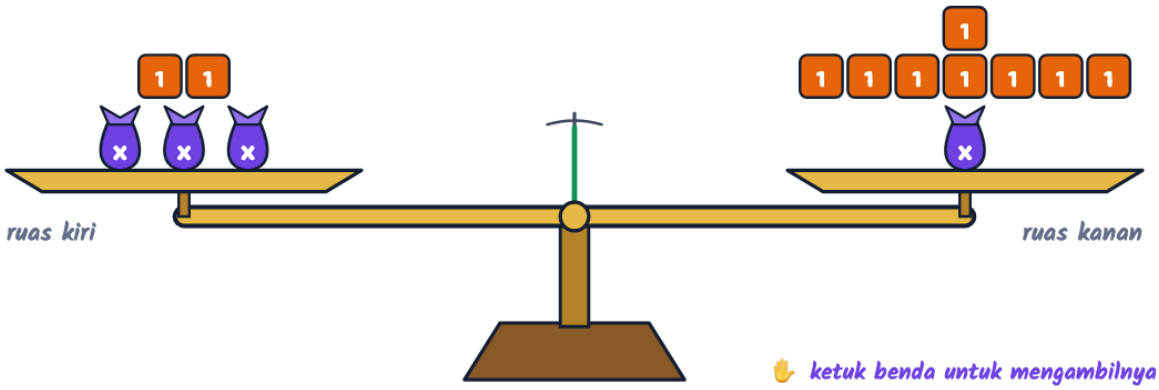
Persamaan $x + 1 = 5$ hanya dipenuhi oleh $x = 4$. Jika kedua ruasnya dikali 0, kamu mendapat $0 = 0$, yang benar untuk *setiap* x. Tiba-tiba $x = 100$ pun "lolos", padahal $100 + 1 \neq 5$. Informasi tentang x lenyap, sehingga persamaan barunya tidak setara lagi. Membagi dengan 0 bahkan tidak terdefinisi sama sekali. Itulah sebabnya aturan emas selalu berbunyi "bukan nol".

LAB MINI **Timbangan dua lengan: jaga supaya tetap seimbang!**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8

$$3x + 2 = x + 8$$

Ketuk benda untuk mengambilnya, atau pakai tombol di bawah.



Tulisan aljabar	Keadaan	Langkah
3x + 2 = x + 8	seimbang ✓	0

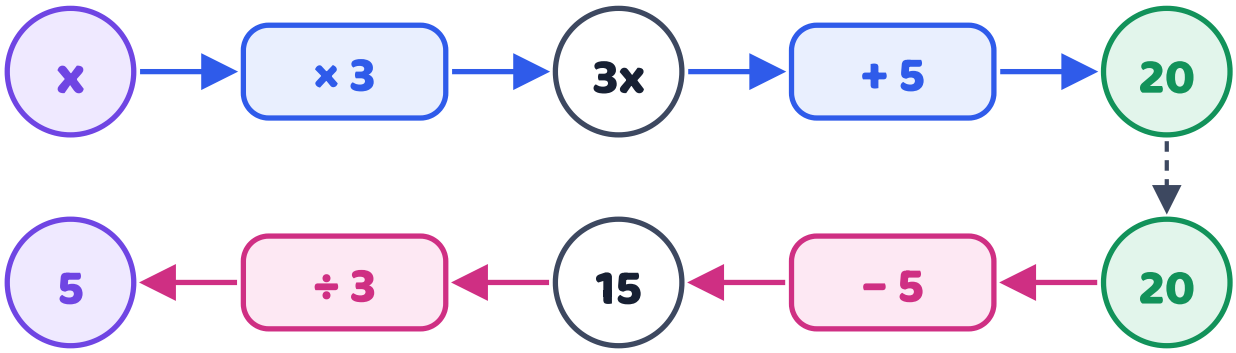
Soal pembukanya adalah teka-teki Bu Darmi, $3x + 2 = x + 8$. Setiap kantong ungu berisi x kotak, dan isinya rahasia. **Ketuk** sebuah benda untuk mengambilnya dari satu piring saja, lalu lihat timbangannya miring (dan tanda "=" berubah menjadi "<" atau ">"). Pakai tombol **dari kedua piring** dan **Bagi** sampai tersisa satu kantong di satu piring. Berapa isi kantongnya? Tekan untuk soal baru.

TAMU DARI MASA LALU

Kata *aljabar* berasal dari judul kitab karya Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (±780–850 M) dari Baghdad, *al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala*. *Al-jabr* berarti "memulihkan": suku yang dikurangkan dipindahkan ke ruas lain dengan menambahkannya pada kedua ruas. *Al-muqabala* berarti "menyeimbangkan": suku yang sama dihapus dari kedua ruas, persis seperti mengambil kantong yang sama dari kedua piring timbangan. Tanda "=" baru muncul berabad-abad kemudian. Robert Recorde dari Wales memperkenalkannya pada tahun 1557 dengan alasan yang manis: tidak ada dua benda yang lebih sama daripada dua garis sejajar yang sama panjang.

8.2 Menyelesaikan persamaan: membuka bungkus kado

Perhatikan persamaan $3x + 5 = 20$. Bayangkan x adalah hadiah yang dibungkus dua lapis: mula-mula dikali 3, lalu ditambah 5. Untuk mengambil hadiahnya, kita membuka bungkus dari **lapisan terluar** dengan **operasi invers** (kebalikan): kebalikan "tambah 5" adalah "kurangi 5", dan kebalikan "kali 3" adalah "bagi 3".



Untuk menyelesaikan $3x + 5 = 20$: kurangi 5 dulu ($3x = 15$), baru bagi 3 ($x = 5$). Yang terakhir dibungkus, pertama dibuka.

TRIK KAK LINTANG

Pagi hari kamu memakai kaus kaki dulu, baru sepatu. Pulang sekolah, urutannya dibalik: lepas sepatu dulu, baru kaus kaki. Menyelesaikan persamaan juga begitu. Operasi yang **terakhir** dikenakan pada x harus dibuka **pertama**. Setelah selesai, selalu **cek** dengan memasukkan jawabanmu ke persamaan awal. Dua detik mengecek bisa menyelamatkan nilai ulanganmu!

Kalau langkah ini dilakukan pada bentuk umum $ax + b = c$, hasilnya adalah sebuah rumus. Geser slidernya dan lihat setiap langkah ikut berubah.

RUMUS HIDUP **Kunci persamaan linear**

$$ax + b = c \implies x = \frac{c - b}{a}$$

Buka bungkusnya dari luar ke dalam: kurangi kedua ruas dengan b, lalu bagi kedua ruas dengan a.

a Koefisien a | b Konstanta b | c Ruas kanan c | x Penyelesaian x

PENYELESAIAN X

3

penyelesaian bulat

Persamaannya **3**x + (**2**) = **11**. Kurangi kedua ruas dengan **2**: **3**x = **9**. Bagi kedua ruas dengan **3**: x = **3**. Cek: **3** × x + (**2**) = **11**, sama dengan ruas kanan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERSAMAAN-LINEAR

CONTOH **Buku tulis dan pulpen**

Ayu membeli 3 buku tulis yang harganya sama dan sebuah pulpen seharga Rp4.000. Ia membayar Rp19.000. Berapa harga satu buku tulis?

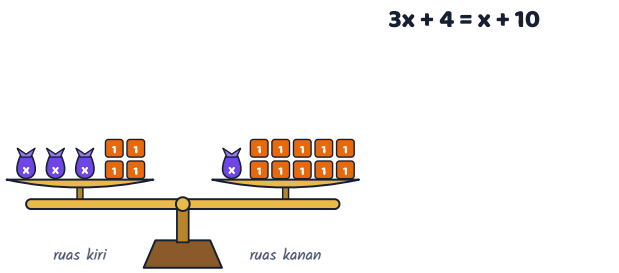
1. Misalkan harga satu buku b rupiah. Modelnya: $3b + 4.000 = 19.000$.
2. Kurangi kedua ruas dengan 4.000: $3b = 15.000$.
3. Bagi kedua ruas dengan 3: $b = 5.000$. Cek: $3 \times 5.000 + 4.000 = 19.000$ ✓.

Harga satu buku tulis Rp5.000.

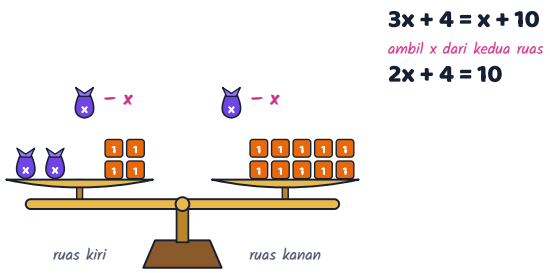
Variabel di kedua ruas

Bagaimana kalau kantong misteri ada di **kedua** piring, seperti $3x + 4 = x + 10$? Strateginya tetap sama: ambil benda yang sama dari kedua piring sampai semua kantong berkumpul di satu sisi dan semua kotak di sisi lain.

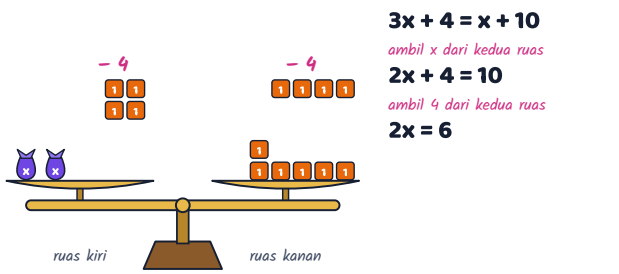
Ikuti animasinya.



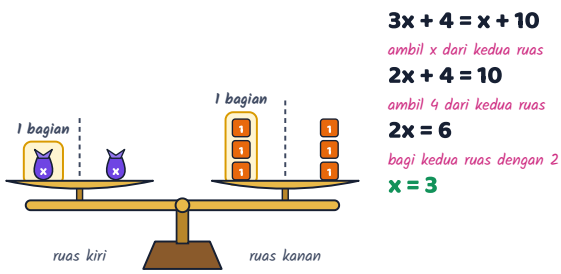
Langkah 1. Persamaan $3x + 4 = x + 10$ sebagai timbangan: kiri 3 kantong misteri dan 4 kotak, kanan 1 kantong dan 10 kotak. Timbangannya seimbang.



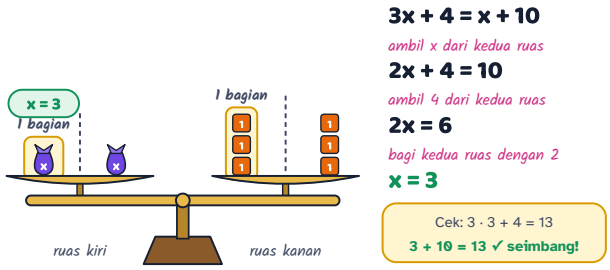
Langkah 2. Ambil 1 kantong dari **kedua** piring. Timbangan tetap seimbang: $2x + 4 = 10$.



Langkah 3. Ambil 4 kotak dari kedua piring. Sekarang semua kantong di kiri dan semua kotak di kanan: $2x = 6$.



Langkah 4. Bagi isi tiap piring menjadi 2 bagian yang sama. Satu bagian kiri (1 kantong) seimbang dengan satu bagian kanan (3 kotak): $x = 3$.



Langkah 5. Cek ke persamaan awal: ruas kiri $3 \cdot 3 + 4 = 13$, ruas kanan $3 + 10 = 13$. Sama! Setiap kantong berisi 3 kotak.

Saat variabel ada di kedua ruas, kumpulkan suku x di ruas yang koefisiennya lebih besar. Dengan begitu koefisien x tetap positif dan kamu terhindar dari kesalahan tanda.

KERJAKAN BERSAMA **Kapan tabungan mereka sama?**

Celengan Dimas berisi Rp5.000 dan setiap hari ia menabung Rp3.000. Celengan Ayu sudah berisi Rp21.000 dan setiap hari ia menabung Rp1.000. Setelah berapa hari isi celengan mereka sama?

1. Misalkan banyak hari h. Celengan Dimas: $5.000 + 3.000h$. Celengan Ayu: $21.000 + 1.000h$.
2. Samakan: $5.000 + 3.000h = 21.000 + 1.000h$.
3. Kurangi kedua ruas dengan $1.000h$ dan dengan 5.000: $2.000h = 16.000$, jadi $h = 8$.
4. Cek: Dimas $5.000 + 24.000 = 29.000$, Ayu $21.000 + 8.000 = 29.000$ ✓.

Setelah 8 hari, isi celengan keduanya sama, yaitu Rp29.000. Sesudah itu celengan Dimas lebih banyak.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Urutan membuka bungkus itu penting: pada $3x + 2 = 11$, kurangi 2 dulu, baru bagi 3. Kalau kamu membagi 11 dengan 3 lalu mengurangi 2, hasilnya $\approx 1{,}67$, dan itu salah. Jika ingin membagi dulu, **semua suku** harus ikut dibagi: $x + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, sehingga $x = 3$. Hasilnya sama, tetapi jalannya lebih repot.

"PINDAH RUAS" ITU JALAN PINTAS, BUKAN SIHIR

Kamu mungkin pernah mendengar "pindah ruas, ganti tanda". Sebenarnya itu singkatan dari aturan emas. Menulis $3x + 2 = 11 \Rightarrow 3x = 11 - 2$ sama dengan mengurangi kedua ruas dengan 2. Namun, faktor pengali tidak "ganti tanda": $3x = 9$ menjadi $x = 9 : 3$, bukan $x = 9 - 3$ dan bukan $x = -9 : 3$. Kalau ragu, kembalilah ke timbangan.

ADU CEPAT **Selesaikan ax + b = c**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi b dari kedua ruas dulu, baru bagi dengan a. Contoh: 4x – 3 = 21 ⇒ 4x = 24 ⇒ x = 6.

8.3 Persamaan dengan kurung dan pecahan

Persamaan di dunia nyata jarang serapi $ax + b = c$. Ada kurung, ada pecahan, ada desimal. Kabar baiknya: semuanya bisa "dirapikan" dulu menjadi bentuk $ax + b = c$, lalu diselesaikan seperti biasa.

Kurung dibuka dengan sifat distributif yang kamu pelajari di Bab 7. Misalnya $4(x-3)-2(x+1)=10$ menjadi $4x-12-2x-2=10$, yaitu $2x-14=10$, sehingga $2x=24$ dan $x=12$. Perhatikan tanda minus di depan kurung kedua: $-2(x+1)=-2x-2$.

Pecahan paling mudah diusir dengan mengalikan kedua ruas dengan **KPK penyebut**. Bentuk desimal pun begitu: $0{,}2x+1{,}5=0{,}5x-0{,}3$ dikali 10 menjadi $2x+15=5x-3$, sehingga $18=3x$ dan $x=6$.

Bahasa sederhana · Pecahan itu seperti potongan kue yang tidak sama besar. Kalau semua suku dikali KPK penyebutnya, semua potongan berubah menjadi kue utuh, dan persamaannya jadi jauh lebih ramah.

COBA SENDIRI **Dua pecahan sekaligus**

Selesaikan $\frac{x+1}{3}-\frac{x-2}{4}=2$.

1. KPK dari 3 dan 4 adalah 12. Kalikan **semua** suku dengan 12: $4(x+1)-3(x-2)=24$.
2. Buka kurung dengan hati-hati: $4x+4-3x+6=24$. Perhatikan $-3\times(-2)=+6$.
3. Sederhanakan: $x+10=24$, jadi $x=14$.
4. Cek: $\frac{15}{3}-\frac{12}{4}=5-3=2$ ✓.

$x=14$. **Kunci sukses: kalikan semua suku dengan KPK, dan beri kurung pada pembilang yang berupa penjumlahan.**

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Saat mengalikan dengan KPK, kalikan **semua suku di kedua ruas**, termasuk suku yang tidak berpenyebut. Pada $\frac{x}{2}+3=7$, mengalikan dengan 2 menghasilkan $x+6=14$, bukan $x+3=14$. Begitu pula pembilang $x-2$ harus dikurung: $-3(x-2)$, bukan $-3x-2$.

Ada kejutan kecil. Tidak semua persamaan linear punya tepat satu penyelesaian. Setelah dirapikan, sebuah persamaan bisa berakhir dengan tiga "nasib" berbeda:

Bentuk akhir	Contoh	Banyak penyelesaian
$x=$ suatu bilangan	$2x+1=7\Rightarrow x=3$	tepat **satu**
$0=$ bilangan bukan nol	$x+3=x+5\Rightarrow 0=2$	**tidak ada** (mustahil)
$0=0$	$2(x+3)=2x+6\Rightarrow 0=0$	**tak hingga**: semua bilangan memenuhi

LANJUT · IB & OLIMPIADE

PERSAMAAN BERPARAMETER

Bagaimana nasib $ax = b$ jika a dan b belum diketahui? Jika $a \neq 0$, ada tepat satu penyelesaian $x = \frac{b}{a}$. Jika $a = 0$ dan $b = 0$, persamaannya $0 = 0$: semua x memenuhi. Jika $a = 0$ dan $b \neq 0$, persamaannya $0 = b$: mustahil. Contoh gaya olimpiade: $(m-2)x = m^2 - 4$. Untuk $m \neq 2$, bagi dengan $m - 2$:

$$x = \frac{(m-2)(m+2)}{m-2} = m + 2.$$

Untuk $m = 2$, persamaannya menjadi $0 = 0$, sehingga setiap bilangan adalah penyelesaian. Sebaliknya, $(m-2)x = m + 1$ dengan $m = 2$ menjadi $0 = 3$: tidak ada penyelesaian. Selalu periksa kapan pembagimu bernilai nol!

MITOS

"Pindah ruas artinya tandanya selalu dibalik."

FAKTA

Itu hanya berlaku untuk suku yang ditambahkan atau dikurangkan. Faktor pengali berpindah menjadi pembagi:
$3x = 12$
menjadi
$x = 12 : 3 = 4$
, bukan
$12 - 3$
dan bukan
$12 : (-3)$
.

MITOS

"Setiap persamaan pasti punya tepat satu jawaban."

FAKTA

$x + 3 = x + 5$
tidak punya penyelesaian, sedangkan
$2(x + 3) = 2x + 6$
dipenuhi semua bilangan. Persamaan linear bisa punya satu, nol, atau tak hingga banyak penyelesaian.

MITOS

"Kalau jawabanku pecahan, pasti salah hitung."

FAKTA

Banyak persamaan berpenyelesaian pecahan, misalnya
$3x = 2$
dengan
$x = \frac{2}{3}$
. Pembuat soal memang suka angka bulat, tetapi matematika tidak harus bulat. Periksa dengan substitusi, bukan dengan perasaan!

8.4 Dari soal cerita ke model matematika

Soal cerita sering terasa menakutkan, padahal isinya hanya persamaan yang sedang menyamar. Tugasmu adalah membuka penyamarannya. Kak Lintang punya resep empat langkah.

RESEP 4 LANGKAH

1. **Pahami.** Apa yang ditanyakan? Apa saja yang diketahui? Coret informasi yang tidak dipakai.
2. **Misalkan.** Beri nama pada yang ditanyakan, misalnya "misalkan banyak hari d". Tulis satuannya.
3. **Susun.** Terjemahkan kalimat menjadi persamaan atau pertidaksamaan: "sama dengan, menjadi, hasilnya" berarti $=$; "paling sedikit" berarti $\geq$; "paling banyak" berarti $\leq$.
4. **Selesaikan dan cek.** Hitung, lalu periksa apakah jawabannya masuk akal di dunia nyata (umur tidak negatif, banyak orang harus bulat).

Bahasa sederhana · Coba bacakan soalnya keras-keras, lalu ganti kata "berapa" dengan huruf x. Sering kali kalimat itu langsung berubah menjadi persamaan.

KERJAKAN BERSAMA

Kuota internet yang menyusut

Paket internet Ayu berisi 30 GB untuk sebulan. Setiap hari ia memakai rata-rata 1,5 GB. Setelah berapa hari kuotanya tersisa 7,5 GB?

1. Misalkan banyak hari d. Kuota yang terpakai $1{,}5d$ GB, jadi sisanya $30 - 1{,}5d$.
2. Model: $30 - 1{,}5d = 7{,}5$.
3. $1{,}5d = 22{,}5$, sehingga $d = 22{,}5 : 1{,}5 = 15$.
4. Cek: $30 - 1{,}5 \times 15 = 30 - 22{,}5 = 7{,}5$ ✓.

Setelah 15 hari, kuota Ayu tersisa 7,5 GB. Kalau polanya tetap, kuotanya habis setelah 20 hari, sebelum bulan berakhir!

COBA SENDIRI

Teka-teki umur Kak Lintang

Umur Kak Lintang sekarang dua kali umur Dimas. Enam tahun yang lalu, umur Kak Lintang tiga kali umur Dimas. Berapa umur Dimas sekarang?

1. Misalkan umur Dimas sekarang d tahun. Umur Kak Lintang $2d$.
2. Enam tahun lalu: Dimas $d - 6$, Kak Lintang $2d - 6$. Jadi $2d - 6 = 3(d - 6)$.
3. $2d - 6 = 3d - 18$, sehingga $12 = d$.
4. Cek: sekarang 12 dan 24. Enam tahun lalu 6 dan 18, dan memang $18 = 3 \times 6$ ✓.

Dimas berumur 12 tahun dan Kak Lintang 24 tahun. Trik soal umur: semua orang bertambah tua dengan laju yang sama!

COBA SENDIRI

Teka-teki di batu nisan Diophantus

Diophantus dari Aleksandria (±abad ke-3 M) sering dijuluki "bapak aljabar". Konon di makamnya tertulis teka-teki ini: masa kecilnya $\frac{1}{6}$ hidupnya; setelah $\frac{1}{12}$ hidupnya lagi, janggutnya tumbuh; setelah $\frac{1}{7}$ hidupnya lagi, ia menikah; 5 tahun kemudian anaknya lahir; sang anak hanya hidup setengah umur ayahnya; 4 tahun setelah anaknya wafat, Diophantus pun wafat. Berapa umur Diophantus?

1. Misalkan umurnya x tahun. Jumlah semua bagian hidupnya sama dengan x: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$.
2. KPK dari 6, 12, 7, dan 2 adalah 84. Kalikan semua suku: $14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$.
3. $75x + 756 = 84x$, sehingga $9x = 756$ dan $x = 84$.
4. Cek: $14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84$ ✓.

Diophantus wafat pada umur 84 tahun (setidaknya menurut teka-tekinya). Persamaan linear sudah dipakai untuk bermain teka-teki sejak lebih dari seribu tahun lalu!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RAHASIA SOAL DIGIT

Bilangan dua angka dengan angka puluhan a dan angka satuan b bernilai $10a + b$, **bukan** $a \times b$. Inilah kunci soal digit olimpiade. Contohnya, selisih sebuah bilangan dua angka dengan kebalikannya selalu kelipatan 9:

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b).$$

Coba: $72 - 27 = 45 = 9 \times 5$. Teka-teki: sebuah bilangan dua angka sama dengan 4 kali jumlah angka-angkanya, dan angka satuannya 2 lebih besar daripada angka puluhannya. Dari $10a + b = 4(a + b)$ diperoleh $6a = 3b$, jadi $b = 2a$. Bersama $b = a + 2$, didapat $a = 2$ dan $b = 4$. Bilangannya 24, dan memang $4 \times (2 + 4) = 24$.

MATEMATIKA NUSANTARA

Di pasar tradisional, banyak pedagang cabai, bawang, dan gula masih memakai **neraca dua lengan** dengan anak timbangan dari kuningan atau besi: 1 kg, ½ kg, 2 ons, 1 ons. Setiap kali menimbang, mereka sebenarnya menyelesaikan persamaan: berat barang di satu piring = jumlah anak timbangan di piring lain. Di posyandu, bayi ditimbang dengan **dacin**, timbangan batang dengan pemberat yang digeser. Garis-garis skala pada batang dacin berjarak sama rata, karena berat yang terbaca bertambah sama besar untuk setiap geseran yang sama panjang. Itu hubungan linear yang akan kamu jumpai lagi di Bab 9.

Tarif parkir

Rp3.000 untuk jam pertama dan Rp2.000 per jam berikutnya: sebuah pertidaksamaan menentukan berapa jam uang sakumu cukup.

Kuota internet

Sisa kuota = kuota awal − pemakaian per hari × banyak hari. Kapan kuotamu habis? Selesaikan persamaannya.

Nilai KKM

Berapa nilai minimal ulangan berikutnya agar rata-ratamu tuntas? Jawabannya pertidaksamaan linear.

Suhu dari BMKG

Mengubah °C ke °F memakai $F = 1{,}8C + 32$. Mengubah balik berarti menyelesaikan persamaan linear.

Ojek online

Tarif = biaya dasar + tarif per km. Dengan uang Rp30.000, sejauh apa kamu bisa pergi?

8.5 Pertidaksamaan dan garis bilangan

Jika KKM ulangan 75, nilai berapa yang tuntas? Bukan hanya 75. Nilai 76, 80, 92,5, bahkan 100 semuanya tuntas. Kalimat "nilai paling sedikit 75" adalah sebuah **pertidaksamaan**: $n \geq 75$. Berbeda dengan persamaan, penyelesaian pertidaksamaan biasanya berupa **daerah** yang berisi tak hingga banyak bilangan. Daerah itu paling jelas digambar di garis bilangan.

Pertidaksamaan	Kata-kata dalam soal	Garis bilangan	Notasi interval
$x < 3$	kurang dari 3		$(-\infty, 3)$
$x \leq 3$	paling banyak 3, maksimal 3, tidak lebih dari 3		$(-\infty, 3]$
$x > 3$	lebih dari 3		$(3, \infty)$
$x \geq 3$	paling sedikit 3, minimal 3, tidak kurang dari 3		$[3, \infty)$
$-1 < x \leq 3$	lebih dari -1 tetapi paling banyak 3		$(-1, 3]$

Bulatan **kosong** berarti bilangan batas tidak ikut (tanda $<$ atau $>$); bulatan **penuh** berarti ikut (tanda $\leq$ atau $\geq$).

TRIK KAK LINTANG

Bayangkan tanda $<$ dan $>$ sebagai mulut buaya yang lapar. Mulutnya selalu terbuka ke arah bilangan yang **lebih besar**, karena buaya ingin makan sebanyak-banyaknya: $3 < 8$, $10 > -2$. Ujung lancipnya menunjuk bilangan yang lebih kecil.

Menyelesaikan pertidaksamaan hampir sama dengan menyelesaikan persamaan: tambah, kurang, kali, atau bagi kedua ruas. Hampir sama, karena ada **satu** perbedaan penting. Tebak dulu!

Tebak Dulu!

Kita tahu $2 < 5$. Jika kedua ruas dikali -1, manakah yang benar?

$-2 < -5$, karena kedua ruas mendapat perlakuan yang sama.

$-2 > -5$: urutannya terbalik.

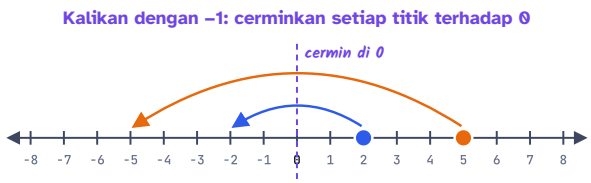
$-2 = -5$, karena tanda minusnya menghapus perbedaan.

Bilangan negatif tidak bisa dibandingkan.

Jawabannya: $-2 > -5$. Di garis bilangan, -2 berada di kanan -5, jadi -2 lebih besar. Mengalikan dengan -1 seperti bercermin terhadap titik 0: yang tadinya di kiri pindah ke kanan, dan sebaliknya. Lihat animasinya di bawah.



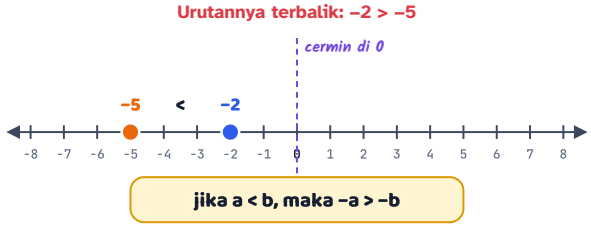
Langkah 1. Titik 2 berada di kiri titik 5, karena $2 < 5$.



Langkah 2. Mengalikan dengan -1 berarti mencerminkan setiap titik terhadap 0: titik 2 pindah ke -2, titik 5 pindah ke -5. Titik yang lebih jauh dari 0 di kanan menjadi lebih jauh dari 0 di kiri.



Langkah 3. Setelah dicerminkan, -5 berada di kiri -2. Jadi sekarang $-5 < -2$.



Langkah 4. Urutannya terbalik! Itulah sebabnya tanda pertidaksamaan harus **dibalik** setiap kali kedua ruas dikali atau dibagi bilangan negatif.

SIFAT-SIFAT PERTIDAKSAMAAN

Untuk bilangan real a, b, dan c dengan $a < b$:

- $a + c < b + c$ dan $a - c < b - c$: menambah atau mengurangi **tidak** mengubah tanda;
- jika $c > 0$, maka $ac < bc$ dan $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$: mengali atau membagi dengan bilangan **positif** tidak mengubah tanda;
- jika $c < 0$, maka $ac > bc$ dan $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$: mengali atau membagi dengan bilangan **negatif** membalik tanda.

Bukti singkat sifat ketiga

Dari $a < b$ diperoleh $b - a > 0$. Karena $c < 0$, hasil kali bilangan positif $b - a$ dengan bilangan negatif c adalah negatif: $(b - a)c < 0$, yaitu $bc - ac < 0$. Tambahkan ac pada kedua ruas: $bc < ac$, atau $ac > bc$. Pembagian dengan c sama dengan perkalian dengan $\frac{1}{c}$, yang juga negatif, jadi berlaku hal yang sama. ∎

∎

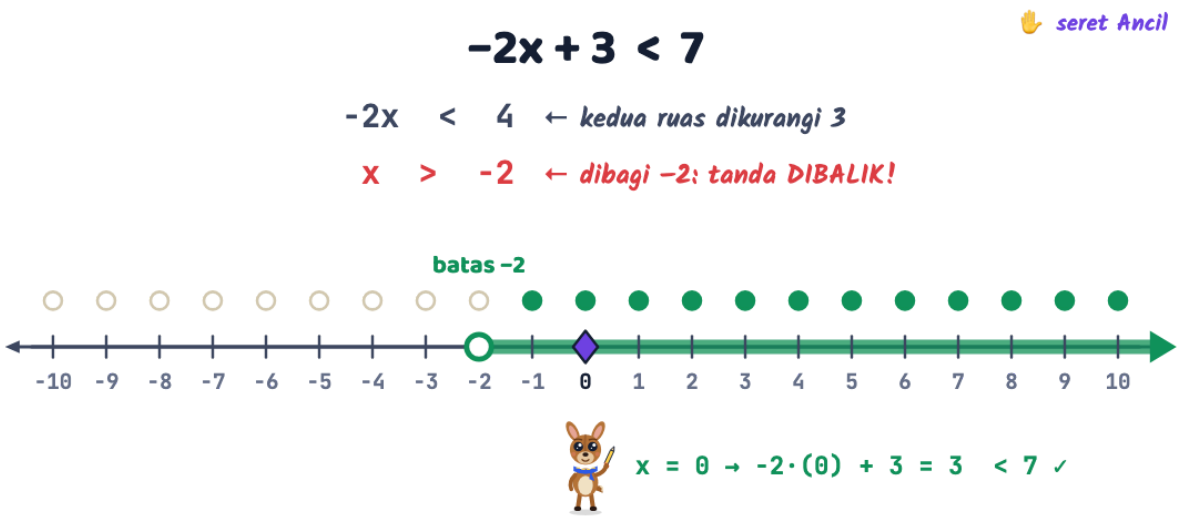
AWAS JEBAKAN

Mengalikan atau membagi kedua ruas pertidaksamaan dengan bilangan negatif membalik arah tandanya. Pada $-3x > 12$, membagi dengan -3 menghasilkan $x < -4$, bukan $x > -4$. Cek dengan satu bilangan: $x = -5$ memenuhi $-3(-5) = 15 > 12$ ✓, sedangkan $x = 0$ tidak.

Lab berikut menguji **setiap** bilangan bulat dari -10 sampai 10 sekaligus. Perhatikan bagaimana bilangan yang lolos selalu membentuk satu daerah utuh, dan bagaimana arah daerah itu berbalik ketika a negatif.

LAB MINI **Garis bilangan: siapa yang lolos uji?**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8



Batas	Penyelesaian	Bilangan bulat yang lolos (−10 s.d. 10)
-2	x > -2	12

Atur a, b, c, dan tandanya. Bulatan hijau di atas garis adalah bilangan bulat yang **lolos**, dan pita hijau adalah daerah penyelesaiannya. Seret Ancil ke mana saja untuk menguji bilangan pecahan. Buat a negatif: apa yang terjadi pada arah pita?

Mengapa tandanya berbalik? Ada cara pandang lain yang sangat indah. Ruas kiri $ax + b$ dapat digambar sebagai sebuah garis, dan ruas kanan c sebagai garis datar. Menyelesaikan $ax + b > c$ artinya mencari semua x yang membuat garis miring berada **di atas** garis datar.

GRAFIK HIDUP

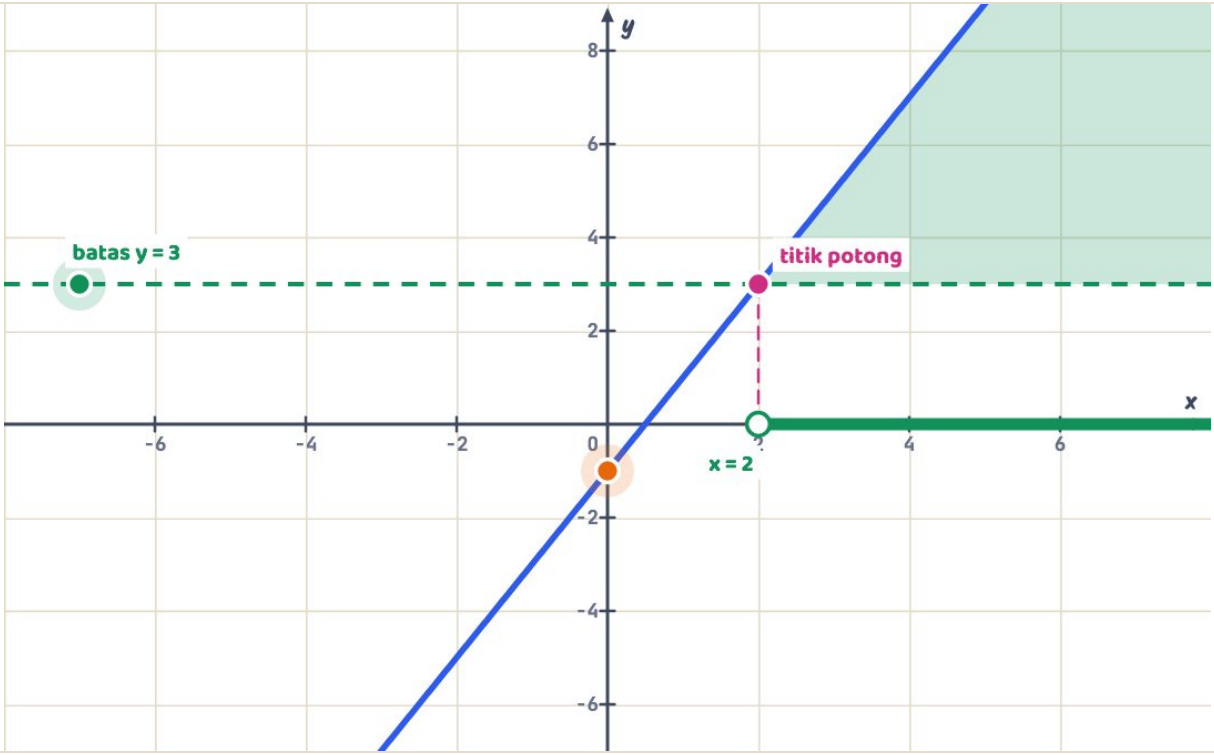
Kapan garis berada di atas batas?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8

$$ax + b > c$$

$$2x - 1 > 3 \iff x > 2$$

Garis biru adalah ruas kiri y = ax + b, garis hijau putus-putus adalah batas y = c. Daerah hijau di sumbu-x berisi semua x yang membuat garis biru berada di atas garis hijau.



a positif: garis naik, daerahnya di KANAN titik potong (tanda tetap >)

Titik potong x =
2

Daerah penyelesaian
di kanan titik potong

Geser a dari positif ke negatif. Garis birunya berubah dari naik menjadi turun, sehingga daerah "di atas batas" pindah dari kanan ke kiri titik potong. Itulah alasan geometris mengapa tanda dibalik! Kamu juga bisa menyeret titik jingga (memotong sumbu-y) dan titik hijau (batas).

KERJAKAN BERSAMA

Mengejar KKM

Nilai tiga ulangan Ayu adalah 78, 85, dan 70. Ia ingin rata-rata keempat ulangannya paling sedikit 80. Berapa nilai minimal ulangan keempat?

1. Misalkan nilai ulangan keempat X. "Paling sedikit 80" berarti $\dfrac{78+85+70+X}{4} \geq 80$.
2. Kalikan kedua ruas dengan 4 (positif, tanda tetap): $233 + X \geq 320$.
3. Kurangi kedua ruas dengan 233: $X \geq 87$.

Ayu memerlukan nilai paling sedikit 87. Nilai 87, 90, atau 100 semuanya cukup; itulah sebabnya jawabannya berupa daerah, bukan satu bilangan.

RUMUS HIDUP

Nilai minimal ulangan berikutnya

$$\frac{n\,R + X}{n+1} \geq T \implies X \geq (n+1)\,T - n\,R$$

Jumlah semua nilai harus mencapai target dikali banyak ulangan. Ulangan berikutnya bertugas menutup kekurangannya.

- n Banyak ulangan sebelumnya `kali`
- R Rata-rata sekarang
- T Target rata-rata (KKM)
- X Nilai minimal berikutnya

NILAI MINIMAL BERIKUTNYA

92

💪 **masih bisa dikejar!**

Jumlah nilaimu sekarang **3** × **76** = **228**. Agar rata-rata **4** ulangan paling sedikit **80**, jumlahnya harus paling sedikit **4** × **80** = **320**. Kekurangannya **92**, jadi nilai ulangan berikutnya paling sedikit **92**.

Cek satuan: semua nilai memakai skala 0–100.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-NILAI-MINIMAL-KKM

KERJAKAN BERSAMA

Uang parkir Kak Lintang

Tarif parkir motor di sebuah pusat belanja: Rp3.000 untuk jam pertama dan Rp2.000 untuk setiap jam berikutnya (bagian jam dihitung satu jam). Kak Lintang hanya membawa Rp15.000 untuk parkir. Paling lama berapa jam ia boleh parkir?

1. Misalkan lama parkir t jam. Tarifnya $3.000 + 2.000(t-1)$ dan tidak boleh melebihi 15.000.
2. $3.000 + 2.000(t-1) \le 15.000 \;\Rightarrow\; 2.000(t-1) \le 12.000 \;\Rightarrow\; t - 1 \le 6.$
3. Jadi $t \le 7$. Cek: 7 jam berarti $3.000 + 6 \times 2.000 = 15.000$ ✓, sedangkan 8 jam berarti Rp17.000.

Paling lama 7 jam. Karena lama parkir dihitung per jam, jawabannya bilangan bulat terbesar yang memenuhi pertidaksamaan.

RUMUS HIDUP

Lama parkir maksimal

$$p + q\,(t - 1) \le U \implies t \le 1 + \frac{U - p}{q}$$

Selama total tarif tidak melebihi uangmu, kamu masih boleh parkir. Ambil bilangan bulat terbesar yang memenuhi.

- p Tarif jam pertama `rupiah`
- q Tarif tiap jam berikutnya `rupiah`
- U Uang untuk parkir `rupiah`
- t Lama parkir maksimal `jam`

LAMA PARKIR MAKSIMAL

7

jam

✨ **pas, tanpa kembalian**

Setelah jam pertama, sisa uangmu Rp**12.000**. Sisa itu cukup untuk **6** jam tambahan, jadi paling lama **7** jam. Tarif untuk **7** jam adalah Rp**15.000**, dan kembaliannya Rp**0**.

Cek satuan: tarif dan uang dalam rupiah, hasilnya dalam jam.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LAMA-PARKIR

Pertidaksamaan ganda seperti $-7 < 2n + 3 \le 9$ diselesaikan dengan memperlakukan ketiga bagiannya sekaligus: kurangi semuanya dengan 3 ($-10 < 2n \le 6$), lalu bagi semuanya dengan 2 ($-5 < n \le 3$). Tanda pertidaksamaan "<" dan ">" sendiri dipopulerkan oleh Thomas Harriot dari Inggris; bukunya terbit pada tahun 1631, sepuluh tahun setelah ia wafat.

ADU CEPAT

Balik tanda kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi b dari kedua ruas, lalu bagi dengan a yang negatif: tanda > berbalik menjadi <. Jawabannya bilangan bulat terbesar yang masih lebih kecil daripada batasnya.

8.6 Nilai mutlak: persamaan tentang jarak

Ancil berdiri di titik 0 garis bilangan. Ayu berdiri 3 langkah di kanannya, Dimas 3 langkah di kirinya. Posisi mereka berbeda (3 dan -3), tetapi **jaraknya** ke Ancil sama, yaitu 3. Jarak inilah yang disebut nilai mutlak.

DEFINISI

Nilai mutlak sebuah bilangan x, ditulis $|x|$, adalah jarak x ke 0 di garis bilangan. Jadi $|x| = x$ jika $x \geq 0$, dan $|x| = -x$ jika $x < 0$. Contoh: $|5| = 5$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$. Lebih umum, $|x - p|$ adalah **jarak antara x dan p.**

Bahasa sederhana · Nilai mutlak itu seperti meteran: ia hanya peduli seberapa jauh, tidak peduli ke kiri atau ke kanan. Karena itu hasilnya tidak pernah negatif.

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK

Untuk $r > 0$:

- $|x - p| = r \iff x = p - r$ atau $x = p + r$ (dua titik yang berjarak r dari p);
- $|x - p| < r \iff p - r < x < p + r$ (semua titik **di dalam** jarak r dari p);
- $|x - p| > r \iff x < p - r$ atau $x > p + r$ (semua titik **di luar** jarak r).

Jika $r = 0$, persamaan $|x - p| = 0$ hanya dipenuhi $x = p$. Jika $r < 0$, persamaan $|x - p| = r$ tidak punya penyelesaian, karena jarak tidak pernah negatif.

GRAFIK HIDUP

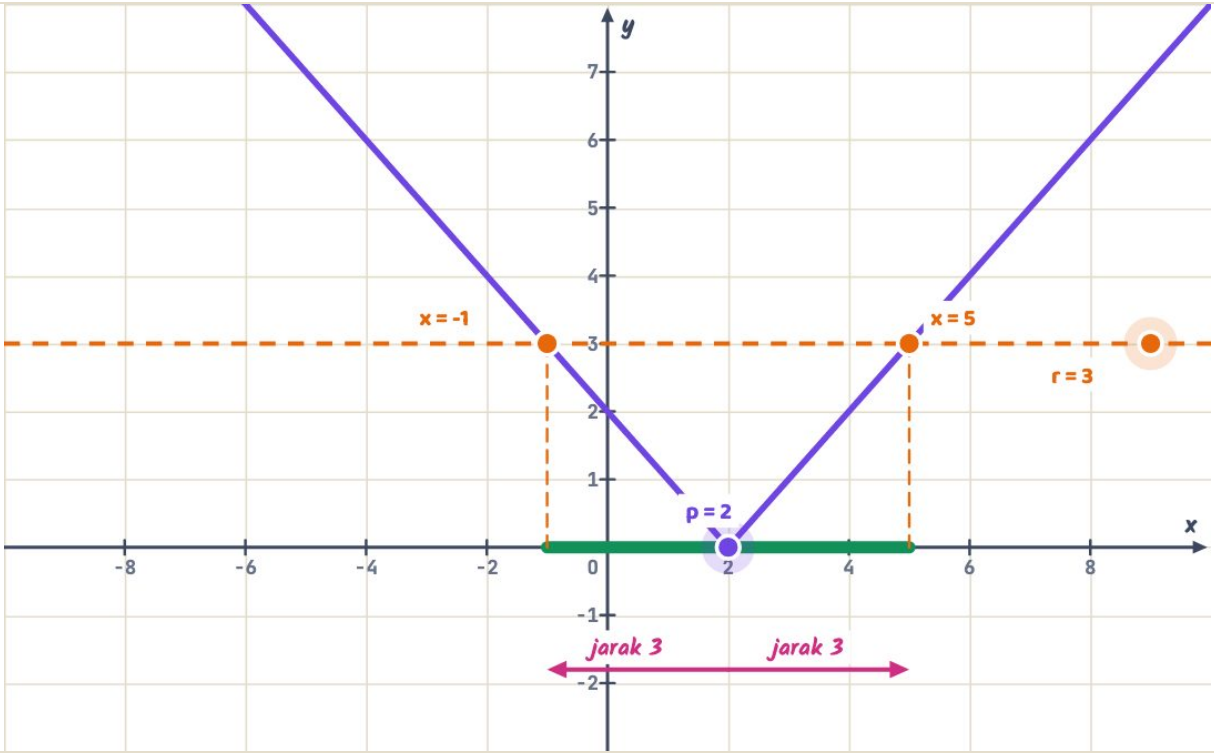
Nilai mutlak = jarak: huruf V yang jujur

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8

$$|x - p| = r$$

$$|x - 2| = 3$$

Grafik y = |x − p| berbentuk huruf V dengan ujung di x = p. Garis jingga y = r memotong huruf V tepat di titik-titik yang jaraknya r dari p.



dua penyelesaian: p − r dan p + r; pita hijau = |x − p| < r

$x_1 = p - r$	$x_2 = p + r$	Banyak penyelesaian
-1	5	2

Seret ujung huruf V (titik ungu) ke kiri dan kanan, dan seret titik jingga di tepi kanan naik-turun untuk mengubah r. Apa yang terjadi saat $r = 0$? Dan saat r negatif?

KERJAKAN BERSAMA **Dua jawaban sekaligus**

Selesaikan $|2x - 3| = 7$.

1. Isi tanda mutlak harus bernilai 7 atau -7: $2x - 3 = 7$ atau $2x - 3 = -7$.
2. Dari $2x - 3 = 7$: $2x = 10$, jadi $x = 5$.
3. Dari $2x - 3 = -7$: $2x = -4$, jadi $x = -2$.
4. Cek: $|10 - 3| = 7$ ✓ dan $|-4 - 3| = |-7| = 7$ ✓.

$x = 5$ atau $x = -2$. Keduanya berjarak 3,5 dari 1,5, karena $|2x - 3| = 7$ setara dengan $|x - 1{,}5| = 3{,}5$.

Nilai mutlak sangat berguna untuk menyatakan **toleransi**. Misalnya, kemasan gula "1 kg" dianggap layak jika massanya m gram meleset paling banyak 10 gram: $|m - 1000| \le 10$, yaitu $990 \le m \le 1010$. Prakiraan suhu BMKG "27 °C ± 2 °C" juga berarti $|T - 27| \le 2$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

JUMLAH DUA JARAK

Berapa nilai terkecil $|x - 1| + |x - 5|$? Bayangkan x adalah rumahmu, sedangkan 1 dan 5 adalah sekolah dan pasar. Jumlah jarak ke keduanya paling sedikit 4, yaitu jarak sekolah ke pasar, dan nilai itu tercapai untuk setiap x di antara keduanya ($1 \le x \le 5$). Jika rumahmu di luar, misalnya $x = 7$, kamu menempuh sebagian jalan dua kali: $6 + 2 = 8$. Akibatnya, $|x - 1| + |x - 5| = 4$ dipenuhi semua x dalam $[1, 5]$, sedangkan $|x - 1| + |x - 5| = 3$ tidak punya penyelesaian sama sekali. Cara pandang "jarak" ini mengubah soal yang tampak rumit menjadi gambar sederhana.

Cek Cepat

Penyelesaian $4x - 7 = 13$ adalah...

- $x = 1{,}5$
- $x = 5$
- $x = 20$
- $x = -5$

Penyelesaian $-2x > 8$ adalah...

- $x > -4$
- $x < 4$
- $x < -4$
- $x > 4$

Penyelesaian $|x - 3| = 5$ adalah...

- $x = -2$ atau $x = 8$
- $x = 8$ saja
- $x = 2$ atau $x = 8$
- $x = -8$ atau $x = 2$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: timbangan gantungan baju

Bahan: gantungan baju, benang atau tali, 2 gelas plastik bekas, selotip, beberapa koin yang sama (misalnya Rp500), dan 3 benda kecil yang identik (misalnya tutup botol yang sama).

1. Gantung gantungan baju pada gagang pintu. Ikat satu gelas plastik di setiap ujungnya dengan panjang tali yang sama. Pastikan timbangan seimbang saat kosong.
2. Masukkan 3 tutup botol dan 2 koin ke gelas kiri.
3. Masukkan koin satu per satu ke gelas kanan sampai timbangan paling mendekati seimbang. Catat banyak koinnya, misalnya n.
4. Tulis persamaannya: $3t + 2 = n$, dengan t adalah berat satu tutup botol dalam "satuan koin". Selesaikan untuk t.
5. Uji tebakanmu: taruh 1 tutup botol di kiri dan koin sebanyak t (dibulatkan) di kanan. Seimbangkah?

Pertanyaan: Mengapa ketiga tutup botol harus identik? Jika dengan 9 koin gelas kanan masih terlalu ringan, tetapi dengan 10 koin sudah terlalu berat, tuliskan hasilnya sebagai pertidaksamaan ganda untuk t.

⚡ RINGKASAN KILAT — Bab 8 dalam 3 menit

☑️ Kamu sekarang bisa...

- memandang persamaan sebagai **timbangan seimbang** dan menyelesaikan persamaan linear satu variabel dengan operasi yang sama pada kedua ruas
- menyelesaikan persamaan yang memuat **kurung dan pecahan**, serta mengenali persamaan yang tidak punya penyelesaian atau punya tak hingga banyak penyelesaian
- mengubah **soal cerita** (parkir, kuota internet, nilai KKM, umur, digit) menjadi model persamaan atau pertidaksamaan
- menyelesaikan **pertidaksamaan linear**, menggambarnya di garis bilangan, dan menjelaskan mengapa tandanya **dibalik** saat dikali bilangan negatif
- menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan **nilai mutlak** sederhana sebagai soal jarak

🔑 Istilah kunci

persamaan · Persamaan · ruas kiri · ruas kanan · Persamaan linear satu variabel · penyelesaian · persamaan setara · operasi invers · KPK penyebut · pertidaksamaan · Nilai mutlak

🧮 Rumus penting

$$ax + b = c \implies x = \frac{c - b}{a}$$

Kunci persamaan linear. Buka bungkusnya dari luar ke dalam: kurangi kedua ruas dengan b, lalu bagi kedua ruas dengan a.

$$\frac{n\,R + X}{n+1} \geq T \implies X \geq (n+1)\,T - n\,R$$

Nilai minimal ulangan berikutnya. Jumlah semua nilai harus mencapai target dikali banyak ulangan. Ulangan berikutnya bertugas menutup kekurangannya.

$$p + q\,(t - 1) \leq U \implies t \leq 1 + \frac{U - p}{q}$$

Lama parkir maksimal. Selama total tarif tidak melebihi uangmu, kamu masih boleh parkir. Ambil bilangan bulat terbesar yang memenuhi.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Urutan membuka bungkus itu penting: pada $3x + 2 = 11$, kurangi 2 dulu, baru bagi 3.
- Saat mengalikan dengan KPK, kalikan semua suku di kedua ruas, termasuk suku yang tidak berpenyebut.
- Mengalikan atau membagi kedua ruas pertidaksamaan dengan bilangan negatif membalik arah tandanya.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=8

Teka-teki untuk Bab 9

Sebuah taksi online memasang tarif Rp10.000 begitu kamu naik, ditambah Rp4.000 untuk setiap kilometer. Buat tabel tarif untuk perjalanan 1, 2, 3, 4, dan 5 km, lalu gambar titik-titik (jarak, tarif) di kertas berpetak. Apa yang kamu lihat? Jika tarif per kilometernya naik menjadi Rp5.000, apa yang berubah pada gambarmu?

▼ **Intip petunjuk**

Setiap tambahan 1 km selalu menambah Rp4.000. Langkahnya selalu sama, sehingga titik-titiknya tersusun pada sebuah **garis lurus**. Angka 4.000 menentukan kecuraman garis (gradien), sedangkan 10.000 menentukan titik awalnya. Di Bab 9 kamu akan menuliskannya sebagai $y = 4.000x + 10.000$ dan menjelajahi dunia fungsi linear!

BAB 9 · ALJABAR & FUNGSI

09 Garis Lurus: Membaca Kemiringan Dunia

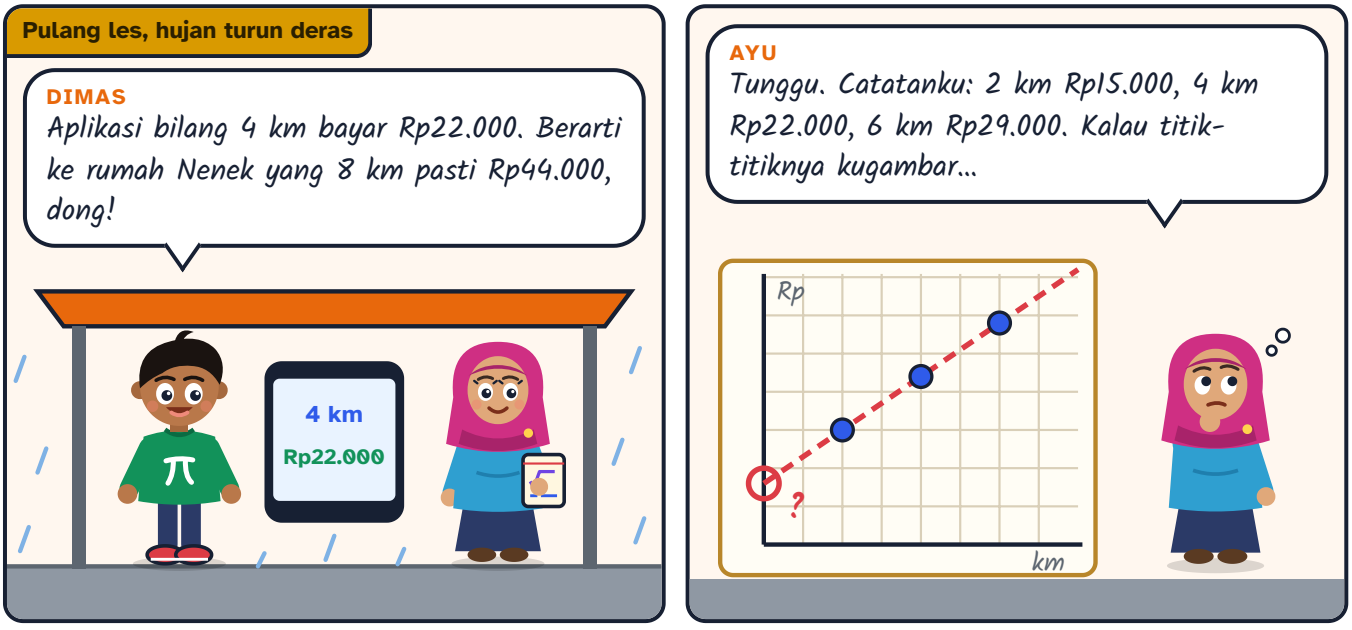
Mengapa tarif taksi online untuk 8 km tidak sampai dua kali tarif 4 km? Mengapa jalan di Kelok 44 harus berliku-liku? Dua pertanyaan itu punya satu jawaban: garis lurus dan kemiringannya.

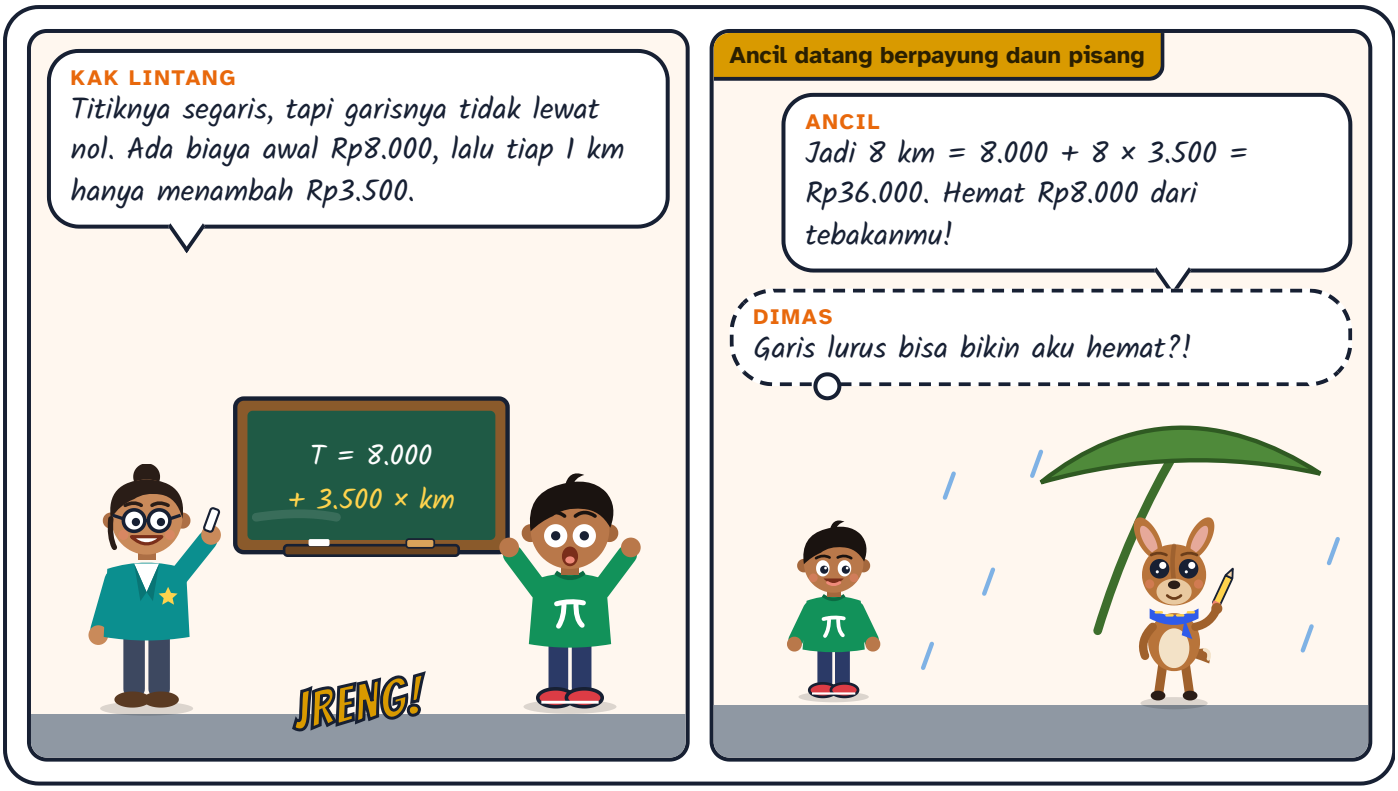
Setelah bab ini, kamu bisa

- menempatkan dan membaca titik di **bidang Kartesius** serta menyebutkan kuadrannya;
- membedakan **relasi** dan **fungsi**, lalu memakai notasi $f(x)$;
- menghitung **gradien** dari dua titik, dari grafik, dan dari persamaan;
- menyusun dan menggambar **persamaan garis** $y = mx + c$;
- mengenali **garis sejajar** dan **garis tegak lurus**, serta membuat **model linear** dari situasi nyata.

ARGO TAKSI YANG BIKIN PENASARAN

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Tarif sebuah taksi online: Rp8.000 begitu naik, ditambah Rp3.500 per km. Perjalanan 4 km bertarif Rp22.000. Kalau jaraknya dijadikan dua kali lipat (8 km), tarifnya...

- tepat dua kali lipat, yaitu Rp44.000.
- kurang dari dua kali lipat.
- lebih dari dua kali lipat, karena makin jauh makin mahal.
- sama saja, karena aturan tarifnya tetap.

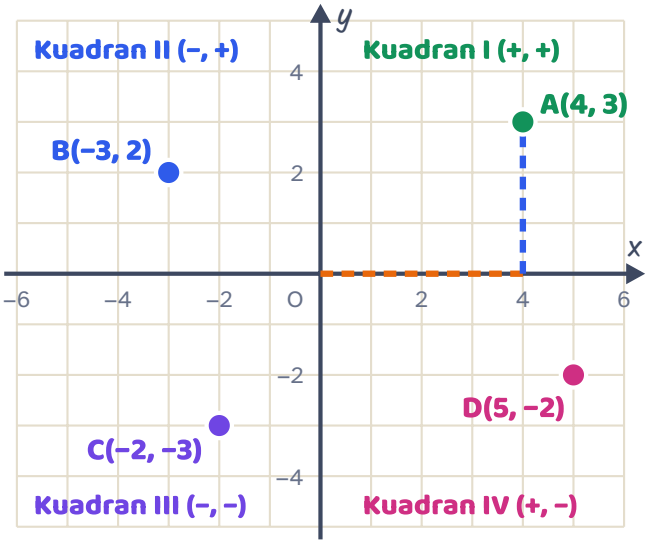
Jawabannya: kurang dari dua kali lipat, yaitu Rp36.000. Biaya awal Rp8.000 hanya dibayar sekali. Yang berlipat dua hanya bagian per km: $4 \times 3.500 = 14.000$ menjadi $8 \times 3.500 = 28.000$. Jadi tarifnya $8.000 + 28.000 = 36.000$. Kalau digambar, titik-titik (jarak, tarif) membentuk **garis lurus yang tidak lewat titik nol**. Masih ingat teka-teki tarif taksi online di akhir Bab 8? Inilah jawabannya: garis lurus itu adalah fungsi linear, bintang bab ini!

9.1 Bidang Kartesius: alamat setiap titik

Setiap kursi di gedung bioskop punya alamat, misalnya "baris F, kursi 12". Tanpa alamat itu, kamu bisa duduk di kursi orang lain! Matematikawan memberi alamat untuk setiap titik di bidang datar dengan cara yang mirip: dua garis bilangan yang berpotongan tegak lurus.

DEFINISI

Bidang Kartesius dibentuk oleh **sumbu-x** (garis bilangan mendatar) dan **sumbu-y** (garis bilangan tegak) yang berpotongan tegak lurus di **titik asal** $O(0, 0)$. Setiap titik ditulis sebagai **pasangan berurutan** (x, y): x adalah jarak mendatar dari O (kanan positif, kiri negatif) dan y adalah jarak tegak (atas positif, bawah negatif). Kedua sumbu membagi bidang menjadi empat **kuadran**.



Alamat titik: (x, y)

x = langkah mendatar
kanan (+), kiri (−)

y = langkah tegak
atas (+), bawah (−)

A(4, 3): 4 ke kanan, lalu 3 ke atas.

O(0, 0) = titik asal

Pola tanda koordinat menunjukkan kuadrannya. Titik yang tepat berada di sumbu tidak termasuk kuadran mana pun.

Bahasa sederhana · Bayangkan kamu berdiri di titik O. Untuk sampai ke titik $A(4, 3)$, berjalanlah **4 langkah ke kanan**, lalu **3 langkah ke atas**. Kalau angkanya negatif, berbaliklah: ke kiri atau ke bawah. Itu saja rahasianya!

TRIK KAK LINTANG

Urutan abjad menyelamatkanmu: x datang sebelum y. Seperti masuk gedung: **jalan mendatar dulu menuju lift, baru naik**. Jadi $(4, 3)$ berarti jalan 4, lalu naik 3.

AWAS JEBAKAN

Urutan koordinat tidak boleh ditukar: $(2, 5)$ dan $(5, 2)$ adalah dua titik yang berbeda. Itulah sebabnya disebut **pasangan berurutan**. Titik $(2, 5)$ ada di atas, dekat sumbu-y; titik $(5, 2)$ ada di kanan, dekat sumbu-x.

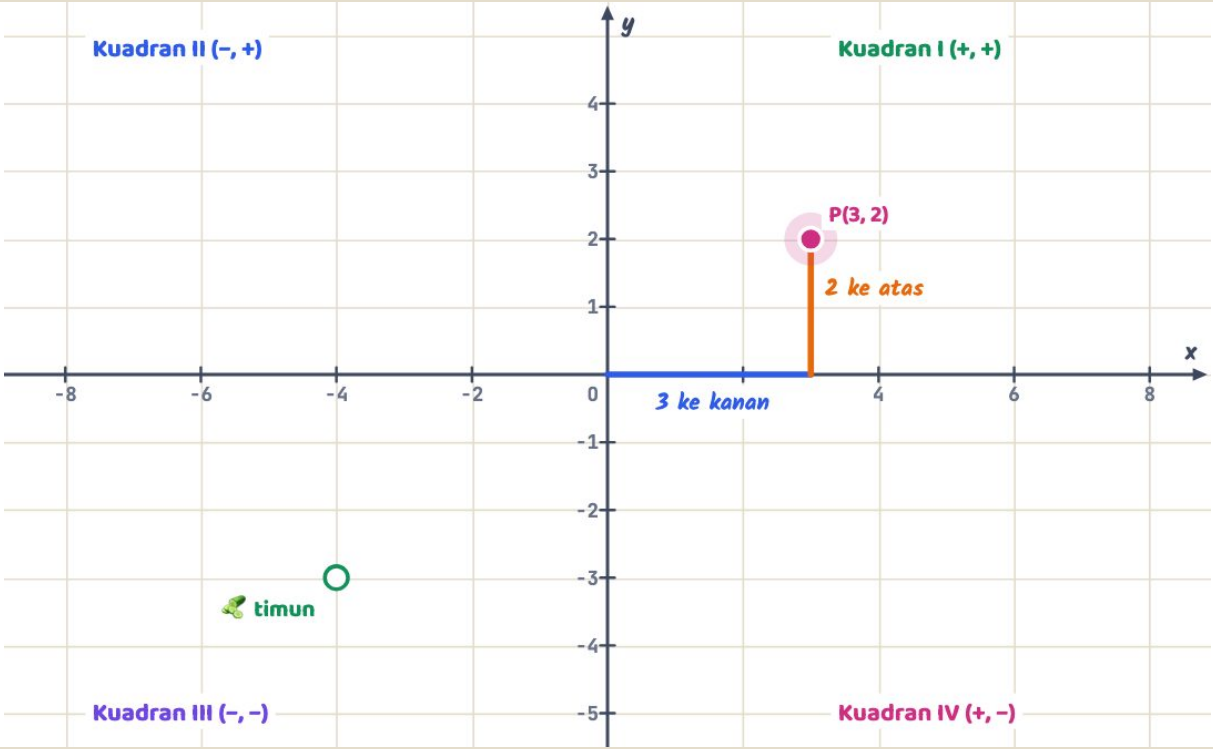
GRAFIK HIDUP

Bantu Ancil menemukan timun

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

$$P(x, y)$$

$$P(3, 2)$$



Kuadran I: x positif, y positif

x	y	Langkah lagi menuju timun
3	2	12

Seret titik P (atau geser slider) sampai tepat di atas timun. Perhatikan tanda x dan y setiap kali P pindah kuadran. Bisakah kamu menebak tandanya sebelum melihat label?

TAMU DARI MASA LALU

Nama "Kartesius" berasal dari **René Descartes** (1596–1650), filsuf dan matematikawan Prancis yang nama Latinnya *Cartesius*. Konon, ide koordinat muncul saat ia berbaring sambil memperhatikan seekor lalat di langit-langit kamar: posisi lalat bisa dinyatakan dengan jaraknya ke dua dinding! Lewat buku *La Géométrie* (1637), Descartes menyatukan aljabar dan geometri: kurva bisa ditulis sebagai persamaan, dan persamaan bisa digambar. Pada masa yang sama, **Pierre de Fermat** menemukan gagasan serupa secara terpisah.

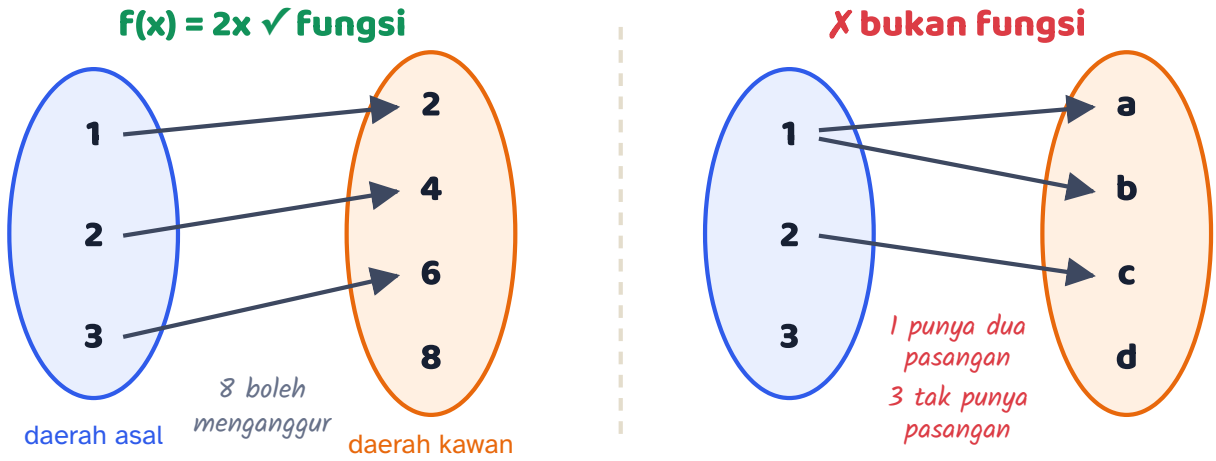
9.2 Relasi dan fungsi: mesin yang taat aturan

Bayangkan sebuah mesin minuman: kamu memasukkan uang dan menekan satu tombol, lalu keluar **tepat satu** minuman. Kalau mesin itu kadang mengeluarkan teh dan kadang kopi untuk tombol yang sama, kamu pasti kesal. Matematikawan menyebut mesin yang taat aturan seperti itu **fungsi**.

DEFINISI

Sebuah **relasi** dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan anggota A dengan anggota B. Relasi itu disebut **fungsi** (atau pemetaan) jika **setiap** anggota A dipasangkan dengan **tepat satu** anggota B.

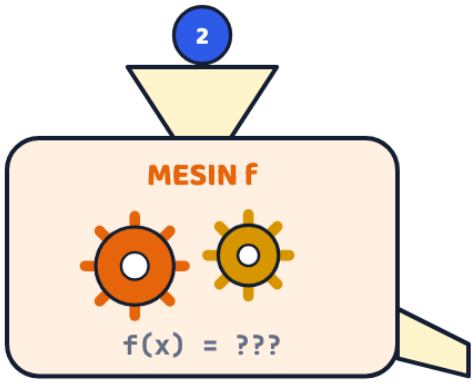
- A disebut **daerah asal** (domain), B disebut **daerah kawan** (kodomain).
- Himpunan semua keluaran yang benar-benar muncul disebut **daerah hasil** (range).
- Kita menulis $f : x \mapsto 2x + 3$ atau $f(x) = 2x + 3$. Dibaca: "f dari x sama dengan $2x + 3$".

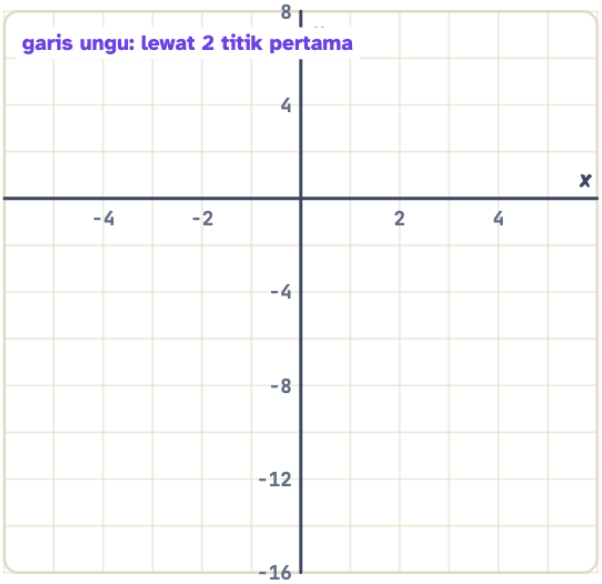


Pada fungsi, setiap anggota daerah asal mengirim **tepat satu** panah. Anggota daerah kawan boleh menerima banyak panah atau tidak menerima sama sekali.

LAB MINI **Mesin fungsi: tebak aturannya!**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9





x	belum ada data
f(x)	

keluaran terakhir
—

titik terkumpul
0

beda tiap x naik 1
butuh dua x berurutan

Pola titik
masukkan minimal 2 bilangan

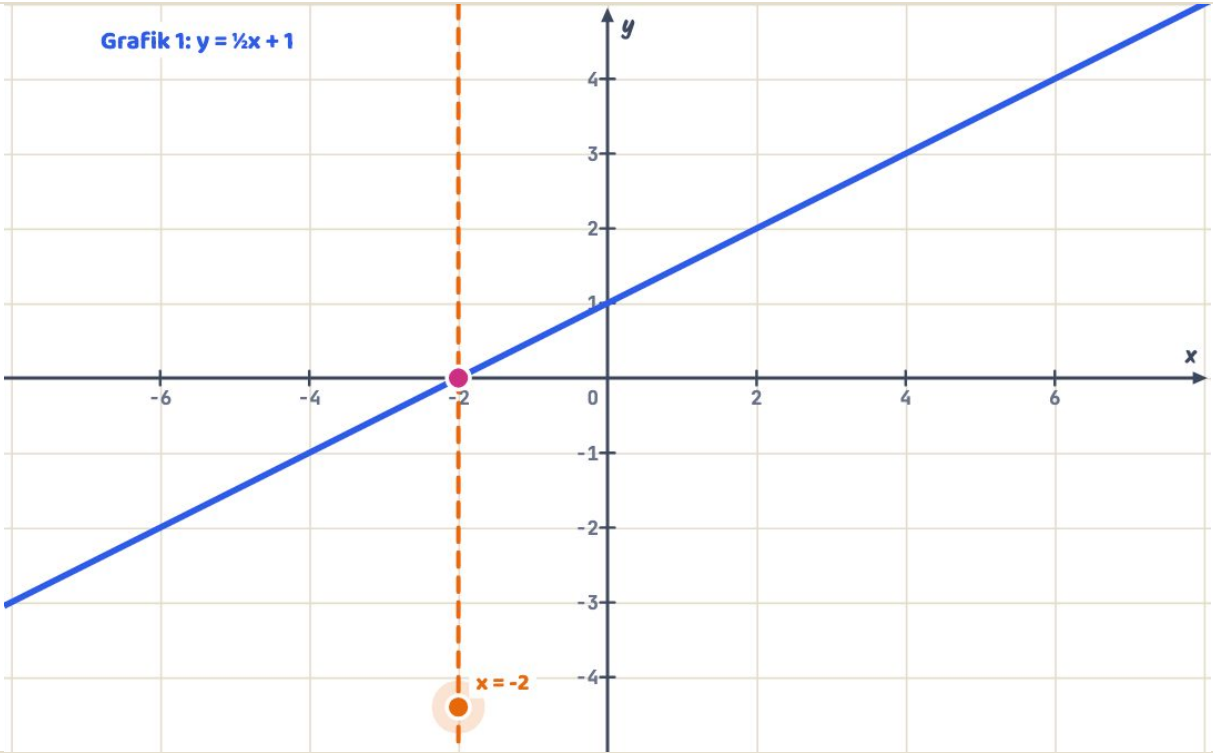
Pilih bilangan x, lalu tekan ⚙ **Masukkan x**. Mesin mengeluarkan $f(x)$ dan titik $(x, f(x))$ muncul di grafik. Setelah tiga titik, bisakah kamu menebak aturan mesin sebelum mengintipnya? Coba juga **Mesin misteri**: apakah titik-titiknya masih segaris?

Ada cara cepat untuk mengecek apakah sebuah **grafik** menggambarkan fungsi: geser sebuah garis tegak dari kiri ke kanan. Kalau garis itu pernah memotong grafik di **dua titik atau lebih**, berarti ada satu x yang punya dua keluaran. Itu bukan fungsi!

GRAFIK HIDUP **Uji garis tegak: fungsi atau bukan?**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

fungsi $\iff$ setiap garis tegak memotong grafik paling ba



✓ **FUNGSI: tidak ada garis tegak yang memotong lebih dari sekali**

grafiknya garis lurus: fungsi linear!

Banyak titik potong
1

Seret pegangan oranye ke kiri dan ke kanan untuk setiap grafik 1–4. Untuk grafik mana garis tegak bisa memotong **dua** titik sekaligus?

Di antara semua fungsi, ada satu keluarga yang paling sederhana dan paling sering dipakai: fungsi yang grafiknya garis lurus.

DEFINISI

Fungsi linear adalah fungsi berbentuk $f(x) = mx + c$, dengan m dan c bilangan real. Grafiknya selalu garis lurus. Ciri khasnya: setiap kali x bertambah 1, nilai $f(x)$ bertambah m. Lajunya **tetap**. (Jika $m = 0$, fungsi $f(x) = c$ disebut fungsi konstan; grafiknya garis mendatar.)

x	0	1	2	3	4	Selisih berurutan

$f(x) = 3x + 2$	2	5	8	11	14	**+3, +3, +3, +3** (tetap: linear)
$g(x) = x^2$	0	1	4	9	16	+1, +3, +5, +7 (berubah: bukan linear)

Perhatikan selisih pada baris $g(x) = x^2$: 1, 3, 5, 7, yaitu bilangan ganjil berurutan! Pola indah itu akan kamu temui lagi di bab parabola. Untuk sekarang, ingat saja: **selisih tetap berarti linear**.

ADU CEPAT **Mesin f(x) kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Ganti x dengan bilangan di dalam kurung. Kalikan dulu, baru jumlahkan. Hati-hati dengan tanda negatif!

CONTOH **Mesin f(x) = 3x – 2**

Diketahui $f(x) = 3x - 2$. Hitung $f(4)$ dan $f(-1)$. Lalu tentukan x yang membuat $f(x) = 13$.

1. $f(4) = 3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10$.
2. $f(-1) = 3 \times (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$.
3. Untuk $f(x) = 13$: $3x - 2 = 13 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$. Cek: $f(5) = 15 - 2 = 13$. ✓

$f(4) = 10$, $f(-1) = -5$, dan $f(5) = 13$. Langkah ketiga adalah menjalankan mesin mundur: dari keluaran kembali ke masukan.

9.3 Gradien: seberapa curam sebuah garis?

Naik tangga rumah terasa biasa saja, tetapi naik tangga menara mercusuar membuat napas ngos-ngosan. Bedanya ada pada **kecuraman**. Dalam matematika, kecuraman garis diukur dengan satu angka bernama **gradien** (kemiringan), biasanya dilambangkan m.

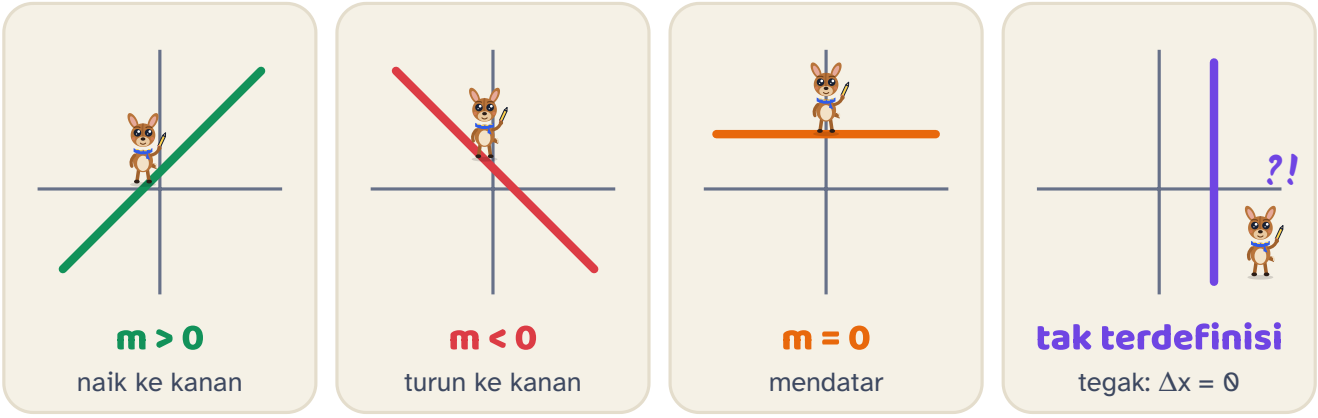
DEFINISI

Jika sebuah garis melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dengan $x_1 \neq x_2$, maka **gradien** garis itu adalah

$$m = \frac{\text{perubahan } y}{\text{perubahan } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Gradien menyatakan berapa satuan garis itu **naik** (atau turun, jika negatif) untuk setiap **satu langkah ke kanan**.

Bahasa sederhana · Gampangnya, gradien itu seperti anak tangga. Kalau setiap kali maju 1 langkah kamu harus naik 2 anak tangga, gradiennya 2. Kalau setiap maju 1 langkah kamu justru turun, gradiennya negatif. Jalan datar? Gradiennya 0.



Bacalah garis dari kiri ke kanan, seperti membaca buku. Ancil yang berjalan ke kanan bisa mendaki, menurun, atau berjalan datar. Di garis tegak ia tidak bisa melangkah ke kanan sama sekali!

TRIK KAK LINTANG

"**Naik per maju**." Selalu tanyakan: kalau aku maju satu langkah ke kanan, aku naik berapa? Itulah gradiennya. Huruf y (yang tegak) ditulis di atas garis pecahan, huruf x (yang mendatar) di bawahnya, persis seperti tinggi tangga di atas dan lantai di bawah.

SIFAT GRADIEN

Pada sebuah garis lurus, gradien yang dihitung dari pasangan titik **mana pun** selalu sama. Itulah sebabnya kita boleh berbicara tentang "gradien garis", bukan sekadar "gradien dua titik".

▾ **Mengapa selalu sama? (bukti dengan segitiga sebangun)**

Ambil dua "segitiga gradien" pada garis yang sama: satu kecil dengan sisi $\Delta x_1, \Delta y_1$ dan satu besar dengan sisi $\Delta x_2, \Delta y_2$. Sisi mendatar keduanya sejajar sumbu-x, sisi tegak keduanya sejajar sumbu-y, dan sisi miringnya terletak pada garis yang sama. Jadi sudut-sudut kedua segitiga sama besar, sehingga keduanya **sebangun** (Bab 22). Pada segitiga sebangun, perbandingan sisi yang bersesuaian sama:

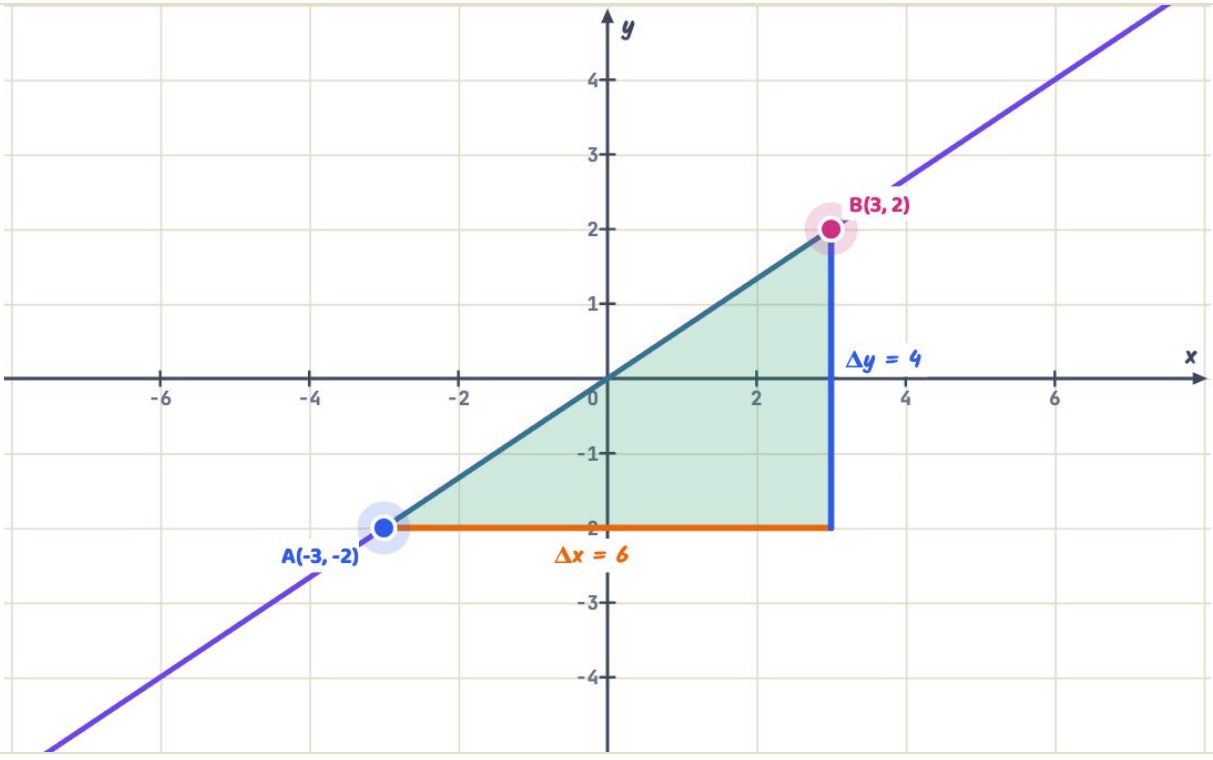
$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}.$$

GRAFIK HIDUP **Gradien dari dua titik**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - (-2)}{3 - (-3)} = \frac{4}{6} \approx 0{,}67$$



↗ garis naik: gradien positif

Δx	Δy	Gradien m
6	4	0,667

Seret titik A dan B. Coba tukar peran keduanya (A di kanan, B di kiri): apakah gradiennya berubah? Lalu buat garis tegak dengan menaruh A dan B tepat segaris tegak. Apa yang terjadi pada Δx?

RUMUS HIDUP

Gradien dari dua titik

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien adalah perubahan y dibagi perubahan x: berapa satuan garis naik untuk setiap satu langkah ke kanan.

x_1 x titik A · y_1 y titik A · x_2 x titik B · y_2 y titik B

m Gradien `satuan y per satuan x`



↗ garis naik · ✨ gradien bulat

Dari A(**1**, **2**) ke B(**4**, **8**): naik **6** dan maju **3**, jadi m = **2**. Jika muncul '—', berarti $x_1 = x_2$: garisnya tegak dan gradiennya tak terdefinisi.

Cek satuan: gradien selalu bersatuan "satuan y per satuan x": rupiah per km, GB per hari, atau °C per 100 m. Kalau kedua sumbu bersatuan sama (misalnya meter), satuannya saling mencoret.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-GRADIEN-DUA-TITIK

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Pakai urutan titik yang sama di atas dan di bawah garis pecahan. Kalau di atas kamu menulis $y_2 - y_1$, di bawah harus $x_2 - x_1$, bukan $x_1 - x_2$. Tukar urutan di satu tempat saja, tandanya terbalik dan garis naik berubah menjadi "turun".

CONTOH **Gradien dari dua titik**

Tentukan gradien garis yang melalui $A(-1, 4)$ dan $B(3, -2)$. Apa artinya?

1. $\Delta y = y_2 - y_1 = -2 - 4 = -6.$
2. $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - (-1) = 4.$
3. $m = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}.$

$m = -\frac{3}{2}$: garis turun 3 satuan setiap maju 2 satuan ke kanan. Cek arah: dari A (kiri, tinggi) ke B (kanan, rendah) memang turun.

ADU CEPAT **Gradien kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

m = (y₂ – y₁) : (x₂ – x₁). Jawaban pecahan boleh ditulis seperti 3/4 atau -2/3.

Di jalan raya, gradien biasanya ditulis dalam **persen**: kemiringan $= m \times 100\%$. Jalan yang naik 8 m untuk setiap 100 m jarak mendatar punya gradien $0{,}08$, atau tanjakan 8%.

Tebak Dulu!

Sebuah rambu di jalan pegunungan bertuliskan "tanjakan 10%". Artinya...

- sudut tanjakannya 10°.
- jalan naik 10 m untuk setiap 100 m jarak mendatar.
- jalan naik 10 m untuk setiap 10 m jarak mendatar.
- jalannya 10% lebih panjang daripada jalan datar.

Jawabannya: naik 10 m tiap 100 m mendatar. Gradiennya $\frac{10}{100} = 0{,}1$. Sudutnya hanya sekitar 5,7°, bukan 10°. Pilihan ketiga adalah gradien 1 atau tanjakan 100%: sudutnya 45°, curam sekali, hampir seperti dinding tangga!

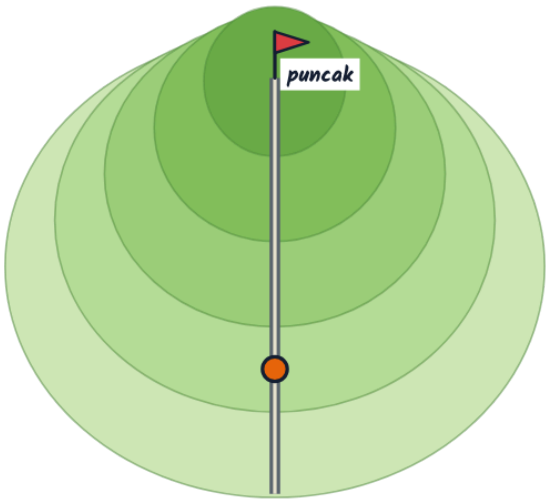
Jalan di pegunungan tidak bisa dibuat lurus menuju puncak, karena gradiennya akan terlalu besar. Di **Kelok 44**, Kabupaten Agam, Sumatera Barat, jalan dari tepi Danau Maninjau mendaki bukit lewat 44 tikungan tajam. Mengapa harus berkelok sebanyak itu? Cobalah sendiri.

LAB MINI **Mengapa Kelok 44 berkelok-kelok?**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

tampak atas

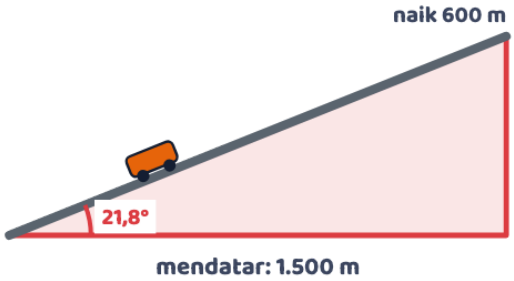
0 kelokan



jalan dibentangkan (tampak samping)

gradien = 600 ÷ 1.500 = 0,4

kemiringan 40% → sangat curam 😱



✋ *geser slider, lalu ▶*

panjang jalan (mendatar)	gradien = 600 ÷ panjang	kemiringan	sudut tanjakan
1.500 m	0,4	40 %	21,8 °

Kategori (lab ini): **sangat curam** ☠️

Dalam lab ini, sebuah bukit setinggi 600 m didaki jalan yang setiap kelokannya menambah panjang jalan sekitar 250 m. Tambahkan kelokan dan tekan ▶ **Jalankan**. Berapa kelokan paling sedikit agar kemiringannya tidak lebih dari 10%?

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 1550 SM, juru tulis Mesir bernama Ahmes menyalin *Papirus Rhind*, yang memuat soal-soal tentang kemiringan sisi piramida. Orang Mesir mengukurnya dengan **seked**: berapa telapak tangan sisi piramida bergeser *mendatar* untuk setiap kenaikan 1 hasta (7 telapak tangan). Piramida Agung Giza punya seked sekitar $5\frac{1}{2}$ telapak tangan. Jadi gradiennya kira-kira $\frac{7}{5{,}5} \approx 1{,}27$, sudutnya sekitar 52°. Perhatikan: seked adalah **kebalikan** gradien kita, yaitu "maju per naik", bukan "naik per maju".

9.4 Persamaan garis $y = mx + c$

Sebuah garis lurus cukup dikenali dengan dua informasi: **di mana ia memotong sumbu-y** dan **seberapa curam** ia. Dua angka itu tertulis jelas dalam persamaannya.

BENTUK GRADIEN–TITIK POTONG

Garis dengan gradien m yang memotong sumbu-y di titik $(0, c)$ mempunyai persamaan

$$y = mx + c.$$

Garis dengan gradien m yang melalui titik (x_1, y_1) mempunyai persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Dari mana bentuk $y - y_1 = m(x - x_1)$?

Ambil sembarang titik (x, y) pada garis, selain (x_1, y_1). Gradien yang dihitung dari kedua titik itu harus sama dengan m (sifat gradien di 9.3), jadi $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$. Kalikan kedua ruas dengan $x - x_1$: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Jika $(x_1, y_1) = (0, c)$, bentuk ini menjadi $y - c = mx$, yaitu $y = mx + c$.

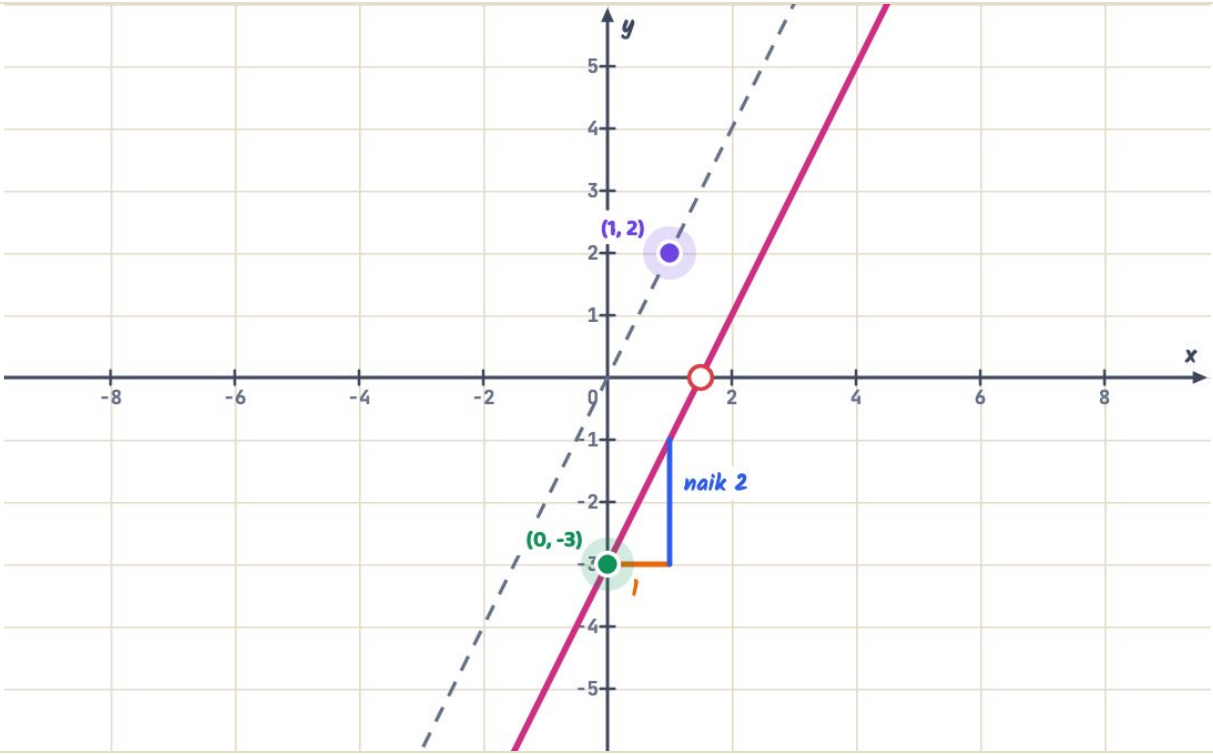
GRAFIK HIDUP **y = mx + c: dua tombol ajaib**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

$$y = mx + c$$

$$y = 2x - 3$$

m memutar garis, c menggeser garis naik-turun. Garis putus-putus y = mx selalu lewat titik asal.

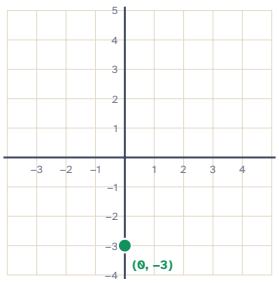


m > 0: garis naik

Gradien m	Potong sumbu-y	Potong sumbu-x (x =)
2	-3	1,5

Seret titik hijau $(0, c)$ untuk menggeser garis, dan titik ungu $(1, m)$ di garis putus-putus untuk memutarnya. Tekan ▶ **Jalankan** agar m berubah sendiri. Apa yang *tidak* pernah berubah saat hanya m yang bergerak?

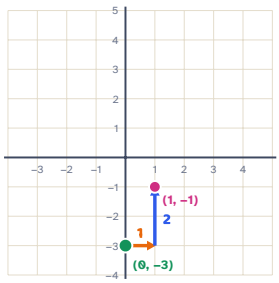
Kalau diberi persamaan, kamu bisa menggambar garisnya tanpa membuat tabel. Mulai dari c, lalu melangkah dengan m:



y = 2x − 3

Mulai dari c = −3.
Tandai titik (0, −3)
di sumbu-y.

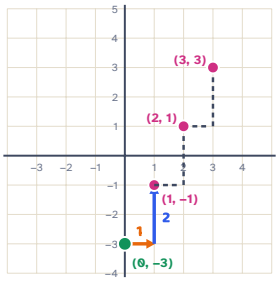
Langkah 1. Angka $c = -3$ adalah titik potong sumbu-y. Tandai $(0, -3)$: di sinilah garis memotong sumbu tegak.



y = 2x − 3

Gradien 2 = 2/1:
maju 1 ke kanan,
lalu naik 2.

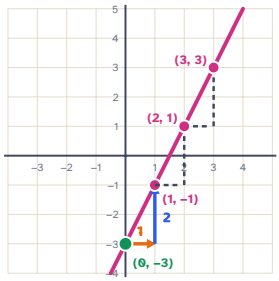
Langkah 2. Gradien $m = 2 = \frac{2}{1}$ berarti "maju 1, naik 2". Dari $(0, -3)$, maju 1 ke kanan dan naik 2: sampai di $(1, -1)$.



y = 2x − 3

Ulangi langkah yang sama.
Semua titik yang didapat
pasti segaris!

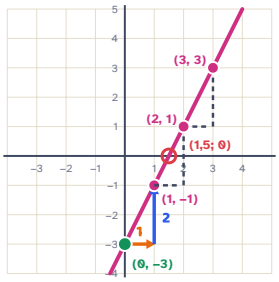
Langkah 3. Ulangi langkah yang sama: $(2, 1)$, lalu $(3, 3)$. Karena lajunya tetap, semua titik itu segaris.



y = 2x − 3

Hubungkan dengan penggaris.
Itulah grafik y = 2x − 3,
tanpa membuat tabel.

Langkah 4. Tarik garis lurus melalui titik-titik itu. Selesai: grafik $y = 2x - 3$.



y = 2x − 3

Bonus: potong sumbu-x saat y = 0
2x − 3 = 0
x = 1,5

Langkah 5. Garis memotong sumbu-x ketika $y = 0$: $2x - 3 = 0$, jadi $x = 1{,}5$. Titik potongnya $(1{,}5;\ 0)$.

Bahasa sederhana · Kalau rumusnya terasa ramai, pegang dua hal saja: c **adalah titik mulai** di sumbu-y, dan m **adalah cara melangkah**. Mulai, lalu melangkah. Mulai, lalu melangkah.

Bentuk	Persamaan	Dipakai jika diketahui…	Contoh (garis yang sama)
Gradien–titik potong	$y = mx + c$	gradien dan titik potong sumbu-y	$y = 2x - 3$
Titik–gradien	$y - y_1 = m(x - x_1)$	satu titik dan gradien	$y - 1 = 2(x - 2)$
Dua titik	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	dua titik	$\frac{y - 1}{9 - 1} = \frac{x - 2}{6 - 2}$
Umum	$ax + by + c = 0$, gradien $-\frac{a}{b}$	ingin bentuk rapi tanpa pecahan	$2x - y - 3 = 0$

KERJAKAN BERSAMA

Garis melalui dua titik

Tentukan persamaan garis yang melalui $P(2, 1)$ dan $Q(6, 9)$.

1. Gradien: $m = \dfrac{9-1}{6-2} = \dfrac{8}{4} = 2$. Jadi $y = 2x + c$.
2. Masukkan titik $P(2, 1)$: $1 = 2 \times 2 + c$, sehingga $c = 1 - 4 = -3$.
3. Persamaannya $y = 2x - 3$. Cek dengan $Q(6, 9)$: $2 \times 6 - 3 = 9$. ✓

$y = 2x - 3$, garis yang sama dengan animasi di atas. Selalu cek dengan titik kedua: itu cara termurah menangkap salah hitung.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Gradien adalah angka di depan x **setelah** persamaan diubah ke bentuk $y = mx + c$. Pada $2y = 6x + 4$, gradiennya bukan 6: bagi dulu dengan 2 sehingga $y = 3x + 2$, jadi $m = 3$. Pada $y = 5 - 3x$, gradiennya -3, bukan 5.

✏️ **TRIK KAK LINTANG: METODE "TUTUP SATU"**

Untuk menggambar $3x + 2y = 12$ dengan cepat, **tutup** suku $2y$ dengan jarimu (artinya $y = 0$): sisa $3x = 12$, jadi $x = 4$. Lalu tutup suku $3x$ (artinya $x = 0$): sisa $2y = 12$, jadi $y = 6$. Hubungkan $(4, 0)$ dan $(0, 6)$. Selesai dalam sepuluh detik!

KERJAKAN BERSAMA

Membaca persamaan bentuk umum

Tentukan gradien, titik potong sumbu-y, dan titik potong sumbu-x dari garis $3x + 2y = 12$.

1. Ubah ke bentuk $y = mx + c$: $2y = -3x + 12$, lalu $y = -\frac{3}{2}x + 6$.
2. Gradien $m = -\frac{3}{2}$, titik potong sumbu-y $(0, 6)$.
3. Potong sumbu-x: $y = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$, titiknya $(4, 0)$.

$m = -\frac{3}{2}$, memotong sumbu-y di $(0, 6)$ dan sumbu-x di $(4, 0)$. Cek gradien dari kedua titik potong: $\dfrac{0-6}{4-0} = -\frac{3}{2}$. ✓

9.5 Garis sejajar dan garis tegak lurus

Rel kereta api tidak pernah bertemu: kedua relnya **sejajar**. Pojok buku membentuk sudut siku-siku: kedua sisinya **tegak lurus**. Gradien bisa mendeteksi kedua hubungan itu tanpa busur derajat.

Tebak Dulu!

Garis $y = 2x + 1$ diputar 90° terhadap titik $(0, 1)$. Berapa gradien garis yang baru?

- -2
- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{1}{2}$
- tetap 2, karena memutar tidak mengubah kecuraman.

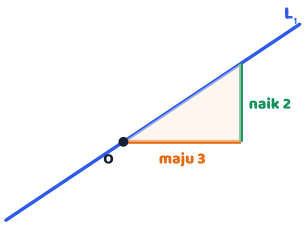
Jawabannya: $-\frac{1}{2}$. Garis lama: maju 1, naik 2. Setelah diputar 90° berlawanan arah jarum jam, "maju 1" menjadi "naik 1" dan "naik 2" menjadi "mundur 2". Gradien baru $= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$. Perhatikan: $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Kebetulan? Sama sekali bukan. Lihat animasinya di bawah!

SIFAT GARIS SEJAJAR DAN TEGAK LURUS

Untuk dua garis yang tidak tegak, dengan gradien m_1 dan m_2:

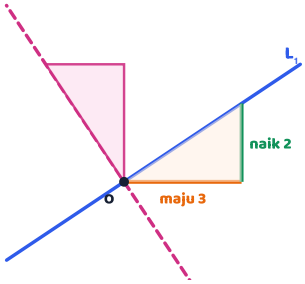
- kedua garis **sejajar** jika dan hanya jika $m_1 = m_2$;
- kedua garis **tegak lurus** jika dan hanya jika $m_1 \times m_2 = -1$, atau $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$.

Garis mendatar ($m = 0$) selalu tegak lurus terhadap garis tegak (gradien tak terdefinisi).



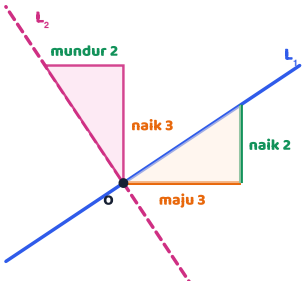
Garis L_1: maju 3, naik 2.
Gradiennya $m_1 = 2/3$.

Langkah 1. Garis L_1 punya segitiga gradien "maju 3, naik 2", jadi $m_1 = \frac{2}{3}$.



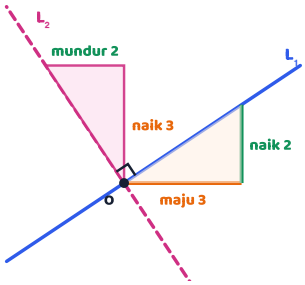
Putar 90° berlawanan arah jarum jam di O.
Segitiganya ikut berputar.

Langkah 2. Putar salinan garis dan segitiganya 90° berlawanan arah jarum jam terhadap titik O. Hasilnya garis L_2 yang tegak lurus L_1.



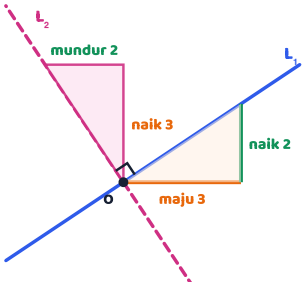
"maju 3" menjadi **naik 3**,
"naik 2" menjadi **mundur 2**.

Langkah 3. Setelah diputar, sisi mendatar "maju 3" berdiri tegak menjadi "naik 3", dan sisi tegak "naik 2" rebah ke kiri menjadi "mundur 2".



m_2 = 3 / (−2) = −3/2
$m_1 \times m_2$ = (2/3) × (−3/2)
= −1

Langkah 4. Gradien L_2 adalah $m_2 = \dfrac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$. Kalikan: $m_1 \times m_2 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$.



Segitiga apa pun: maju a, naik b
diputar menjadi: naik a, mundur b
$m_1 \times m_2$ = (b/a) × (a/−b)
= −1

Langkah 5. Ini berlaku untuk segitiga gradien apa pun: "maju a, naik b" berubah menjadi "naik a, mundur b", sehingga $m_1 m_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{-b} = -1$. Terbukti tanpa busur derajat!

Bukti dengan Teorema Pythagoras (untuk yang suka aljabar)

Geser kedua garis agar melalui titik asal: $y = m_1 x$ dan $y = m_2 x$. Gradien tidak berubah saat digeser. Titik $P(1, m_1)$ ada di garis pertama dan $Q(1, m_2)$ di garis kedua. Garis-garis itu tegak lurus jika dan hanya jika sudut POQ siku-siku, yaitu (Bab 18) jika dan hanya jika $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$:

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2 \iff 2 = -2m_1 m_2 \iff m_1 m_2 = -1.$$

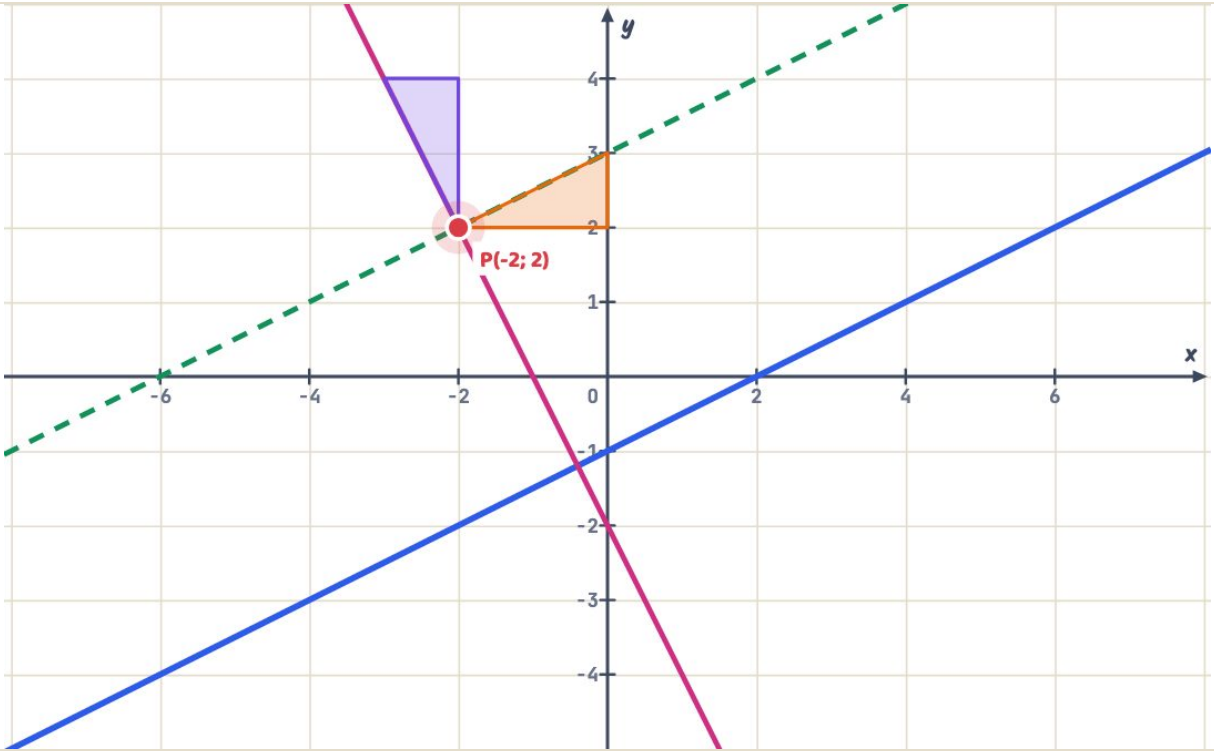
GRAFIK HIDUP

Sejajar dan tegak lurus lewat titik P

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

$$m_2 = m_1 \quad \text{(sejajar)} \qquad m_1 \times m_3 = -1 \quad \text{(tegak lurus)}$$

$$m_1 = 0{,}5 \;\Rightarrow\; m_3 = -2, \quad m_1 \times m_3 = -1$$



✓ m₁ × m₃ = −1: tegak lurus

m₁ (biru)	m₂ (hijau, sejajar)	m₃ (merah muda, tegak lurus)	m₁ × m₃
0,5	0,5	-2	-1

Seret titik P. Garis hijau (sejajar) dan garis merah muda (tegak lurus) selalu ikut lewat P. Segitiga oranye adalah segitiga gradien "maju 2"; segitiga ungu adalah segitiga yang sama setelah diputar 90°. Ubah m_1 dan amati hasil kali gradiennya.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Gradien garis tegak lurus adalah lawan dari kebalikannya, bukan sekadar lawannya. Untuk $m = 2$, gradien tegak lurusnya $-\frac{1}{2}$, bukan -2. Ingat dua gerakan: **balik** pecahannya ($2 = \frac{2}{1} \to \frac{1}{2}$), lalu **ganti tandanya** ($\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}$).

KERJAKAN BERSAMA

Garis tegak lurus melalui sebuah titik

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $y = \frac{2}{3}x + 1$ dan melalui titik $(4, -1)$.

1. Gradien garis yang diketahui $m_1 = \frac{2}{3}$. Balik dan ganti tanda: $m_2 = -\frac{3}{2}$.
2. Bentuk titik-gradien: $y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 4)$, jadi $y + 1 = -\frac{3}{2}x + 6$.
3. $y = -\frac{3}{2}x + 5$. Cek titik $(4, -1)$: $-\frac{3}{2} \times 4 + 5 = -6 + 5 = -1$. ✓

$y = -\frac{3}{2}x + 5$, atau dalam bentuk umum $3x + 2y = 10$. Cek gradien: $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$. ✓

MITOS

"Garis tegak punya gradien 0, karena ia tidak miring."

FAKTA

Yang gradiennya 0 adalah garis **mendatar**. Pada garis tegak $\Delta x = 0$, sehingga $\frac{\Delta y}{0}$ tidak terdefinisi. Garis tegak justru "paling curam" dari semuanya.

MITOS

"Kalau jarak dua kali lipat, tarif ojek pasti dua kali lipat."

FAKTA

Itu hanya benar jika garisnya lewat titik $O(0, 0)$, artinya tanpa biaya awal. Dengan biaya awal $c > 0$, tarif naik kurang dari dua kali lipat.

MITOS

"Huruf m untuk gradien berasal dari kata Prancis *monter* (mendaki)."

FAKTA

Cerita ini populer, tetapi tidak ada bukti sejarah yang kuat. Asal-usulnya tidak diketahui pasti. Di beberapa negara, gradien malah ditulis k atau a, misalnya $y = kx + b$.

9.6 Model linear di dunia nyata

Banyak hal di sekitarmu berubah dengan **laju tetap**: tarif per km, kuota yang terpakai per hari, suhu yang turun setiap kali kita mendaki. Setiap kali ada laju tetap, ada garis lurus yang menunggu digambar. Dalam **model linear** $y = mx + c$:

- c adalah **nilai awal**, yaitu nilai y ketika $x = 0$ (biaya awal, kuota awal bulan, suhu di tepi pantai);
- m adalah **laju perubahan**: berapa y berubah setiap kali x bertambah 1 (rupiah per km, GB per hari, °C per meter).

RUMUS HIDUP

Tarif ojek online sebagai fungsi linear

$$T = c + m\,x$$

Tarif = biaya awal + tarif per km × jarak. Biaya awal adalah titik potong sumbu-y, tarif per km adalah gradiennya.

- c Biaya awal `rupiah`
- m Tarif per km `rupiah/km`
- x Jarak `km`
- T Tarif total `rupiah`



Rp**8.000** + Rp**3.500** × **4** km = Rp**22.000**. Jika jaraknya dilipatduakan menjadi **8** km, tarifnya Rp**36.000**: **kurang dari dua kali lipat, karena biaya awal hanya dibayar sekali**.

Cek satuan: rupiah + (rupiah/km) × km = rupiah + rupiah. Satuan km saling mencoret, jadi hasilnya rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TARIF-OJOL

COBA SENDIRI **Menyusun model dari dua perjalanan**

Dimas naik ojek online dua kali dengan aturan tarif yang sama: 3 km bertarif Rp17.500 dan 8 km bertarif Rp35.000. (a) Susun model tarifnya. (b) Berapa tarif untuk 12 km? (c) Dengan uang Rp50.000, berapa km paling jauh yang bisa ditempuh?

1. Dua perjalanan = dua titik: $(3;\ 17.500)$ dan $(8;\ 35.000)$. Gradien $m = \dfrac{35.000 - 17.500}{8 - 3} = \dfrac{17.500}{5} = 3.500$ rupiah per km.

2. $T = 3.500x + c$. Masukkan $(3;\ 17.500)$: $17.500 = 10.500 + c$, jadi $c = 7.000$. Model: $T = 3.500x + 7.000$.

3. (b) $T(12) = 3.500 \times 12 + 7.000 = 42.000 + 7.000 = 49.000$.

4. (c) $3.500x + 7.000 \le 50.000 \Rightarrow 3.500x \le 43.000 \Rightarrow x \le 12{,}28\ldots$

Model $T = 3.500x + 7.000$. Tarif 12 km Rp49.000, dan Rp50.000 cukup untuk sekitar 12,3 km. Maknanya: biaya awal Rp7.000, dan setiap km menambah Rp3.500.

MATEMATIKA NUSANTARA: RUMUS BRAAK

Mengapa udara di Dieng atau Puncak terasa dingin, padahal masih di Indonesia yang tropis? Ahli meteorologi Belanda **C. Braak**, yang meneliti iklim Hindia Belanda pada awal abad ke-20, merumuskan model linear yang hingga kini diajarkan di pelajaran geografi: suhu rata-rata di permukaan laut Indonesia sekitar 26,3 °C, dan **setiap naik 100 m, suhu turun sekitar 0,6 °C**. Dengan model ini, puncak Jaya di Papua (±4.884 m) diperkirakan bersuhu sekitar −3 °C. Itulah sebabnya di sana pernah ada salju abadi, tepat di dekat garis khatulistiwa!

RUMUS HIDUP

Rumus Braak: suhu dan ketinggian

$$T = 26{,}3 - 0{,}6 \times \frac{h}{100}$$

Setiap naik 100 meter, suhu udara rata-rata turun sekitar 0,6 °C. Gradiennya −0,6 °C per 100 m, atau −0,006 °C per meter.

h Ketinggian m

T Perkiraan suhu rata-rata °C

PERKIRAAN SUHU RATA-RATA

21,7

°C

kira-kira setinggi kota Bandung

Di ketinggian **770** m, suhu rata-rata diperkirakan **21,7** °C, yaitu **4,62** °C lebih dingin daripada di tepi pantai (26,3 °C).

Cek satuan: 0,6 °C per 100 m dikali ketinggian dalam ratusan meter (h ÷ 100) menghasilkan °C, jadi T bersatuan °C.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUHU-BRAAK

Data nyata jarang tepat segaris. Ayu mengukur tinggi kecambah kacang hijau setiap hari selama seminggu. Titik-titiknya *hampir* segaris. Garis mana yang paling mewakili data itu?

GRAFIK HIDUP

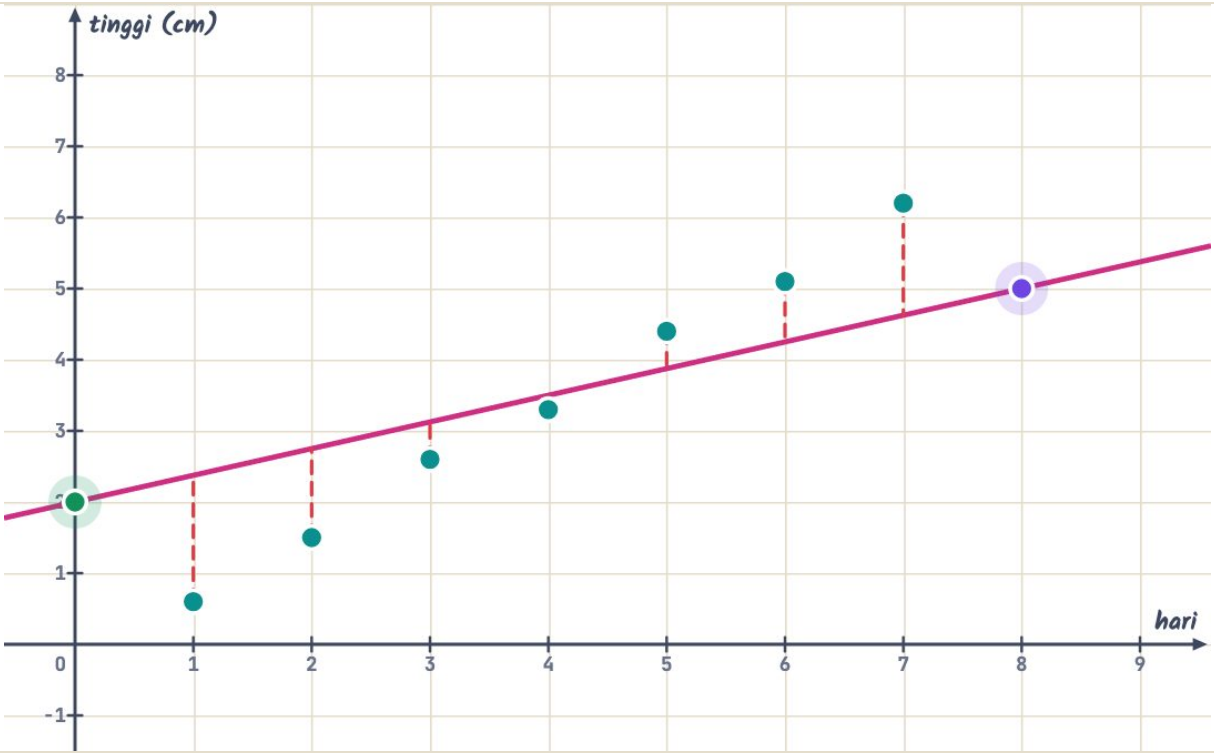
Garis kecocokan terbaik: kecambah kacang hijau

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

$$y = mx + c$$

$$y = 0{,}38x + 2$$

Seret kedua ujung penggaris. Garis merah putus-putus adalah galat: jarak tegak setiap titik data ke garismu.



Gradien m (cm/hari)	Jumlah kuadrat galat	Prediksi hari ke-10
0,375	8,508	5,8 cm

Seret titik hijau (hari ke-0) dan titik ungu (hari ke-8) sampai garis merah putus-putus sependek mungkin. Tantangan: buat **jumlah kuadrat galat** lebih kecil dari 0,06. Berapa gradien yang kamu dapat, dan apa artinya bagi kecambah?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Model linear hanya berlaku di rentang yang masuk akal. Garis kecambah terbaik memotong sumbu-y di sekitar $-0{,}3$ cm, padahal tinggi tidak mungkin negatif: sebelum hari pertama, biji baru mulai berkecambah. Kecambah juga tidak akan tumbuh 0,9 cm per hari selamanya. Memakai model jauh di luar rentang data (**ekstrapolasi**) harus disertai akal sehat.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

GARIS REGRESI: KUADRAT TERKECIL

Kalkulator, spreadsheet, dan aplikasi statistik bisa mencari garis kecocokan terbaik secara otomatis dengan **metode kuadrat terkecil**: garis yang membuat jumlah kuadrat galat sekecil mungkin. Untuk data (x_i, y_i) dengan rata-rata $\bar{x}$ dan $\bar{y}$,

$$m = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \qquad c = \bar{y} - m\bar{x}.$$

Jadi garis regresi selalu melewati titik rata-rata $(\bar{x}, \bar{y})$. Untuk data kecambah: $\bar{x} = 4$, $\bar{y} \approx 3{,}386$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 28$, dan $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 25{,}8$. Hasilnya $m = \frac{25{,}8}{28} \approx 0{,}921$ cm per hari dan $c \approx -0{,}30$ cm. Di IB Applications & Interpretation, kamu juga akan mengukur seberapa "lurus" data dengan koefisien korelasi r.

Tarif ojek & taksi online

Biaya awal adalah titik potong sumbu-y, tarif per km adalah gradien. Dua perjalanan sudah cukup untuk menebak aturannya.

Kuota internet

Kuota yang terpakai dengan laju tetap membentuk garis menurun. Titik potong sumbu-x adalah hari ketika kuota habis.

Celsius ke Fahrenheit

$F = 1{,}8C + 32$ adalah fungsi linear dengan gradien 1,8 dan titik potong 32.

Grafik jarak–waktu Whoosh

Saat kereta cepat Jakarta–Bandung melaju dengan kecepatan tetap, grafik jarak terhadap waktunya lurus. Gradiennya adalah kecepatan, hingga 350 km/jam.

Ram kursi roda

Pedoman aksesibilitas di banyak negara menganjurkan ram selandai sekitar 1 : 12 (naik 1 cm tiap 12 cm mendatar) agar aman didorong.

Sawah terasering

Petani di Bali dan Jawa memotong lereng curam menjadi anak tangga datar. Lereng tetap punya gradien, tetapi air irigasi bisa tertahan di setiap petak.

LANJUT · OLIMPIADE

TITIK KISI PADA GARIS

Titik yang kedua koordinatnya bilangan bulat disebut **titik kisi**. Berapa banyak titik kisi pada ruas garis dari $(0,0)$ ke (a,b), dengan a, b bilangan asli? Jawabannya cantik: $\gcd(a,b)+1$. Misalnya dari $(0,0)$ ke $(6,4)$: $\gcd(6,4)=2$, jadi ada 3 titik kisi, yaitu $(0,0)$, $(3,2)$, dan $(6,4)$. Langkah terkecil di sepanjang garis adalah $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ dengan $d=\gcd(a,b)$.

Lebih mengejutkan lagi: garis $y=\sqrt{2}\,x$ **tidak pernah** melewati titik kisi mana pun selain O. Kalau ia melewati (p,q) dengan $p \neq 0$, maka $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ adalah pecahan, padahal $\sqrt{2}$ irasional. Garis itu menyelinap di antara jutaan titik kisi tanpa menyentuh satu pun!

Cek Cepat

Gradien garis yang melalui $(-2,3)$ dan $(2,-5)$ adalah...

- 2
- -2
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$

Garis manakah yang tegak lurus terhadap $y=3x+1$?

- $y=3x-2$
- $y=-3x+1$
- $y=\frac{1}{3}x$
- $y=-\frac{1}{3}x+5$

Kuota internet 24 GB dipakai 1,5 GB setiap hari. Model sisa kuota K setelah t hari dan hari habisnya adalah...

- $K = 24 - 1{,}5t$, habis pada hari ke-16
- $K = 1{,}5t - 24$, habis pada hari ke-16
- $K = 24 - 1{,}5t$, habis pada hari ke-36
- $K = 24t - 1{,}5$, habis pada hari ke-24

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: menara gelas plastik

Bahan: 8–10 gelas plastik yang sama ukurannya (misalnya gelas air mineral), penggaris atau meteran, kertas berpetak, pensil.

1. Ukur tinggi satu gelas. Catat.
2. Tumpuk 2 gelas (gelas kedua masuk ke dalam gelas pertama), lalu ukur tinggi tumpukannya. Lanjutkan sampai 6 gelas.
3. Buat tabel (banyak gelas, tinggi tumpukan) dan gambar titik-titiknya di kertas berpetak.
4. Apakah titik-titiknya hampir segaris? Tarik garis yang paling mewakili, lalu hitung gradiennya: berapa cm tambahan tinggi untuk setiap gelas baru?
5. Susun model $T = mn + c$. Apa arti m dan c pada gelasmu? (Petunjuk: lihat bibir gelas.)

Pertanyaan: Menurut modelmu, berapa gelas yang harus ditumpuk agar menara setinggi badanmu? Ujilah untuk 8 atau 10 gelas: apakah ramalan modelmu tepat?

RINGKASAN KILAT

Bab 9 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menempatkan dan membaca titik di **bidang Kartesius** serta menyebutkan kuadrannya
- membedakan **relasi** dan **fungsi**, lalu memakai notasi $f(x)$
- menghitung **gradien** dari dua titik, dari grafik, dan dari persamaan
- menyusun dan menggambar **persamaan garis** $y = mx + c$
- mengenali **garis sejajar** dan **garis tegak lurus**, serta membuat **model linear** dari situasi nyata

Istilah kunci

Bidang Kartesius · sumbu-x · sumbu-y · titik asal · pasangan berurutan · kuadran

fungsi | relasi | daerah asal | daerah kawan | daerah hasil | Fungsi linear | gradien | sejajar | tegak lurus | model linear

Rumus penting

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien dari dua titik. Gradien adalah perubahan y dibagi perubahan x: berapa satuan garis naik untuk setiap satu langkah ke kanan.

$$T = c + m\,x$$

Tarif ojek online sebagai fungsi linear. Tarif = biaya awal + tarif per km × jarak. Biaya awal adalah titik potong sumbu-y, tarif per km adalah gradiennya.

$$T = 26{,}3 - 0{,}6 \times \frac{h}{100}$$

Rumus Braak: suhu dan ketinggian. Setiap naik 100 meter, suhu udara rata-rata turun sekitar 0,6 °C. Gradiennya −0,6 °C per 100 m, atau −0,006 °C per meter.

Jangan sampai terjebak

- Urutan koordinat tidak boleh ditukar: $(2, 5)$ dan $(5, 2)$ adalah dua titik yang berbeda.
- Pakai urutan titik yang sama di atas dan di bawah garis pecahan.
- Gradien adalah angka di depan x setelah persamaan diubah ke bentuk $y = mx + c$.

Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=9

Teka-teki untuk Bab 10

Ojek "Kilat" memasang tarif Rp8.000 ditambah Rp2.500 per km. Ojek "Hemat" memasang tarif Rp5.000 ditambah Rp3.000 per km. Untuk perjalanan dekat, Hemat lebih murah. Untuk perjalanan jauh, Kilat yang menang. Pada jarak berapa km keduanya **sama mahalnya**, dan berapa tarifnya saat itu?

▼ Intip petunjuk

Gambar kedua garis $T = 8.000 + 2.500x$ dan $T = 5.000 + 3.000x$ pada bidang Kartesius yang sama. Kedua garis punya gradien berbeda, jadi pasti berpotongan di satu titik. Titik potong itulah jawabannya! Di Bab 10 kamu akan belajar menemukan titik potong dua garis dengan cepat, bahkan tanpa menggambar: **sistem persamaan linear**.

BAB 10 · ALJABAR & FUNGSI

10 Sistem Persamaan Linear: Detektif Dua Misteri

Struk belanjamu terbang ditiup angin, tetapi kamu masih ingat dua pesanan. Bisakah harga setiap menu ditebak dengan pasti? Dengan dua petunjuk yang tepat, dua misteri bisa dibongkar sekaligus.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan arti **penyelesaian** sistem persamaan: pasangan nilai yang memenuhi semua persamaan sekaligus, yaitu **titik potong** garis-garisnya;
- menyelesaikan SPLDV dengan metode **grafik**, **substitusi**, **eliminasi**, dan **aturan Cramer**;
- menentukan apakah sebuah sistem punya **satu**, **tak hingga**, atau **tidak punya** penyelesaian;
- menyelesaikan **SPLTV** (tiga variabel) dengan eliminasi bertahap;
- mengubah soal cerita (harga, tiket, campuran, ayam dan kambing, untung bazar) menjadi sistem persamaan dan menafsirkan jawabannya.

STRUK YANG TERBANG

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Harga 1 pecel lele ditambah 1 es teh adalah Rp19.000. Dari informasi ini saja, bisakah kamu tahu harga es teh?

- Bisa: pasti Rp9.500, karena 19.000 dibagi dua.
- Bisa: pasti Rp4.000, karena es teh biasanya murah.
- Belum bisa: banyak pasangan harga yang cocok, jadi butuh petunjuk lain.
- Tidak akan pernah bisa, berapa pun petunjuk yang kita punya.

Jawabannya: belum bisa. Pasangan 15 + 4, 14 + 5, 10 + 9, bahkan 18,5 + 0,5 semuanya berjumlah 19 (ribu rupiah). Satu persamaan dengan dua variabel punya *tak hingga* banyak penyelesaian. Kita butuh satu petunjuk lagi yang "berbeda arah". Itulah inti bab ini!

10.1 Dua persamaan, dua misteri

Kembali ke warung tenda. Misalkan x = harga satu porsi pecel lele dan y = harga satu gelas es teh, keduanya dalam **ribu rupiah**. Pesanan Dimas menjadi persamaan

$$2x + 3y = 42.$$

Persamaan ini punya banyak penyelesaian. Kalau pecel lele 18 ribu dan es teh 2 ribu: $2 \cdot 18 + 3 \cdot 2 = 42$. Cocok! Kalau pecel lele 9 ribu dan es teh 8 ribu: $18 + 24 = 42$. Cocok juga! Satu persamaan seperti saksi yang hanya ingat sebagian cerita.

Petunjuk kedua datang dari Ayu: $3x + 2y = 53$. Mari kita uji beberapa harga pecel lele dan lihat harga es teh yang cocok untuk masing-masing pesanan.

Harga pecel lele x	**y yang cocok dengan pesanan Dimas** $y = \frac{42-2x}{3}$	**y yang cocok dengan pesanan Ayu** $y = \frac{53-3x}{2}$	**Sama?**
3	12	22	✕ selisih 10
6	10	17,5	✕ selisih 7,5
9	8	13	✕ selisih 5
12	6	8,5	✕ selisih 2,5
15	**4**	**4**	✓ cocok!
18	2	−0,5	✕ harga negatif?!

Perhatikan selisihnya mengecil 2,5 setiap baris, lalu tepat nol di $x = 15$. Hanya satu pasangan yang lolos kedua tes: **pecel lele Rp15.000 dan es teh Rp4.000**. Dua persamaan yang harus dipenuhi bersama seperti ini disebut **sistem persamaan**.

DEFINISI

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah dua persamaan linear yang memuat dua variabel yang sama, misalnya

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

dengan a, b, c, d, e, f bilangan real (a dan b tidak keduanya nol, begitu pula d dan e). **Penyelesaian** SPLDV adalah pasangan berurutan (x, y) yang membuat **kedua** persamaan benar sekaligus. Kumpulan semua penyelesaiannya disebut **himpunan penyelesaian** (HP).

Bahasa sederhana · Gampangnya: satu persamaan = satu petunjuk. Dua misteri butuh dua petunjuk. Jawabannya harus cocok dengan kedua petunjuk sekaligus, seperti satu kunci yang harus pas di dua gembok.

MENGAPA DISEBUT "LINEAR"?

Grafik setiap persamaannya berupa garis lurus (Bab 9). Ciri aljabarnya: variabel hanya berpangkat satu dan tidak saling dikalikan. Jadi $2x + 3y = 42$ linear, sedangkan $x^2 + y = 5$, $xy = 6$, atau $\frac{1}{x} + y = 2$ tidak linear.

AWAS JEBAKAN

Penyelesaian harus memenuhi **semua** persamaan sekaligus. Pasangan $(18, 2)$ memang cocok dengan pesanan Dimas, tetapi untuk pesanan Ayu $3 \cdot 18 + 2 \cdot 2 = 58 \neq 53$. Biasakan mengecek jawaban ke setiap persamaan, bukan hanya ke salah satunya.

10.2 Metode grafik: cari titik potongnya

Di Bab 9 kamu belajar bahwa persamaan seperti $y = 2x + 8$ atau $2x + 3y = 42$ bergambar garis lurus. **Setiap titik pada garis adalah satu penyelesaian** persamaan itu. Jadi penyelesaian sebuah sistem adalah titik yang berada di kedua garis sekaligus, yaitu **titik potong** keduanya.

Bahasa sederhana · Gampangnya: gambar dua garis di kertas berpetak. Titik tempat keduanya bertemu adalah jawabannya.

Ingat teka-teki penutup Bab 9 tentang dua tarif ojek? Misalkan aplikasi A memasang biaya buka Rp8.000 ditambah Rp2.000 per km, sedangkan aplikasi B Rp4.000 ditambah Rp3.000 per km. Dengan x = jarak (km) dan y = tarif (ribu rupiah):

$$\text{A}: \; y = 2x + 8$$
$$\text{B}: \; y = 3x + 4$$

GRAFIK HIDUP

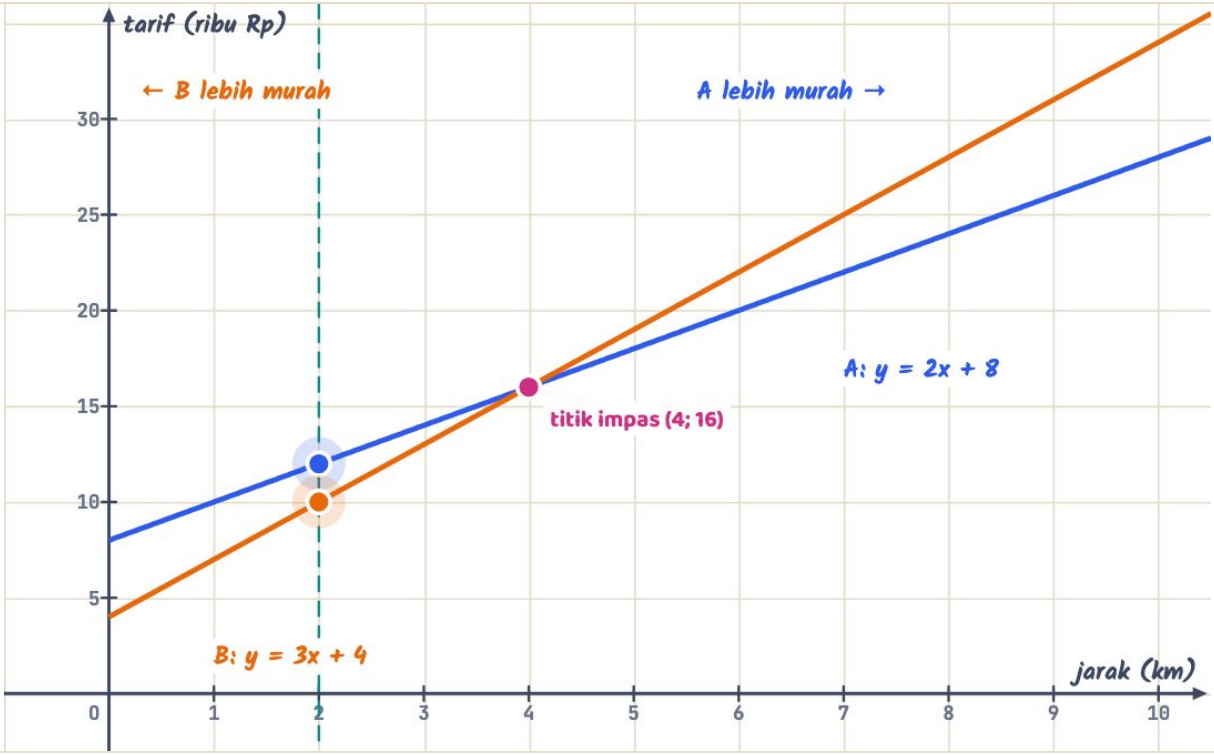
Dua tarif ojek: kapan sama mahal?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10

$$y_A = 2x + 8 \qquad y_B = 3x + 4$$

$$x = 2: \quad y_A = 12, \quad y_B = 10$$

x = jarak (km), y = tarif (ribu rupiah). A: buka Rp8.000 + Rp2.000/km. B: buka Rp4.000 + Rp3.000/km.



B lebih murah untuk perjalanan sependek ini

Tarif A	Tarif B	Selisih B – A
12 ribu Rp	10 ribu Rp	-2 ribu Rp

Seret titik biru atau oranye (atau geser slider jarak). Pada jarak berapa kedua tarif persis sama? Mengapa aplikasi dengan biaya buka lebih mahal justru menang untuk perjalanan jauh?

Kedua garis berpotongan di $(4, 16)$. Artinya, untuk perjalanan 4 km kedua aplikasi sama-sama memasang tarif Rp16.000. Titik seperti ini disebut **titik impas**. Di kiri titik impas garis B lebih rendah (B lebih murah); di kanannya garis A lebih rendah. Jadi kunci teka-teki Bab 9 adalah **titik potong kedua garis**. Untuk ojek Kilat ($T = 8.000 + 2.500x$) dan Hemat ($T = 5.000 + 3.000x$), titik potongnya $(6,\ 23.000)$: keduanya sama mahal, Rp23.000, untuk perjalanan 6 km.

RUMUS HIDUP

Titik impas dua tarif

$$x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Dua tarif sama mahal pada jarak = selisih biaya buka dibagi selisih tarif per km.

- a_1 Biaya buka A `ribu Rp`
- m_1 Tarif per km A `ribu Rp/km`
- a_2 Biaya buka B `ribu Rp`
- m_2 Tarif per km B `ribu Rp/km`
- x Jarak impas `km`

JARAK IMPAS

4

km

✨ **ada titik impas di jalan sungguhan**

Tarif A = **8** + **2**x dan tarif B = **4** + **3**x (ribu rupiah). Keduanya sama pada x = **4** km, dengan tarif **16** ribu. Jika muncul '—', tarif per km keduanya sama: garisnya sejajar dan tidak pernah bertemu (kecuali biaya bukanya juga sama). Jarak negatif berarti satu aplikasi selalu lebih murah untuk perjalanan sungguhan.

Cek satuan: selisih ribu rupiah dibagi selisih (ribu rupiah per km) menghasilkan km.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SPL-IMPAS

TRIK KAK LINTANG

Menggambar garis $ax + by = c$ secepat kilat: **tutup x, tutup y**. Tutup suku x dengan jari (anggap $x = 0$); sisanya memberi titik potong sumbu-y. Lalu tutup suku y (anggap $y = 0$); sisanya memberi titik potong sumbu-x. Contoh $3x + 2y = 12$: tutup x → $2y = 12$, titik $(0, 6)$; tutup y → $3x = 12$, titik $(4, 0)$. Hubungkan dengan penggaris, selesai!

CONTOH **Titik potong di kertas berpetak**

Selesaikan dengan metode grafik: $x + y = 6$ dan $x - y = 2$.

1. Garis $x + y = 6$: tutup x → $(0, 6)$; tutup y → $(6, 0)$.
2. Garis $x - y = 2$: tutup x → $-y = 2$, titik $(0, -2)$; tutup y → $(2, 0)$.
3. Gambar kedua garis. Keduanya bertemu di $(4, 2)$.
4. Cek: $4 + 2 = 6$ ✓ dan $4 - 2 = 2$ ✓.

Penyelesaiannya $x = 4$ dan $y = 2$, ditulis HP = $\{(4, 2)\}$.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Titik potong yang dibaca dari grafik bisa meleset. Jika titik potongnya tidak jatuh di titik kisi, misalnya $\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right)$, mata kita sulit membacanya dengan tepat. Pakai grafik untuk melihat gambaran besar, lalu pastikan dengan substitusi atau eliminasi.

10.3 Metode substitusi: jurus barter

Grafik memberi gambaran, aljabar memberi jawaban persis. Cara aljabar pertama adalah **substitusi**, artinya *mengganti*. Kak Lintang menyebutnya jurus barter: kalau satu variabel bisa "dihargai" memakai variabel lain, tukarkan saja!

1. Dari salah satu persamaan, nyatakan satu variabel dalam variabel lain. Pilih variabel yang koefisiennya 1 agar tidak muncul pecahan.
2. Substitusikan (ganti) ke persamaan yang **lain**, sehingga tinggal satu variabel.
3. Selesaikan persamaan satu variabel itu.
4. Masukkan hasilnya ke persamaan langkah 1 untuk mendapat variabel kedua.
5. Cek jawaban ke kedua persamaan.

CONTOH **Tiket museum dewasa dan anak**

Keluarga Dimas (2 dewasa dan 3 anak) membayar tiket museum Rp40.000. Tiket dewasa Rp5.000 lebih mahal daripada tiket anak. Berapa harga masing-masing tiket?

1. Misalkan d = tiket dewasa dan a = tiket anak (rupiah): $2d + 3a = 40.000$ dan $d = a + 5.000$.
2. Persamaan kedua sudah "siap ditukar". Substitusi: $2(a + 5.000) + 3a = 40.000$.
3. $5a + 10.000 = 40.000 \Rightarrow 5a = 30.000 \Rightarrow a = 6.000$.
4. $d = 6.000 + 5.000 = 11.000$. Cek: $2 \cdot 11.000 + 3 \cdot 6.000 = 22.000 + 18.000 = 40.000$ ✓.

Tiket anak Rp6.000 dan tiket dewasa Rp11.000.

Teka-teki sistem persamaan yang paling terkenal di dunia berumur lebih dari seribu tahun: hewan berkaki dua dan berkaki empat di dalam satu kandang.

Tebak Dulu!

Di kandang Mbah Sastro ada ayam dan kambing. Banyak kepalanya 10, banyak kakinya 28. Tebakan cepatmu: berapa ekor kambingnya?

- 7 ekor, karena 28 : 4 = 7.
- 5 ekor, karena dibagi rata.
- 4 ekor.
- 14 ekor, karena 28 : 2 = 14.

Jawabannya: 4 kambing (dan 6 ayam). Kalau ada 7 kambing, kepalanya baru 7, padahal harus 10. Cek: 4 kambing punya 16 kaki, 6 ayam punya 12 kaki, totalnya 28 ✓ dan kepalanya 10 ✓. Jebakannya: setiap tebakan harus memenuhi *kedua* petunjuk, kepala dan kaki.

Dengan substitusi: misalkan a = banyak ayam dan k = banyak kambing. Kepala: $a + k = 10$, jadi $a = 10 - k$. Kaki: $2a + 4k = 28$. Substitusi: $2(10 - k) + 4k = 28 \Rightarrow 20 + 2k = 28 \Rightarrow k = 4$, lalu $a = 6$.

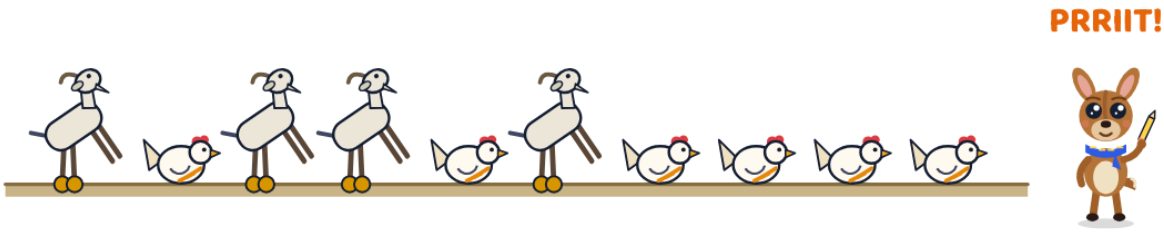
Ancil punya cara yang jauh lebih jenaka. Ia meniup peluit ajaib: **"Semua hewan, angkat dua kaki!"** Ayam langsung duduk (kedua kakinya terangkat), sedangkan kambing berdiri dengan dua kaki belakang. Kaki yang

masih menapak tanah tinggal $28 - 2 \times 10 = 8$, dan semuanya milik kambing, masing-masing dua. Jadi kambingnya $8 : 2 = 4$ ekor.

LAB MINI **Kandang Ancil: peluit ajaib**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10

10 kepala · 28 kaki **kaki di tanah: 24**



Prriit! Semua hewan mengangkat 2 kaki: 10 × 2 = 20 kaki terangkat.

Kaki yang masih menapak tanah (titik kuning): 28 − 20 = 8.

kaki di tanah setelah peluit	kambing	ayam
8	?	?

Atur banyak kepala dan kaki, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Hitung titik kuning (kaki yang menapak tanah) setelah peluit berbunyi. Coba juga buat kandang yang *mustahil*: apa syarat banyak kaki agar kandangnya masuk akal?

RUMUS HIDUP

Ayam dan kambing: rumus peluit Ancil

$$\text{kambing} = \frac{\text{kaki} - 2 \times \text{kepala}}{2}$$

Anggap dulu semua hewan ayam. Kaki yang tersisa, dibagi dua, adalah banyak kambing.

kepala	Banyak kepala	buah
kaki	Banyak kaki	buah
kambing	Banyak kambing	ekor

BANYAK KAMBING

4

ekor

Kalau semua **10** hewan ayam, kakinya **20**. Kelebihannya **8** kaki, dan setiap kambing menyumbang 2 kaki ekstra. Jadi kambing = **4** ekor dan ayam = **6** ekor. Jika muncul '—', kandang itu mustahil: banyak kaki harus berada di antara **20** dan **40**.

Cek satuan: kepala dan kaki dihitung dalam buah, hasilnya dalam ekor.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SPL-AYAM-KAMBING

TAMU DARI MASA LALU

Teka-teki "burung dan kelinci dalam satu kandang" tercatat dalam kitab Tiongkok *Sunzi Suanjing* (sekitar abad ke-3 sampai ke-5 M): ada 35 kepala dan 94 kaki. Cara yang tercatat di sana kira-kira begini: **bagi dua banyak kaki, lalu kurangi dengan banyak kepala**. Hasilnya $94 : 2 - 35 = 12$ kelinci, sehingga burungnya 23. Itu persis trik peluit Ancil, hanya urutan hitungnya berbeda! Hingga kini teka-teki ini masih populer di sekolah-sekolah di Asia Timur.

MATEMATIKA NUSANTARA

Di pesisir selatan Pulau Lembata, Nusa Tenggara Timur, ada pasar tradisional Wulandoni tempat sebagian warga masih **berbarter**: nelayan membawa ikan, petani dari pegunungan membawa jagung, pisang, dan hasil kebun lain. Barter adalah substitusi dalam kehidupan nyata! Misalkan (angka ini hanya ilustrasi) 2 ekor ikan setara 3 ikat jagung, dan 1 ikan bersama 1 ikat jagung setara 10 buah pisang. Dengan pisang sebagai "uang": $2i = 3j$ dan $i + j = 10$. Substitusi $i = 1{,}5j$: $2{,}5j = 10$, jadi $j = 4$ dan $i = 6$. Satu ikan senilai 6 pisang, satu ikat jagung senilai 4 pisang, tanpa selembar uang pun.

KERJAKAN BERSAMA **Racikan kopi Nusantara**

Kedai kopi mencampur kopi arabika Gayo seharga Rp180.000/kg dengan kopi robusta seharga Rp90.000/kg. Campurannya 15 kg dengan nilai total Rp2.070.000. Berapa kg masing-masing kopi?

1. Misalkan g kg Gayo dan r kg robusta. Berat: $g + r = 15$. Nilai (ribu rupiah): $180g + 90r = 2.070$.
2. Dari persamaan berat: $r = 15 - g$. Substitusi: $180g + 90(15 - g) = 2.070$.
3. $90g + 1.350 = 2.070 \Rightarrow 90g = 720 \Rightarrow g = 8$, lalu $r = 7$.
4. Cek: $180 \cdot 8 + 90 \cdot 7 = 1.440 + 630 = 2.070$ ✓.

Campurannya 8 kg Gayo dan 7 kg robusta, dengan harga rata-rata Rp138.000/kg.

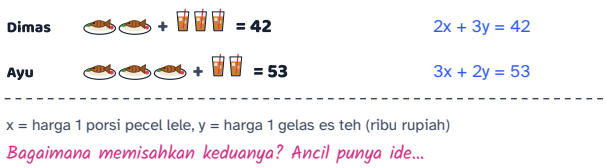
10.4 Metode eliminasi: buat satu misteri lenyap

Substitusi cocok jika ada variabel berkoefisien 1. Bagaimana kalau semua koefisiennya "repot", seperti $2x + 3y = 42$ dan $3x + 2y = 53$? Gunakan **eliminasi**: jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan sehingga satu variabel **lenyap**.

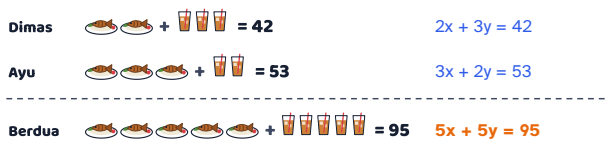
Mengapa boleh? Bayangkan dua timbangan yang sama-sama seimbang. Kalau isi piring kiri keduanya digabung dan isi piring kanan keduanya juga digabung, hasilnya tetap seimbang. Persamaan pun begitu: ruas kiri + ruas kiri = ruas kanan + ruas kanan.

Bahasa sederhana · Gampangnya: eliminasi artinya "menghilangkan". Kita menggabungkan dua petunjuk dengan cerdik sampai satu misteri hilang, sehingga misteri yang tersisa mudah ditemukan.

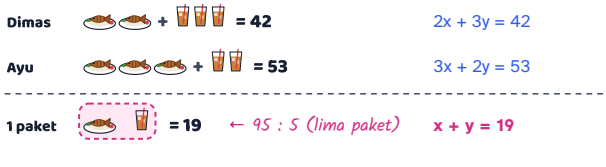
Ancil menunjukkan trik yang sangat cantik untuk pesanan pecel lele. Ikuti langkahnya:



Langkah 1. Pesanan Dimas: 2 pecel lele + 3 es teh = 42 ribu. Pesanan Ayu: 3 pecel lele + 2 es teh = 53 ribu. Dalam aljabar: $2x + 3y = 42$ dan $3x + 2y = 53$.



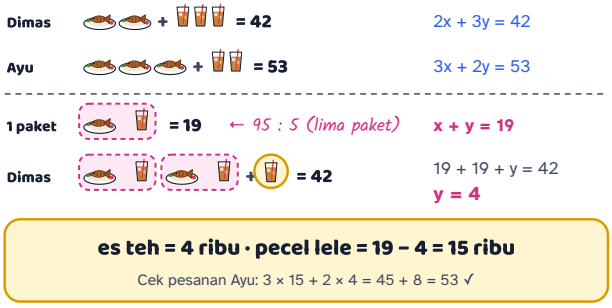
Langkah 2. Gabungkan kedua pesanan dalam satu nampan: 5 pecel lele + 5 es teh = $42 + 53 = 95$ ribu. Kedua persamaan **dijumlahkan**: $5x + 5y = 95$.



Langkah 3. Lima pecel lele dan lima es teh sama dengan 5 paket "lele + teh". Jadi satu paket harganya $95 : 5 = 19$ ribu: $x + y = 19$.



Langkah 4. Susun ulang pesanan Dimas menjadi 2 paket + 1 es teh = 42. Dua paket harganya 38, jadi es teh yang tersisa $42 - 38 = 4$ ribu: $y = 4$.



Langkah 5. Pecel lele $= 19 - 4 = 15$ ribu. Cek ke pesanan Ayu: $3 \cdot 15 + 2 \cdot 4 = 53$ ✓. Trik ini jalan karena koefisiennya bertukar tempat (2, 3 dan 3, 2).

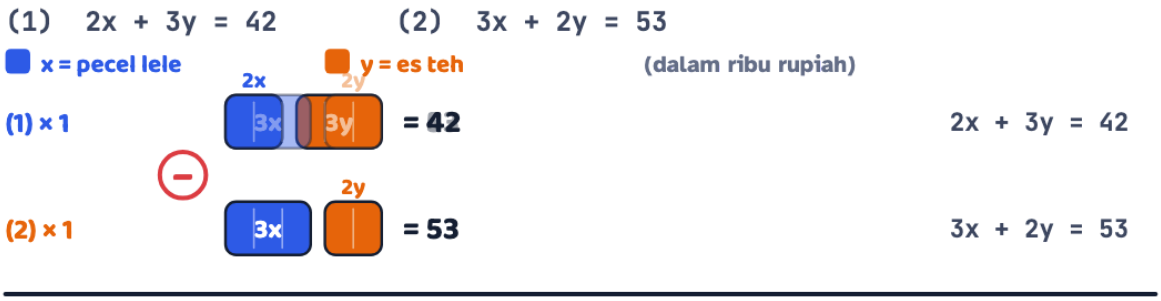
Trik Ancil hanya bekerja untuk koefisien yang "bertukar tempat". Cara umumnya: **kalikan** setiap persamaan dengan bilangan yang tepat sehingga koefisien salah satu variabel sama besar, lalu **kurangkan** (jika tandanya sama) atau **jumlahkan** (jika tandanya berlawanan).

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 42 \quad &\big| \times 3 \quad \Rightarrow \quad 6x + 9y = 126 \\ 3x + 2y = 53 \quad &\big| \times 2 \quad \Rightarrow \quad 6x + 4y = 106 \\ &\text{kurangkan:} \quad \Rightarrow \quad 5y = 20 \;\Rightarrow\; y = 4 \end{aligned}$$

Lalu masukkan $y = 4$ ke $2x + 3y = 42$: $2x = 30$, jadi $x = 15$. Sama dengan hasil trik Ancil, tentu saja!

LAB MINI Mesin eliminasi: model batang

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10



koefisien x hasil	koefisien y hasil	Keadaan
-1	1	belum ada yang lenyap

Setiap persamaan digambar sebagai batang: **biru** untuk suku x, **oranye** untuk suku y. Atur pengali kedua baris sampai salah satu warna lenyap pada baris hasil, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat kedua batang ditumpuk. Coba juga soal "Garis sejajar?" dan "Garis berimpit?": apa yang tersisa?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Saat mengurangkan dua persamaan, kurangkan **setiap** suku, termasuk ruas kanan dan tanda negatifnya. Contoh: $(3x + 2y) - (3x - 4y) = 2y - (-4y) = 6y$, bukan $-2y$. Kalau ragu, kalikan dulu persamaan kedua dengan -1, lalu *jumlahkan*.

KERJAKAN BERSAMA **Buku tulis dan pulpen**

Ayu membeli 4 buku tulis dan 3 pulpen seharga Rp30.500. Dimas membeli 2 buku tulis dan 5 pulpen seharga Rp27.500. Berapa harga satu buku tulis dan satu pulpen?

1. Misalkan b dan p dalam ribu rupiah: $4b + 3p = 30{,}5$ dan $2b + 5p = 27{,}5$.
2. Samakan koefisien b: kalikan persamaan kedua dengan 2, menjadi $4b + 10p = 55$.
3. Kurangkan persamaan pertama: $(4b + 10p) - (4b + 3p) = 55 - 30{,}5 \Rightarrow 7p = 24{,}5 \Rightarrow p = 3{,}5$.
4. Substitusi: $4b + 10{,}5 = 30{,}5 \Rightarrow b = 5$. Cek ke belanjaan Dimas: $10 + 17{,}5 = 27{,}5$ ✓.

Satu buku tulis Rp5.000 dan satu pulpen Rp3.500.

Kalau eliminasi dikerjakan sekali untuk koefisien huruf (bukan angka), kita mendapat rumus siap pakai untuk *semua* SPLDV.

ATURAN CRAMER UNTUK SPLDV

Untuk sistem $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$, misalkan $D = ae - bd$. Jika $D \neq 0$, sistem itu mempunyai tepat satu penyelesaian:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \qquad y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Bilangan D disebut **determinan** sistem. Dengan notasi determinan, $D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$, dan $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, sehingga $x = \frac{D_x}{D}$ dan $y = \frac{D_y}{D}$.

Bukti dengan eliminasi (untuk yang suka hitungan)

Kalikan persamaan pertama dengan e dan persamaan kedua dengan b: $aex + bey = ce$ dan $bdx + bey = bf$. Kurangkan, suku y lenyap:

$$(ae - bd)\,x = ce - bf \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Dengan cara yang sama, kalikan persamaan pertama dengan d dan persamaan kedua dengan a: $adx + bdy = cd$ dan $adx + aey = af$. Kurangkan yang pertama dari yang kedua: $(ae - bd)\,y = af - cd$. Pembagian ini hanya sah jika $D = ae - bd \neq 0$. ∎

Contoh pecel lele: $D = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5$, $D_x = 42 \cdot 2 - 3 \cdot 53 = -75$, $D_y = 2 \cdot 53 - 42 \cdot 3 = -20$. Jadi $x = 15$ dan $y = 4$.

RUMUS HIDUP **Aturan Cramer 2 × 2**

$$x = \frac{c\,e - b\,f}{a\,e - b\,d}$$

Untuk ax + by = c dan dx + ey = f: x adalah selisih perkalian silang dibagi determinan D = ae − bd.

- a Koef. x pers. 1
- b Koef. y pers. 1
- c Ruas kanan 1
- d Koef. x pers. 2
- e Koef. y pers. 2
- f Ruas kanan 2
- x Nilai x

NILAI X
15

✨ **penyelesaiannya bilangan bulat**

Sistemnya **2**x + (**3**)y = **42** dan **3**x + (**2**)y = **53**. Determinan D = ae − bd = **-5**. Hasilnya x = **15** dan y = (af − cd)/D = **4**. Jika muncul '—', D = 0: kedua garis sejajar atau berimpit, jadi tidak ada penyelesaian tunggal.

Cek satuan: semua koefisien tak bersatuan di sini; dalam soal cerita, x bersatuan sama dengan c dibagi satuan a.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SPL-CRAMER

ADU CEPAT **Eliminasi kilat: jumlahkan saja!**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Jumlahkan kedua persamaan: y langsung lenyap, sisanya (a + d)x = c + f. Contoh: 3x + y = 11 dan 2x − y = 4 memberi 5x = 15, jadi x = 3.

TRIK KAK LINTANG

Pilih senjata yang tepat. **Substitusi** paling enak jika ada variabel berkoefisien 1 atau –1 (misalnya $y = 2x - 1$). **Eliminasi** paling enak jika koefisiennya sama, berlawanan, atau mudah disamakan. **Aturan Cramer** paling cepat untuk soal pilihan ganda dengan angka "jelek". Dan **grafik** paling cocok untuk melihat makna, misalnya titik impas. Apa pun senjatanya, akhiri dengan cek!

TAMU DARI MASA LALU

Bab kedelapan kitab Tiongkok *Jiuzhang Suanshu* (Sembilan Bab tentang Seni Matematika), yang disusun sekitar 2.000 tahun lalu, bernama *fangcheng*. Isinya cara menyelesaikan sistem persamaan dengan batang hitung yang disusun di papan seperti tabel, lalu baris-barisnya dikurangkan satu sama lain. Itu sangat mirip dengan metode yang kini disebut **eliminasi Gauss**, sesuai nama Carl Friedrich Gauss (1777–1855) yang memakainya secara sistematis. Rumus determinan untuk SPL diterbitkan Gabriel Cramer pada 1750.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BAHASA MATRIKS DAN MAKNA DETERMINAN

SPLDV dapat ditulis sebagai satu persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}.$$

Determinan $D = ae - bd$ bernilai nol tepat ketika baris (a, b) dan (d, e) sebanding. Secara geometris, $|D|$ adalah luas jajargenjang yang dibentuk vektor kolom (a, d) dan (b, e); jika luasnya nol, kedua vektor segaris dan sistem kehilangan "satu arah informasi". Untuk sistem besar (misalnya 10 variabel), aturan Cramer menjadi sangat lambat, sehingga komputer memakai eliminasi Gauss. Kamu akan bertemu lagi dengan matriks dan determinan di Bab 36.

10.5 Satu, tak hingga, atau tidak ada?

Tebak Dulu!

Berapa banyak penyelesaian sistem $x + 2y = 4$ dan $2x + 4y = 10$?

Tepat satu, seperti biasanya.

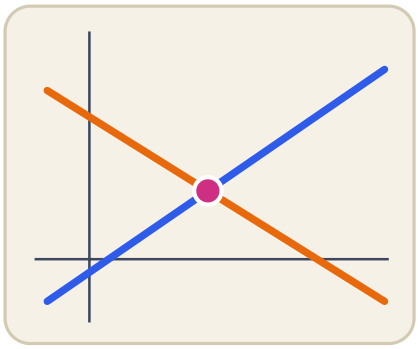
Tepat dua.

Tak hingga banyak.

Tidak ada sama sekali.

Jawabannya: tidak ada. Kalikan persamaan pertama dengan 2: $2x + 4y = 8$. Padahal persamaan kedua mengatakan $2x + 4y = 10$. Bilangan yang sama tidak mungkin sekaligus bernilai 8 dan 10! Grafiknya dua garis sejajar yang tidak pernah bertemu.

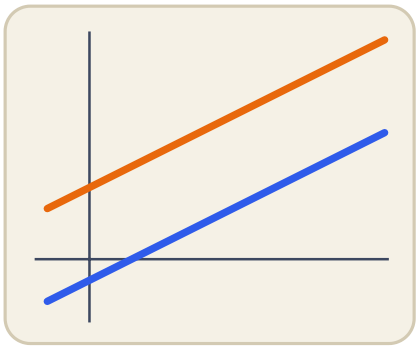
Dua garis lurus di bidang hanya punya tiga kemungkinan nasib: berpotongan, sejajar, atau berimpit (menumpuk menjadi satu garis).



Berpotongan

tepat satu penyelesaian

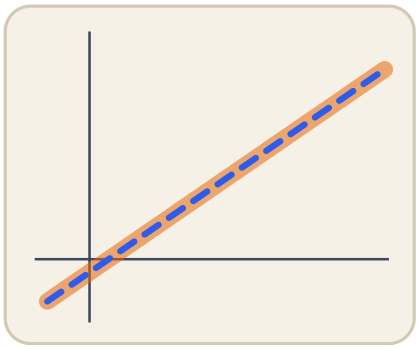
eliminasi → x = 3, y = 2



Sejajar

tidak ada penyelesaian

eliminasi → 0 = −2 ✗



Berimpit

tak hingga penyelesaian

eliminasi → 0 = 0 ✓

Contoh: $x + y = 5,\ x - y = 1$ (berpotongan); $x + 2y = 4,\ 2x + 4y = 10$ (sejajar); $x + 2y = 4,\ 2x + 4y = 8$ (berimpit).

TIGA KEMUNGKINAN BANYAK PENYELESAIAN

Untuk SPLDV $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$:

- Jika $ae - bd \neq 0$, ada **tepat satu** penyelesaian: kedua garis **berpotongan**.
- Jika $ae - bd = 0$ dan persamaan kedua **bukan** kelipatan persamaan pertama, **tidak ada** penyelesaian: kedua garis **sejajar**.
- Jika persamaan kedua kelipatan persamaan pertama (termasuk ruas kanannya), ada **tak hingga** banyak penyelesaian: kedua garis **berimpit**.

Jika tidak ada koefisien nol, cukup bandingkan: $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ → tepat satu; $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ → tidak ada; $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ → tak hingga.

Sistem	Perbandingan koefisien	Hasil eliminasi	Grafik	Banyak penyelesaian
$x + y = 5$ $x - y = 1$	$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$	$x = 3,\ y = 2$	berpotongan	tepat satu
$x + 2y = 4$ $2x + 4y = 10$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{4}{10}$	$0 = -2$ (mustahil)	sejajar	tidak ada
$x + 2y = 4$ $2x + 4y = 8$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$	$0 = 0$ (selalu benar)	berimpit	tak hingga

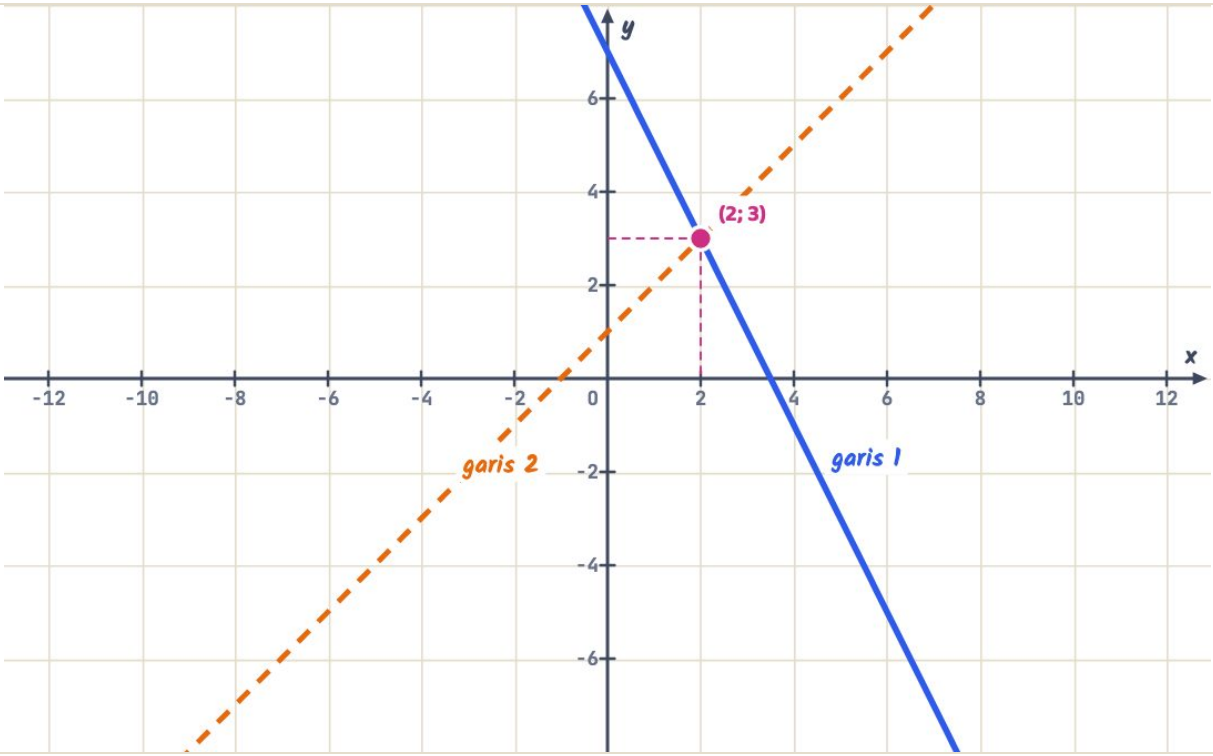
GRAFIK HIDUP

Dua garis, tiga nasib

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$2x + 1y = 7 \qquad 1x - 1y = -1$$



☑ **berpotongan: tepat satu penyelesaian**

D = $a_1b_2 - a_2b_1$	x	y
-3	2	3

Mulai dari $2x + y = 7$ dan $x - y = -1$. Tantangan: (1) buat kedua garis **sejajar** tanpa mengubah garis 1; (2) buat keduanya **berimpit** (petunjuk: kalikan semua angka garis 1 dengan bilangan yang sama); (3) cari sistem yang titik potongnya $(-3, 2)$. Perhatikan nilai D setiap kali garisnya sejajar.

KERJAKAN BERSAMA

Mencari parameter agar sejajar

Tentukan nilai k agar sistem $3x - 2y = 5$ dan $6x + ky = 7$ tidak mempunyai penyelesaian.

1. Tidak ada penyelesaian berarti garisnya sejajar: $D = 3k - (-2)(6) = 3k + 12 = 0$, jadi $k = -4$.
2. Pastikan tidak berimpit: dengan $k = -4$, dua kali persamaan pertama adalah $6x - 4y = 10$, sedangkan persamaan kedua $6x - 4y = 7$. Ruas kanannya berbeda.
3. Eliminasi menghasilkan $0 = 3$: mustahil.

$k = -4$. Untuk nilai k lain, $D \neq 0$ dan sistemnya punya tepat satu penyelesaian.

MITOS

"Dua persamaan dengan dua variabel pasti punya tepat satu penyelesaian."

FAKTA

Tidak selalu. Jika garisnya sejajar, penyelesaiannya tidak ada; jika berimpit, penyelesaiannya tak hingga. Periksa dulu $D = ae - bd$: hanya jika $D \neq 0$ penyelesaiannya tunggal.

MITOS

"Substitusi dan eliminasi bisa memberi jawaban yang berbeda."

FAKTA

Penyelesaian sistem tidak bergantung pada cara. Metode hanyalah jalan menuju jawaban yang sama. Jika hasilnya berbeda, pasti ada salah hitung; cek dengan memasukkan jawaban ke kedua persamaan.

MITOS

"Sistem linear bisa saja punya tepat dua penyelesaian."

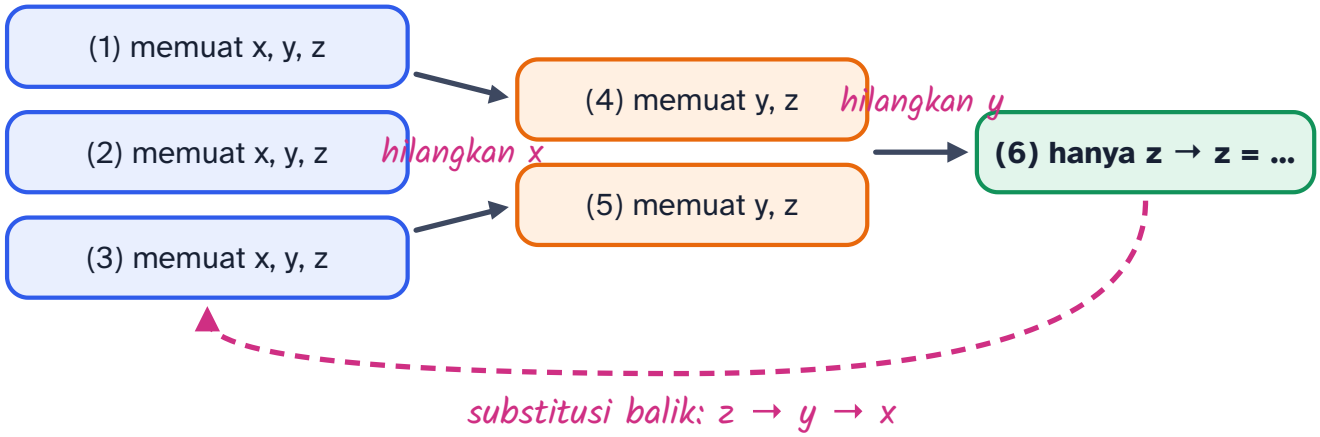
FAKTA

Mustahil! Dua garis lurus yang berbagi dua titik pasti berimpit, karena melalui dua titik hanya ada satu garis. Jadi banyak penyelesaiannya selalu 0, 1, atau tak hingga. Buktinya ada di soal olimpiade bab ini.

10.6 SPLTV: tiga misteri sekaligus

Bagaimana kalau misterinya tiga, misalnya harga bakso, mie ayam, dan es jeruk? Kita butuh **tiga** petunjuk, yaitu **sistem persamaan linear tiga variabel** (SPLTV). Strateginya seperti corong: kurangi banyak variabel satu per satu.

Bahasa sederhana · Gampangnya: tiga misteri butuh tiga petunjuk. Hilangkan satu misteri dulu sampai tinggal dua, lalu kerjakan seperti SPLDV yang sudah kamu kuasai.



Pasangkan (1) dengan (2) dan (1) dengan (3) untuk menghilangkan variabel yang **sama**, lalu selesaikan SPLDV yang tersisa.

COBA SENDIRI **Bakso, mie ayam, dan es jeruk**

Di kantin sekolah: 1 bakso + 1 mie ayam + 1 es jeruk = Rp32.000; 2 bakso + 1 mie ayam = Rp42.000; 1 mie ayam + 3 es jeruk = Rp27.000. Berapa harga masing-masing?

1. Misalkan b, m, j dalam ribu rupiah: (1) $b + m + j = 32$, (2) $2b + m = 42$, (3) $m + 3j = 27$.
2. Hilangkan m. (2) – (1): $b - j = 10$ ... (4). (3) – (1): $-b + 2j = -5$ ... (5).
3. Jumlahkan (4) dan (5): $j = 5$. Dari (4): $b = 15$. Dari (2): $m = 42 - 30 = 12$.
4. Cek (1): $15 + 12 + 5 = 32$ ✓. Cek (3): $12 + 15 = 27$ ✓.

Bakso Rp15.000, mie ayam Rp12.000, es jeruk Rp5.000.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pada SPLTV, variabel yang dihilangkan di kedua langkah harus **sama**. Jika langkah pertama menghilangkan m tetapi langkah kedua menghilangkan b, kamu mendapat dua persamaan yang masih memuat tiga variabel berbeda, dan corongnya macet.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TRIK SIMETRI: JUMLAHKAN SEMUANYA

Sistem $x + y = 13$, $y + z = 17$, $z + x = 20$ tampak butuh eliminasi panjang. Padahal setiap variabel muncul tepat dua kali! Jumlahkan ketiganya: $2(x + y + z) = 50$, jadi $x + y + z = 25$. Kurangkan setiap persamaan dari 25: $z = 25 - 13 = 12$, $x = 25 - 17 = 8$, $y = 25 - 20 = 5$. Secara geometris, setiap persamaan linear tiga variabel adalah sebuah *bidang datar* di ruang, dan penyelesaian SPLTV adalah titik yang dilalui ketiga bidang. Tiga bidang juga bisa bertemu di sebuah garis (tak hingga penyelesaian) atau tidak bertemu sama sekali.

10.7 Program linear: mencari yang terbaik

Di dunia nyata, sering kali yang kita cari bukan "sama dengan", melainkan "paling banyak" atau "paling hemat". Kelas Ayu membuka stan bazar. Mereka menjual x porsi nasi kuning (modal Rp10.000, untung Rp4.000 per porsi) dan y gelas es buah (modal Rp5.000, untung Rp3.000 per gelas). Modal yang tersedia Rp600.000, dan meja hanya muat 80 wadah.

- Syarat modal (ribu rupiah): $10x + 5y \le 600$, atau $2x + y \le 120$.
- Syarat meja: $x + y \le 80$. Tentu juga $x \ge 0$ dan $y \ge 0$.
- Yang ingin dibuat sebesar mungkin: untung $U = 4x + 3y$ (ribu rupiah), disebut **fungsi tujuan**.

Semua titik yang memenuhi syarat membentuk **daerah layak**. Pojok-pojoknya adalah titik potong garis batas, dan untuk menemukannya kita menyelesaikan SPLDV!

GRAFIK HIDUP

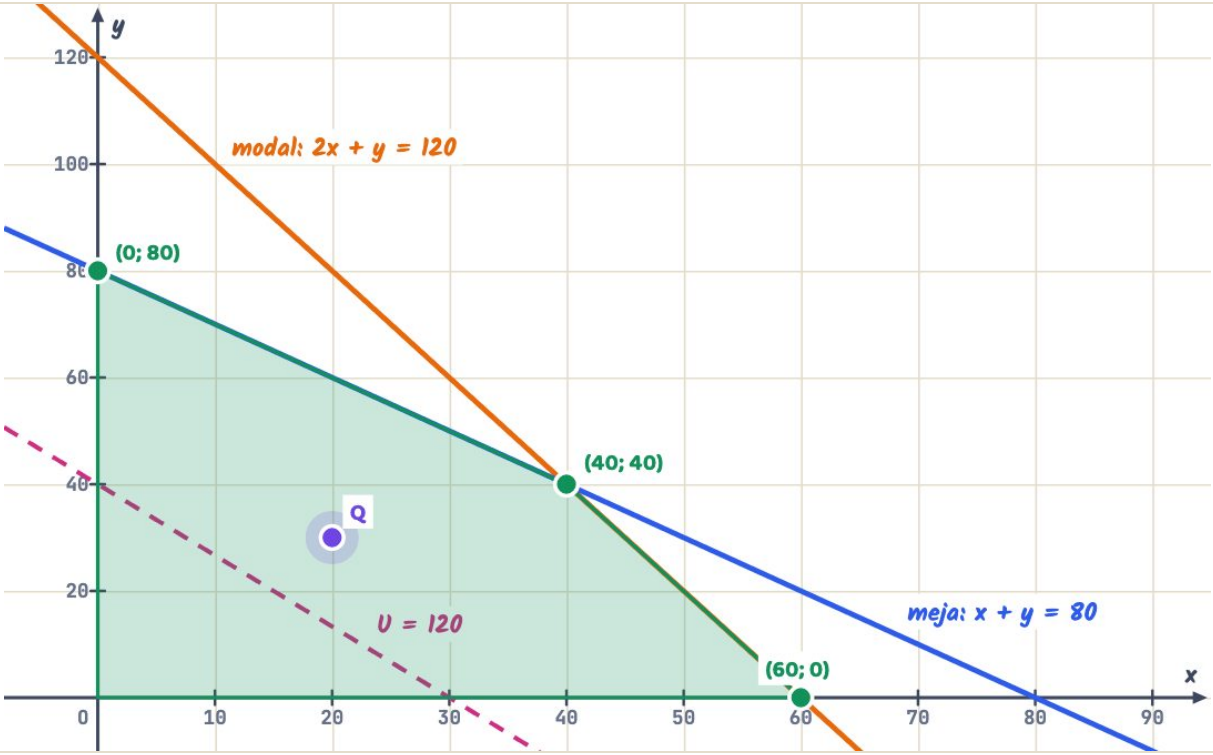
Bazar kelas: untung terbesar di titik pojok

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10

$$U = 4x + 3y \quad \text{(ribu rupiah)}$$

$$U(Q) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = 170$$

x = porsi nasi kuning, y = gelas es buah. Syarat modal 2x + y ≤ 120, syarat meja x + y ≤ 80. Daerah hijau = semua rencana yang mungkin.



✅ **Q layak: modal dan meja cukup**

Untung di Q	Modal di Q	Wadah di Q
170 ribu Rp	350 ribu Rp	50

Seret titik Q ke mana pun di daerah hijau dan catat untungnya. Lalu tekan ▶ **Jalankan**: garis untung (putus-putus) bergeser naik. Titik terakhir yang masih disentuhnya sebelum lepas dari daerah hijau adalah rencana terbaik!

KERJAKAN BERSAMA

Menghitung titik pojok

Tentukan rencana bazar dengan untung terbesar.

1. Pojok di sumbu: $(0, 0)$; garis modal memotong sumbu-x di $(60, 0)$; garis meja memotong sumbu-y di $(0, 80)$.
2. Pojok tengah = titik potong $2x + y = 120$ dan $x + y = 80$. Kurangkan: $x = 40$, lalu $y = 40$.
3. Hitung $U = 4x + 3y$ di setiap pojok: $U(0, 0) = 0$, $U(60, 0) = 240$, $U(40, 40) = 280$, $U(0, 80) = 240$.

Untung terbesar Rp280.000, dengan menjual 40 porsi nasi kuning dan 40 gelas es buah. Modalnya pas Rp600.000 dan mejanya pas penuh.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA JAWABAN TERBAIK ADA DI TITIK POJOK?

Semua titik dengan untung sama, misalnya $4x + 3y = U$, membentuk garis lurus. Jika U dinaikkan, garis itu bergeser sejajar. Karena daerah layak berbentuk segi banyak *cembung* (tidak penyok), titik terakhir yang disentuh garis yang terus bergeser pasti sebuah titik pojok, atau seluruh sisi jika garis untung kebetulan sejajar dengan sisi itu. Inilah dasar **metode titik pojok** dalam program linear, yang dipakai pabrik, maskapai, dan perusahaan logistik untuk menghemat biaya.

Tarif ojek dan taksi daring

Membandingkan dua tarif "biaya buka + biaya per km" sama dengan mencari titik potong dua garis: titik impas.

Loket museum

Dari banyak tiket terjual dan total pemasukan, petugas dapat menghitung berapa pengunjung dewasa dan anak-anak.

Racikan kopi dan beras

Pedagang mencampur dua jenis kopi atau beras berbeda harga agar mendapat campuran dengan berat dan harga yang diinginkan.

Rangkaian listrik

Teknisi menghitung arus di setiap cabang rangkaian dengan menyusun sistem persamaan dari hukum Kirchhoff.

Menu gizi seimbang

Ahli gizi memadukan beberapa bahan makanan agar protein, karbohidrat, dan kalorinya pas dengan kebutuhan.

Produksi UMKM

Program linear membantu menentukan banyak tiap produk agar untung terbesar dengan bahan dan waktu yang terbatas.

Cek Cepat

Penyelesaian sistem $x + y = 10$ dan $x - y = 4$ adalah...

- $(3, 7)$
- $(6, 4)$
- $(7, 3)$
- $(5, 5)$

Dua garis punya gradien sama, tetapi memotong sumbu-y di titik berbeda. Sistem persamaannya mempunyai...

- tidak ada penyelesaian
- tepat satu penyelesaian
- tepat dua penyelesaian
- tak hingga banyak penyelesaian

Di kandang ada ayam dan kambing dengan 12 kepala dan 30 kaki. Banyak kambingnya...

- 6
- 9
- 7
- 3

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: detektif paket hemat

Bahan: dua penawaran dengan biaya tetap + biaya per satuan (misalnya dua paket internet, dua laundry kiloan, dua tarif ojek, atau tiket harian vs kartu anggota kolam renang), kertas berpetak, penggaris, pensil warna.

1. Catat biaya tetap dan biaya per satuan setiap penawaran. Tulis masing-masing sebagai $y = a + mx$.
2. Buat tabel nilai y untuk $x = 0, 2, 4, \ldots, 10$.
3. Gambar kedua garis di kertas berpetak dengan warna berbeda (pakai trik tutup x, tutup y bila perlu).
4. Perkirakan titik potongnya dari gambar, lalu hitung tepat dengan substitusi.
5. Tanyakan pemakaian keluargamu (berapa x sebulan), lalu tentukan penawaran yang lebih hemat.

Pertanyaan: Apa arti titik potong itu dalam cerita? Berapa rupiah yang bisa dihemat keluargamu dalam sebulan? Adakah keadaan yang membuat pilihanmu berubah?

RINGKASAN KILAT

Bab 10 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menjelaskan arti **penyelesaian** sistem persamaan: pasangan nilai yang memenuhi semua persamaan sekaligus, yaitu **titik potong** garis-garisnya
- menyelesaikan SPLDV dengan metode **grafik**, **substitusi**, **eliminasi**, dan **aturan Cramer**
- menentukan apakah sebuah sistem punya **satu**, **tak hingga**, atau **tidak punya** penyelesaian
- menyelesaikan **SPLTV** (tiga variabel) dengan eliminasi bertahap
- mengubah soal cerita (harga, tiket, campuran, ayam dan kambing, untung bazar) menjadi sistem persamaan dan menafsirkan jawabannya

Istilah kunci

sistem persamaan · Sistem persamaan linear dua variabel · Penyelesaian · himpunan penyelesaian · titik potong · titik impas · substitusi · eliminasi · determinan · sistem persamaan linear tiga variabel · fungsi tujuan · daerah layak

Rumus penting

$$x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Titik impas dua tarif. Dua tarif sama mahal pada jarak = selisih biaya buka dibagi selisih tarif per km.

$$\text{kambing} = \frac{\text{kaki} - 2 \times \text{kepala}}{2}$$

Ayam dan kambing: rumus peluit Ancil. Anggap dulu semua hewan ayam. Kaki yang tersisa, dibagi dua, adalah banyak kambing.

$$x = \frac{c\,e - b\,f}{a\,e - b\,d}$$

Aturan Cramer 2 × 2. Untuk ax + by = c dan dx + ey = f: x adalah selisih perkalian silang dibagi determinan D = ae − bd.

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- Penyelesaian harus memenuhi semua persamaan sekaligus.
- Titik potong yang dibaca dari grafik bisa meleset.
- Saat mengurangkan dua persamaan, kurangkan setiap suku, termasuk ruas kanan dan tanda negatifnya.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=10

🧩 Teka-teki untuk Bab 11

Dimas menendang bola lurus ke atas. Tinggi bola (dalam meter) setelah t detik adalah $h = 20t - 5t^2$. Kapan bola menyentuh tanah lagi? Di bab ini kita mencari kapan dua *garis* bertemu. Kali ini lintasannya *melengkung*, dan persamaannya memuat t^2. Bisakah kamu menemukan waktunya?

▼ **Intip petunjuk**

Menyentuh tanah berarti $h = 0$, jadi $20t - 5t^2 = 0$. Coba faktorkan: $5t(4 - t) = 0$. Kapan hasil kali dua bilangan sama dengan nol? Kamu akan menemukan **dua** jawaban, dan salah satunya terjadi tepat saat bola ditendang. Bab 11 membahas persamaan kuadrat selengkapnya!

11 Persamaan Kuadrat: Satu Soal, Dua Jawaban

Bola yang ditendang ke atas melewati ketinggian yang sama dua kali: sekali saat naik, sekali saat turun. Itulah rahasia persamaan kuadrat. Di bab ini kamu akan menemukan kedua jawabannya, bahkan hanya dengan menyusun ubin!

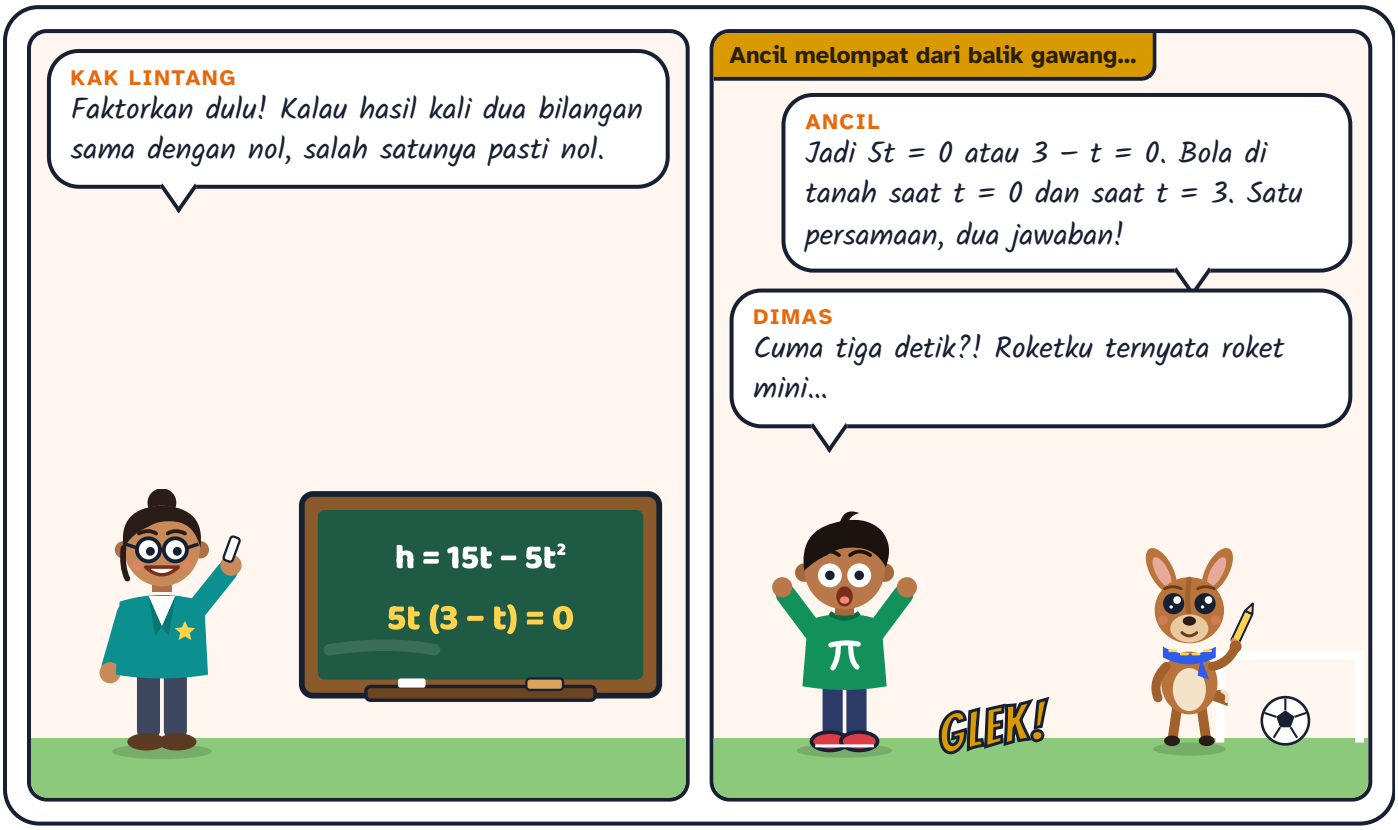
Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **persamaan kuadrat** $ax^2 + bx + c = 0$ dan menyusunnya dari masalah luas atau gerak;
- menyelesaikan persamaan kuadrat dengan **pemfaktoran** memakai sifat perkalian nol;
- **melengkapkan kuadrat** dengan model ubin aljabar dan menurunkan **rumus abc**;
- memakai **diskriminan** untuk meramal jenis akar tanpa menghitungnya;
- memakai **jumlah dan hasil kali akar** untuk menyusun persamaan baru dan menghitung ekspresi simetris.

TENDANGAN ROKET DIMAS

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Tinggi bola Dimas adalah $h = 15t - 5t^2$ meter, dengan t dalam detik. Kapan bola berada tepat setinggi 10 meter?

Tidak pernah, karena bola tidak bisa setinggi itu.

Sekali saja, yaitu saat $t = \frac{2}{3}$, karena $15 \times \frac{2}{3} = 10$.

Dua kali, yaitu saat $t = 1$ dan saat $t = 2$.

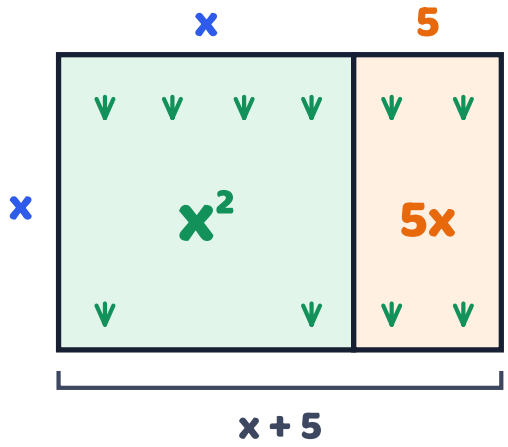
Sekali saja, yaitu saat $t = 1$.

Jawabannya: dua kali. Coba hitung: $h(1) = 15 - 5 = 10$ dan $h(2) = 30 - 20 = 10$. Bola melewati ketinggian 10 m saat **naik** (detik ke-1) dan sekali lagi saat **turun** (detik ke-2). Karena ada t^2, persamaan $15t - 5t^2 = 10$ bisa punya dua jawaban. Pilihan $t = \frac{2}{3}$ lupa bahwa suku $-5t^2$ juga ikut menarik bola ke bawah.

11.1 Dari luas sawah ke persegi x^2

Pak Darto punya sawah berbentuk persegi panjang. Panjangnya 5 m lebih panjang daripada lebarnya, dan luasnya 150 m². Berapa lebar sawah itu?

Misalkan lebarnya x meter. Panjangnya $x + 5$, sehingga luasnya $x(x + 5) = 150$. Kalau dijabarkan: $x^2 + 5x = 150$, atau $x^2 + 5x - 150 = 0$. Ada suku x^2 di situ. Inilah sebuah **persamaan kuadrat**.



Luas sawah = x(x + 5)

$= x^2 + 5x$

$= 150\ m^2$

$x^2 + 5x - 150 = 0$

Sawah selebar x dan sepanjang $x + 5$ terdiri atas persegi x^2 dan petak $5x$. Kata *kuadrat* berasal dari bahasa Latin *quadratus*, artinya persegi.

DEFINISI

Persamaan kuadrat dalam variabel x adalah persamaan yang dapat ditulis dalam **bentuk baku**

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

dengan a, b, c bilangan real. Bilangan a adalah koefisien x^2, b koefisien x, dan c **konstanta**. Nilai x yang membuat persamaan itu benar disebut **akar** atau penyelesaian persamaan.

Bahasa sederhana · Gampangnya: persamaan kuadrat adalah persamaan yang pangkat tertinggi variabelnya **dua**. Contoh paling sederhana $x^2 = 25$: cari bilangan yang kalau dikuadratkan hasilnya 25. Jawabannya 5, tetapi -5 juga, karena $(-5) \times (-5) = 25$. Itulah sebabnya persamaan kuadrat sering punya dua jawaban.

Sebelum membaca a, b, dan c, pindahkan dulu semua suku ke ruas kiri sehingga ruas kanan bernilai nol.

Persamaan	Bentuk baku	a	b	c
$3x^2 + 5x - 2 = 0$	sudah baku	3	5	−2
$x^2 = 49$	$x^2 - 49 = 0$	1	0	−49
$x^2 = 3x$	$x^2 - 3x = 0$	1	−3	0
$(x + 1)(x - 4) = 6$	$x^2 - 3x - 10 = 0$	1	−3	−10

$5x + 2 = 0$	bukan persamaan kuadrat, karena tidak ada suku x^2 ($a = 0$)

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Baca a, b, dan c hanya setelah ruas kanan bernilai nol. Pada $x^2 = 3x$, nilai b adalah -3, bukan 3, karena $3x$ harus dipindah ke kiri menjadi $-3x$. Ingat juga syarat $a \neq 0$: tanpa suku x^2, persamaannya hanyalah persamaan linear seperti di Bab 8.

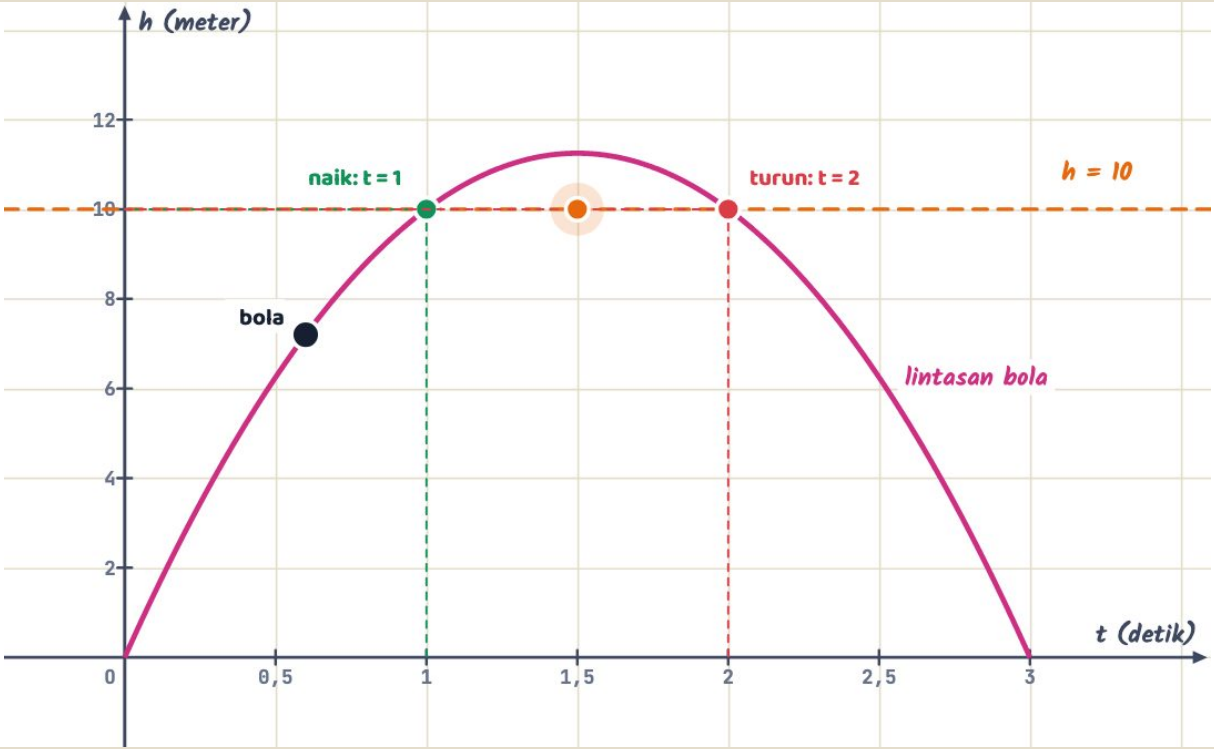
Kembali ke bola Dimas. Ketinggian $h = vt - 5t^2$ adalah ekspresi kuadrat dalam t. Pertanyaan "kapan bola setinggi H?" menjadi persamaan kuadrat $5t^2 - vt + H = 0$. Mainkan grafik di bawah dan perhatikan: garis mendatar setinggi H memotong lintasan bola di **dua** titik, **satu** titik, atau **tidak sama sekali**.

GRAFIK HIDUP **Bola Dimas: kapan setinggi H?**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11

$$h = vt - 5t^2$$

$$15t - 5t^2 = 10 \iff 5t^2 - 15t + 10 = 0$$



dua kali: sekali naik, sekali turun

t naik	t turun	Tinggi maksimum	Mendarat saat t =
1 s	2 s	11,25 m	3 s

Seret titik oranye naik-turun (atau geser slider H) dan tekan ▶ **Jalankan** untuk menerbangkan bola. Jika muncul "—", bola tidak pernah mencapai ketinggian itu. Bisakah kamu mengatur H supaya garis oranye hanya *menyentuh* puncak lintasan?

11.2 Pemfaktoran: kalau hasil kali sama dengan nol...

Kak Lintang memberi petunjuk di komik: kalau dua bilangan dikalikan hasilnya nol, salah satunya **pasti** nol. Tidak ada cara lain! Sifat sederhana ini adalah kunci menyelesaikan banyak persamaan kuadrat.

SIFAT PERKALIAN NOL

Untuk bilangan real p dan q:

$$p \cdot q = 0 \implies p = 0 \text{ atau } q = 0.$$

Jadi, jika $(x - m)(x - n) = 0$, maka $x = m$ atau $x = n$.

Mengapa sifat ini pasti benar?

Misalkan $p \cdot q = 0$ dan $p \neq 0$. Karena p bukan nol, kita boleh membagi kedua ruas dengan p: $q = \frac{0}{p} = 0$.

Jadi, kalau p tidak nol, q pasti nol. Tidak mungkin keduanya sekaligus bukan nol.

Strateginya: tulis $x^2 + bx + c$ sebagai perkalian $(x + m)(x + n)$. Kalau dijabarkan, $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$. Jadi kita mencari **dua bilangan yang jumlahnya b dan hasil kalinya c.**

Bahasa sederhana · Bayangkan bermain tebak-tebakan: "Aku memikirkan dua bilangan. Kalau dikali hasilnya 12, kalau dijumlah hasilnya 7. Bilangan apa?" Jawabannya 3 dan 4. Itulah seluruh rahasia pemfaktoran!

TRIK KAK LINTANG: CARI JODOH BILANGAN

Untuk $x^2 + bx + c$, daftar dulu pasangan faktor c, lalu pilih yang jumlahnya b. Lihat tandanya:

- c positif ⇒ kedua bilangan **bertanda sama**, mengikuti tanda b;
- c negatif ⇒ kedua bilangan **berlawanan tanda**; yang nilai mutlaknya lebih besar mengikuti tanda b.

CONTOH **Lebar sawah Pak Darto**

Selesaikan $x^2 + 5x - 150 = 0$ untuk menemukan lebar sawah Pak Darto.

1. Cari dua bilangan yang hasil kalinya -150 dan jumlahnya 5. Karena c negatif, tandanya berlawanan. Pasangan 15 dan -10 cocok: $15 \times (-10) = -150$ dan $15 + (-10) = 5$.
2. Faktorkan: $(x + 15)(x - 10) = 0$.
3. Sifat perkalian nol: $x + 15 = 0$ atau $x - 10 = 0$, jadi $x = -15$ atau $x = 10$.
4. Lebar sawah tidak mungkin negatif, jadi $x = 10$. Cek: $10 \times 15 = 150$. ✔

Sawah Pak Darto berukuran 10 m × 15 m. Akar -15 benar secara aljabar, tetapi ditolak karena tidak masuk akal sebagai panjang.

LAB MINI **Pabrik persegi panjang: cari jodoh bilangan**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

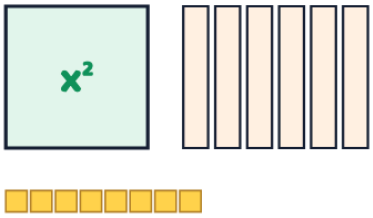
Susun 1 ubin x^2, 6 batang x, dan 8 ubin satuan menjadi persegi panjang

Pasangan faktor 8:

1 × 8

2 × 4

tekan salah satu



1 ubin x^2 · 6 batang x · 8 ubin satuan

Soal	Pasangan	Jumlahnya	Status
$x^2 + 6x + 8$	–	–	pilih pasangan faktor

Tekan pasangan faktor di kiri (atau tombol 🔁). Ubin x^2, batang x, dan ubin satuan langsung disusun menjadi persegi panjang $(x + m)(x + n)$. Pasangan yang benar memakai **tepat** b batang x. Tekan 🎲 untuk soal baru.

Tebak Dulu!

Dimas menyelesaikan $x^2 = 5x$ begini: "Bagi kedua ruas dengan x, hasilnya $x = 5$. Selesai!" Apakah jawabannya lengkap?

Lengkap, karena $5^2 = 5 \times 5$.

Belum, ada akar lain yang hilang, yaitu $x = 0$.

Salah, akarnya hanya $x = 0$.

Belum, ada akar lain, yaitu $x = -5$.

Jawabannya: belum lengkap. Membagi dengan x hanya boleh kalau $x \neq 0$, padahal $x = 0$ juga memenuhi: $0^2 = 5 \cdot 0$. Cara aman: pindahkan ke satu ruas dan faktorkan. $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0$ atau $x = 5$. Bagaimana dengan -5? $(-5)^2 = 25$, sedangkan $5 \cdot (-5) = -25$. Tidak sama!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Sifat perkalian nol hanya berlaku untuk **nol**. Dari $(x-2)(x-3) = 6$, kamu **tidak boleh** menyimpulkan $x - 2 = 6$ atau $x - 3 = 6$. Cek saja: $x = 8$ memberi $6 \times 5 = 30$, bukan 6. Jabarkan dulu: $x^2 - 5x + 6 = 6 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$, jadi $x = 0$ atau $x = 5$.

Bagaimana kalau $a \neq 1$, misalnya $2x^2 + 7x + 3 = 0$? Gunakan trik **pecah suku tengah**: cari dua bilangan yang jumlahnya b dan hasil kalinya $a \times c$.

KERJAKAN BERSAMA **Pecah suku tengah**

Selesaikan $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

1. $a \times c = 2 \times 3 = 6$. Dua bilangan dengan hasil kali 6 dan jumlah 7: yaitu 1 dan 6.
2. Pecah suku tengah: $2x^2 + x + 6x + 3 = 0$.
3. Kelompokkan: $x(2x+1) + 3(2x+1) = 0$, jadi $(2x+1)(x+3) = 0$.
4. $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, atau $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$.

Akar-akarnya $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = -3$. Cek $x = -3$: $2 \cdot 9 - 21 + 3 = 0$. ✔

JALAN PINTAS ANCIL

Lihat $3x^2 - 5x + 2 = 0$. Jumlah koefisiennya $3 - 5 + 2 = 0$. Kalau $a + b + c = 0$, maka $x = 1$ **pasti** akar, karena memasukkan $x = 1$ menghasilkan tepat $a + b + c$. Akar yang lain selalu $\frac{c}{a}$, di sini $\frac{2}{3}$ (alasannya ada di 11.6). Coba juga: $5x^2 + 2x - 7 = 0$ punya akar 1 dan $-\frac{7}{5}$.

ADU CEPAT **Akar terbesar, secepat kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari dua bilangan yang hasil kalinya c dan jumlahnya b, lalu balik tandanya. Contoh: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, akar terbesarnya 3.

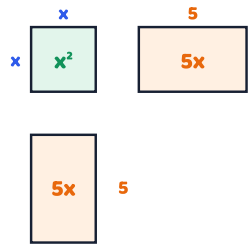
11.3 Melengkapkan kuadrat: menambal ubin yang hilang

Tidak semua persamaan kuadrat mudah difaktorkan. Coba $x^2 + 6x - 2 = 0$: tidak ada dua bilangan bulat yang hasil kalinya -2 dan jumlahnya 6. Untuk kasus seperti ini ada trik berumur lebih dari seribu tahun: **ubah ruas kiri menjadi persegi sempurna**.

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 820 M, Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi** menulis buku di Baghdad yang judulnya memuat kata *al-jabr*, artinya "memulihkan" atau "melengkapkan". Dari kata itulah lahir istilah **aljabar**, dan dari namanya lahir istilah **algoritma**. Al-Khwarizmi belum memakai huruf x: soalnya ditulis dengan kalimat, dan penyelesaiannya dibuktikan dengan **gambar persegi**. Jauh sebelumnya, juru tulis Babilonia (±1800 SM) sudah menyelesaikan soal sejenis di lempeng tanah liat, misalnya mencari sisi persegi bila luas dan sisinya dijumlahkan.

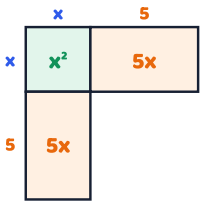
Lihat sendiri cara al-Khwarizmi menyelesaikan soalnya yang terkenal: *persegi ditambah sepuluh akarnya sama dengan 39*, yaitu $x^2 + 10x = 39$.



$x^2 + 10x = 39$

Persegi x^2 dan persegi panjang $10x$ yang dibelah dua: $5x$ dan $5x$.

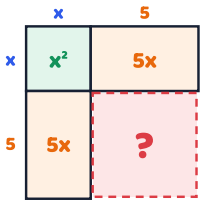
Langkah 1. Gambarlah x^2 sebagai persegi bersisi x, dan $10x$ sebagai persegi panjang $x \times 10$ yang dibelah menjadi dua persegi panjang $x \times 5$. Luas totalnya 39.



Tempel kedua 5x:

satu di kanan, satu di bawah x^2.
Hanya digeser, jadi luasnya tetap 39.

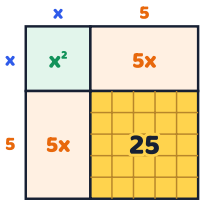
Langkah 2. Tempelkan satu persegi panjang di sisi kanan dan satu di sisi bawah persegi x^2. Ubinnya hanya digeser, jadi luas totalnya tetap 39.



Pojoknya bolong!

Kurang satu persegi $5 \times 5 = 25$ agar menjadi persegi yang utuh.

Langkah 3. Bentuknya hampir menjadi persegi besar bersisi $x + 5$, tetapi pojok kanan bawahnya kosong: sebuah persegi 5×5.

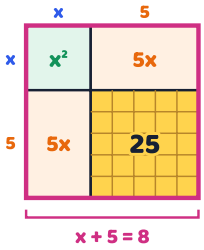


Tambal dengan 25 ubin

di kedua ruas agar tetap seimbang:

$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$

Langkah 4. Tambal pojok itu dengan 25 ubin satuan. Supaya persamaan tetap seimbang, ruas kanan juga ditambah 25: $x^2 + 10x + 25 = 64$.



Persegi besar seluas 64

pasti bersisi 8, karena $8 \times 8 = 64$.

$(x + 5)^2 = 64 \Rightarrow x + 5 = 8$

$x = 3$

Langkah 5. Persegi besar seluas 64 bersisi 8, jadi $x + 5 = 8$ dan $x = 3$. Cek: $3^2 + 10 \cdot 3 = 9 + 30 = 39$. ✔ Aljabar modern juga memberi $x + 5 = -8$, yaitu $x = -13$, tetapi al-Khwarizmi hanya mencari sisi persegi yang positif.

MELENGKAPKAN KUADRAT

Ambil **separuh** koefisien x, kuadratkan, lalu tambahkan:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

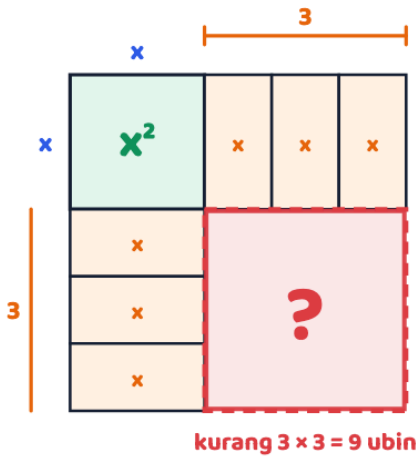
Suku $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ adalah ubin pojok yang hilang pada gambar di atas.

▾ **Cek dengan menjabarkan**

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$. Jadi $x^2 + bx$ memang sama dengan $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ dikurangi $\frac{b^2}{4}$. Dua batang $\frac{b}{2}\,x$ di kanan dan di bawah adalah suku tengah bx.

LAB MINI **Ubin aljabar: tambal pojok yang hilang**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11



x² + 6x = 16

separuh dari 6 adalah 3

ruas kanan: 16 ubin

tambalan (b/2)²	c + (b/2)²	sisi persegi besar	x positif	Tahap
9	25	5	2	pojoknya bolong!

Pilih banyak batang x (yaitu b) dan banyak ubin satuan di ruas kanan (yaitu c) untuk persamaan $x^2 + bx = c$. Tekan ▶ **Jalankan**: batang dibagi dua, ditempel, lalu pojoknya ditambal. Cari pasangan b dan c yang membuat x bilangan bulat. Apa syaratnya?

KERJAKAN BERSAMA **Akar yang tidak bulat**

Selesaikan $x^2 - 6x + 4 = 0$ dengan melengkapkan kuadrat.

1. Pindahkan konstanta: $x^2 - 6x = -4$.
2. Separuh dari -6 adalah -3, kuadratnya 9. Tambahkan 9 pada kedua ruas: $x^2 - 6x + 9 = 5$.
3. Ruas kiri sekarang persegi sempurna: $(x - 3)^2 = 5$.
4. Tarik akar, jangan lupa ±: $x - 3 = \pm\sqrt{5}$, jadi $x = 3 \pm \sqrt{5}$.

$x = 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}236$ **atau** $x = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}764$**. Akar-akar ini tidak bisa ditemukan dengan menebak pasangan bilangan bulat!**

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Saat menarik akar dari $(x - 3)^2 = 5$, tulis $x - 3 = \pm\sqrt{5}$, bukan hanya $+\sqrt{5}$. Bilangan negatif yang dikuadratkan juga menghasilkan bilangan positif, jadi kedua tanda harus diperiksa.

11.4 Rumus abc: satu rumus untuk semua

Kalau trik melengkapkan kuadrat diterapkan pada bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$, kita mendapat satu rumus yang selalu berhasil. Di Indonesia rumus ini akrab disebut **rumus abc**.

☆ **RUMUS ABC**

Akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tanda $\pm$ menghasilkan dua akar: satu dengan $+$ dan satu dengan $-$.

▾ **Bukti: melengkapkan kuadrat untuk bentuk umum**

Bagi kedua ruas dengan a, lalu pindahkan konstanta:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Separuh koefisien x adalah $\frac{b}{2a}$. Tambahkan kuadratnya pada kedua ruas:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad\Longrightarrow\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tarik akar kedua ruas (ingat ±), lalu kurangi dengan $\frac{b}{2a}$:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bahasa sederhana · Rumus abc itu seperti resep masakan: masukkan tiga bahan (a, b, c), ikuti langkahnya, dan dua akar pun matang. Tidak perlu menebak-nebak pasangan bilangan.

CONTOH **Memakai rumus abc**

Selesaikan $2x^2 - 3x - 2 = 0$ dengan rumus abc.

1. Baca koefisien: $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$.
2. Hitung bagian di bawah akar: $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$.
3. $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 \pm 5}{4}$.
4. $x_1 = \dfrac{3 + 5}{4} = 2$ dan $x_2 = \dfrac{3 - 5}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Akar-akarnya 2 dan $-\frac{1}{2}$. Cek $x = 2$: $2 \cdot 4 - 6 - 2 = 0$. ✔

RUMUS HIDUP

Rumus abc

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ambil lawan dari b, tambahkan akar diskriminan, lalu bagi dengan dua kali a. Ganti + dengan − untuk mendapat akar yang lain.

- a Koefisien a
- b Koefisien b
- c Konstanta c
- x_1 Akar x_1 (tanda +)

AKAR X_1 (TANDA +)

3

dua akar real berbeda

✨ $b^2 - 4ac$ kuadrat sempurna: akarnya rasional

Bagian di bawah akar: $b^2 - 4ac$ = **25**. Akar pertama x_1 = **3**, akar kedua x_2 = **-2**. Jumlah kedua akar selalu $-b/a$ = **1**. Jika muncul '—', bagian di bawah akar negatif: tidak ada bilangan real yang kuadratnya negatif, jadi persamaan ini tidak punya akar real.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RUMUS-ABC

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Pada rumus abc, $-b$ berarti **lawan** dari b: kalau $b = -3$, maka $-b = 3$, bukan -3. Garis pecahan juga membagi **seluruh** pembilang $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ dengan $2a$, bukan hanya bagian akarnya. Selalu tulis $(-3)^2$ dengan kurung agar tidak tergelincir menjadi -9.

Bentuk persamaan	Contoh	Jurus tercepat
tanpa suku x ($b = 0$)	$x^2 - 49 = 0$	pindahkan, lalu tarik akar: $x = \pm 7$
tanpa konstanta ($c = 0$)	$x^2 - 5x = 0$	keluarkan x: $x(x - 5) = 0$
ada jodoh bilangan bulat	$x^2 + 5x - 150 = 0$	faktorkan: $(x + 15)(x - 10) = 0$
$a + b + c = 0$	$3x^2 - 5x + 2 = 0$	jalan pintas Ancil: $x = 1$ dan $x = \frac{c}{a}$
selain itu	$x^2 - 6x + 4 = 0$	rumus abc atau melengkapkan kuadrat

BILANGAN PALING CANTIK

Potong sebuah persegi dari persegi panjang. Kalau sisa potongannya **sebangun** dengan persegi panjang semula, perbandingan panjang : lebarnya disebut **rasio emas** φ. Syaratnya ternyata persamaan kuadrat $\varphi^2 = \varphi + 1$, atau $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Rumus abc memberi $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Rasio ini berkaitan dengan pola susunan biji bunga matahari dan sering dipakai dalam seni serta desain.

11.5 Diskriminan: meramal jenis akar

Perhatikan bagian di bawah tanda akar pada rumus abc: $b^2 - 4ac$. Bagian kecil ini menentukan nasib akar-akarnya, sehingga diberi nama khusus.

DEFINISI

Diskriminan persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah

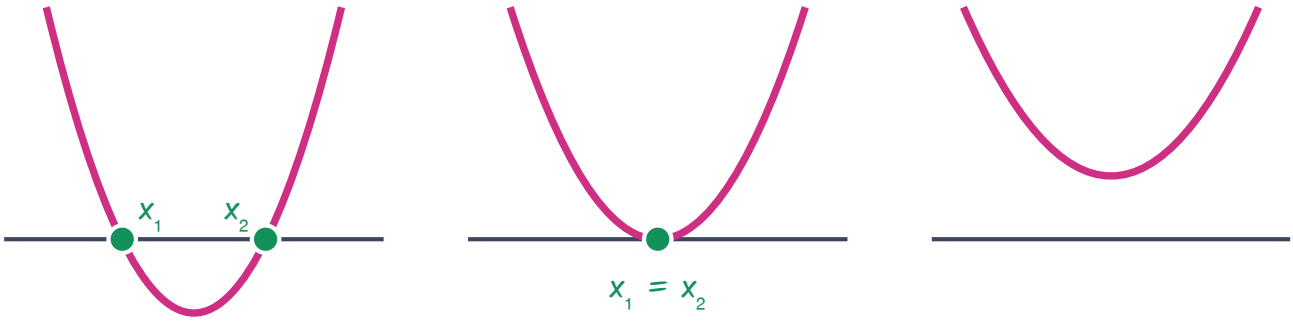
$$D = b^2 - 4ac.$$

Kata *diskriminan* berasal dari bahasa Latin *discriminare*, "membedakan": bilangan ini membedakan jenis akar tanpa harus menghitung akarnya.

JENIS AKAR MENURUT DISKRIMINAN

- $D > 0$: **dua akar real berbeda** (karena $\sqrt{D}$ ditambah dan dikurangkan);
- $D = 0$: **akar kembar**, yaitu $x = -\frac{b}{2a}$ (karena $\pm\sqrt{0}$ sama saja);
- $D < 0$: **tidak ada akar real** (tidak ada bilangan real yang kuadratnya negatif).

Bila a, b, c bulat dan D bilangan kuadrat sempurna (0, 1, 4, 9, 16, ...), akar-akarnya rasional sehingga persamaan itu bisa difaktorkan.



D > 0
dua akar real berbeda

D = 0
akar kembar

D < 0
tidak ada akar real

Akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah titik potong grafik $y = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu-x. Diskriminan memberi tahu ada berapa titik potong.

RUMUS HIDUP **Diskriminan**

$$D = b^2 - 4ac$$

Kuadrat b dikurangi empat kali a kali c. Tandanya meramal jenis akar sebelum kamu menghitungnya.

- a Koefisien a
- b Koefisien b
- c Konstanta c
- D Diskriminan

DISKRIMINAN
0

akar kembar

Dengan a = **1**, b = **4**, c = **4**: b^2 = **16** dan 4ac = **16**, jadi D = **0**. **Nol: grafiknya hanya menyinggung sumbu-x.**

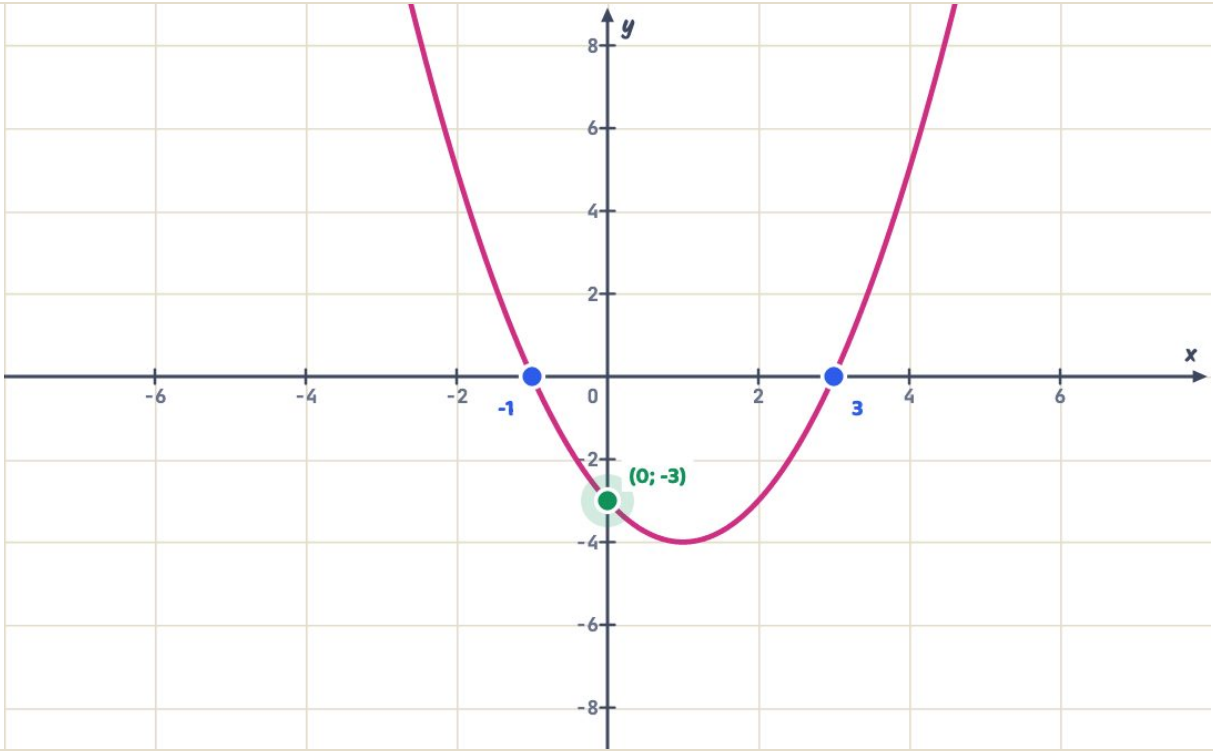
RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DISKRIMINAN-KUADRAT

GRAFIK HIDUP **Akar = titik potong dengan sumbu-x**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$D = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$$



D > 0: memotong sumbu-x di dua titik

Diskriminan D	x_1 (kecil)	x_2 (besar)
16	-1	3

Seret titik hijau di sumbu-y naik-turun. Parabola ikut bergeser, dan akarnya bisa berkurang dari dua menjadi satu lalu hilang. Perhatikan tanda D setiap kali itu terjadi. Akar ditandai "—" jika tidak ada akar real.

COBA SENDIRI **Mencari parameter untuk akar kembar**

Untuk nilai k berapa persamaan $x^2 + kx + 9 = 0$ memiliki akar kembar? Tentukan juga akarnya.

1. Akar kembar berarti $D = 0$: $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, jadi $k^2 = 36$.
2. $k = 6$ atau $k = -6$. Ada dua nilai!
3. Untuk $k = 6$: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0$, akarnya $x = -3$. Untuk $k = -6$: $(x - 3)^2 = 0$, akarnya $x = 3$.

$k = \pm 6$. Akar kembar selalu $x = -\frac{b}{2a}$: di sini -3 atau 3.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

KALAU $D < 0$: LAHIRNYA BILANGAN IMAJINER

Persamaan $x^2 + 1 = 0$ tidak punya akar real, karena tidak ada bilangan real yang kuadratnya -1. Pada abad ke-16, matematikawan Italia seperti Cardano dan Bombelli memberanikan diri menghitung dengan "akar dari bilangan negatif" dan ternyata hasilnya konsisten. Kini kita menulis $i = \sqrt{-1}$, sehingga akar $x^2 + 1 = 0$ adalah $\pm i$. Contoh lain: $x^2 - 2x + 5 = 0$ memiliki $D = -16$ dan akar $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i$. Jadi, $D < 0$ bukan berarti "tidak ada jawaban", melainkan "tidak ada jawaban *real*". Bilangan kompleks dibahas di Bab 37.

TRIK KAK LINTANG: HITUNG D DULU

Sebelum bersusah payah, hitung D. Kalau D negatif, berhenti: tidak ada akar real. Kalau D kuadrat sempurna, coba faktorkan karena pasti bisa. Kalau tidak, langsung pakai rumus abc dan $\sqrt{D}$ sudah kamu pegang.

11.6 Jumlah dan hasil kali akar: rahasia Vieta

Perhatikan $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Akar-akarnya 2 dan 3. Jumlahnya 5, hasil kalinya 6. Bukankah angka 5 dan 6 sudah terlihat di persamaannya? Ini bukan kebetulan.

TEOREMA VIETA UNTUK PERSAMAAN KUADRAT

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar $ax^2 + bx + c = 0$, maka

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{dan} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Bukti dengan membandingkan koefisien

Karena x_1 dan x_2 adalah akarnya, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Jabarkan ruas kanan:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a\,x_1x_2.$$

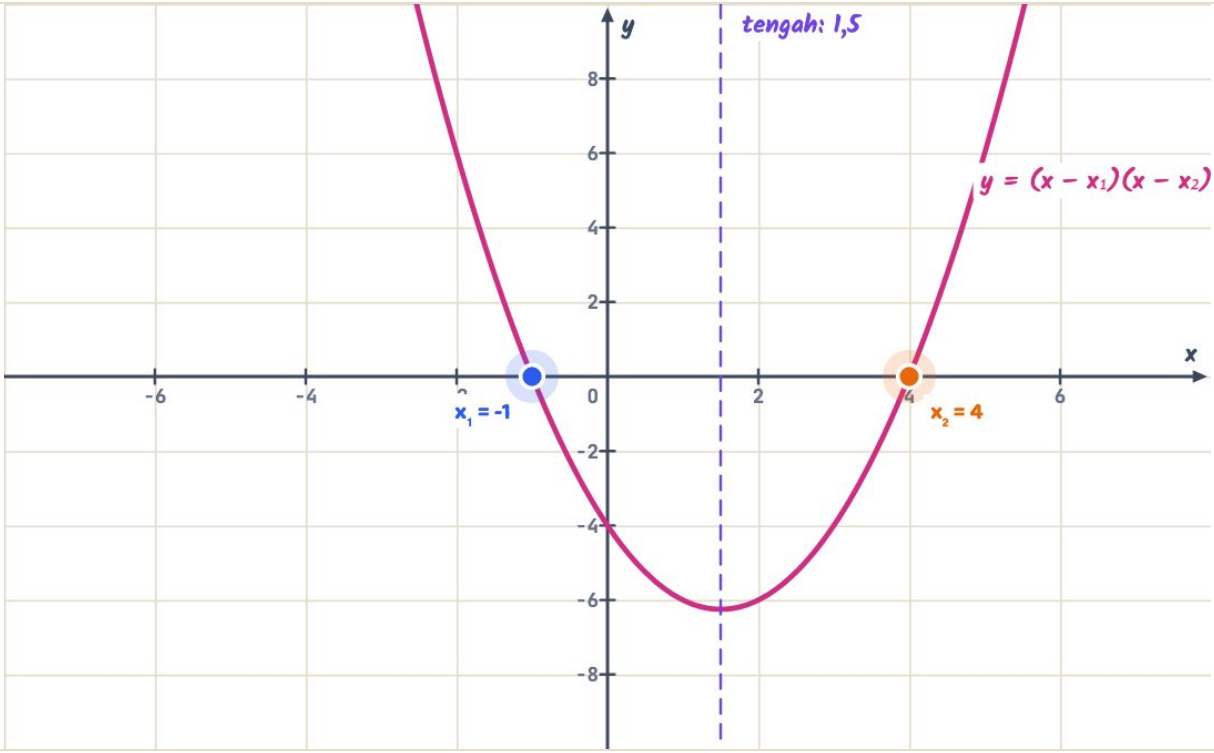
Bandingkan koefisien x: $b = -a(x_1 + x_2)$, jadi $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Bandingkan konstanta: $c = a\,x_1x_2$, jadi $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Kamu juga bisa menjumlahkan dan mengalikan kedua akar dari rumus abc; hasilnya sama.

GRAFIK HIDUP **Seret akarnya, lihat persamaannya berubah**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2$$

$$(x + 1)(x - 4) = x^2 - 3\,x - 4$$



hasil kali negatif ⇒ akarnya berlawanan tanda

$x_1 + x_2$ (= −b)	$x_1 \cdot x_2$ (= c)
3	-4

Seret kedua titik di sumbu-x. Koefisien x selalu **lawan** dari jumlah akar, dan konstanta selalu hasil kali akar. Garis ungu menunjukkan titik tengah kedua akar; ingat-ingat garis ini untuk Bab 12!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Jumlah akar adalah $-\frac{b}{a}$, **bukan** $\frac{b}{a}$. Untuk $x^2 - 8x + 5 = 0$, jumlah akarnya 8, bukan -8. Pastikan juga persamaannya sudah dalam bentuk baku sebelum membaca a, b, c.

KERJAKAN BERSAMA

Menyusun persamaan baru tanpa mencari akar

Akar-akar $x^2 - 5x + 3 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $x_1 + 2$ dan $x_2 + 2$.

1. Dari Vieta: $x_1 + x_2 = 5$ dan $x_1 x_2 = 3$.
2. Jumlah akar baru: $(x_1 + 2) + (x_2 + 2) = 5 + 4 = 9$.
3. Hasil kali akar baru: $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 3 + 10 + 4 = 17$.
4. Persamaan dengan jumlah akar S dan hasil kali P adalah $x^2 - Sx + P = 0$.

$x^2 - 9x + 17 = 0$. **Kita tidak pernah menghitung akarnya ($\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$) sama sekali!**

RUMUS HIDUP

Jumlah kuadrat akar, tanpa mencari akar

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

Kuadratkan jumlah akar, lalu kurangi dua kali hasil kalinya. Kamu tidak perlu tahu akarnya satu per satu.

- a Koefisien a
- b Koefisien b
- c Konstanta c
- $x_1^2 + x_2^2$ Jumlah kuadrat akar

JUMLAH KUADRAT AKAR

7

akar real dan hasilnya bulat

Jumlah akar $-b/a$ = **3** dan hasil kali c/a = **1**. Jadi $x_1^2 + x_2^2 = (3)^2 - 2 \times (1)$ = **7**. **Kedua akarnya real.**

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VIETA-KUADRAT-AKAR

TAMU DARI MASA LALU

Rumus jumlah dan hasil kali akar dinamai menurut **François Viète** (1540–1603), ahli hukum Prancis yang juga terkenal memecahkan sandi rahasia musuh untuk rajanya. Viète termasuk orang pertama yang memakai **huruf** untuk koefisien, bukan hanya untuk bilangan yang dicari. Berkat gagasan itu, kita bisa menulis satu rumus untuk *semua* persamaan kuadrat sekaligus.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BARISAN AJAIB DARI AKAR IRASIONAL

Akar-akar $x^2 - 3x + 1 = 0$ adalah $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, dua bilangan irasional. Misalkan $s_n = x_1^n + x_2^n$. Karena setiap akar memenuhi $x^2 = 3x - 1$, kalikan dengan x^{n-2} dan jumlahkan untuk kedua akar:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2}, \qquad s_0 = 2,\ s_1 = x_1 + x_2 = 3.$$

Hasilnya $s_2 = 7$, $s_3 = 18$, $s_4 = 47$, $s_5 = 123$, $s_6 = 322$, ... Semuanya **bilangan bulat**, padahal tiap akarnya irasional! Cek s_2 dengan Vieta: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 - 2 = 7$. ✔ Teknik "jumlah pangkat" ini sering muncul di soal olimpiade, misalnya untuk menghitung $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

11.7 Memodelkan dunia nyata: kolam, bingkai, dan lompat batu

Banyak masalah sehari-hari bermuara pada persamaan kuadrat. Resepnya selalu sama: **(1)** misalkan besaran yang dicari dengan x; **(2)** susun persamaan dari cerita; **(3)** selesaikan; **(4)** periksa apakah kedua akar masuk akal. Langkah keempat sering dilupakan!

COBA SENDIRI **Jalan setapak di sekeliling kolam**

Pak Darto membuat kolam ikan berukuran 12 m × 8 m. Di sekelilingnya ia membuat jalan setapak dengan lebar yang sama, x meter. Luas kolam beserta jalan setapaknya 140 m². Berapa lebar jalan setapak itu?

1. Ukuran luar menjadi $(12 + 2x)$ m × $(8 + 2x)$ m, karena jalan ada di kedua sisi.
2. $(12 + 2x)(8 + 2x) = 140 \Rightarrow 96 + 40x + 4x^2 = 140 \Rightarrow 4x^2 + 40x - 44 = 0$.
3. Bagi dengan 4: $x^2 + 10x - 11 = 0$. Karena $1 + 10 - 11 = 0$, jalan pintas Ancil memberi $x = 1$ dan $x = -11$.
4. Lebar tidak mungkin negatif, jadi $x = 1$. Cek: $14 \times 10 = 140$. ✔

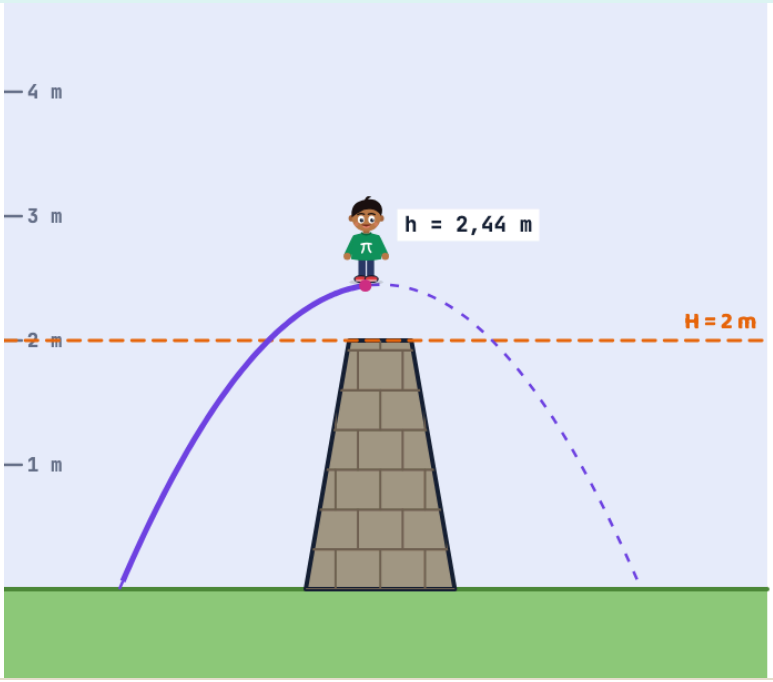
Jalan setapaknya selebar 1 m. Akar -11 ditolak karena tidak bermakna sebagai lebar.

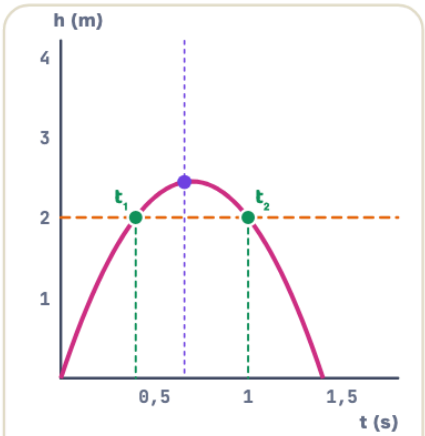
MATEMATIKA NUSANTARA

Di Pulau Nias, Sumatra Utara, ada tradisi **lompat batu** (*fahombo*). Para pemuda berlari, menjejak batu kecil, lalu melompati tumpukan batu setinggi sekitar 2 meter. Dulu, lompatan ini menjadi tanda bahwa seorang pemuda dianggap sudah dewasa. Kita bisa memodelkannya secara sederhana: tinggi kaki pelompat $h = vt - 5t^2$ meter. Agar kaki melewati ketinggian 2 m, persamaan $5t^2 - vt + 2 = 0$ harus punya akar real, yaitu $D = v^2 - 40 \geq 0$. Jadi kecepatan ke atas minimal $\sqrt{40} \approx 6{,}3$ m/s. Diskriminan menentukan lolos atau tidaknya sebuah lompatan!

LAB MINI — Lompat batu Nias: lolos atau menabrak?

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11





$5t^2 - 7t + 2 = 0$

$D = 7^2 - 20 \times 2$

$= 9$

D > 0: dua akar ⇒ lolos

v minimum: √(20H) ≈ 6,32 m/s

D = v² − 20H	t₁ (naik)	t₂ (turun)	kaki di atas H selama
9	0,4 s	1 s	0,6 s

Hasil

tekan ▶ untuk melompat

Atur kecepatan lompat ke atas v dan tinggi batu H, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Model sederhana: batu pijakan dan lipatan kaki diabaikan. Lihat grafik di kanan: lompatan lolos tepat ketika $D = v^2 - 20H$ tidak negatif. Berapa v terkecil yang masih lolos untuk $H = 2$ m?

Petak sawah & kolam

Lebar pematang atau jalan setapak yang seragam di sekeliling petak selalu menghasilkan persamaan kuadrat, seperti kolam Pak Darto.

Bingkai foto & batik

Penjual bingkai menghitung lebar list agar luas bingkai sesuai pesanan: $(p + 2x)(l + 2x)$ adalah ekspresi kuadrat.

Tendangan & lompatan

Lama bola atau atlet di udara didapat dari akar $vt - 5t^2 = 0$, dan kapan mencapai ketinggian tertentu dari akar $vt - 5t^2 = H$.

Jarak pengereman

Jarak henti motor bergantung pada kuadrat kecepatannya. Kecepatan maksimum agar masih bisa berhenti sebelum zebra cross dicari dengan rumus abc.

Harga & pendapatan

Pedagang es kelapa yang menaikkan harga akan kehilangan sebagian pembeli. Pendapatan = harga × banyak terjual, yaitu ekspresi kuadrat dalam besar kenaikan harga.

MITOS

"Kalau $x^2 = 16$, jawabannya $x = 4$."

FAKTA

Kurang lengkap. $(-4)^2 = 16$ juga, jadi $x = 4$ atau $x = -4$. Akar negatif baru boleh dibuang kalau soalnya tentang panjang, waktu, atau besaran lain yang tidak mungkin negatif.

MITOS

"Kalau diskriminannya negatif, berarti soalnya salah."

FAKTA

Tidak salah. $D < 0$ memberi informasi penting: tidak ada akar real. Misalnya, bola memang tidak pernah mencapai ketinggian itu. Dengan bilangan kompleks (Bab 37), persamaannya tetap punya akar.

MITOS

"Rumus abc ditemukan oleh satu orang jenius sekaligus."

FAKTA

Rumus ini dibangun bertahap selama ribuan tahun: dari juru tulis Babilonia, matematikawan India seperti Brahmagupta, al-Khwarizmi di Baghdad, hingga penulisan dengan huruf ala Viète dan Descartes di Eropa. Nama "abc" hanyalah julukan dari huruf koefisiennya.

Cek Cepat

Akar-akar persamaan $x^2 - 9x + 20 = 0$ adalah...

- -4 dan -5
- 2 dan 10
- 4 dan 5
- 1 dan 20

Persamaan $2x^2 + 3x + 5 = 0$ memiliki...

- tidak ada akar real
- akar kembar
- dua akar real berbeda
- tepat satu akar positif

Jumlah akar-akar persamaan $3x^2 - 12x + 7 = 0$ adalah...

-4

$\frac{7}{3}$

12

4

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: detektif lemparan bola

Bahan: bola kecil (bola tenis atau bola plastik), HP dengan stopwatch atau mode video lambat, teman, buku catatan.

1. Di halaman yang lapang, lempar bola tegak lurus ke atas. Mintalah teman mencatat lamanya bola di udara, T detik, dari lepas tangan sampai kembali ke ketinggian tangan.
2. Ulangi 3 kali dan hitung rata-rata T.
3. Modelkan tinggi bola di atas tangan: $h = vt - 5t^2$. Karena $h = 0$ saat $t = T$, tunjukkan bahwa $v = 5T$.
4. Hitung tinggi maksimum bola (terjadi saat $t = \frac{T}{2}$). Contoh: jika $T = 2$ s, maka $v = 10$ m/s dan tinggi maksimumnya 5 m.
5. Pilih satu ketinggian yang lebih rendah daripada tinggi maksimum, lalu hitung dua waktu saat bola berada di ketinggian itu dengan rumus abc. Untuk contoh tadi, ketinggian 3,2 m dicapai saat $t = 0{,}4$ s dan $t = 1{,}6$ s. Bandingkan hasil hitunganmu dengan rekaman video lambat.

Pertanyaan: Mengapa selalu ada dua waktu untuk satu ketinggian (kecuali di puncak)? Mengapa kedua waktu itu selalu berjumlah T? Petunjuk: gunakan rumus jumlah akar dari 11.6.

RINGKASAN KILAT

Bab 11 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- mengenali **persamaan kuadrat** $ax^2 + bx + c = 0$ dan menyusunnya dari masalah luas atau gerak
- menyelesaikan persamaan kuadrat dengan **pemfaktoran** memakai sifat perkalian nol
- **melengkapkan kuadrat** dengan model ubin aljabar dan menurunkan **rumus abc**
- memakai **diskriminan** untuk meramal jenis akar tanpa menghitungnya

- memakai **jumlah dan hasil kali akar** untuk menyusun persamaan baru dan menghitung ekspresi simetris

🔑 Istilah kunci

persamaan kuadrat · bentuk baku · konstanta · akar · pecah suku tengah · rumus abc · rasio emas · Diskriminan

🧮 Rumus penting

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Rumus abc. Ambil lawan dari b, tambahkan akar diskriminan, lalu bagi dengan dua kali a. Ganti + dengan – untuk mendapat akar yang lain.

$$D = b^2 - 4ac$$

Diskriminan. Kuadrat b dikurangi empat kali a kali c. Tandanya meramal jenis akar sebelum kamu menghitungnya.

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

Jumlah kuadrat akar, tanpa mencari akar. Kuadratkan jumlah akar, lalu kurangi dua kali hasil kalinya. Kamu tidak perlu tahu akarnya satu per satu.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Baca a, b, dan c hanya setelah ruas kanan bernilai nol.
- Sifat perkalian nol hanya berlaku untuk nol.
- Saat menarik akar dari $(x-3)^2 = 5$, tulis $x - 3 = \pm\sqrt{5}$, bukan hanya $+\sqrt{5}$.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=11

🧩 Teka-teki untuk Bab 12

Air mancur di taman kota menyemburkan air yang tingginya $h = 6x - x^2$ meter, dengan x jarak mendatar dari pipa (meter). Lengkung airnya cantik sekali, mirip lengkung jembatan di atas sungai. Tanpa menggambar dan tanpa mencoba-coba, di jarak berapa air mencapai titik tertinggi, dan setinggi apa?

▼ Intip petunjuk

Akar-akarnya $6x - x^2 = 0$ adalah $x = 0$ (air keluar dari pipa) dan $x = 6$ (air jatuh kembali). Lengkung seperti ini **simetris**, jadi puncaknya tepat di tengah kedua akar: $x = 3$, dan tingginya $h = 18 - 9 = 9$ m. Ingat Vieta: titik tengah akar adalah $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Bab 12 membahas parabola, titik puncak, dan lengkung jembatan selengkapnya!

BAB 12 · ALJABAR & FUNGSI

12 Fungsi Kuadrat & Parabola: Rahasia Lengkung Air Mancur



Semburan air mancur, lengkung jembatan, lemparan bola, sampai antena TV di atap rumah: semuanya berbentuk lengkung yang sama. Lengkung itu menyimpan satu titik istimewa yang bisa memberitahumu di mana air jatuh, berapa luas kandang terbesar, dan berapa harga jual terbaik.

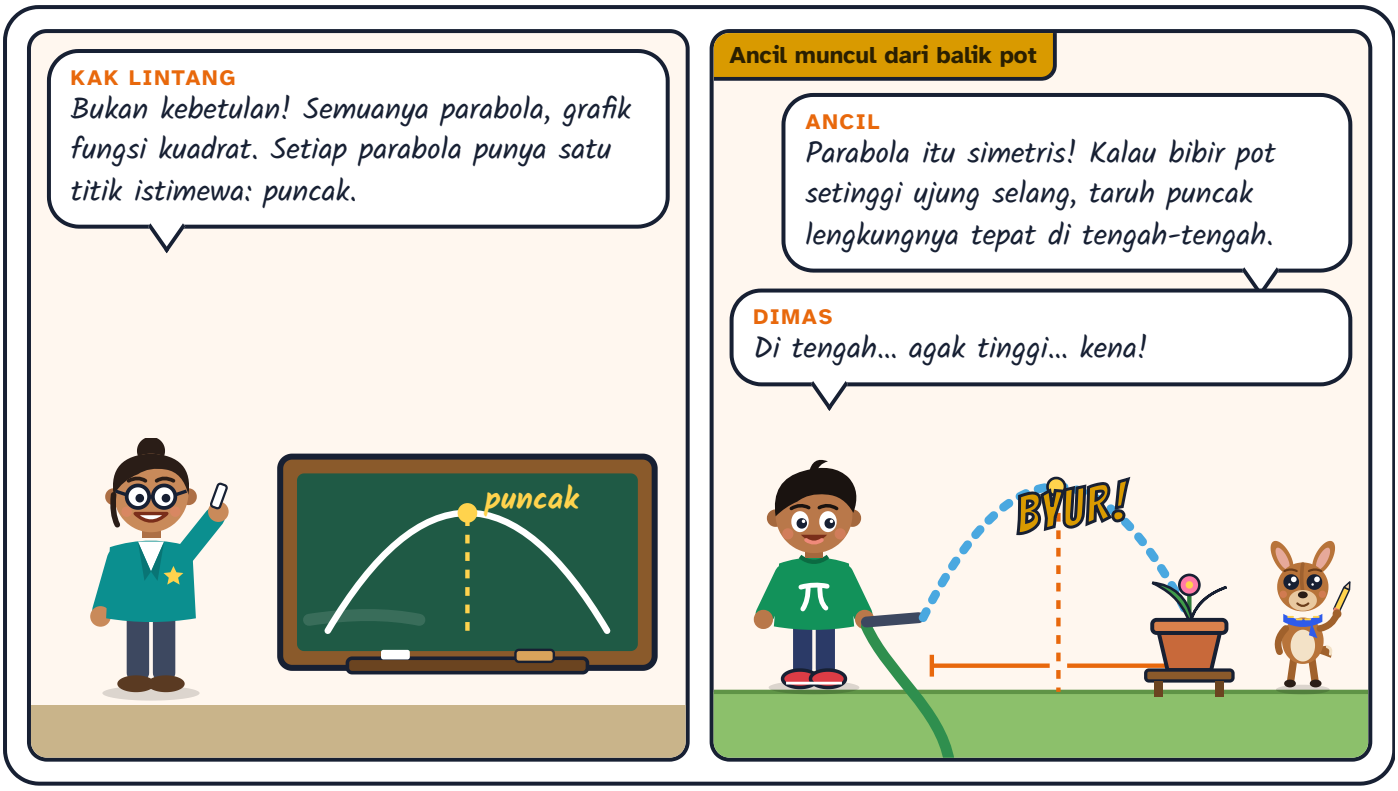
Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **fungsi kuadrat** dan menggambar grafiknya, yaitu **parabola**;
- membaca **titik puncak**, **sumbu simetri**, dan arah buka parabola dari bentuk puncak $y = a(x - h)^2 + k$ maupun bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$;
- menyusun fungsi kuadrat dari titik puncak, akar-akar, atau tiga titik;
- menyelesaikan soal **optimasi**: luas terbesar, untung terbanyak, lemparan tertinggi;
- menyelesaikan **pertidaksamaan kuadrat** dengan membaca grafik.

SELANG YANG BANDEL

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Sebuah bola ditendang dari tanah dan mencapai titik tertingginya tepat 2 detik kemudian. Kapan bola itu menyentuh tanah lagi? (Abaikan hambatan udara.)

- Kurang dari 4 detik, karena bola turun lebih cepat daripada saat naik.
- Tepat 4 detik setelah ditendang.
- Lebih dari 4 detik, karena bola melambat di puncak.
- Tidak bisa ditentukan tanpa mengetahui kecepatan tendangannya.

Jawabannya: tepat 4 detik. Grafik tinggi bola terhadap waktu berbentuk parabola, dan parabola selalu simetris terhadap garis tegak yang melewati puncaknya. Karena bola berangkat dan mendarat di ketinggian yang sama (tanah), waktu naik (2 detik) sama dengan waktu turun (2 detik). Di bab ini kamu akan melihat mengapa simetri ini selalu berlaku, lalu memakainya sebagai jalan pintas.

12.1 Parabola: lengkung berbentuk U

Di Bab 11 kamu mencari nilai x yang membuat $ax^2 + bx + c$ bernilai nol. Sekarang kita biarkan x bergerak bebas dan melihat **semua** nilai $ax^2 + bx + c$ sekaligus dalam bentuk grafik. Hasilnya adalah lengkung yang muncul di air mancur, lemparan bola, dan jembatan.

DEFINISI

Fungsi kuadrat adalah fungsi berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Grafiknya berupa lengkung yang disebut **parabola**. Titik paling bawah (atau paling atas) parabola disebut **titik puncak**, dan garis tegak yang melalui puncak disebut **sumbu simetri**.

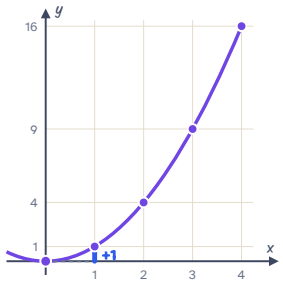
Kita mulai dari fungsi kuadrat yang paling sederhana, $y = x^2$. Buat tabel nilainya, lalu perhatikan dua baris terbawah.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	**0**	1	4	9
perubahan y		−5	−3	−1	+1	+3	+5
beda kedua			+2	+2	+2	+2	+2

Ada dua hal menarik. Pertama, tabelnya **simetris**: $x = 2$ dan $x = -2$ sama-sama menghasilkan 4. Kedua, perubahan nilai y membentuk barisan $-5, -3, -1, 1, 3, 5$ yang selalu bertambah 2. Untuk nilai x yang berjarak sama, ciri ini disebut **beda kedua tetap**, dan inilah sidik jari setiap fungsi kuadrat.

Bahasa sederhana · Gampangnya, parabola itu seperti huruf U (atau U terbalik). Sisi kiri dan kanannya kembar, seperti bayangan di cermin. Garis cerminnya disebut **sumbu simetri**, dan titik paling bawah (atau paling atas) disebut **puncak**.

Mengapa naiknya selalu 1, 3, 5, 7, ...? Lihat bukti tanpa kata berikut.



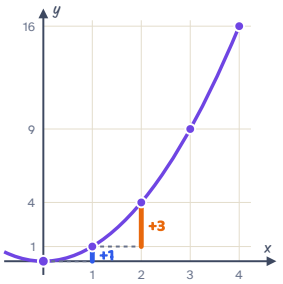
Mulai dari puncak (0, 0).

Melangkah 1 ke kanan, naik 1.

Persegi 1 × 1 (biru).

$1 = 1^2$

Langkah 1. Grafik $y = x^2$ dimulai dari puncak $(0, 0)$. Melangkah 1 satuan ke kanan, grafiknya naik 1 satuan. Di sebelah kanan, kita mulai menyusun persegi dari satu kotak.



Langkah ke-2: naik 3.

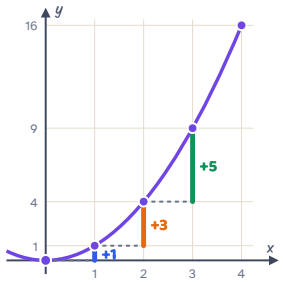
Potongan L oranye = 3 kotak.

Jadilah persegi 2 × 2 = 4.

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

Langkah 2. Dari $x = 1$ ke $x = 2$, nilai y naik dari 1 ke 4, yaitu naik 3. Tambahkan potongan berbentuk L berisi 3 kotak: jadilah persegi 2×2.



Langkah ke-3: naik 5.

Potongan L hijau = 5 kotak.

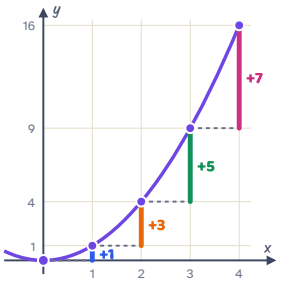
Jadilah persegi 3 × 3 = 9.

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

Langkah 3. Dari $x = 2$ ke $x = 3$, grafiknya naik 5 (dari 4 ke 9). Potongan L berikutnya berisi 5 kotak dan menghasilkan persegi 3×3.



Langkah ke-4: naik 7.

Naiknya 1, 3, 5, 7: ganjil berurutan! 4 × 4 = 16 kotak.

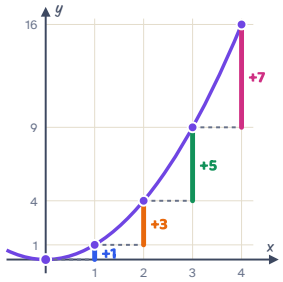
$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Langkah 4. Dari $x = 3$ ke $x = 4$, naik 7. Kenaikannya 1, 3, 5, 7: bilangan ganjil berurutan, dan jumlahnya selalu bilangan kuadrat: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.



Kenaikan ke-n dari puncak:

$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

Naiknya selalu bertambah 2:

beda kedua tetap = ciri kuadrat!

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Langkah 5. Mengapa selalu ganjil? Kenaikan ke-n adalah $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$, jadi kenaikannya bertambah 2 setiap langkah. Pola "beda kedua tetap" ini dimiliki setiap fungsi kuadrat.

Bagaimana dengan $y = 2x^2$ atau $y = -\frac{1}{2}x^2$? Koefisien a mengatur arah dan kerampingan parabola:

- $a > 0$: parabola **terbuka ke atas** dan punya titik terendah (**minimum**);
- $a < 0$: parabola **terbuka ke bawah** dan punya titik tertinggi (**maksimum**);
- $|a|$ besar: parabola ramping; $|a|$ kecil (mendekati 0): parabola landai dan lebar.

TRIK KAK LINTANG

Bayangkan parabola sebagai wajah. Kalau a positif, parabola **tersenyum** ☺ (terbuka ke atas). Kalau a negatif, parabola **cemberut** ☹ (terbuka ke bawah). Tanda a adalah suasana hati parabola!

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 350 SM, matematikawan Yunani Menaechmus menemukan bahwa memotong kerucut dengan bidang datar dapat menghasilkan kurva-kurva istimewa: lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola. Nama *parabola* dipopulerkan oleh Apollonius dari Perga (±200 SM). Archimedes (±287–212 SM) bahkan menghitung luas daerah di dalam parabola tanpa kalkulus: luasnya tepat $\frac{4}{3}$ kali luas segitiga tertentu di dalamnya. Hampir dua ribu tahun kemudian, Galileo Galilei menunjukkan dalam bukunya (1638) bahwa benda yang dilempar melintas di sepanjang parabola, jika hambatan udara diabaikan.

Di Indonesia, piringan antena TV satelit di atap rumah bahkan disebut **antena parabola**. Namanya bukan kebetulan: penampang piringan itu memang parabola. Parabola punya satu titik istimewa bernama **fokus**. Setiap sinyal yang datang lurus dari satelit, sejajar sumbu simetri, dipantulkan tepat ke fokus. Di situlah alat penerima dipasang.

GRAFIK HIDUP

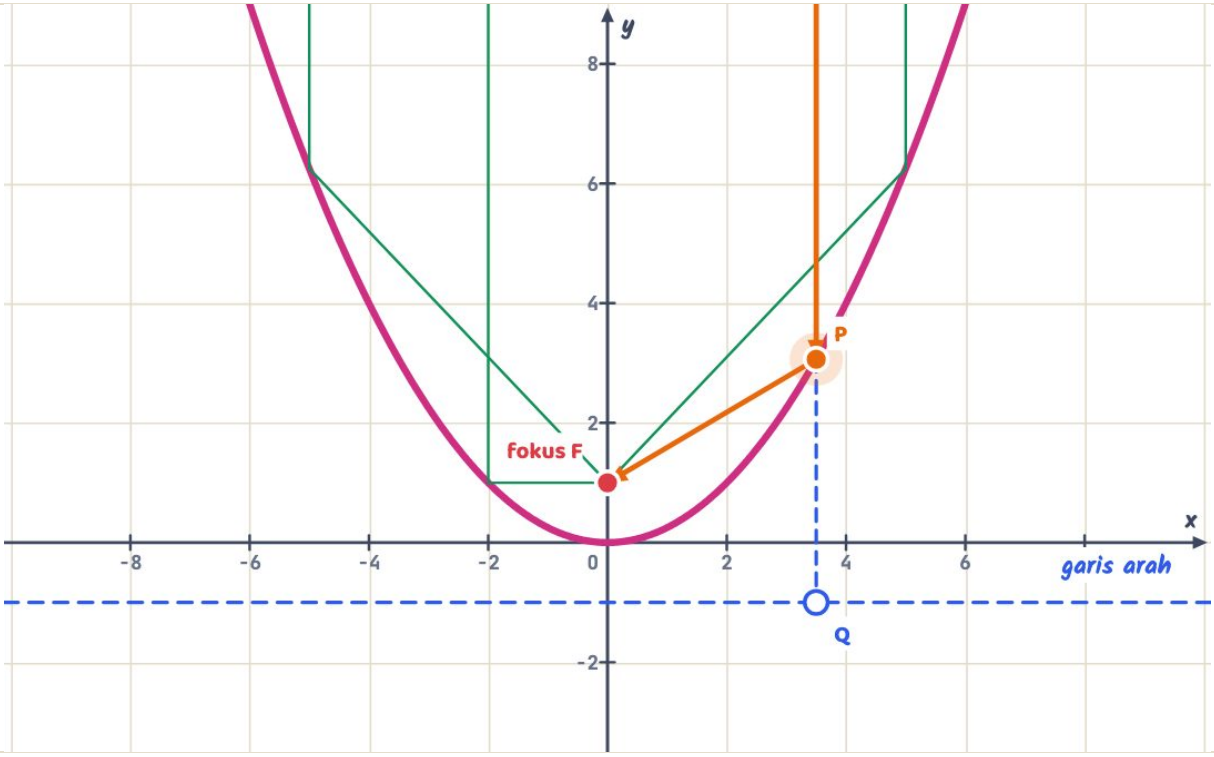
Antena parabola: semua sinyal berkumpul di fokus

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

$$y = \frac{x^2}{4}, \qquad PF = 4{,}06 = PQ$$

Sinar oranye datang tegak dari satelit, menyentuh antena di P, lalu dipantulkan ke fokus F. Sinar-sinar hijau juga berkumpul di F.



PF = PQ: setiap titik antena sama jauh dari fokus dan dari garis arah

Jarak P ke fokus (PF)	Jarak P ke garis arah (PQ)
4,063	4,063

Seret titik oranye P di sepanjang antena, atau geser p. Perhatikan dua angka di bawah: jarak P ke fokus dan jarak P ke garis arah **selalu sama**. Itulah definisi geometri parabola.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

FOKUS DAN GARIS ARAH

Parabola adalah kumpulan semua titik yang jaraknya ke sebuah titik F (*fokus*) sama dengan jaraknya ke sebuah garis (*garis arah* atau direktriks). Ambil $F(0, p)$ dan garis arah $y = -p$ dengan $p > 0$. Titik $P(x, y)$ memenuhi

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p \implies x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \implies y = \frac{x^2}{4p}.$$

Jadi $y = ax^2$ (dengan $a > 0$) adalah parabola dengan fokus $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$. Misalnya $y = x^2$ berfokus di $(0; 0{,}25)$. Sifat pantul "semua sinar sejajar menuju fokus" dipakai pada antena, lampu senter, kompor tenaga surya, dan teleskop.

12.2 Bentuk puncak: menggeser dan meregangkan parabola

Semua parabola sebenarnya "saudara" dari $y = x^2$. Mereka hanya diregangkan, dibalik, lalu digeser. Bentuk yang paling terus terang menceritakan semua itu adalah **bentuk puncak**.

Tebak Dulu!

Grafik $y = (x-3)^2$ adalah grafik $y = x^2$ yang digeser...

- 3 satuan ke kiri, karena ada tanda minus.
- 3 satuan ke kanan.
- 3 satuan ke bawah.
- 3 satuan ke atas.

Jawabannya: 3 satuan ke kanan. Banyak orang menebak "kiri" karena melihat tanda minus. Coba pikirkan: $(x-3)^2$ bernilai paling kecil, yaitu 0, saat $x = 3$, bukan saat $x = 0$. Jadi puncaknya pindah ke $x = 3$, di sebelah kanan. Grafiknya harus "berjalan" 3 langkah lebih jauh untuk mencapai nilai yang sama.

SIFAT BENTUK PUNCAK

Grafik fungsi

$$y = a(x-h)^2 + k, \qquad a \neq 0$$

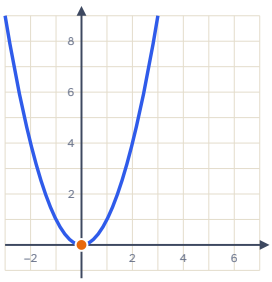
adalah parabola dengan **titik puncak** (h, k) dan **sumbu simetri** $x = h$.

- Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas dan k adalah **nilai minimum**.
- Jika $a < 0$, parabola terbuka ke bawah dan k adalah **nilai maksimum**.

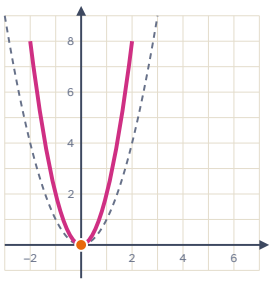
Mengapa puncaknya pasti (h, k)?

Kuadrat bilangan real tidak pernah negatif: $(x-h)^2 \geq 0$, dan nilainya 0 hanya saat $x = h$. Untuk $a > 0$, $a(x-h)^2 \geq 0$, sehingga $y = a(x-h)^2 + k \geq k$. Nilai y terkecil, yaitu k, tercapai tepat di $x = h$. Untuk $a < 0$ semua tanda berbalik, sehingga k menjadi nilai terbesar.

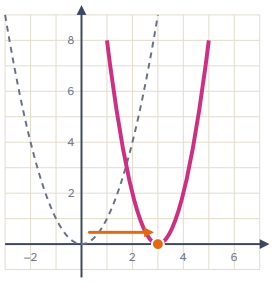
Simetrinya juga mudah dilihat. Untuk sembarang jarak d, $f(h+d) = ad^2 + k = a(-d)^2 + k = f(h-d)$. Dua titik yang sama jauh dari sumbu $x = h$ selalu sama tinggi.



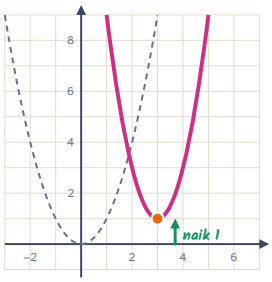
Langkah 1. Mulai dari parabola induk $y = x^2$ dengan puncak di $(0, 0)$.



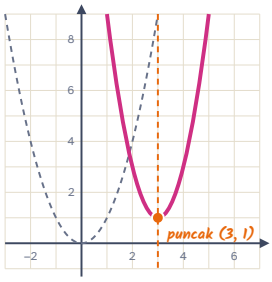
Langkah 2. Kalikan dengan $a = 2$: setiap nilai y menjadi dua kali lipat. Parabola menjadi lebih ramping, sedangkan puncaknya tetap di $(0, 0)$.



Langkah 3. Ganti x dengan $x - 3$: parabola bergeser 3 satuan ke **kanan**. Puncak pindah ke $(3, 0)$, karena $(x - 3)^2 = 0$ saat $x = 3$.



Langkah 4. Tambahkan $+1$ di luar kurung: parabola naik 1 satuan. Puncaknya sekarang $(3, 1)$.



Langkah 5. Hasilnya $y = 2(x - 3)^2 + 1$. Dari bentuk puncak, kita langsung tahu: terbuka ke atas, sumbu simetri $x = 3$, dan nilai minimum 1.

Sekarang giliranmu. Seret titik puncak ke mana saja, dan lihat rumusnya ikut berubah. Seret juga titik biru P: kembarannya, P′, selalu mengikuti di seberang sumbu simetri.

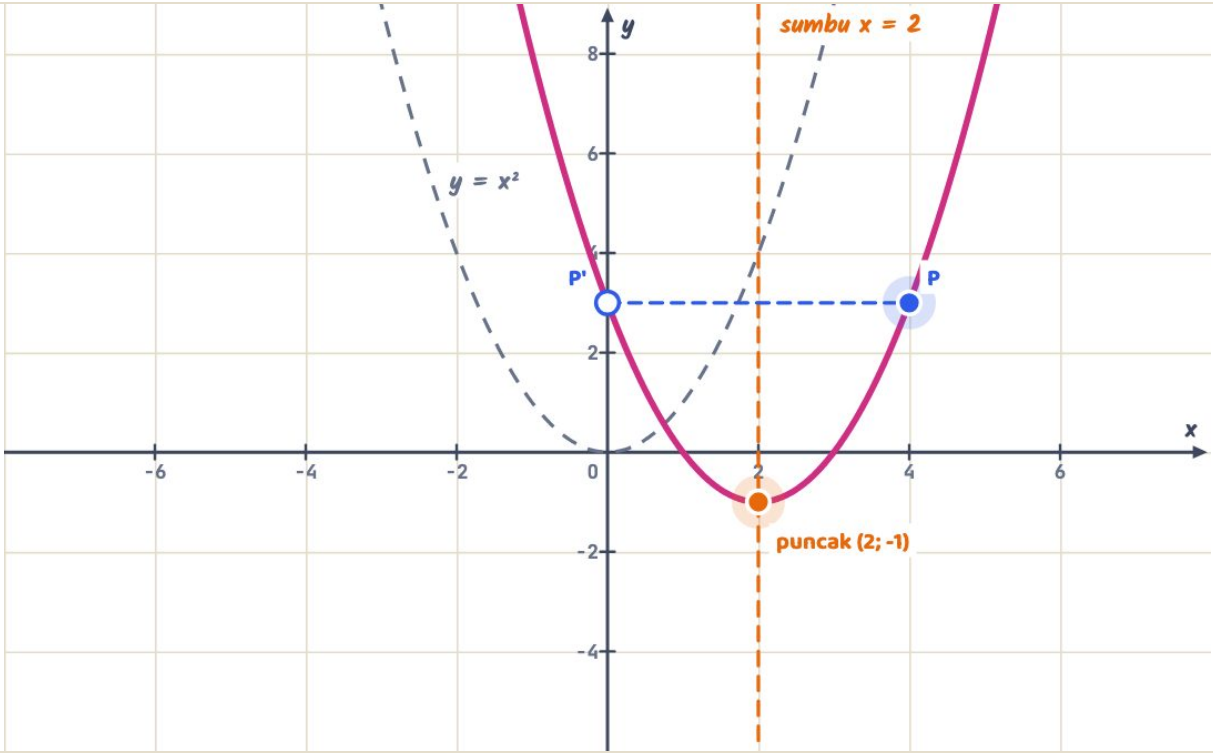
GRAFIK HIDUP **Bentuk puncak: seret puncaknya!**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

Titik oranye adalah puncak (h, k). Titik P dan kembarannya P′ selalu sama tinggi dan sama jauh dari sumbu simetri.



a > 0: terbuka ke atas, puncak = titik minimum

a = 1: kembar dengan y = x², hanya bergeser

Sumbu simetri x =	Nilai ekstrem y =	Tinggi P dan P′
2	-1	3

Tantangan: buat parabola yang puncaknya $(-3, 4)$ dan terbuka ke bawah. Lalu atur agar parabola itu melalui titik asal $(0, 0)$. Berapa nilai a yang kamu temukan?

Bahasa sederhana · Cara membaca bentuk puncak: angka di dalam kurung bersama x mengatur geser kiri-kanan (**tandanya dibalik**), angka di luar kurung mengatur geser atas-bawah (**tandanya apa adanya**), dan angka di depan kurung mengatur arah buka serta kerampingan.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pada bentuk puncak, tanda h terbalik: $(x+5)^2$ berarti puncak di $x=-5$, bukan $x=5$. Tulis ulang $y=2(x+5)^2-1$ sebagai $y=2(x-(-5))^2-1$, jadi $h=-5$ dan puncaknya $(-5,-1)$. Sebaliknya, k dibaca apa adanya: -1 berarti turun 1.

CONTOH **Membaca bentuk puncak**

Untuk $y=-2(x+1)^2+8$, tentukan arah buka, titik puncak, nilai ekstrem, serta titik potong grafik dengan sumbu-y dan sumbu-x.

1. $a=-2<0$: parabola terbuka ke bawah, jadi puncaknya titik maksimum.
2. $x+1=x-(-1)$, jadi $h=-1$ dan $k=8$. Puncak $(-1,8)$, nilai maksimum 8.
3. Sumbu-y: untuk $x=0$, $y=-2(1)^2+8=6$. Titiknya $(0,6)$.
4. Sumbu-x: $-2(x+1)^2+8=0 \Rightarrow (x+1)^2=4 \Rightarrow x+1=\pm 2$, jadi $x=1$ atau $x=-3$.

Puncak $(-1,8)$ dengan nilai maksimum 8; grafik memotong sumbu-y di $(0,6)$ dan sumbu-x di $(-3,0)$ serta $(1,0)$. Perhatikan: -3 dan 1 sama-sama berjarak 2 dari sumbu $x=-1$.

12.3 Dari bentuk umum ke titik puncak

Fungsi kuadrat lebih sering muncul dalam **bentuk umum** $y=ax^2+bx+c$. Puncaknya tidak langsung terlihat. Ada dua cara menemukannya: melengkapkan kuadrat seperti di Bab 11, atau memakai rumus yang lahir dari cara itu.

☆ **RUMUS TITIK PUNCAK**

Untuk $f(x)=ax^2+bx+c$ dengan diskriminan $D=b^2-4ac$, titik puncaknya (x_p, y_p) dengan

$$x_p=-\frac{b}{2a}, \qquad y_p=-\frac{D}{4a}=f(x_p).$$

Sumbu simetrinya garis $x=x_p$, dan y_p adalah nilai minimum (jika $a>0$) atau maksimum (jika $a<0$).

▾ **Bukti dengan melengkapkan kuadrat**

Keluarkan a dari dua suku pertama, lalu lengkapkan kuadrat:

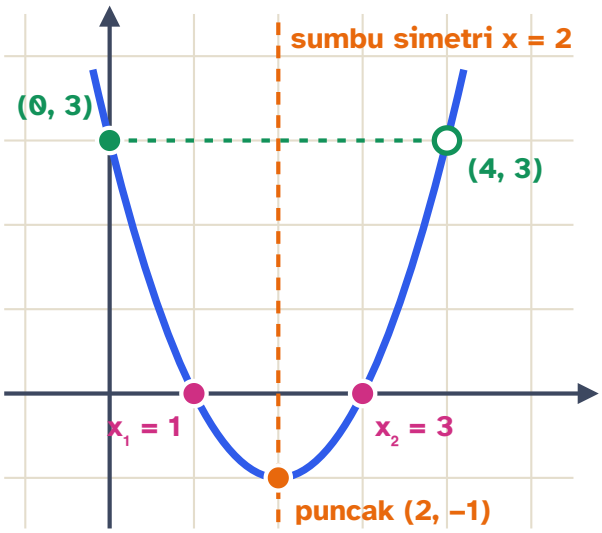
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Ini bentuk puncak dengan $h = -\dfrac{b}{2a}$ dan $k = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{D}{4a}$. Terbukti.

■

TRIK KAK LINTANG: TITIK KEMBAR

Grafik selalu memotong sumbu-y di $(0, c)$. Coba hitung $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{a^2} - b \cdot \frac{b}{a} + c = c$. Jadi $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ adalah **kembaran** titik $(0, c)$! Sumbu simetri tepat di tengah-tengah keduanya: $x = -\frac{b}{2a}$. Rumusnya tidak perlu dihafal kalau kamu ingat si kembar ini.



y = x² – 4x + 3

a = 1 > 0 → terbuka ke atas

c = 3 → memotong sumbu-y di (0, 3)

D = 4 > 0 → dua akar: 1 dan 3

x = –b/(2a) = 2 → puncak (2, –1)

(0, 3) dan (4, 3) kembar terhadap x = 2

puncak tepat di tengah akar: (1 + 3)/2 = 2

Anatomi parabola $y = x^2 - 4x + 3$. Semua titik pentingnya dapat dibaca dari a, b, dan c.

Satu fungsi kuadrat bisa ditulis dalam tiga bentuk. Setiap bentuk "membocorkan" informasi yang berbeda:

Bentuk	Rumus	Yang langsung terbaca	Contoh: fungsi yang sama
Umum	$y = ax^2 + bx + c$	arah buka (a), titik potong sumbu-y $(0, c)$	$y = x^2 - 4x + 3$
Puncak	$y = a(x - h)^2 + k$	puncak (h, k), sumbu simetri $x = h$	$y = (x - 2)^2 - 1$
Faktor	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	akar-akar x_1, x_2 (titik potong sumbu-x)	$y = (x - 1)(x - 3)$

RUMUS HIDUP

Sumbu simetri parabola

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

Sumbu simetri berada di x = −b/(2a): lawan dari b, dibagi dua kali a. Nilai c sama sekali tidak ikut menentukan.

a Koefisien a

b Koefisien b

x_p Sumbu simetri

SUMBU SIMETRI

3

a dan b berlawanan tanda ⇒ puncak di kanan sumbu-y

Untuk y = **1**x² + (**-6**)x + c, sumbu simetrinya x = −(**-6**) / (2 × **1**) = **3**. Ubah c sesukamu: parabolanya hanya naik-turun, sumbunya tetap di sini.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PARABOLA-SUMBU

RUMUS HIDUP

Nilai ekstrem (tinggi puncak)

$$y_p = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nilai terkecil (atau terbesar) sebuah fungsi kuadrat sama dengan minus diskriminan dibagi empat kali a.

- a Koefisien a
- b Koefisien b
- c Koefisien c
- y_p Nilai ekstrem



titik minimum (terbuka ke atas)

D = (**-6**)^2 − 4 × **1** × **5** = **16**. Puncaknya (**3**; **-4**), dan itu nilai **minimum** karena a **positif**.

Cek satuan: Nilai ekstrem adalah nilai y (tinggi puncak), bukan nilai x.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PARABOLA-EKSTREM

KERJAKAN BERSAMA

Melengkapkan kuadrat

Ubah $y = 2x^2 + 8x + 3$ ke bentuk puncak, lalu tentukan titik puncaknya.

1. Keluarkan $a = 2$ dari dua suku pertama: $y = 2(x^2 + 4x) + 3$.
2. Lengkapkan kuadrat di dalam kurung: $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.
3. $y = 2\left[(x + 2)^2 - 4\right] + 3 = 2(x + 2)^2 - 8 + 3 = 2(x + 2)^2 - 5$.
4. Cek dengan rumus: $x_p = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2$ dan $y_p = 2(-2)^2 + 8(-2) + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$. Cocok!

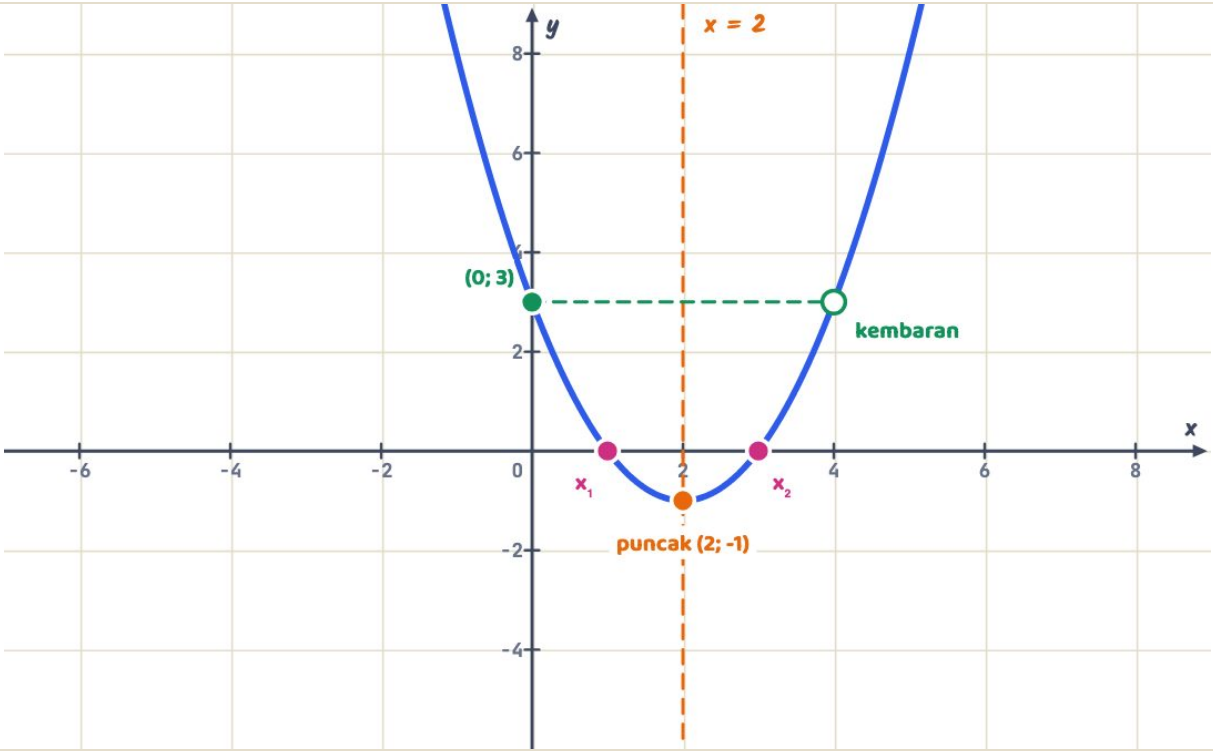
$y = 2(x + 2)^2 - 5$, dengan puncak $(-2, -5)$ dan nilai minimum -5.

GRAFIK HIDUP **Bentuk umum: baca semua titik pentingnya**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^2 - 4x + 3, \qquad D = 4$$



D > 0: memotong sumbu-x di dua titik

Diskriminan D	Puncak x	Puncak y	Akar x_1	Akar x_2
4	2	-1	1	3

Geser a, b, dan c. Lihat titik kembaran hijau dan akar-akar magenta yang selalu simetris terhadap sumbu oranye. Lalu geser **jalur puncak** ke 1 dan tekan ▶ **Jalankan**: b berubah sendiri. Ke mana saja puncaknya berjalan?

KEJUTAN: PUNCAK BERJALAN DI PARABOLA LAIN!

Saat hanya b yang berubah, puncak $\left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$ bergerak. Misalkan $X = -\frac{b}{2a}$, maka $b = -2aX$ dan tinggi puncaknya $Y = c - \frac{4a^2X^2}{4a} = c - aX^2$. Jadi semua puncak terletak pada parabola $y = c - ax^2$: parabola yang sama lebarnya, tetapi menghadap ke arah berlawanan. Garis ungu putus-putus di Grafik Hidup tadi adalah parabola itu.

TRIK KAK LINTANG: PUNCAK DI TENGAH AKAR

Kalau kamu sudah tahu akar-akarnya, tidak perlu rumus apa pun. Sumbu simetri selalu tepat di tengah dua akar: $x_p = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Contoh: $y = (x-1)(x-7)$ punya akar 1 dan 7, jadi $x_p = 4$ dan $y_p = (4-1)(4-7) = -9$.

AWAS JEBAKAN

Rumus sumbu simetri adalah $x_p = -\dfrac{b}{2a}$: ada tanda minus dan angka 2 di penyebut. Untuk $y = 3x^2 - 12x + 1$, $x_p = -\dfrac{-12}{2 \cdot 3} = 2$, bukan -2 (lupa tanda minus) dan bukan 4 (lupa angka 2). Ingat juga: nilai minimum atau maksimum adalah y_p, bukan x_p.

ADU CEPAT **Nilai minimum kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Paruh koefisien x, kuadratkan, lalu kurangkan dari c. Contoh: $y = x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$, jadi minimumnya $10 - 3^2 = 1$.

12.4 Menyusun fungsi kuadrat dari titik-titik

Sekarang kita balik arah. Bukan membaca grafik dari rumus, tetapi mencari rumus dari beberapa titik. Insinyur melakukannya saat merancang lengkung jembatan, dan ilmuwan melakukannya saat mencocokkan data percobaan. Pilih bentuk yang paling cocok dengan informasi yang kamu punya:

Yang diketahui	Mulai dari	Cari a dengan
puncak (h, k) + satu titik lain	$y = a(x-h)^2 + k$	substitusi titik lain itu
dua akar x_1, x_2 + satu titik lain	$y = a(x-x_1)(x-x_2)$	substitusi titik lain itu
tiga titik sembarang	$y = ax^2 + bx + c$	sistem tiga persamaan (SPLTV, Bab 10)

SIFAT TIGA TITIK

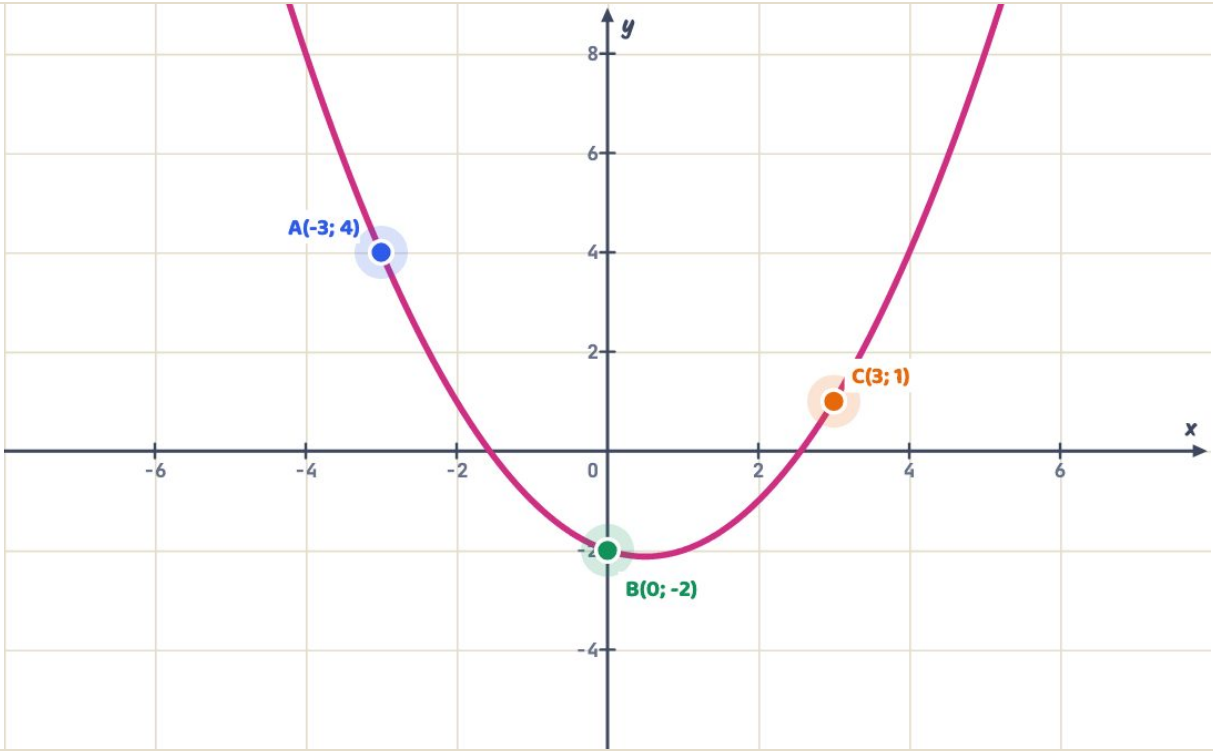
Melalui tiga titik yang absisnya berbeda dan tidak segaris, selalu ada **tepat satu** parabola $y = ax^2 + bx + c$. (Jika ketiganya segaris, "parabola" itu menjadi garis lurus dengan $a = 0$.)

GRAFIK HIDUP **Tiga titik, satu parabola**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 2$$



a > 0: terbuka ke atas

a	b	c
0,5	-0,5	-2

Seret titik A, B, dan C ke mana saja. Selalu ada tepat satu parabola yang melewati ketiganya, dan nilai a, b, c dihitung ulang seketika. Bisakah kamu membuat ketiga titik segaris sehingga $a = 0$?

KERJAKAN BERSAMA **Lengkung jembatan**

Lengkung baja sebuah jembatan pelengkung (bentuknya mirip Jembatan Youtefa di Jayapura) bertumpu pada dua kaki yang berjarak 40 m. Titik tertinggi lengkung berada 10 m di atas kedua kakinya. Modelkan lengkung itu dengan fungsi kuadrat, lalu hitung tinggi lengkung pada jarak mendatar 5 m dari salah satu kaki.

1. Taruh kaki kiri di $(0, 0)$ dan kaki kanan di $(40, 0)$. Keduanya akar, jadi $y = a\,x(x - 40)$.
2. Puncak berada di tengah akar, $x = 20$, dengan tinggi 10: $10 = a \cdot 20 \cdot (-20) = -400a$, sehingga $a = -\frac{1}{40}$.
3. Model: $y = -\frac{1}{40}\,x(x - 40)$. Untuk $x = 5$: $y = -\frac{1}{40} \cdot 5 \cdot (-35) = \frac{175}{40} = 4{,}375$.

Tinggi lengkung 5 m dari kaki adalah 4,375 m (sekitar 4,4 m). Karena simetris, tinggi lengkung di $x = 35$ juga 4,375 m.

COBA SENDIRI **Tiga titik, tiga persamaan**

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui $(0, 3)$, $(1, 2)$, dan $(2, 5)$.

1. Misalkan $y = ax^2 + bx + c$. Titik $(0, 3)$ langsung memberi $c = 3$.
2. Titik $(1, 2)$: $a + b + 3 = 2$, jadi $a + b = -1$. Titik $(2, 5)$: $4a + 2b + 3 = 5$, jadi $2a + b = 1$.
3. Kurangkan kedua persamaan: $(2a + b) - (a + b) = 1 - (-1)$, sehingga $a = 2$ dan $b = -3$.

$y = 2x^2 - 3x + 3$. **Cek titik ketiga:** $2(2)^2 - 3(2) + 3 = 8 - 6 + 3 = 5$. ✓

12.5 Optimasi: luas terbesar, untung terbanyak

Puncak parabola adalah titik "paling": paling tinggi, paling luas, paling untung. Mencari nilai terbaik seperti ini disebut **optimasi**. Resepnya: tulis besaran yang ingin dibuat terbesar (atau terkecil) sebagai fungsi kuadrat, lalu cari puncaknya.

Tebak Dulu!

Pak RT punya kawat 24 m untuk membuat kandang ayam persegi panjang yang menempel pada tembok, jadi hanya tiga sisi yang perlu dipagari. Ukuran mana yang luasnya terbesar? (Lebar = sisi yang tegak lurus tembok.)

Persegi: lebar 8 m, sisi depan 8 m.

Lebar 4 m, sisi depan 16 m.

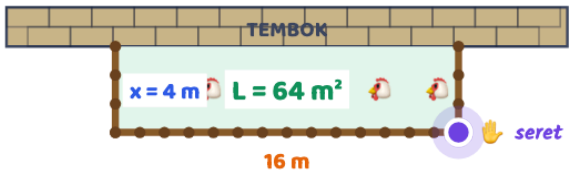
Lebar 6 m, sisi depan 12 m.

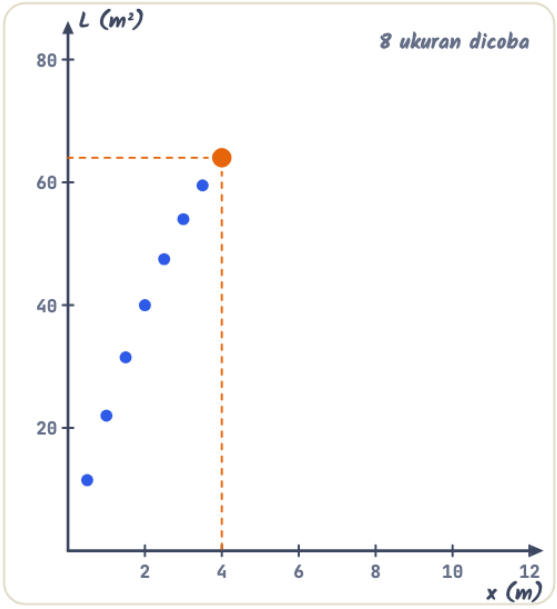
Lebar 10 m, sisi depan 4 m.

Jawabannya: lebar 6 m dan sisi depan 12 m (luas 72 m²). Persegi 8 × 8 hanya 64 m², sama dengan 4 × 16. Kebanyakan orang mengira persegi selalu juara, tetapi karena tembok "menyumbang" satu sisi gratis, bentuk terbaik justru sisi depannya dua kali lebarnya. Buktikan sendiri di Lab Mini berikut!

LAB MINI **Kandang ayam Pak RT: cari luas terbesar**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12





sisi depan	luas kandang	luas terbesar yang sudah dicoba
16 m	64 m²	64 m²

Status

Belum maksimum, terus cari!

Seret titik ungu di pojok kandang (atau geser slider lebar). Setiap ukuran yang kamu coba muncul sebagai titik di grafik kanan. Titik-titik itu membentuk lengkung apa? Tekan ▶ **Jalankan** untuk menyapu semua ukuran, lalu matikan tembok dan bandingkan.

Mengapa jawabannya 6 m? Misalkan lebar kandang x. Sisi depan $24 - 2x$, sehingga luasnya

$$L(x) = x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x.$$

TRIK KAK LINTANG: TITIK TENGAH AKAR

Untuk soal optimasi, kamu sering tidak perlu rumus puncak. Cari dulu kapan hasilnya **nol**: $L(x) = x(24 - 2x) = 0$ saat $x = 0$ atau $x = 12$. Puncaknya pasti tepat di tengah: $x = 6$, sehingga $L(6) = 6 \times 12 = 72$ m². Cepat, dan tanpa melengkapkan kuadrat!

Bahasa sederhana · Intinya: luas kandang naik ketika lebarnya ditambah sedikit demi sedikit, mencapai puncak, lalu turun lagi karena sisi depannya makin pendek. Ukuran terbaik ada di puncak lengkung.

Resep yang sama bekerja untuk uang. Pedagang tahu bulat yang menaikkan harga mendapat untung lebih besar per biji, tetapi pembelinya berkurang. Ada satu harga yang paling pas.

RUMUS HIDUP

Untung harian penjual tahu bulat

$$U = (h - m)(1800 - h)$$

Untung = untung per biji × banyak yang terjual. Harga naik, untung per biji naik, tetapi pembeli berkurang. Harga terbaik ada di puncak parabola.

- h Harga jual per biji `rupiah`
- m Modal per biji `rupiah`
- U Untung sehari `rupiah`

UNTUNG SEHARI

390.000

rupiah

Dengan harga Rp**500**, terjual **1.300** biji sehari dan untung per biji Rp**300**, jadi untung total Rp**390.000**. Akar-akarnya h = **200** dan h = 1.800, sehingga harga terbaik ada di tengahnya: Rp**1.000**.

Cek satuan: (rupiah per biji) × (banyak biji) = rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PARABOLA-UNTUNG

KERJAKAN BERSAMA

Harga tahu bulat terbaik

Modal Pak Ujang Rp200 per biji tahu bulat. Dari pengalamannya, kalau ia menjual dengan harga h rupiah per biji, tahu yang terjual sehari kira-kira $1.800 - h$ biji. Berapa harga jual yang memberi untung terbesar, dan berapa untungnya?

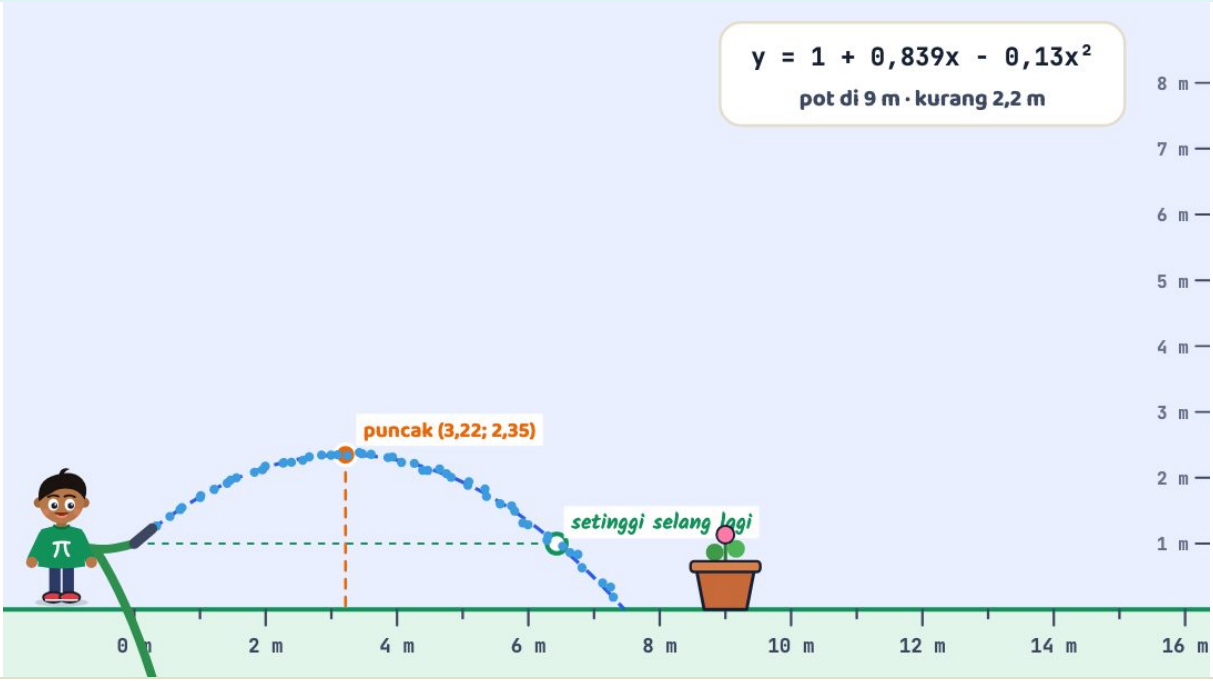
1. Untung per biji $h - 200$, banyak yang terjual $1.800 - h$. Untung total $U(h) = (h - 200)(1.800 - h)$.
2. Ini fungsi kuadrat dengan $a = -1 < 0$ (terbuka ke bawah) dan akar-akar $h = 200$ serta $h = 1.800$.
3. Puncaknya di tengah akar: $h = \dfrac{200 + 1.800}{2} = 1.000$. Untungnya $U(1.000) = 800 \times 800 = 640.000$.

Harga terbaik Rp1.000 per biji, dengan untung Rp640.000 sehari. Bandingkan dengan harga Rp500: untungnya hanya $300 \times 1.300 = 390.000$ rupiah. Harga terlalu murah maupun terlalu mahal sama-sama mengurangi untung.

Parabola juga muncul di lintasan benda yang dilempar atau disemprotkan. Ingat selang Dimas di komik? Sekarang kamu yang memegang selangnya.

LAB MINI **Selang ajaib: siram pot bunganya!**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12



tinggi maksimum	jarak mendatar ke puncak	jatuh di tanah pada	Pot
2,35 m	3,22 m	7,46 m	kurang 2,2 m

Atur kecepatan dan sudut semprotan, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Bisakah kamu memasukkan air ke dalam pot? Perhatikan titik hijau: di situ air kembali setinggi ujung selang, tepat dua kali jarak ke puncak. Untuk mode tantangan, matikan "Tampilkan lintasan & puncak" lalu tekan **Pindahkan pot**.

COBA SENDIRI **Roket air**

Dalam lomba roket air, tinggi roket (meter) setelah t detik dimodelkan dengan $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Berapa tinggi maksimum roket, dan kapan roket jatuh ke tanah?

1. $t_p = -\dfrac{20}{2(-5)} = 2$ detik. Tinggi maksimum $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$ m.
2. Roket menyentuh tanah saat $h(t) = 0$, yaitu $5t^2 - 20t - 1 = 0$.
3. Rumus abc: $t = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 + 20}}{10} = \dfrac{20 \pm \sqrt{420}}{10}$. Ambil yang positif: $t \approx \dfrac{20 + 20{,}49}{10} \approx 4{,}05$ detik.

Tinggi maksimum 21 m pada detik ke-2, dan roket jatuh sekitar 4,05 detik setelah diluncurkan. Mengapa bukan tepat 4 detik? Karena roket berangkat dari ketinggian 1 m, bukan dari tanah, jadi perjalanan turunnya sedikit lebih panjang daripada perjalanan naiknya.

MATEMATIKA NUSANTARA

Di Pulau Nias, Sumatra Utara, ada tradisi *fahombo* atau lompat batu. Seorang pemuda berlari, menjejak batu pijakan, lalu melayang melewati tugu batu setinggi sekitar 2 meter. Selama melayang, pusat tubuhnya bergerak di sepanjang lintasan yang hampir berbentuk parabola. Agar lolos, puncak lintasan harus cukup tinggi dan berada di sekitar tugu, sama seperti mengatur semprotan selang agar masuk pot. Para pelompat tidak menghitung rumus, tetapi mereka melatih "rasa parabola" itu selama bertahun-tahun.



Air mancur

Setiap semburan air mancur, termasuk di taman kawasan Monas, melengkung seperti parabola. Sudut dan tekanan air menentukan tinggi puncak dan titik jatuhnya.



Antena parabola

Piringan di atap rumah memantulkan sinyal satelit ke satu titik, yaitu fokus, tempat alat penerima dipasang.



Jembatan pelengkung

Lengkung jembatan seperti Jembatan Youtefa di Jayapura dapat didekati dengan parabola, sehingga tinggi lengkung di setiap titik bisa dihitung.



Jarak pengereman

Jarak pengereman kira-kira sebanding dengan kuadrat kecepatan: kecepatan dua kali lipat membuat jarak pengereman kira-kira empat kali lipat. Ngebut itu berbahaya!



Senter & lampu motor

Cermin cekung di belakang bohlam memantulkan cahaya dari fokus menjadi berkas lurus ke depan.



Untung pedagang

Harga terlalu murah atau terlalu mahal sama-sama mengurangi untung. Harga terbaik ada di puncak parabola untung.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

MINIMUM DENGAN DUA VARIABEL

Soal olimpiade suka bertanya: berapa nilai terkecil $x^2 + 2xy + 2y^2 - 6y + 14$ untuk semua bilangan real x dan y? Tidak ada grafik yang bisa digambar dengan mudah, tetapi trik melengkapkan kuadrat tetap bekerja, cukup dipakai dua kali:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 6y + 14 = (x+y)^2 + (y^2 - 6y + 9) + 5 = (x+y)^2 + (y-3)^2 + 5.$$

Dua kuadrat tidak pernah negatif, jadi nilainya selalu ≥ 5. Nilai 5 tercapai saat $y = 3$ dan $x = -y = -3$. Trik lain tanpa grafik adalah ketaksamaan AM-GM: untuk kandang tadi, $x(24 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (24 - 2x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x + 24 - 2x}{2}\right)^2 = 72$, dengan kesamaan saat $2x = 24 - 2x$, yaitu $x = 6$.

12.6 Pertidaksamaan kuadrat: di atas atau di bawah sumbu-x?

Pertanyaan seperti "kapan roket berada di atas 16 m?" atau "harga berapa yang membuat untung positif?" adalah **pertidaksamaan kuadrat**. Rahasianya: jangan buru-buru menghitung, **lihat grafiknya**. Pertanyaan $f(x) > 0$ sama artinya dengan "di mana parabola berada di atas sumbu-x?"

1. Pindahkan semua suku ke satu ruas sehingga ruas lainnya nol.
2. Cari akar-akarnya (pembuat nol).
3. Sketsa parabola: terbuka ke atas atau ke bawah?
4. Baca bagian yang berada di atas (> 0) atau di bawah (< 0) sumbu-x.

SIFAT TANDA FUNGSI KUADRAT

Misalkan $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a > 0$.

- Jika $D > 0$ dengan akar $x_1 < x_2$: $f(x) < 0$ untuk $x_1 < x < x_2$, dan $f(x) > 0$ untuk $x < x_1$ atau $x > x_2$.
- Jika $D < 0$: $f(x) > 0$ untuk **semua** x. Fungsi seperti ini disebut **definit positif**.

Untuk $a < 0$, semua tanda di atas dibalik.

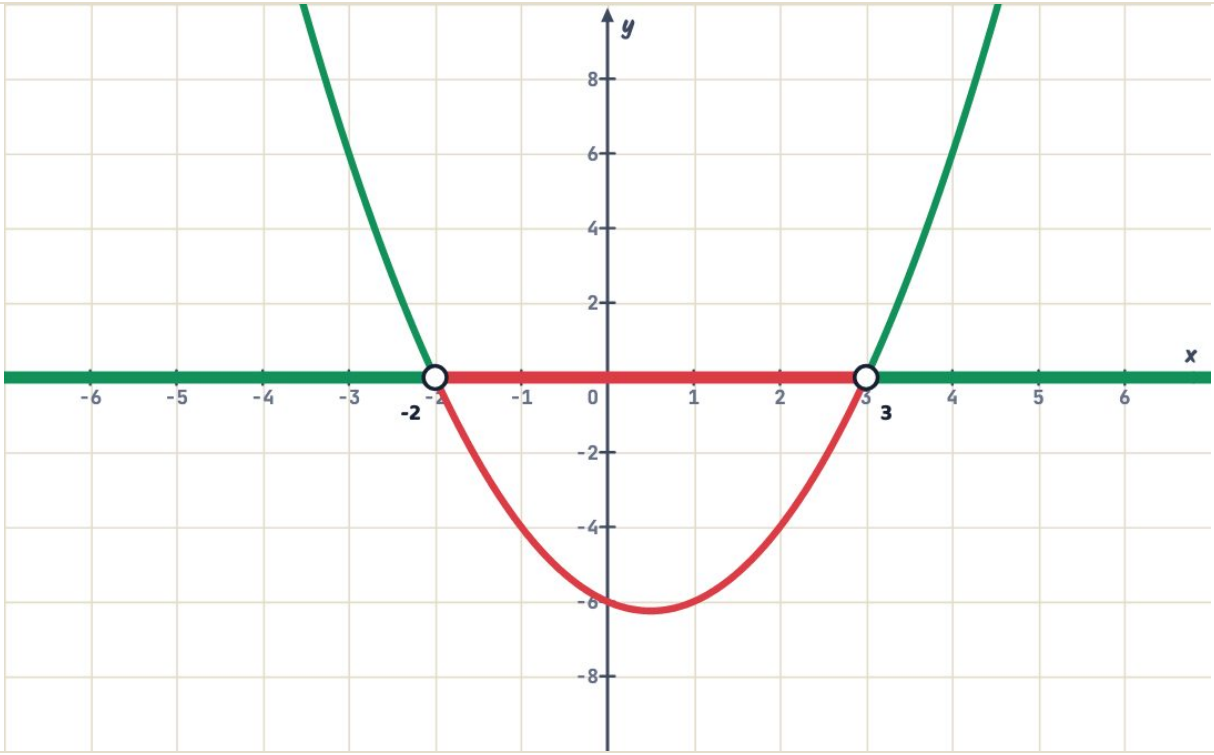
GRAFIK HIDUP **Hijau di atas, merah di bawah**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = x^2 - 1x - 6$$

Bagian hijau: f(x) > 0. Bagian merah: f(x) < 0. Garis tebal di sumbu-x adalah himpunan penyelesaiannya.



f(x) < 0 ⇔ -2 < x < 3 **f(x) > 0 ⇔ x < -2 atau x > 3**

Diskriminan D	Akar x_1	Akar x_2
25	-2	3

Mulai dari $f(x) = x^2 - x - 6$. Bagian merah (di bawah sumbu-x) berada di antara akar -2 dan 3. Ubah a menjadi negatif: warnanya bertukar! Lalu cari nilai c yang membuat semuanya hijau.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Jangan mengakarkan pertidaksamaan begitu saja: $x^2 > 9$ **tidak** berarti $x > 3$ saja. Bilangan negatif seperti $x = -4$ juga memenuhi, karena $(-4)^2 = 16 > 9$. Jawaban lengkapnya $x < -3$ atau $x > 3$. Ingat juga: saat mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif, balik tanda ketaksamaannya.

CONTOH **Pertidaksamaan pertama**

Selesaikan $x^2 - x - 6 < 0$.

1. Faktorkan: $(x+2)(x-3) < 0$. Pembuat nolnya $x = -2$ dan $x = 3$.
2. Parabola $y = x^2 - x - 6$ terbuka ke atas, jadi berada di bawah sumbu-x di antara kedua akar.

$-2 < x < 3$. **Cek dengan $x = 0$:** $0 - 0 - 6 = -6 < 0$. ✓

KERJAKAN BERSAMA **Kapan roket di atas 16 m?**

Roket air tadi tingginya $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ meter. Selama berapa detik roket berada lebih tinggi dari 16 m?

1. $-5t^2 + 20t + 1 > 16 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 15 > 0$.
2. Bagi kedua ruas dengan -5 dan **balik tandanya**: $t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) < 0$.
3. Parabola $y = t^2 - 4t + 3$ terbuka ke atas, negatif di antara akar: $1 < t < 3$.

Roket berada di atas 16 m dari detik ke-1 sampai detik ke-3, yaitu selama 2 detik. Selang waktu itu simetris terhadap $t = 2$, saat roket di puncak.

COBA SENDIRI **Selalu positif**

Tentukan semua nilai m agar $mx^2 + 4x + m > 0$ untuk setiap bilangan real x.

1. Jika $m = 0$, fungsinya menjadi $4x$, yang negatif untuk $x < 0$. Jadi $m \neq 0$, dan fungsinya kuadrat.
2. Agar selalu positif, parabola harus terbuka ke atas **dan** tidak menyentuh sumbu-x: $a > 0$ dan $D < 0$.
3. $a = m > 0$, dan $D = 4^2 - 4 \cdot m \cdot m = 16 - 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow m < -2$ atau $m > 2$.
4. Gabungkan kedua syarat: $m > 0$ dan ($m < -2$ atau $m > 2$).

$m > 2$**. Untuk nilai-nilai itu, fungsinya definit positif: grafiknya melayang seluruhnya di atas sumbu-x.**

MITOS

"Semua lengkung berbentuk U adalah parabola."

FAKTA

Tidak. Rantai yang tergantung bebas membentuk **katenari**, dan setengah lingkaran juga bukan parabola. Parabola punya sidik jari: beda kedua tetap, atau persamaannya berbentuk kuadrat.

MITOS

"Grafik $y = (x + 2)^2$ bergeser 2 satuan ke kanan karena ada +2."

FAKTA

Bergeser ke **kiri**. Puncaknya di $x = -2$, karena di situlah $x + 2 = 0$.

MITOS

"Nilai maksimum fungsi adalah nilai x di puncak."

FAKTA

Nilai maksimum adalah nilai y di puncak, yaitu y_p. Nilai x_p hanya memberi tahu **di mana** maksimum itu terjadi.

MITOS

"Kalau diteruskan, kaki parabola akhirnya tegak lurus seperti dinding."

FAKTA

Parabola makin lama makin curam, tetapi **tidak pernah** tegak. Untuk setiap x selalu ada tepat satu nilai y, sejauh apa pun kamu pergi.

Cek Cepat

Titik puncak grafik $y = (x-4)^2 + 1$ adalah...

- $(-4, 1)$
- $(4, 1)$
- $(4, -1)$
- $(1, 4)$

Sumbu simetri grafik $y = 2x^2 - 12x + 7$ adalah...

- $x = -3$
- $x = 6$
- $x = 3$
- $x = 12$

Himpunan penyelesaian $x^2 - 9 \leq 0$ adalah...

- $-3 \leq x \leq 3$
- $x \leq 3$
- $x \leq -3$ atau $x \geq 3$
- $-9 \leq x \leq 9$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: melipat parabola dari selembar kertas

Bahan: selembar kertas (kertas kalkir atau kertas minyak lebih bagus), pensil, spidol, penggaris.

1. Letakkan kertas mendatar. Tandai titik F kira-kira 3 cm di atas tepi bawah, tepat di tengah.
2. Lipat kertas sehingga satu titik di tepi bawah menyentuh F dengan tepat. Tekan lipatannya sampai berbekas, lalu buka lagi.
3. Ulangi dengan titik-titik lain di sepanjang tepi bawah (geser sekitar 1 cm setiap kali). Lakukan 20–30 kali.
4. Perhatikan garis-garis lipatannya. Bersama-sama, mereka "menyelimuti" sebuah lengkung. Tebalkan lengkung itu dengan spidol.
5. Ulangi di kertas lain dengan F lebih jauh dari tepi bawah, misalnya 6 cm, lalu bandingkan kedua lengkung.

Pertanyaan: Lengkung apa yang muncul? Mengapa F yang lebih jauh menghasilkan lengkung yang lebih lebar? Petunjuk: setiap lipatan menyinggung lengkung itu di sebuah titik yang jaraknya ke F sama dengan jaraknya ke tepi bawah kertas. Bandingkan dengan Grafik Hidup antena parabola di subbab 12.1.

RINGKASAN KILAT

Bab 12 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- mengenali **fungsi kuadrat** dan menggambar grafiknya, yaitu **parabola**
- membaca **titik puncak**, **sumbu simetri**, dan arah buka parabola dari bentuk puncak $y = a(x - h)^2 + k$ maupun bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$
- menyusun fungsi kuadrat dari titik puncak, akar-akar, atau tiga titik
- menyelesaikan soal **optimasi**: luas terbesar, untung terbanyak, lemparan tertinggi
- menyelesaikan **pertidaksamaan kuadrat** dengan membaca grafik

Istilah kunci

Fungsi kuadrat | parabola | titik puncak | sumbu simetri | beda kedua tetap | fokus | bentuk puncak | bentuk umum | optimasi | pertidaksamaan kuadrat | definit positif

Rumus penting

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

Sumbu simetri parabola. Sumbu simetri berada di x = –b/(2a): lawan dari b, dibagi dua kali a. Nilai c sama sekali tidak ikut menentukan.

$$y_p = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nilai ekstrem (tinggi puncak). Nilai terkecil (atau terbesar) sebuah fungsi kuadrat sama dengan minus diskriminan dibagi empat kali a.

$$U = (h - m)(1800 - h)$$

Untung harian penjual tahu bulat. Untung = untung per biji × banyak yang terjual. Harga naik, untung per biji naik, tetapi pembeli berkurang. Harga terbaik ada di puncak parabola.

Jangan sampai terjebak

- Pada bentuk puncak, tanda h terbalik: $(x + 5)^2$ berarti puncak di $x = -5$, bukan $x = 5$.
- Rumus sumbu simetri adalah $x_p = -\frac{b}{2a}$: ada tanda minus dan angka 2 di penyebut.
- Jangan mengakarkan pertidaksamaan begitu saja: $x^2 > 9$ tidak berarti $x > 3$ saja.

Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=12

Teka-teki untuk Bab 13

Ancil membuat dua mesin ajaib. Mesin **K** mengkuadratkan angka yang masuk, dan mesin **T** menambahkan 3. Angka 2 dimasukkan ke mesin K lalu ke mesin T: keluar 7. Kalau urutannya dibalik, T dulu lalu K, keluar 25! Ternyata "K lalu T" menghasilkan $y = x^2 + 3$ (parabola naik 3), sedangkan "T lalu K" menghasilkan $y = (x + 3)^2$ (parabola bergeser ke kiri 3). Urutan mesin ternyata penting. Bisakah kamu merancang mesin yang menerima 25 dari "T lalu K" dan mengembalikannya menjadi 2?

▼ **Intip petunjuk**

Mesin pembalik harus membatalkan setiap langkah dengan urutan terbalik, seperti melepas sepatu dulu sebelum kaus kaki. Dari 25, tarik akarnya (5), lalu kurangi 3 (2). Tetapi hati-hati: $(-5)^2$ juga 25, jadi angka -8 pun keluar sebagai 25 dari mesin "T lalu K"! Di Bab 13 kamu akan belajar **komposisi fungsi** (mesin bersambung) dan **fungsi invers** (mesin pembalik), termasuk kapan mesin pembalik bisa dibuat.

BAB 13 · ALJABAR & FUNGSI

13 Fungsi: Mesin yang Bisa Disambung, Dibalik, dan Digeser

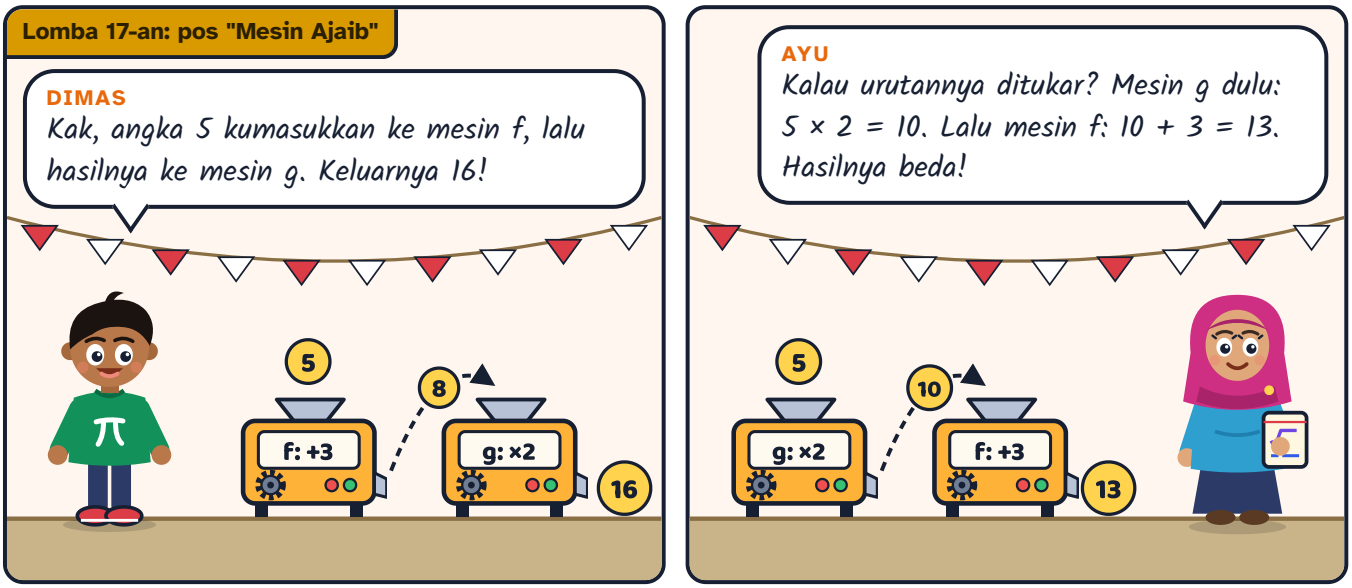
Apa jadinya kalau dua mesin fungsi disambung? Bisakah sebuah mesin dijalankan mundur? Dan mengapa grafik $y = (x - 3)^2$ justru bergeser ke kanan, padahal tandanya minus? Bab ini membongkar rahasia mesin-mesin itu.

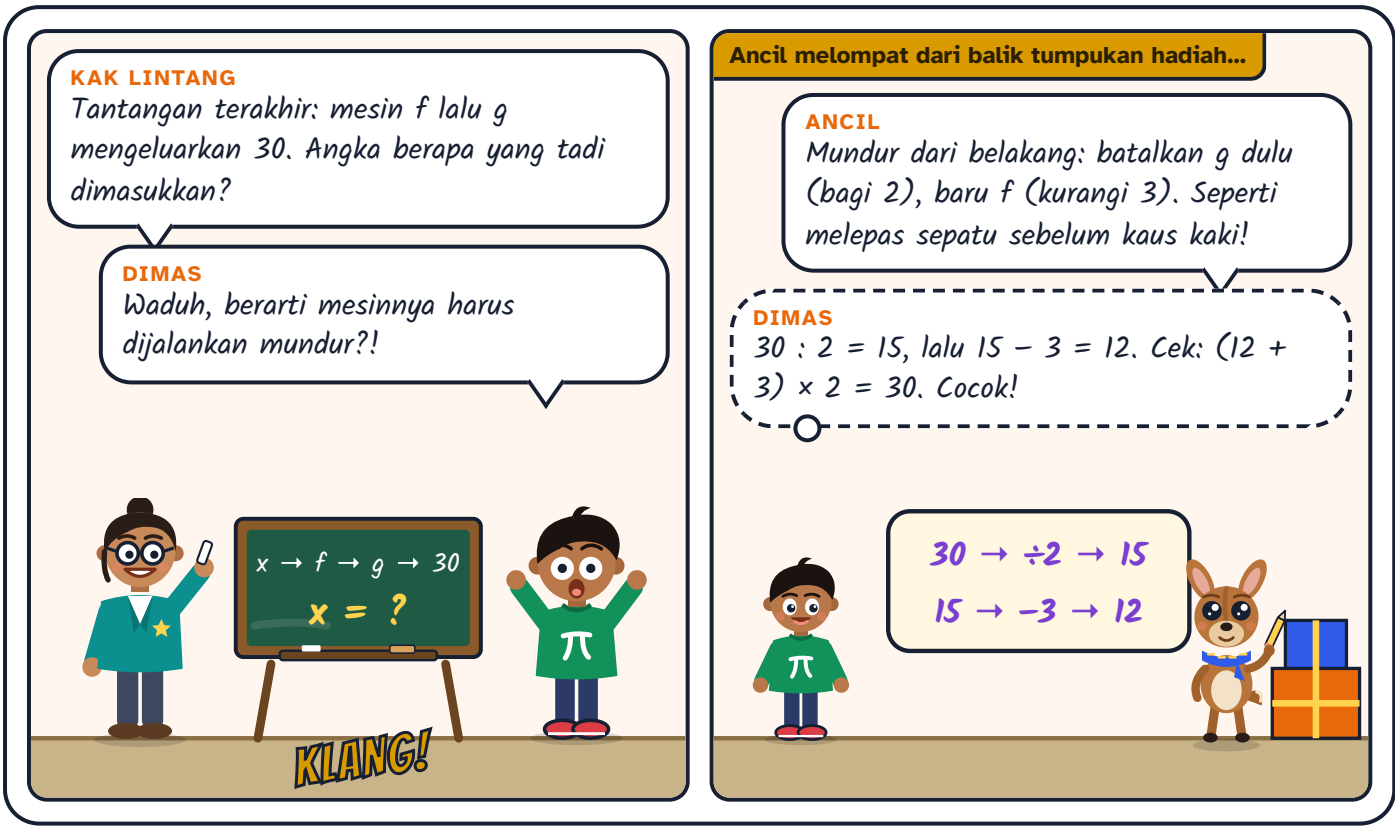
Setelah bab ini, kamu bisa

- menentukan **domain**, **kodomain**, dan **range** sebuah fungsi, termasuk membacanya dari grafik;
- menyusun dan menghitung **fungsi komposisi** $f \circ g$, serta menjelaskan mengapa urutannya penting;
- mencari **fungsi invers** dan memahami grafiknya sebagai **cermin** terhadap garis $y = x$;
- menggambar **transformasi grafik** $y = a\,f\big(b(x - c)\big) + d$: geser, regang, mampat, dan cermin;
- mengenali **asimtot** fungsi rasional sederhana, serta membaca fungsi **nilai mutlak** dan fungsi **sepotong-sepotong**.

POS MESIN AJAIB KAK LINTANG

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Sebuah mesin bertuliskan "kuadratkan". Mesin itu mengeluarkan angka 49. Angka berapa yang tadi dimasukkan?

Pasti 7, karena 7 × 7 = 49.

Bisa 7, bisa juga –7. Mesin mundurnya tidak bisa memastikan.

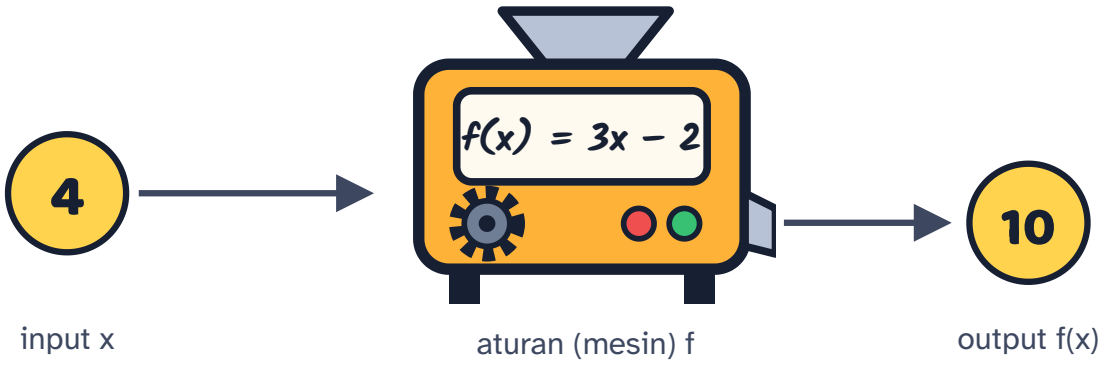
24,5, karena 49 dibagi 2.

49, karena mengkuadratkan tidak mengubah apa-apa.

Jawabannya: bisa 7, bisa –7. Sebab $7^2 = 49$ dan $(-7)^2 = 49$ juga. Dua input yang berbeda menghasilkan output yang sama, sehingga mesin mundurnya bingung harus memilih yang mana. Di subbab 13.3 kamu akan melihat bahwa hanya mesin yang "satu-satu" yang bisa dibalik dengan sempurna, dan bagaimana cara mengakali mesin kuadrat ini.

13.1 Mesin fungsi: domain, kodomain, dan range

Bayangkan mesin minuman otomatis di stasiun. Kamu menekan sebuah tombol (input), lalu keluar satu minuman (output). Mesin yang baik selalu **tegas**: tombol yang sama selalu memberi minuman yang sama, dan tidak pernah mengeluarkan dua minuman berbeda sekaligus. Dalam matematika, mesin seperti itu disebut **fungsi**.

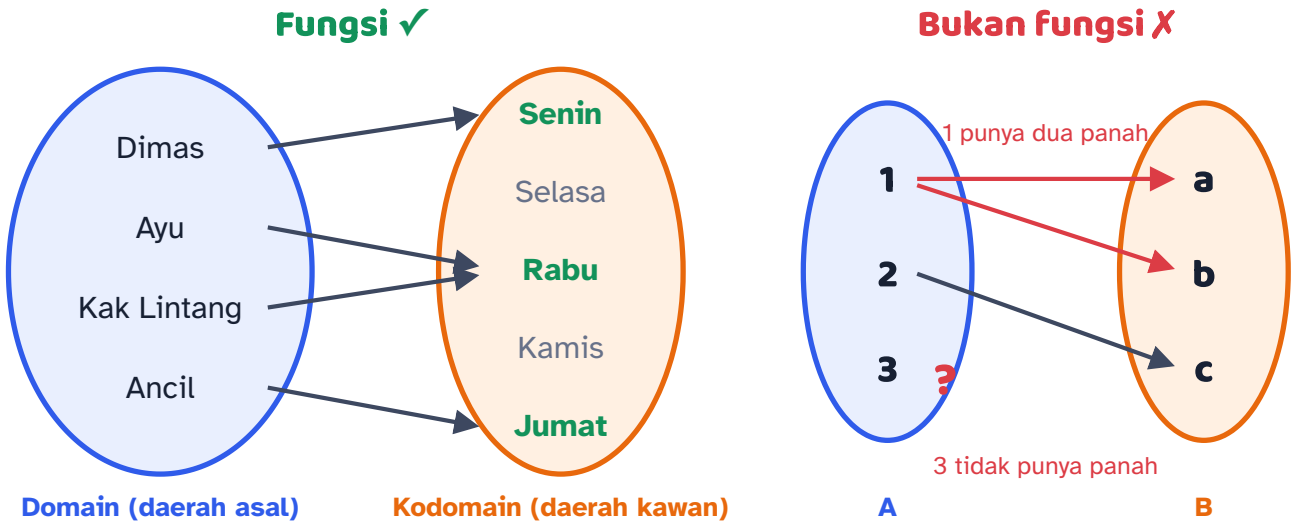


Mesin $f(x) = 3x - 2$: masukkan 4, mesin mengalikan 3 lalu mengurangi 2, keluarlah $f(4) = 10$.

DEFINISI

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, ditulis $f : A \to B$, adalah aturan yang memasangkan **setiap** anggota A dengan **tepat satu** anggota B.

- A disebut **domain** (daerah asal): semua input yang boleh masuk.
- B disebut **kodomain** (daerah kawan): tempat output boleh mendarat.
- Himpunan semua output yang **benar-benar muncul** disebut **range** (daerah hasil). Range selalu bagian dari kodomain.



Kiri: setiap anggota domain punya tepat satu panah, jadi ini fungsi. Ayu dan Kak Lintang boleh berbagi hari Rabu. Range-nya hanya Senin, Rabu, dan Jumat (hijau); Selasa dan Kamis ada di kodomain, tetapi tidak pernah dipakai. Kanan: bukan fungsi.

Bahasa sederhana · Gampangnya: fungsi itu seperti daftar piket kelas. **Setiap** murid harus mendapat **tepat satu** hari piket. Dua murid boleh piket di hari yang sama, tetapi satu murid tidak boleh mendapat dua hari, dan tidak boleh ada murid yang terlewat.

Kalau fungsi hanya diberikan sebagai rumus, domainnya adalah semua bilangan real yang **boleh** dimasukkan ke rumus itu. Ada dua "penjahat" yang harus dihindari: **pembagian dengan nol** dan **akar kuadrat dari bilangan negatif**.

Fungsi	Yang harus dihindari	Domain
$f(x) = 2x + 1$	tidak ada	semua bilangan real, $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	penyebut nol	$x \neq 2$
$f(x) = \sqrt{x-3}$	akar bilangan negatif	$x \geq 3$
$f(x) = \sqrt{4-x^2}$	akar bilangan negatif	$-2 \leq x \leq 2$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$	keduanya sekaligus	$x > -1$



TRIK KAK LINTANG

Saat mencari domain, jadilah satpam yang mencari dua penjahat: **penyebut nol** dan **akar genap dari bilangan negatif**. Kalau keduanya tidak ada di rumus, domainnya semua bilangan real. Selesai!



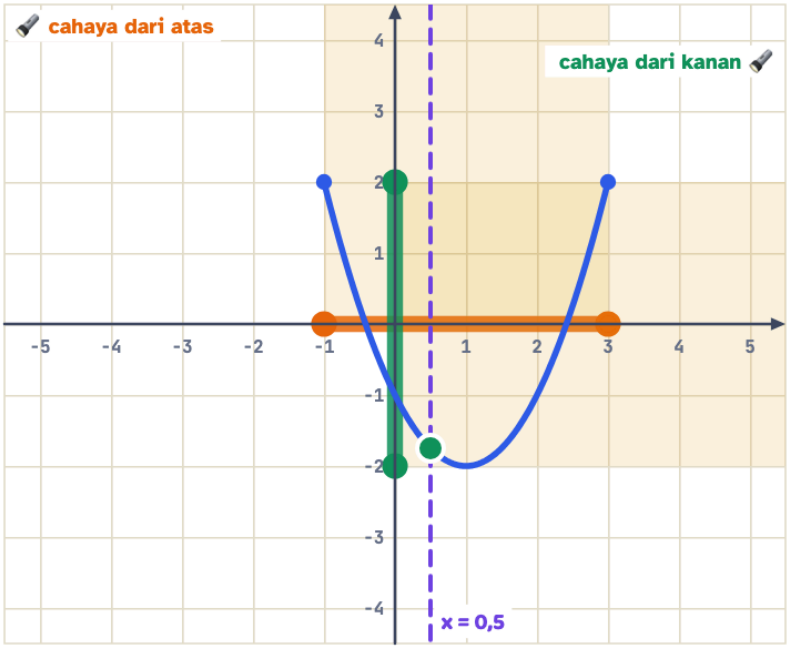
AWAS JEBAKAN

Domain $\sqrt{x-3}$ adalah $x \geq 3$, bukan $x > 3$. Angka 3 boleh masuk karena $\sqrt{0} = 0$. Tetapi pada $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$, angka 3 terlarang karena penyebutnya menjadi nol.

Range paling mudah dibaca dari grafik. Bayangkan senter menyinari grafik dari atas: bayangannya di sumbu-x adalah domain. Senter dari samping membuat bayangan di sumbu-y: itulah range. Grafik juga bisa diperiksa dengan **uji garis tegak**: sebuah kurva adalah grafik fungsi jika **setiap** garis tegak memotongnya paling banyak satu kali.

LAB MINI Senter domain & range: siapa yang lolos uji garis?

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13



Kurva

$y = (x - 1)^2 - 2$

untuk $-1 \le x \le 3$

Domain (bayangan di sumbu-x)

$-1 \le x \le 3$

Range (bayangan di sumbu-y)

$-2 \le y \le 2$

Uji garis tegak

memotong 1 titik

✓ tepat 1 titik

seret di grafik

Titik potong	Kesimpulan
1	✓ tepat 1 titik

Pilih kurva, lalu seret garis ungu di grafik. Bayangan oranye adalah domain, bayangan hijau adalah range. Kurva mana yang gagal uji garis tegak? Ganti ke **garis mendatar**: kurva mana yang memotong dua kali, sehingga tidak punya invers?

CONTOH Domain dan range fungsi akar

Tentukan domain dan range $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$, lalu hitung $f(11)$.

1. Isi akar tidak boleh negatif: $x - 2 \ge 0$, jadi $x \ge 2$.
2. Nilai $\sqrt{x-2}$ paling kecil 0 (saat $x = 2$) dan bisa sebesar apa pun. Jadi $f(x)$ paling kecil $0 + 1 = 1$: range-nya $y \ge 1$.
3. $f(11) = \sqrt{9} + 1 = 3 + 1 = 4$.

Domain $x \ge 2$, range $y \ge 1$, dan $f(11) = 4$. Grafiknya dimulai dari titik $(2, 1)$ lalu naik perlahan ke kanan.

TAMU DARI MASA LALU

Kata *functio* mulai dipakai Gottfried Wilhelm Leibniz sekitar tahun 1673 untuk besaran yang "bekerja" pada sebuah kurva. Sekitar tahun 1734, Leonhard Euler memperkenalkan lambang $f(x)$ yang kita pakai sampai sekarang. Definisi modern, yaitu "setiap input dipasangkan dengan tepat satu output, apa pun aturannya", dirumuskan Peter Gustav Lejeune Dirichlet sekitar tahun 1837. Lambang f^{-1} untuk invers dipopulerkan John Herschel pada 1813. Ia sudah mengingatkan bahwa -1 itu bukan pangkat, tetapi sampai hari ini masih banyak murid yang tertukar!

13.2 Komposisi: mesin bersambung

Tebak Dulu!

Saat Harbolnas, sebuah toko daring memberi diskon 20%, lalu masih ada diskon tambahan 10% dari harga setelah diskon pertama. Berapa persen diskon totalnya?

- 30%, tinggal dijumlahkan.
- 28%.
- 25%.
- Tergantung harga barangnya.

Jawabannya: 28%. Diskon 20% artinya harga dikali 0,8; diskon 10% artinya dikali 0,9. Dua mesin bersambung: $0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$. Kamu membayar 72% harga awal, jadi diskon totalnya 28%, berapa pun harga barangnya. Diskon kedua dihitung dari harga yang sudah turun, bukan dari harga awal.

Di komik, angka 5 masuk mesin f (tambah 3), lalu hasilnya, 8, masuk mesin g (kali 2). Dua mesin yang disambung seperti ini membentuk satu mesin baru yang disebut **fungsi komposisi**.

DEFINISI: FUNGSI KOMPOSISI

Komposisi f dan g, ditulis $f \circ g$ (dibaca "f bundaran g"), adalah fungsi

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Mesin g bekerja **lebih dulu**, lalu outputnya menjadi input mesin f. Agar komposisi terdefinisi, output g harus termasuk domain f.

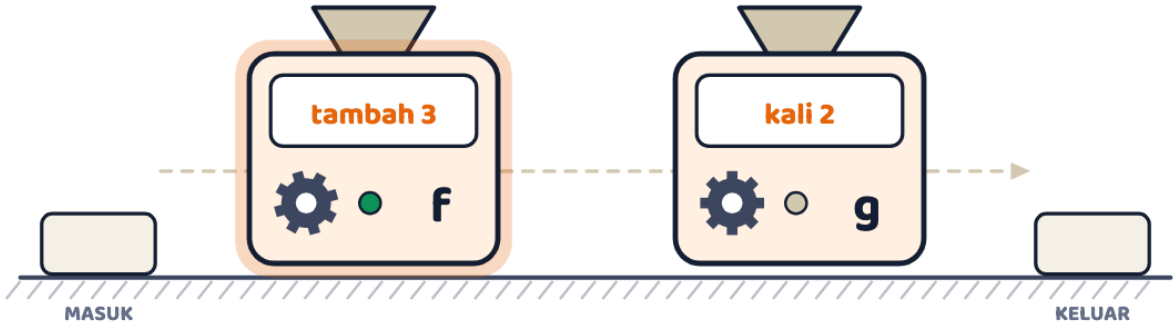
Bahasa sederhana · Cara membacanya: kerjakan dari yang paling dekat dengan x. Pada $f\big(g(x)\big)$, mesin g menempel pada x, jadi g dulu, baru f. Mirip berpakaian: kaus dalam dulu, baru kemeja.

LAB MINI Pabrik mesin bersambung: maju dan mundur

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

(g ∘ f)(x) = g(f(x)) = 2x + 6

Mesin f bekerja dulu. Kalau ditukar: f(g(x)) = 2x + 3



5 → (f: tambah 3) → 8 → (g: kali 2) → 16

Urutan ditukar memberi 13, bukan 16. Urutan itu penting!

Setelah mesin pertama	Hasil akhir	Kalau urutan ditukar
8	16	13

Tekan ▶ **Jalankan** dan ikuti bola angka melewati dua mesin. Klik sebuah mesin untuk mengganti tugasnya. Coba 🔀 **Tukar urutan**: kapan hasilnya berubah? Lalu nyalakan **Jalankan mundur**. Apa yang terjadi kalau salah satu mesin adalah "kuadratkan"?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

$(f \circ g)(x)$ dikerjakan dari kanan ke kiri: g dulu, baru f. Untuk $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x$: $(f \circ g)(5) = f(10) = 13$, sedangkan $(g \circ f)(5) = g(8) = 16$. Lambangnya mirip, hasilnya berbeda.

☆ **SIFAT-SIFAT KOMPOSISI**

- Umumnya **tidak komutatif**: $f \circ g \neq g \circ f$.
- **Asosiatif**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, jadi rantai tiga mesin cukup ditulis $f \circ g \circ h$.
- Fungsi identitas $I(x) = x$ adalah "mesin diam": $f \circ I = I \circ f = f$.

▾ **Mengapa komposisi asosiatif?**

Hitung kedua ruas untuk sembarang x:

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big), \qquad \big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

Keduanya sama: h dulu, lalu g, lalu f. Tanda kurung hanya mengelompokkan mesin, tidak mengubah urutan kerjanya.

KERJAKAN BERSAMA **Dua urutan, dua rumus**

Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 3$. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$, lalu bandingkan nilainya di $x = 2$.

1. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2(x^2 - 3) + 1 = 2x^2 - 5.$
2. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = (2x + 1)^2 - 3 = 4x^2 + 4x + 1 - 3 = 4x^2 + 4x - 2.$
3. Di $x = 2$: $(f \circ g)(2) = 8 - 5 = 3$ (cek: $g(2) = 1$, $f(1) = 3$) dan $(g \circ f)(2) = 16 + 8 - 2 = 22$ (cek: $f(2) = 5$, $g(5) = 22$).

$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 5$ **dan** $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x - 2$**. Dua mesin yang sama, dua rumus yang sangat berbeda!**

Komposisi juga muncul saat belanja. Diskon persen adalah mesin "kali", sedangkan voucher potongan adalah mesin "kurangi". Toko boleh memilih urutannya, dan hasilnya tidak sama.

RUMUS HIDUP

Diskon bertumpuk: dua mesin bersambung

$$H = (V \circ D)(P) = P\left(1 - \frac{d}{100}\right) - v$$

Mesin D memotong d persen, lalu mesin V memotong v rupiah. Kalau urutannya ditukar, harga akhirnya berubah!

P Harga awal Rp

d Diskon %

v Voucher potongan Rp

H Harga akhir (diskon dulu) Rp

HARGA AKHIR (DISKON DULU)

160.000

Rp

untuk pembeli: diskon persen dulu lebih hemat

Diskon dulu: **200.000** → **180.000** → **160.000**. Voucher dulu: **200.000** → **180.000** → **162.000**. Selisihnya **2.000** rupiah, tepat **10**% dari nilai voucher, berapa pun harga awalnya!

Cek satuan: semua harga dalam rupiah, d dalam persen.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOMPOSISI-DISKON

ADU CEPAT

Mesin bersambung kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kerjakan dari dalam: hitung g(k) dulu, lalu masukkan hasilnya ke f.

COBA SENDIRI **Mencari mesin yang hilang**

Diketahui $f(x) = 2x + 3$ dan $(g \circ f)(x) = 4x + 5$. Tentukan $g(x)$.

1. $(g \circ f)(x) = g(2x + 3) = 4x + 5$. Beri nama baru pada input mesin g: misalkan $u = 2x + 3$, sehingga $x = \dfrac{u - 3}{2}$.
2. Substitusikan: $g(u) = 4 \cdot \dfrac{u - 3}{2} + 5 = 2u - 6 + 5 = 2u - 1$.
3. Ganti nama u kembali menjadi x: $g(x) = 2x - 1$. Cek: $g\big(f(x)\big) = 2(2x + 3) - 1 = 4x + 5$. ✓

$g(x) = 2x - 1$. **Triknya: beri nama baru pada isi kurung, lalu nyatakan x dengan nama baru itu.**

13.3 Fungsi invers: mesin mundur

Termometer di Indonesia memakai derajat Celsius, sedangkan ramalan cuaca di Amerika Serikat memakai Fahrenheit. Mesin $F = 1{,}8C + 32$ mengubah Celsius menjadi Fahrenheit. Mesin yang mengubah Fahrenheit kembali menjadi Celsius disebut **fungsi invers**.

DEFINISI: FUNGSI INVERS

Jika f memasangkan x dengan y, maka fungsi invers f^{-1} memasangkan y kembali dengan x:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

Akibatnya $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ dan $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$: mesin mundur membatalkan kerja mesin maju.

SYARAT PUNYA INVERS

Fungsi f (dari domainnya ke range-nya) punya invers jika dan hanya jika f **satu-satu** (injektif): input yang berbeda selalu menghasilkan output yang berbeda. Pada grafik, ujinya adalah **uji garis mendatar**: setiap garis mendatar memotong grafik paling banyak satu kali.

Lanjut · Dalam bahasa yang lebih resmi: fungsi $f : A \to B$ yang satu-satu sekaligus *pada* (surjektif, yaitu range sama dengan kodomain) disebut **bijektif** atau korespondensi satu-satu. Tepat fungsi bijektif inilah yang punya invers $f^{-1} : B \to A$.

RESEP MENCARI INVERS

1. Tulis $y = f(x)$.
2. Nyatakan x dengan y (selesaikan persamaannya untuk x).
3. Tukar nama variabel: hasilnya adalah $f^{-1}(x)$.
4. Cek: $f\big(f^{-1}(x)\big)$ harus kembali menjadi x.

CONTOH

Mesin mundur termometer

Mesin $f(C) = 1{,}8C + 32$ mengubah °C menjadi °F. Tentukan mesin mundurnya, lalu ubah 95 °F menjadi °C.

1. Tulis $F = 1{,}8C + 32$. Kurangi 32: $F - 32 = 1{,}8C$. Bagi 1,8: $C = \dfrac{F - 32}{1{,}8}$.
2. Jadi $f^{-1}(F) = \dfrac{F - 32}{1{,}8}$.
3. $f^{-1}(95) = \dfrac{95 - 32}{1{,}8} = \dfrac{63}{1{,}8} = 35$.

95 °F = 35 °C, siang yang terik di Surabaya. Perhatikan: mesin maju "kali 1,8 lalu tambah 32", mesin mundur "kurangi 32 lalu bagi 1,8". Urutannya terbalik!

RUMUS HIDUP

Mesin mundur fungsi linear

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

Mesin maju: kali a, lalu tambah b. Mesin mundur: kurangi b dulu, baru bagi a. Langkah terakhir dibatalkan paling awal!

a Pengali a · b Penambah b · y Output y · x Input semula x

INPUT SEMULA X

25

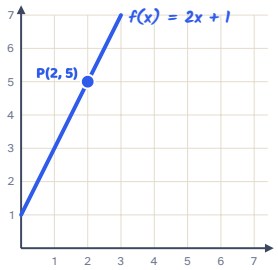
mesin Fahrenheit → Celsius · input semula bulat

Mesin maju f(x) = **1,8**·x **+ 32**. Mundur: (**77 − 32**) : **1,8** = **25**. Cek: f(**25**) = **77**, kembali ke **77**. Dengan a = 1,8 dan b = 32, ini mesin °F → °C.

Cek satuan: x bersatuan sama dengan input mesin maju (mis. °C), y bersatuan sama dengan outputnya (mis. °F).

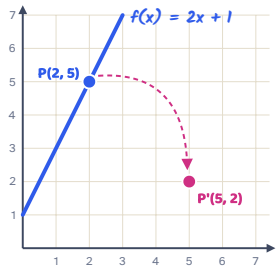
RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-INVERS-LINEAR

Bagaimana dengan grafiknya? Kalau titik (a, b) ada di grafik f, maka $f^{-1}(b) = a$, jadi titik (b, a) ada di grafik f^{-1}. Menukar koordinat ternyata sama dengan **bercermin** pada garis $y = x$. Lihat animasinya:



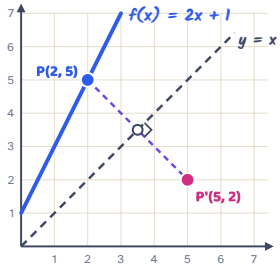
Grafik f(x) = 2x + 1.
Titik P(2, 5) ada di grafik f, karena f(2) = 2 · 2 + 1 = 5.

Langkah 1. Gambar grafik $f(x) = 2x + 1$. Titik $P(2, 5)$ ada di grafik karena $f(2) = 5$.



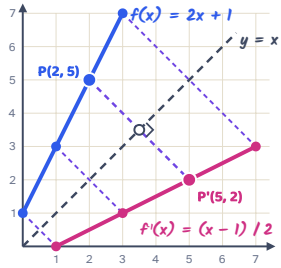
Mesin mundur: f⁻¹(5) = 2.
Jadi titik P′(5, 2) ada di grafik f⁻¹. Koordinatnya tinggal ditukar!

Langkah 2. Mesin mundur membalik arah: $f^{-1}(5) = 2$. Jadi $P'(5, 2)$ ada di grafik f^{-1}. Koordinat x dan y cukup ditukar.



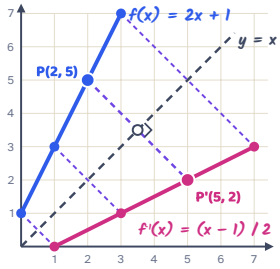
Gambar garis y = x.
Ruas PP′ tegak lurus garis itu (gradiennya −1), dan titik tengahnya (3,5; 3,5) di y = x.
P′ = bayangan cermin P!

Langkah 3. Ruas PP' bergradien $\frac{2-5}{5-2} = -1$, tegak lurus garis $y = x$ yang bergradien 1. Titik tengahnya $(3{,}5;\ 3{,}5)$ tepat di $y = x$. Itulah ciri bayangan cermin.



Lakukan untuk setiap titik:
(0, 1) → (1, 0)
(1, 3) → (3, 1)
(3, 7) → (7, 3)
Semua bayangan membentuk f⁻¹.

Langkah 4. Ulangi untuk titik lain: $(0, 1) \to (1, 0)$, $(1, 3) \to (3, 1)$, $(3, 7) \to (7, 3)$. Semua bayangan berjajar membentuk grafik f^{-1}.



Kesimpulan:
grafik f⁻¹ adalah cermin grafik f terhadap garis y = x.

Lipat kertas di garis y = x: grafik f tepat menutupi f⁻¹.
f⁻¹(x) = (x − 1) / 2

Langkah 5. Kesimpulan: grafik f^{-1} adalah cermin grafik f terhadap $y = x$. Di sini $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Lipat kertasmu di garis $y = x$ dan kedua grafik akan saling menutupi!

GRAFIK HIDUP

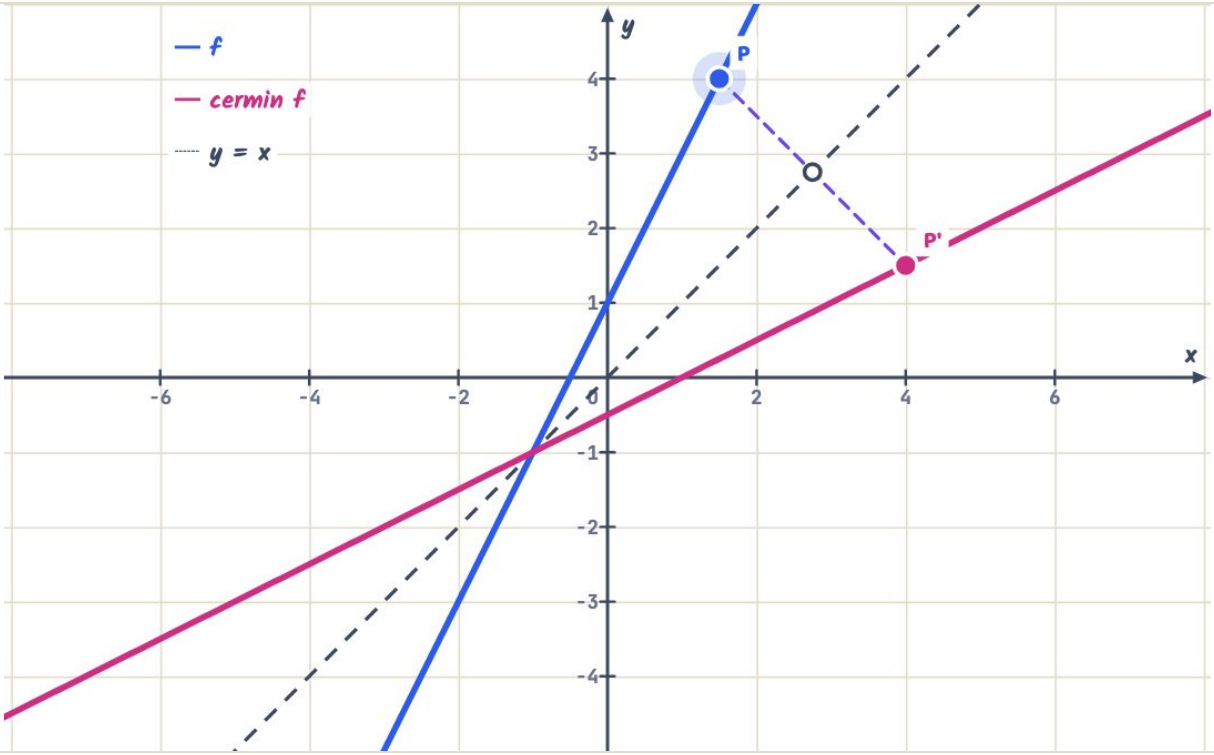
Cermin ajaib: grafik fungsi dan inversnya

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

$$(a,\, b) \text{ di grafik } f \iff (b,\, a) \text{ di grafik } f^{-1}$$

$$P(1{,}5;\ 4) \longleftrightarrow P'(4;\ 1{,}5)$$

Slider pertama memilih f: 1 = garis f(x) = mx + 1, 2 = kubik x³/4, 3 = kuadrat x² − 2 untuk x ≥ 0, 4 = kuadrat x² − 2 tanpa batasan.



f(x) = 2x + 1 ⇒ f⁻¹(x) = (x − 1) : 2

Titik P di f	Titik tengah PP′	Gradien PP′
(1,5; 4)	(2,75; 2,75)	-1

Seret titik biru P di sepanjang grafik f. Titik tengah PP′ selalu berada di garis $y = x$, dan gradien PP′ selalu -1. Pilih **f = 4**: cerminnya ternyata parabola tidur yang bukan fungsi. Lalu pilih **f = 3** untuk melihat bagaimana membatasi domain menyelamatkannya.

Ingat mesin kuadrat di awal bab? Grafik $f(x) = x^2$ gagal uji garis mendatar: garis $y = 49$ memotongnya di $x = 7$ dan $x = -7$. Solusinya adalah **membatasi domain**. Jika $f(x) = x^2$ hanya untuk $x \geq 0$, mesinnya menjadi satu-satu dan $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Itulah sebabnya tombol $\sqrt{}$ di kalkulator selalu memberi hasil yang tidak negatif.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

$f^{-1}(x)$ bukan $\dfrac{1}{f(x)}$. Angka -1 di situ hanya lambang "mesin mundur", bukan pangkat. Untuk $f(x) = 2x$: $f^{-1}(8) = 4$, sedangkan $\dfrac{1}{f(8)} = \dfrac{1}{16}$. Jauh berbeda!

☆ **INVERS DARI KOMPOSISI**

Jika f dan g sama-sama punya invers, maka

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Urutan mesinnya terbalik: yang terakhir bekerja, pertama dibatalkan.

▾ **Bukti singkat**

Pakai sifat asosiatif dan $f^{-1} \circ f = I$:

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ I \circ g = g^{-1} \circ g = I.$$

Mesin $g^{-1} \circ f^{-1}$ membatalkan $f \circ g$ dengan sempurna, jadi dialah inversnya.

∎

✎ **TRIK KAK LINTANG**

Pagi hari kamu memakai **kaus kaki dulu, baru sepatu**. Sore hari, untuk melepasnya, kamu harus membalik urutannya: **sepatu dulu, baru kaus kaki**. Begitulah $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Di komik, mesin "tambah 3 lalu kali 2" dibatalkan dengan "bagi 2 lalu kurangi 3".

ADU CEPAT **Mesin mundur kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi b dulu, lalu bagi a. Cek dengan memasukkan jawabanmu ke f.

KERJAKAN BERSAMA

Invers fungsi pecahan

Tentukan invers $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

1. Tulis $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$, lalu kalikan silang: $y(x-3) = 2x+1$, yaitu $yx - 3y = 2x + 1$.

2. Kumpulkan suku ber-x di kiri: $yx - 2x = 3y + 1$, jadi $x(y-2) = 3y+1$ dan $x = \dfrac{3y+1}{y-2}$.

3. Tukar nama: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$, $x \neq 2$. Cek: $f(4) = \dfrac{9}{1} = 9$ dan $f^{-1}(9) = \dfrac{28}{7} = 4$. ✓

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$. Perhatikan: domain f^{-1} ($x \neq 2$) adalah range f, karena $f(x)$ tidak pernah sama dengan 2.

COBA SENDIRI

Membatasi domain agar bisa dibalik

Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 1$ dibatasi pada $x \geq 2$. Tentukan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.

1. Lengkapkan kuadrat: $f(x) = (x-2)^2 - 3$. Puncaknya $(2, -3)$, jadi pada $x \geq 2$ grafiknya selalu naik: satu-satu.

2. $y = (x-2)^2 - 3 \Rightarrow (x-2)^2 = y + 3 \Rightarrow x - 2 = \sqrt{y+3}$. Akar positif dipilih karena $x - 2 \geq 0$.

3. $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+3}$, dengan domain $x \geq -3$ (range f). Cek: $f(5) = 25 - 20 + 1 = 6$ dan $f^{-1}(6) = 2 + 3 = 5$. ✓

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+3}$, $x \geq -3$. Tanpa batasan $x \geq 2$, mesin mundurnya akan bingung memilih $+\sqrt{}$ atau $-\sqrt{}$.

ID

MATEMATIKA NUSANTARA

Di kalender Jawa, setiap hari punya dua nama: hari biasa (7 nama) dan *pasaran* (Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon). Pasangan keduanya disebut **weton**, dan polanya berulang setiap 35 hari, karena 35 adalah KPK dari 7 dan 5. Fungsi "hari ke-n dalam siklus $\rightarrow$ weton" ternyata **satu-satu**: tidak ada dua hari dalam satu siklus 35 hari yang wetonnya sama, jadi fungsi ini punya invers. Dari weton, kamu bisa menebak hari ke berapa dalam siklus! Lain halnya dengan *neptu* (nilai hari + nilai pasaran): Minggu Pahing $(5+9)$ dan Rabu Pon $(7+7)$ sama-sama bernilai 14. Fungsi "weton $\rightarrow$ neptu" tidak satu-satu, jadi tidak punya invers.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RUMUS KILAT INVERS FUNGSI PECAHAN LINEAR

Untuk $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ dengan $ad - bc \neq 0$, inversnya selalu

$$f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}.$$

Mudah diingat: **tukar posisi a dan d, lalu ubah tanda b dan c.** (Polanya sama persis dengan invers matriks 2×2 di Bab 36!) Cek dengan contoh tadi: $\dfrac{2x+1}{x-3}$ memberi $\dfrac{-3x-1}{-x+2} = \dfrac{3x+1}{x-2}$. ✓ Kejutan kecil: jika $d = -a$, rumus itu menghasilkan fungsi semula, jadi $f^{-1} = f$. Contohnya $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$: coba hitung $f(f(3))$. Fungsi yang menjadi invers dirinya sendiri disebut *involusi*, dan grafiknya simetris terhadap $y = x$.

13.4 Transformasi grafik: geser, regang, dan cermin

Tebak Dulu!

Grafik $y = x^2$ berbentuk parabola dengan puncak di $(0, 0)$. Di manakah puncak grafik $y = (x-3)^2$?

Di $(-3, 0)$, karena minus berarti ke kiri.

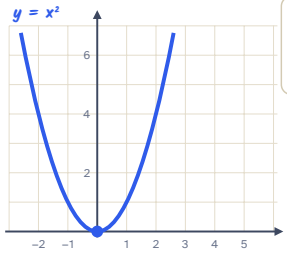
Di $(3, 0)$: grafiknya bergeser ke kanan.

Di $(0, -3)$: grafiknya turun.

Di $(0, 9)$: grafiknya naik 9.

Jawabannya: $(3, 0)$. Nilai terkecil $(x-3)^2$ adalah 0, dan itu terjadi saat $x = 3$. Mesin baru ini butuh input 3 lebih besar untuk menghasilkan output yang sama, sehingga grafiknya bergeser 3 satuan ke **kanan**. Lihat animasi di bawah!

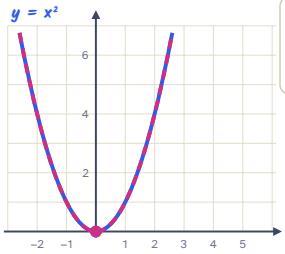
Hampir semua kurva di buku ini dapat dibuat dari beberapa **fungsi induk** sederhana, yaitu x^2, $|x|$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, dan x^3, ditambah empat jenis gerakan: **geser**, **regang**, **mampat**, dan **cermin**. Kak Lintang menyebutnya "senam grafik".



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25

Fungsi induk f(x) = x².
Nilai terkecilnya 0, saat x = 0.
Puncak grafik di (0, 0).

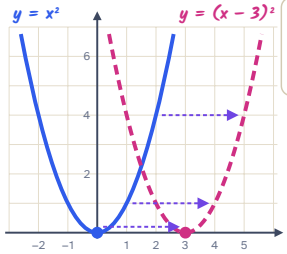
Langkah 1. Fungsi induk $f(x) = x^2$. Nilai terkecilnya 0, dicapai saat $x = 0$, jadi puncaknya di $(0, 0)$.



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
$(x-3)^2$	9	4	1	0	1	4

Mesin baru g(x) = (x − 3)².
Nilai 0 baru muncul saat x = 3.
g(3) = f(0), g(4) = f(1), g(5) = f(2):
nilainya datang 3 langkah telat.

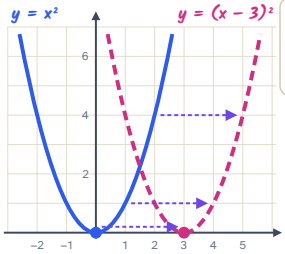
Langkah 2. Mesin baru $g(x) = (x-3)^2$ baru menghasilkan 0 saat $x = 3$. Tabel menunjukkan $g(3) = f(0)$, $g(4) = f(1)$, $g(5) = f(2)$: setiap nilai muncul 3 langkah lebih lambat.



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
$(x-3)^2$	9	4	1	0	1	4

Akibatnya seluruh grafik
bergeser 3 satuan ke KANAN,
padahal di rumusnya tertulis
tanda minus!

Langkah 3. Karena setiap nilai terlambat 3 langkah, seluruh grafik bergeser 3 satuan ke **kanan**, padahal rumusnya memakai tanda minus.



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
$(x-3)^2$	9	4	1	0	1	4

f(x − c): geser kanan c
f(x + c): geser kiri c
Isi kurung bekerja terbalik:
input harus "mengejar" c dulu.

Langkah 4. Aturannya: $f(x-c)$ menggeser grafik c satuan ke kanan, $f(x+c)$ menggeser c satuan ke kiri. Yang di dalam kurung bekerja "terbalik".

Rumus baru	Efek pada grafik $y = f(x)$	Titik (x, y) pindah ke
$y = f(x) + d$	geser tegak d satuan (ke atas jika $d > 0$)	$(x,\ y + d)$
$y = f(x - c)$	geser mendatar c satuan (ke kanan jika $c > 0$)	$(x + c,\ y)$
$y = a\,f(x)$	regang tegak dengan faktor a	$(x,\ ay)$
$y = f(bx)$	mampat mendatar dengan faktor $\frac{1}{b}$	$\left(\frac{x}{b},\ y\right)$
$y = -f(x)$	cermin terhadap sumbu-x	$(x,\ -y)$
$y = f(-x)$	cermin terhadap sumbu-y	$(-x,\ y)$

Bahasa sederhana · Versi singkatnya: angka yang ditulis **di luar** kurung mengubah grafik ke atas-bawah, persis seperti yang tertulis. Angka **di dalam** kurung mengubah grafik ke kiri-kanan, tetapi kebalikannya.

BENTUK UMUM TRANSFORMASI

Grafik $y = a\,f\big(b(x-c)\big) + d$ diperoleh dari grafik $y = f(x)$, dan setiap titik (x, y) pada grafik f pindah ke

$$\left(\frac{x}{b} + c,\;\; ay + d\right).$$

a dan d bekerja tegak (di luar kurung), b dan c bekerja mendatar (di dalam kurung). Jika $a < 0$ grafik juga dicerminkan atas-bawah; jika $b < 0$ grafik juga dicerminkan kiri-kanan.

Mengapa titiknya pindah ke sana?

Misalkan (x_0, y_0) ada di grafik f, jadi $y_0 = f(x_0)$. Ambil $X = \dfrac{x_0}{b} + c$. Maka $b(X - c) = x_0$, sehingga

$$a\,f\big(b(X-c)\big) + d = a\,f(x_0) + d = ay_0 + d.$$

Jadi titik $\left(\frac{x_0}{b} + c,\; ay_0 + d\right)$ ada di grafik baru. Perhatikan urutannya: x_0 **dibagi** b lalu **ditambah** c, kebalikan dari "kurangi c lalu kali b" yang tertulis di rumus. Itulah sebabnya isi kurung bekerja terbalik!

TRIK KAK LINTANG

Ingat semboyan senam grafik: **"Di luar kurung: jujur dan tegak. Di dalam kurung: terbalik dan mendatar."** Pada $f(x) + 2$ grafik naik 2 (jujur). Pada $f(x + 2)$ grafik ke *kiri* 2 (terbalik). Pada $3f(x)$ grafik meregang 3 kali lebih tinggi (jujur). Pada $f(3x)$ grafik *menyempit* menjadi sepertiga lebarnya (terbalik).

RUMUS HIDUP

Transformasi fungsi: mesin di dalam mesin

$$y = a\, f\big(b(x - c)\big) + d, \qquad f(u) = u^2$$

Ikuti x melewati lima mesin kecil: kurangi c, kali b, kuadratkan, kali a, lalu tambah d. Yang di dalam kurung bekerja lebih dulu.

x Input x

a a (regang tegak)

b b (mampat mendatar)

c c (geser kanan)

d d (geser atas)

y Output y

OUTPUT Y

4

x = **3** → kurangi c: **2** → kali b: **2** → kuadratkan: **4** → kali a: **8** → tambah d: **4**. Puncak parabola ini ada di (**1**; **-4**).

Cek satuan: semua besaran tanpa satuan (bilangan murni).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRANSFORMASI-FUNGSI

GRAFIK HIDUP

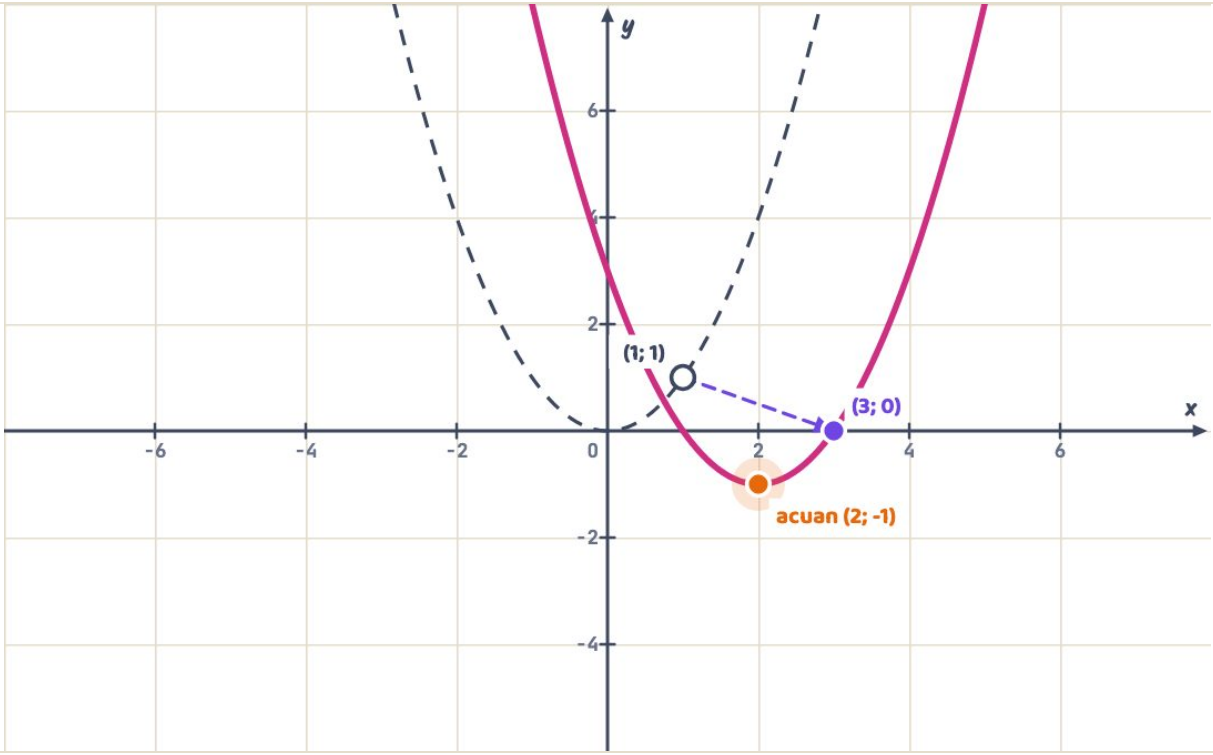
Studio transformasi: satu grafik, empat tombol

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

$$y = a\, f\big(b\,(x - c)\big) + d$$

$$y = 1\, f\big(1\,(x - 2)\big) - 1$$

Slider pertama memilih fungsi induk: 1 = x², 2 = |x|, 3 = √x, 4 = 1/x, 5 = x³. Garis putus-putus = fungsi induk, garis tebal = hasil transformasi.



y = 1·[1(x − 2)]² − 1 **→ geser kanan 2** **↓ geser bawah 1**

Fungsi induk	Titik (1; 1) pindah ke
y = x²	(3; 0)

Seret titik oranye "acuan" untuk menggeser grafik. Titik ungu adalah bayangan titik $(1, 1)$, yang dimiliki **semua** fungsi induk di sini. Tantangan: buat parabola terbuka ke bawah dengan puncak $(-2, 5)$ yang melewati titik $(0, 1)$. Berapa a-nya?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Tanda di dalam kurung bekerja terbalik: $f(x - 3)$ bergeser ke kanan, $f(x + 3)$ ke kiri. Begitu pula $f(2x)$ memampatkan grafik menjadi setengah lebarnya, bukan meregangkannya dua kali. Dan $f(2x - 6)$ bukan "geser kanan 6": faktorkan dulu menjadi $f\big(2(x - 3)\big)$, jadi geser kanannya 3.

KERJAKAN BERSAMA

Membaca senam parabola

Jelaskan bagaimana grafik $y = -2(x+1)^2 + 3$ diperoleh dari $y = x^2$, lalu tentukan puncak dan bayangan titik $(1, 1)$.

1. Cocokkan dengan $a\,f\big(b(x-c)\big) + d$: $a = -2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 3$.
2. Geser kiri 1, regang tegak 2 kali, cermin atas-bawah (karena $a < 0$), lalu naik 3. Puncak $(0, 0)$ pindah ke $(c, d) = (-1, 3)$.
3. Titik $(1, 1)$ pindah ke $\big(\frac{1}{1} - 1,\ -2 \cdot 1 + 3\big) = (0, 1)$. Cek: $-2(0+1)^2 + 3 = 1$. ✓

Parabola terbuka ke bawah dengan puncak $(-1, 3)$, yaitu nilai maksimum 3. Grafiknya melewati $(0, 1)$.

COBA SENDIRI

Jebakan f(2x – 6)

Titik $(4, 1)$ ada di grafik $y = f(x)$. Titik mana yang pasti ada di grafik $y = f(2x - 6)$?

1. Faktorkan isi kurung: $f(2x - 6) = f\big(2(x - 3)\big)$, jadi $b = 2$ dan $c = 3$.
2. Titik (x, y) pindah ke $\big(\frac{x}{b} + c,\ y\big) = \big(\frac{4}{2} + 3,\ 1\big) = (5, 1)$.
3. Cek langsung: di $x = 5$, isi kurungnya $2 \cdot 5 - 6 = 4$, dan $f(4) = 1$. ✓

Titiknya $(5, 1)$. Jawaban populer yang keliru: $(8, 1)$ (mampat dulu lalu geser 6) dan $(3{,}5;\ 1)$ (geser 3 dulu baru mampat). Cara paling aman: cari x yang membuat isi kurung sama dengan 4.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TRANSFORMASI = KOMPOSISI, DAN FUNGSI GENAP–GANJIL

Rumus $y = a\,f\big(b(x-c)\big) + d$ sebenarnya rantai lima mesin: $T_1(x) = x - c$, $T_2(x) = bx$, lalu f, lalu $T_3(y) = ay$, $T_4(y) = y + d$. Jadi $y = (T_4 \circ T_3 \circ f \circ T_2 \circ T_1)(x)$. Mesin di dalam kurung bekerja **sebelum** f, sehingga untuk menemukan titik baru kita harus membatalkannya ($T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$: bagi b, tambah c). Inilah alasan mendalam mengapa isi kurung "terbalik".

Ada pula fungsi yang tidak berubah oleh cermin. Jika $f(-x) = f(x)$, f disebut **fungsi genap** (simetris terhadap sumbu-y, misalnya x^2, $|x|$). Jika $f(-x) = -f(x)$, f disebut **fungsi ganjil** (simetris terhadap titik asal, misalnya x^3, $\frac{1}{x}$). Karena itu, di Studio transformasi, $b < 0$ tidak mengubah parabola dan garis V!

13.5 Fungsi rasional dan asimtot

Kelas Dimas akan karyawisata ke Candi Prambanan. Sewa bus Rp6.000.000 dibagi rata. Jika ada n siswa, setiap siswa membayar $B(n) = \dfrac{6.000.000}{n}$ rupiah.

Banyak siswa n	10	20	40	60	120
Iuran per siswa (Rp)	600.000	300.000	150.000	100.000	50.000

Makin banyak siswa, iuran makin kecil dan makin dekat ke 0, tetapi **tidak pernah tepat 0**. Sebaliknya, makin sedikit siswa, iuran membengkak tanpa batas, dan $n = 0$ mustahil: tidak ada yang membayar! Garis yang makin didekati grafik seperti ini disebut **asimtot**.

DEFINISI: FUNGSI RASIONAL DAN ASIMTOT

Fungsi rasional adalah fungsi berbentuk pecahan dua polinomial, misalnya $f(x) = \dfrac{a}{x-h} + k$ atau $f(x) = \dfrac{px+q}{rx+s}$. **Asimtot** adalah garis yang makin didekati grafik ketika grafik menjauh tanpa batas. Untuk $f(x) = \dfrac{a}{x-h} + k$:

- **asimtot tegak** $x = h$, karena di situ penyebutnya nol;
- **asimtot datar** $y = k$, karena $\dfrac{a}{x-h}$ mendekati 0 saat x sangat besar atau sangat kecil;
- domain $x \neq h$ dan range $y \neq k$.

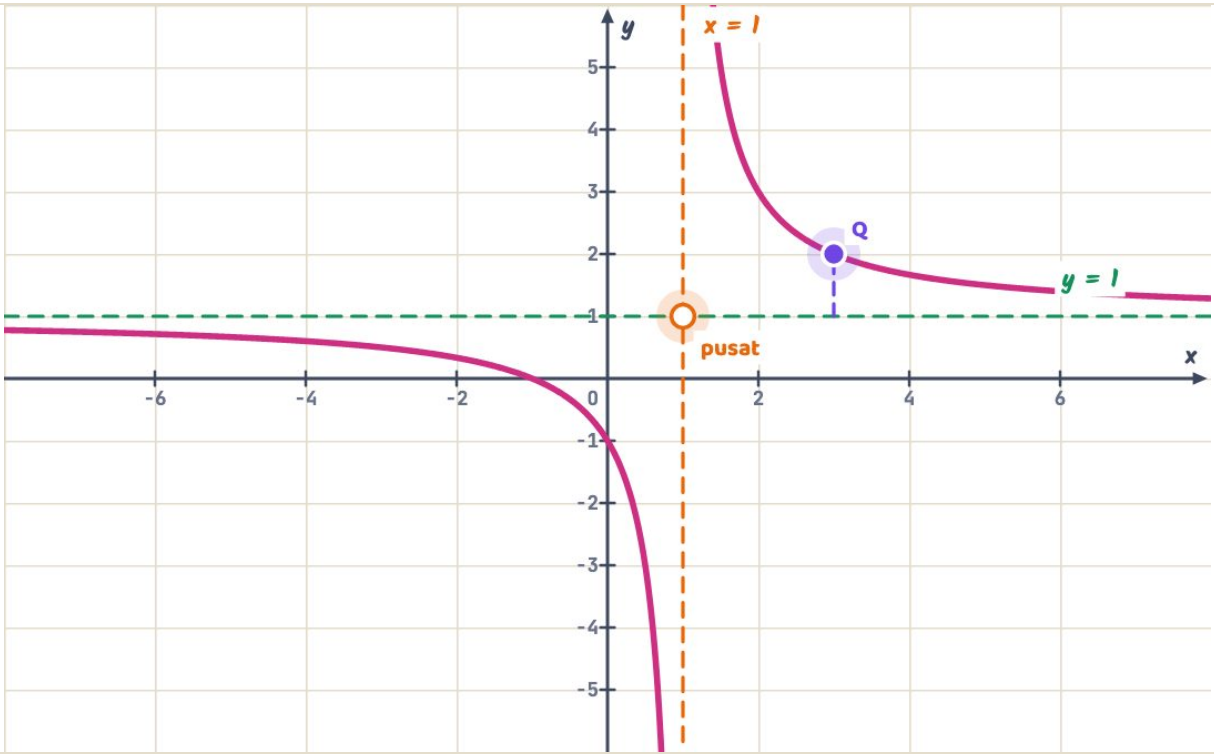
GRAFIK HIDUP

Asimtot: garis yang didekati tanpa henti

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

$$f(x) = \frac{a}{x - h} + k$$

$$f(x) = \frac{2}{x - 1} + 1$$



a > 0: cabang kanan-atas dan kiri-bawah pusat

Asimtot tegak	Asimtot datar	Domain	Range	f(q)	Jarak Q ke y = k
x = 1	y = 1	x ≠ 1	y ≠ 1	2	1

Tekan ▶ **Jalankan**: titik Q berlari dari kiri ke kanan. Perhatikan jarak ungu antara Q dan asimtot datar: makin jauh Q berlari, makin kecil jaraknya, tetapi tidak pernah nol. Seret titik "pusat" untuk memindahkan kedua asimtot sekaligus.

Fungsi $\frac{px + q}{rx + s}$ dapat diubah ke bentuk $\frac{a}{x - h} + k$ dengan sedikit aljabar. Hasilnya: asimtot tegak di $x = -\frac{s}{r}$ (penyebut nol) dan asimtot datar di $y = \frac{p}{r}$ (perbandingan koefisien x).

KERJAKAN BERSAMA

Asimtot fungsi pecahan dan inversnya

Tentukan asimtot $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Bandingkan dengan asimtot inversnya, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

1. Tulis ulang pembilangnya: $2x+1 = 2(x-3)+7$, jadi $f(x) = 2 + \dfrac{7}{x-3}$. Ini grafik $\frac{7}{x}$ yang digeser kanan 3 dan naik 2.
2. Asimtot f: tegak $x = 3$, datar $y = 2$. Domain $x \neq 3$, range $y \neq 2$.
3. Dengan cara yang sama, $f^{-1}(x) = 3 + \dfrac{7}{x-2}$: asimtot tegak $x = 2$, datar $y = 3$.

Asimtot f: $x = 3$ dan $y = 2$. Asimtot f^{-1}: $x = 2$ dan $y = 3$. Peran keduanya bertukar, karena grafik invers adalah cermin terhadap $y = x$!

MITOS

"
$f^{-1}(x)$
sama dengan
$\dfrac{1}{f(x)}$
."

FAKTA

Pangkat
-1
pada
f^{-1}
hanya lambang "mesin mundur". Untuk
$f(x) = 2x$
, inversnya
$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
, sedangkan
$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$
. Jauh berbeda!

MITOS

"
$f \circ g$
dan
$g \circ f$
pasti sama."

FAKTA

Biasanya berbeda. Untuk
$f(x) = x + 3$
dan
$g(x) = 2x$
:
$f(g(5)) = 13$
, tetapi
$g(f(5)) = 16$
. Memakai kaus kaki lalu sepatu tidak sama dengan sepatu lalu kaus kaki!

MITOS

"Grafik tidak pernah memotong asimtotnya."

FAKTA

Asimtot tegak memang tidak tersentuh, karena fungsinya tidak terdefinisi di sana. Tetapi asimtot datar boleh dipotong! Grafik $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ mendekati $y = 0$ di kejauhan, tetapi memotongnya di $x = 0$.

MITOS

"Setiap fungsi punya invers."

FAKTA

Hanya fungsi satu-satu. Fungsi x^2 memberi 9 untuk $x = 3$ maupun $x = -3$, jadi mesin mundurnya bingung. Batasi domainnya ($x \geq 0$) agar inversnya ada.

13.6 Fungsi nilai mutlak dan fungsi sepotong-sepotong

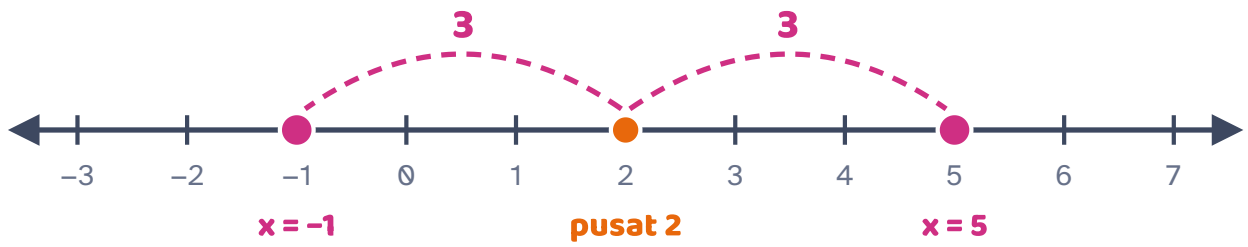
Tidak semua mesin memakai satu aturan saja. Ojek daring, tagihan air, dan tarif parkir memakai aturan yang **berganti** sesuai inputnya. Fungsi seperti itu disebut **fungsi sepotong-sepotong**: aturannya berbeda pada bagian-bagian domain yang berbeda. Contoh paling terkenal adalah **nilai mutlak**.

DEFINISI: NILAI MUTLAK

Nilai mutlak $|x|$ adalah jarak bilangan x ke 0 pada garis bilangan. Sebagai fungsi sepotong-sepotong:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Grafik $y = |x|$ berbentuk huruf V dengan pojok di $(0, 0)$. Lebih umum, $|x - a|$ adalah jarak antara x dan a.



$|x - 2| = 3$ artinya "jarak x ke 2 sama dengan 3". Ada dua titik seperti itu: $x = -1$ dan $x = 5$.

KERJAKAN BERSAMA **Persamaan nilai mutlak**

Selesaikan $|2x - 5| = 7$.

1. Isi tanda mutlak bisa 7 atau -7: $2x - 5 = 7$ atau $2x - 5 = -7$.
2. $2x = 12 \Rightarrow x = 6$, atau $2x = -2 \Rightarrow x = -1$.
3. Cek: $|12 - 5| = 7$ ✓ dan $|-2 - 5| = |-7| = 7$ ✓.

$x = 6$ atau $x = -1$. Secara grafik, garis $y = 7$ memotong grafik V $y = |2x - 5|$ di dua titik.

Fungsi sepotong-sepotong juga muncul di tagihan bulanan. Banyak PDAM memakai **tarif berjenjang**: makin banyak air yang dipakai, makin mahal harga tiap m^3-nya. Tujuannya mengajak warga berhemat.

RUMUS HIDUP

Tagihan air berjenjang

$$T(v) = \begin{cases} 10.000 + 2.000\,v, & 0 \le v \le 10 \\ 30.000 + 3.500(v - 10), & 10 < v \le 20 \\ 65.000 + 5.000(v - 20), & v > 20 \end{cases}$$

Biaya beban Rp10.000, lalu 10 m³ pertama Rp2.000/m³, 10 m³ berikutnya Rp3.500/m³, dan sisanya Rp5.000/m³. Tiga aturan, satu fungsi.

v Pemakaian air m³

T Tagihan Rp

TAGIHAN

90.000

Rp

blok 3: Rp5.000/m³, hemat air yuk!

Pemakaian **25** m³: blok 1 = **10** m³, blok 2 = **10** m³, blok 3 = **5** m³. Tagihan **90.000** rupiah, rata-rata **3.600** rupiah per m³.

Cek satuan: v dalam m³, T dalam rupiah. Angka tarif ini rekaan; tarif asli berbeda di setiap daerah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TARIF-BERJENJANG

Fungsi sepotong-sepotong bahkan bisa **melompat**. Di banyak tempat parkir, lewat satu menit saja sudah dihitung satu jam penuh. Grafiknya berbentuk tangga, dengan bulatan kosong (nilai tidak termasuk) dan bulatan penuh (nilai termasuk) di setiap ujung anak tangga.

GRAFIK HIDUP

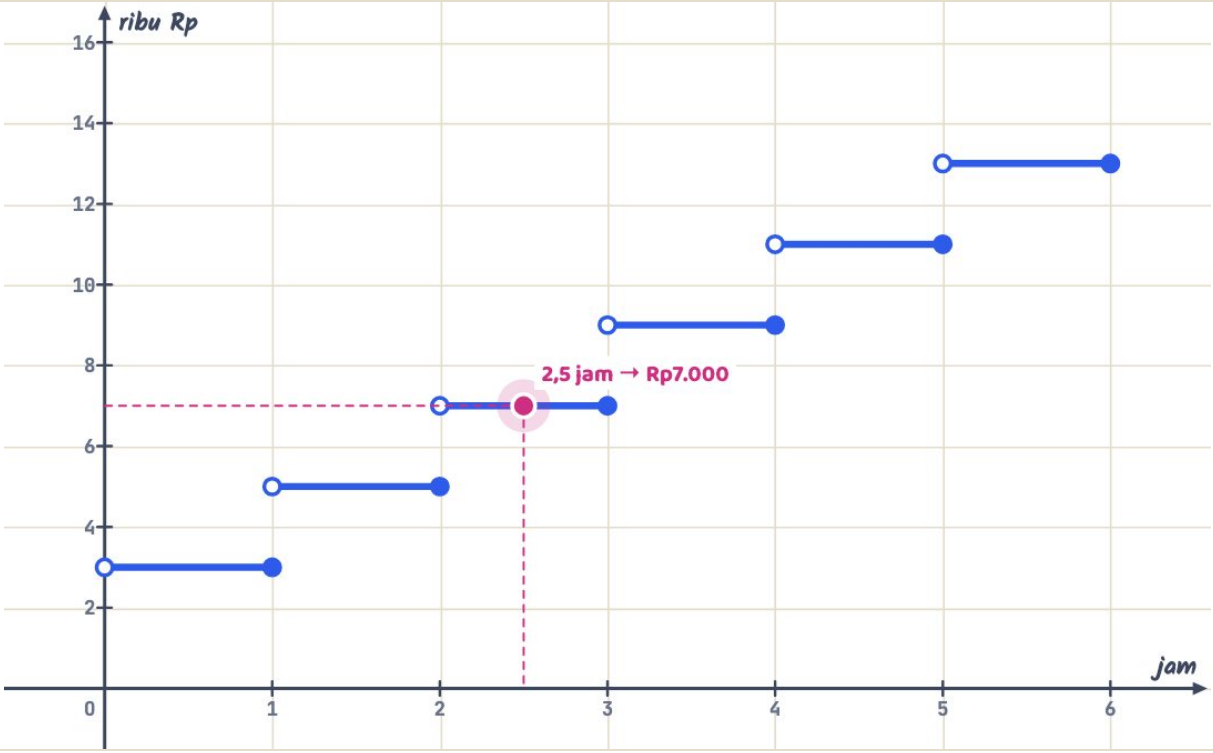
Tarif parkir: tangga yang melompat

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

$$f(t) = A + B\,(\lceil t \rceil - 1) \text{ ribu rupiah}$$

$$f(2{,}5) = 3 + 2 \cdot (3 - 1) = 7 \text{ ribu rupiah}$$

$\lceil t \rceil$ berarti t dibulatkan ke atas: 2,1 jam dihitung 3 jam. A = tarif jam pertama, B = tarif setiap jam berikutnya (dalam ribu rupiah).



Lama parkir	Jam yang ditagih	Tarif
2,5 jam	3 jam	7.000 rupiah

Seret titik merah muda sepanjang waktu. Perhatikan lompatan tepat sesudah 1 jam, 2 jam, dan seterusnya. Pada $t = 2$, apakah tarifnya ikut anak tangga bawah atau atas? Lihat bulatannya!

Termometer & ramalan cuaca

Aplikasi cuaca mengubah °C ke °F dengan $F = 1{,}8C + 32$, dan sebaliknya dengan fungsi inversnya.

Penukaran uang

Kurs jual dan kurs beli berbeda. Menukar rupiah ke dolar lalu kembali ke rupiah (komposisi dua mesin) tidak mengembalikan uangmu utuh: selisihnya menjadi keuntungan penukar uang.

Diskon bertumpuk

Diskon persen dan voucher potongan adalah dua mesin. Urutan pemakaiannya mengubah harga akhir yang kamu bayar.

Tagihan air PDAM

Tarif berjenjang adalah fungsi sepotong-sepotong: makin boros, makin mahal tiap m³-nya.

Parkir per jam

Lewat satu menit dihitung satu jam penuh: fungsi tangga yang melompat di setiap pergantian jam.

Sandi rahasia

Pesan diacak dengan sebuah fungsi dan hanya bisa dibuka oleh yang tahu fungsi inversnya. Prinsip ini dipakai aplikasi pesan dan perbankan.

LANJUT · OLIMPIADE

PERSAMAAN FUNGSIONAL: MENEBAK MESIN DARI SIFATNYA

Kadang rumus mesinnya disembunyikan, dan yang diketahui hanya sifatnya. Soal seperti ini disebut **persamaan fungsional**.

Contoh 1. $f(x+1) = f(x) + 3$ dan $f(0) = 2$. Setiap langkah ke kanan menambah 3, jadi untuk bilangan bulat $n \geq 0$, $f(n) = 3n + 2$. Mirip barisan aritmetika!

Contoh 2. $f(x) + 2f(1-x) = 3x$ untuk semua x. Trik andalannya: **ganti** x **dengan** $1 - x$, sehingga $f(1-x) + 2f(x) = 3(1-x)$. Sekarang ada dua persamaan dengan dua "misteri", $f(x)$ dan $f(1-x)$. Kalikan persamaan kedua dengan 2 lalu kurangkan persamaan pertama: $3f(x) = 6 - 6x - 3x$, jadi $f(x) = 2 - 3x$. Cek: $(2-3x) + 2\big(2 - 3(1-x)\big) = 2 - 3x - 2 + 6x = 3x$. ✓

Cek Cepat

Jika $f(x) = x + 4$ dan $g(x) = 3x$, maka $(g \circ f)(2) = \ldots$

10

18

14

24

Grafik $y = f(x + 2) - 1$ diperoleh dari grafik $y = f(x)$ dengan...

geser kanan 2, lalu turun 1

geser kiri 2, lalu naik 1

geser kanan 2, lalu naik 1

geser kiri 2, lalu turun 1

Fungsi manakah yang tidak punya invers jika domainnya semua bilangan real?

$f(x) = x^2 + 1$

$f(x) = 2x - 7$

$f(x) = x^3$

$f(x) = \dfrac{x - 1}{3}$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: mesin rahasia keluarga

Bahan: kertas, pensil, 2–4 anggota keluarga atau teman, kalkulator atau HP (boleh).

1. Satu orang menjadi "mesin". Diam-diam ia menulis aturan berbentuk "kali a lalu tambah b" di kertas terlipat, misalnya "kali 3 lalu kurangi 2".
2. Pemain lain menyebut bilangan input; mesin hanya menjawab outputnya. Catat dalam tabel input–output.
3. Tebak aturannya dengan input sesedikit mungkin. (Petunjuk: coba input 0 dan 1!)
4. Ganti permainan: mesin menyebut **output**, kamu menebak inputnya. Kamu sedang menjadi mesin invers!
5. Sambung dua orang: orang pertama "kali 2", orang kedua "tambah 5". Bandingkan hasilnya bila urutan keduanya ditukar.

Pertanyaan: Mengapa input 0 dan 1 sangat membantu menebak aturan "kali a lalu tambah b"? Berapa input minimal yang diperlukan? Kalau aturan mesinnya "kuadratkan", apakah mesin invers selalu bisa menebak input dengan pasti?

RINGKASAN KILAT

Bab 13 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menentukan **domain**, **kodomain**, dan **range** sebuah fungsi, termasuk membacanya dari grafik
- menyusun dan menghitung **fungsi komposisi** $f \circ g$, serta menjelaskan mengapa urutannya penting
- mencari **fungsi invers** dan memahami grafiknya sebagai **cermin** terhadap garis $y = x$
- menggambar **transformasi grafik** $y = a\,f\big(b(x-c)\big) + d$: geser, regang, mampat, dan cermin
- mengenali **asimtot** fungsi rasional sederhana, serta membaca fungsi **nilai mutlak** dan fungsi **sepotong-sepotong**

Istilah kunci

fungsi · domain · kodomain · range · uji garis tegak · fungsi komposisi · fungsi invers · satu-satu · bijektif · fungsi induk · asimtot · Fungsi rasional · fungsi sepotong-sepotong · nilai mutlak

Rumus penting

$$H = (V \circ D)(P) = P\left(1 - \tfrac{d}{100}\right) - v$$

Diskon bertumpuk: dua mesin bersambung. Mesin D memotong d persen, lalu mesin V memotong v rupiah. Kalau urutannya ditukar, harga akhirnya berubah!

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

Mesin mundur fungsi linear. Mesin maju: kali a, lalu tambah b. Mesin mundur: kurangi b dulu, baru bagi a. Langkah terakhir dibatalkan paling awal!

$$y = a\,f\big(b(x-c)\big) + d, \qquad f(u) = u^2$$

Transformasi fungsi: mesin di dalam mesin. Ikuti x melewati lima mesin kecil: kurangi c, kali b, kuadratkan, kali a, lalu tambah d. Yang di dalam kurung bekerja lebih dulu.

$$T(v) = \begin{cases} 10.000 + 2.000\,v, & 0 \le v \le 10 \\ 30.000 + 3.500(v-10), & 10 < v \le 20 \\ 65.000 + 5.000(v-20), & v > 20 \end{cases}$$

Tagihan air berjenjang. Biaya beban Rp10.000, lalu 10 m³ pertama Rp2.000/m³, 10 m³ berikutnya Rp3.500/m³, dan sisanya Rp5.000/m³. Tiga aturan, satu fungsi.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Domain $\sqrt{x-3}$ adalah $x \ge 3$, bukan $x > 3$.
- $(f \circ g)(x)$ dikerjakan dari kanan ke kiri: g dulu, baru f.
- $f^{-1}(x)$ bukan $\dfrac{1}{f(x)}$.

⛰ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=13

🧩 Teka-teki untuk Bab 14

Di sebuah laboratorium, satu bakteri membelah menjadi dua setiap 20 menit (dalam kondisi ideal). Pukul 07.00 ada 1 bakteri. Berapa banyak bakteri pada pukul 12.00? Kira-kira pukul berapa jumlahnya pertama kali melewati satu juta? Mesin "kali 2 setiap 20 menit" mudah dijalankan maju. Tetapi bagaimana menjalankannya **mundur**, dari banyaknya bakteri ke lamanya waktu?

▼ **Intip petunjuk**

Dari 07.00 ke 12.00 ada 300 menit, berarti 15 kali membelah: $2^{15} = 32.768$ bakteri. Karena $2^{19} = 524.288$ dan $2^{20} = 1.048.576$, satu juta terlewati setelah 20 kali membelah (400 menit), yaitu pukul 13.40. Mesin mundur dari "pangkat" disebut **logaritma**, bintang utama Bab 14!

BAB 14 · ALJABAR & FUNGSI

14 Eksponen & Logaritma: Berlipat Ganda dan Cara Menjinakkannya

Satu bakteri yang membelah setiap 20 menit bisa menjadi miliaran triliun dalam sehari. Bagaimana menghitung ledakan seperti itu, dan bagaimana menjawab pertanyaan "kapan"? Kenalan dengan dua sahabat: si pelipat ganda dan si penghitung lipatan.

Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan pertumbuhan **linear** (ditambah) dan **eksponensial** (dikali), lalu memodelkannya dengan $N = N_0 \cdot b^{t/T}$;
- menghitung **waktu paruh** dan waktu lipat dua pada obat, zat radioaktif, dan tabungan;
- menjelaskan asal-usul **bilangan e** lewat bunga majemuk;
- memahami **logaritma** sebagai "pangkat yang dicari" dan memakai sifat-sifatnya;
- menyelesaikan **persamaan eksponen dan logaritma**, serta membaca skala logaritma seperti magnitudo gempa, desibel, dan pH.

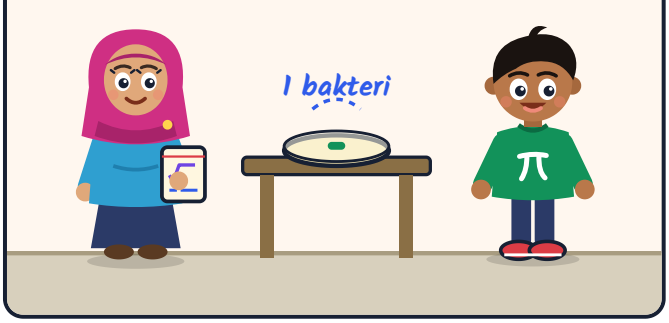
TEKA-TEKI CAWAN PETRI

KOMIK · 4 PANEL

Senin pagi, laboratorium IPA sekolah

AYU
Bakteri ini membelah jadi dua setiap 20 menit. Kalau pagi ini ada satu, besok pagi ada berapa?

DIMAS
Sehari ada 72 kali 20 menit. Jadi 72 × 2 = 144 bakteri!



KAK LINTANG
*Hati-hati, Dimas! Membelah itu **dikali** dua, bukan **ditambah** dua. Setiap 20 menit, jumlahnya berlipat ganda.*





Teka-teki bakteri dari akhir Bab 13 ternyata menyimpan kejutan besar. Dimas **menambahkan** 2 sebanyak 72 kali, padahal setiap pembelahan **mengalikan** jumlahnya dengan 2. Hasil yang benar 2^{72} sangat besar. Untungnya, di dunia nyata makanan dan ruang bakteri habis jauh sebelum itu, sehingga pertumbuhannya melambat. Meski begitu, pada jam-jam awal, ledakan "dikali dua, dikali dua" itu benar-benar terjadi. Inilah alasan makanan basi begitu cepat di udara panas.

Tebak Dulu!

Kamu boleh memilih satu hadiah. A: Rp1.000.000 setiap hari selama 30 hari. B: Rp1 pada hari pertama, Rp2 pada hari kedua, Rp4 pada hari ketiga, dan seterusnya berlipat dua selama 30 hari. Pilih yang mana?

A, jelas jauh lebih banyak.

Kira-kira sama saja.

B, dan selisihnya sangat jauh.

B, tetapi hanya menang sedikit.

Jawabannya: B, dengan selisih yang luar biasa. Hadiah A totalnya Rp30.000.000. Hadiah B terlihat remeh di awal: setelah seminggu kamu baru mengantongi Rp127. Namun pada hari ke-30 saja kamu menerima 2^{29} = Rp536.870.912, dan total 30 harinya Rp1.073.741.823, lebih dari satu miliar rupiah! Bilangan yang terus **dikali** selalu menyalip bilangan yang hanya **ditambah**.

14.1 Berlipat ganda: pertumbuhan eksponensial

Bandingkan dua cara bertambah. Celengan Dimas bertambah Rp5.000 setiap minggu: 5.000, 10.000, 15.000, ... Itu **pertumbuhan linear**: setiap langkah **ditambah** bilangan yang sama. Bakteri Ayu berlipat dua setiap 20 menit: 1, 2, 4, 8, ... Itu **pertumbuhan eksponensial**: setiap langkah **dikali** bilangan yang sama.



Langkah 1. Menit ke-0: ada 1 bakteri. Kita tulis $1 = 2^0$, karena belum ada pembelahan.



Langkah 2. Menit ke-20: bakteri itu membelah menjadi dua. Sekarang ada $2 = 2^1$.



Langkah 3. Menit ke-40: **setiap** bakteri membelah lagi, jadi ada $4 = 2^2$. Jumlahnya dikali 2, bukan ditambah 2.



Langkah 4. Menit ke-60: $8 = 2^3$. Satu jam berarti tiga kali membelah.



Langkah 5. Menit ke-80: $16 = 2^4$. Setelah n kali membelah, satu bakteri menjadi 2^n. Variabel n berada di **pangkat**; itulah ciri pertumbuhan eksponensial.



Langkah 6. Sekarang pertanyaannya dibalik: berapa kali membelah agar menjadi 1.024? Kita mencari pangkatnya: $2^n = 1024$, dan jawabannya $n = 10$. Mencari pangkat seperti ini disebut **logaritma**: $\log_2 1024 = 10$.

DEFINISI

Fungsi berbentuk

$$f(x) = a \cdot b^x, \qquad a \neq 0,\ b > 0,\ b \neq 1$$

disebut **fungsi eksponen**. Bilangan a adalah nilai awal (nilai saat $x = 0$), sedangkan b adalah **faktor pengali**: setiap kali x naik 1, nilai fungsi dikali b. Jika $b > 1$, fungsinya **tumbuh**; jika $0 < b < 1$, fungsinya **meluruh** (menyusut).

Bahasa sederhana · Cara mengenalinya: kalau setiap langkah kamu **menambah** angka yang sama, itu linear, seperti berjalan kaki. Kalau setiap langkah kamu **mengali** dengan angka yang sama, itu eksponensial, seperti

naik roket yang terus menambah kecepatan!

Langkah n	**Linear: $2n$**	**Kuadrat: n^2**	**Eksponen: 2^n**
1	2	1	2
3	6	9	8
5	10	25	**32**
10	20	100	**1.024**
20	40	400	**1.048.576**
30	60	900	**1.073.741.824**

Pada $n = 3$, n^2 masih unggul ($9 > 8$). Mulai $n = 5$, 2^n memimpin dan tidak pernah tersusul lagi. Dalam jangka panjang, fungsi eksponen dengan $b > 1$ selalu mengalahkan fungsi pangkat seperti n^2, bahkan n^{100}, walaupun kadang butuh waktu lama untuk menyalipnya.

GRAFIK HIDUP

Keluarga fungsi eksponen $y = a \cdot b^x$

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14

$$y = a \cdot b^{x}$$

$$y = 1 \cdot 2^{x}$$

a = nilai awal (titik potong dengan sumbu y); b = faktor pengali setiap kali x naik 1.



b > 1: tumbuh, makin ke kanan makin melesat

Titik potong sumbu y	Tiap x naik 1, y dikali	Asimtot datar
(0; 1)	2	y = 0

Seret titik ungu untuk mengubah a, lalu geser b melewati 1. Kapan grafiknya naik, kapan turun? Perhatikan juga: apakah grafik pernah menyentuh sumbu x?

RUMUS HIDUP

Pertumbuhan & peluruhan eksponensial

$$N = N_0 \cdot b^{t/T}$$

Mulai dari N_0. Setiap lewat satu periode T, jumlahnya dikali b. Setelah waktu t, sudah lewat t/T periode.

- N_0 Jumlah awal
- b Faktor per periode `kali`
- t Waktu berlalu `menit`
- T Panjang satu periode `menit`
- N Jumlah setelah waktu t

JUMLAH SETELAH WAKTU T

64

tumbuh — **6 kali membelah: $2^6 = 64$ bakteri**

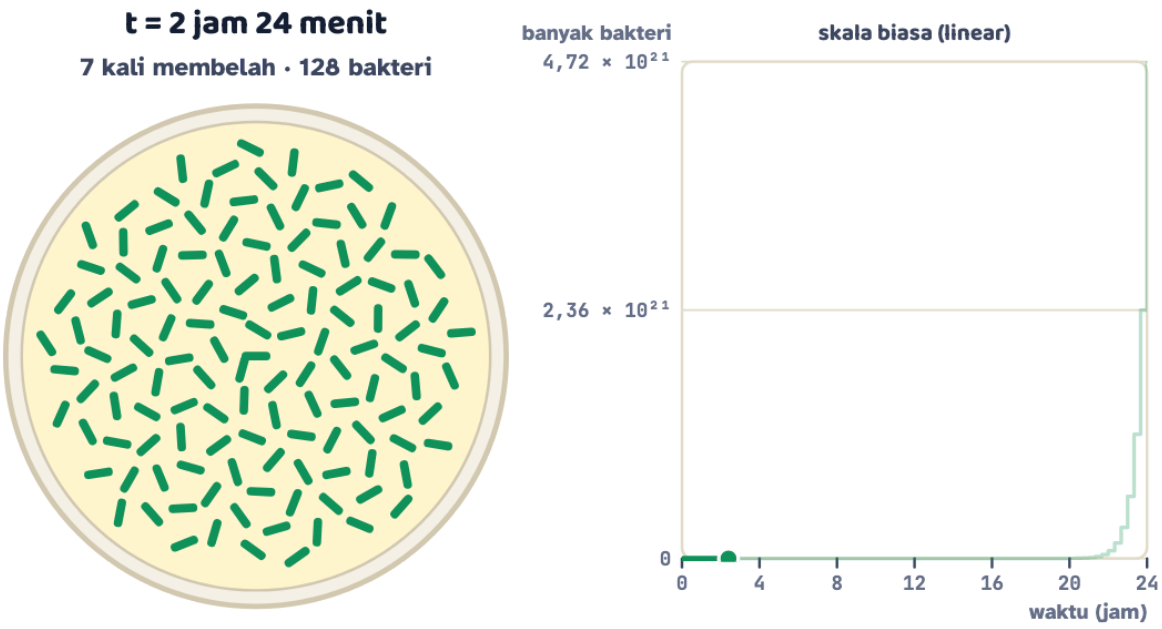
Waktu **120** menit sama dengan **6** periode. Jadi **1** dikali **2** sebanyak **6** kali, hasilnya N = **64**.

Cek satuan: t dan T harus memakai satuan yang sama (keduanya menit), sehingga t/T tidak bersatuan dan hanya menyatakan banyaknya periode.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-EKSP-TUMBUH

LAB MINI Cawan petri: ledakan pembelahan

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14



Waktu	Sudah membelah	Banyak bakteri
2 jam 24 menit	7 kali	128

Tembus sejuta pada
6 jam 40 menit (20 kali membelah)

Tekan ▶ **Jalankan** dan amati 24 jam berlalu dalam 12 detik. Pada grafik biasa, kurvanya tampak "tidur" lama lalu tiba-tiba melonjak. Ganti ke **skala logaritmik**: kurva yang sama berubah menjadi tangga lurus! Lalu nyalakan **makanan terbatas** untuk melihat apa yang sebenarnya terjadi di laboratorium.

Tebak Dulu!

Eceng gondok tumbuh di sebuah danau. Luas yang ditutupinya berlipat dua setiap hari, dan pada hari ke-30 danau tertutup penuh. Pada hari ke berapa danau tertutup setengahnya?

Hari ke-15, karena setengah dari 30.

Hari ke-20.

Hari ke-25.

Hari ke-29.

Jawabannya: hari ke-29. Karena luasnya berlipat dua setiap hari, sehari sebelum penuh danau baru tertutup setengahnya. Pada hari ke-25, eceng gondok baru menutupi $\frac{1}{32}$ danau, sekitar 3%. Kelihatannya masih aman, padahal lima hari kemudian danau tertutup penuh! Di dunia nyata eceng gondok tumbuh lebih lambat daripada di teka-teki ini, tetapi danau seperti Rawa Pening di Jawa Tengah memang harus terus dibersihkan karena tanaman ini.

CONTOH

Bakteri di nasi yang lupa disimpan

Sepiring nasi tertinggal di meja dan mengandung 50 bakteri. Jika bakteri itu membelah setiap 20 menit, berapa banyak bakteri setelah 2 jam?

1. 2 jam = 120 menit = $120 : 20 = 6$ periode, jadi bakteri membelah 6 kali.
2. Setiap membelah, jumlahnya dikali 2: $N = 50 \cdot 2^6$.
3. $2^6 = 64$, sehingga $N = 50 \cdot 64 = 3200$.

Ada 3.200 bakteri setelah 2 jam, 64 kali lipat dari semula. Itulah sebabnya makanan matang sebaiknya segera disimpan di kulkas atau dihabiskan.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Kenaikan persen yang berulang tidak boleh dijumlahkan begitu saja. Harga yang naik 10% setiap tahun selama 3 tahun tidak naik 30%, melainkan dikali $1{,}1^3 = 1{,}331$, jadi naik 33,1%. Setiap kenaikan dihitung dari harga yang sudah naik sebelumnya.

14.2 Menyusut separuh: peluruhan dan waktu paruh

Kalau faktor pengalinya di antara 0 dan 1, jumlahnya makin lama makin kecil. Ini disebut **peluruhan eksponensial**. Contohnya kadar obat di dalam darah, zat radioaktif, dan selisih suhu teh panas dengan suhu ruangan saat teh mendingin.

DEFINISI

Waktu paruh ($T_{1/2}$) adalah waktu yang dibutuhkan sebuah besaran yang meluruh untuk tinggal **separuhnya**. Jika jumlah awalnya N_0, maka setelah waktu t:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

Hebatnya, waktu paruh tidak bergantung pada jumlah awal: dari 400 mg ke 200 mg butuh waktu yang sama dengan dari 2 mg ke 1 mg.

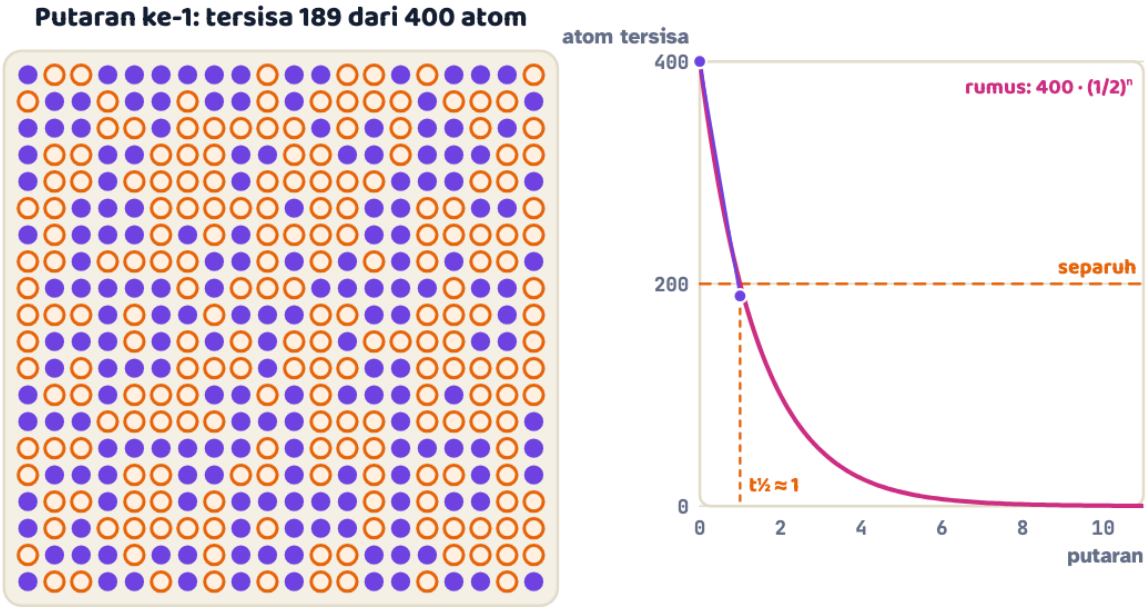
Bahasa sederhana · Bayangkan sebatang cokelat. Setiap jam kamu makan separuh dari yang tersisa. Setelah 1 jam tinggal $\frac{1}{2}$, setelah 2 jam tinggal $\frac{1}{4}$, setelah 3 jam tinggal $\frac{1}{8}$. Cokelatnya makin kecil, tetapi tidak pernah benar-benar habis jika kamu selalu menyisakan separuh!

AWAS JEBAKAN

Dua kali waktu paruh tidak membuat zat habis. Setelah satu waktu paruh tersisa $\frac{1}{2}$, dan setelah dua waktu paruh tersisa separuh dari separuh, yaitu $\frac{1}{4}$ atau 25%, bukan 0%.

LAB MINI Atom-atom pelempar koin

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14



Putaran	Atom tersisa	Ramalan rumus	Waktu paruh (teori)
1	189	200	1 putaran

Setiap putaran, **setiap** atom "melempar koin" sendiri; yang mendapat sisi tertentu langsung meluruh (berubah menjadi titik abu-abu). Tak ada yang tahu atom mana yang meluruh berikutnya, tetapi jumlah yang tersisa selalu mendekati kurva rumus. Coba ganti peluang menjadi 1/6: berapa putaran sampai tinggal separuh?

KERJAKAN BERSAMA Sisa obat di dalam tubuh

Seorang pasien menerima 400 mg obat. Waktu paruh obat itu di dalam tubuh 6 jam. Berapa mg yang tersisa setelah satu hari, jika tidak ada dosis tambahan?

1. Satu hari = 24 jam = $24 : 6 = 4$ kali waktu paruh.
2. Bagi dua empat kali: $400 \to 200 \to 100 \to 50 \to 25$.
3. Dengan rumus: $N = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{24/6} = 400 \cdot \frac{1}{16} = 25$.

Tersisa 25 mg, yaitu $\frac{1}{16}$ dosis awal. Itulah sebabnya obat tertentu harus diminum berkala, misalnya "tiap 8 jam": agar kadarnya di dalam darah tetap cukup. Ingat, jadwal dan dosis obat selalu mengikuti petunjuk dokter atau apoteker, bukan hitungan sendiri.

JAM RADIOAKTIF

Makhluk hidup terus menyerap karbon, termasuk sedikit **karbon-14** yang radioaktif. Setelah makhluk itu mati, karbon-14 di tubuhnya meluruh dengan waktu paruh sekitar 5.730 tahun. Dengan mengukur sisanya, ilmuwan bisa menaksir umur tulang, kayu, atau kain kuno. Sisa 50% berarti umurnya sekitar 5.730 tahun; sisa 25% berarti sekitar 11.460 tahun.

ADU CEPAT **Sisa setelah beberapa waktu paruh**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bagi dua sebanyak k kali. Contoh: 80 → 40 → 20 → 10 setelah 3 kali waktu paruh. Jawab dalam mg (angkanya saja).

14.3 Bilangan e dan bunga yang ikut berbunga

Pada **bunga tunggal**, bunga selalu dihitung dari modal awal. Pada **bunga majemuk**, bunga yang sudah didapat ikut dibungakan: bunga berbunga. Misalnya Rp10 juta dengan bunga 6% per tahun. Dengan bunga tunggal, setelah 2 tahun menjadi $10 + 2 \times 0{,}6 = 11{,}2$ juta. Dengan bunga majemuk tahunan, menjadi $10 \times 1{,}06^2 = 11{,}236$ juta. Selisihnya kecil di awal, tetapi membesar dari tahun ke tahun.

RUMUS HIDUP

Bunga majemuk

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^{n\,t}$$

Setiap periode, saldo dikali (1 + r/100n). Dalam t tahun ada n·t periode, jadi pengali itu dipakai n·t kali.

- P Tabungan awal `juta Rp`
- r Bunga per tahun `%`
- n Dibungakan per tahun `kali`
- t Lama menabung `tahun`
- A Saldo akhir `juta Rp`

SALDO AKHIR

18,194

juta Rp

Bunga **6**% per tahun, dibungakan **12** kali setahun selama **10** tahun: saldo menjadi **18,194** juta. Dengan bunga tunggal hanya **16** juta. Jika dibungakan terus-menerus (kontinu), hasilnya **18,221** juta. Aturan 72: uang berlipat dua dalam ±**12** tahun.

Cek satuan: P dan A memakai satuan yang sama (juta rupiah); r dalam persen per tahun, t dalam tahun.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUNGA-BERBUNGA

Sekarang percobaan pikiran dari "Bank Ajaib Ancil". Ancil menawarkan bunga **100% per tahun** untuk tabungan Rp1 juta. Jika dibungakan sekali setahun, saldonya menjadi Rp2 juta. Bagaimana kalau bunganya dibagi dua dan dibayarkan tiap setengah tahun? Atau dibagi 12 dan dibayarkan tiap bulan? Atau tiap hari?

Dibungakan	**n kali setahun**	**Saldo akhir (juta Rp): $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$**
tahunan	1	2
tiap semester	2	2,25
tiap triwulan	4	2,4414…
bulanan	12	2,6130…

harian	365	2,7146…
tiap jam	8.760	2,7181…
tiap menit	525.600	2,71828…

Saldonya memang naik, tetapi tidak meledak. Ia mendekati sebuah bilangan istimewa yang tidak pernah terlewati.

BILANGAN E

Ketika n makin besar, nilai $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ makin dekat ke sebuah bilangan irasional

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828\ldots$$

Jika modal P dibungakan **terus-menerus** (kontinu) dengan laju r per tahun (sebagai desimal), saldo setelah t tahun adalah $A = Pe^{rt}$. Logaritma berbasis e disebut **logaritma natural** dan ditulis $\ln x$.

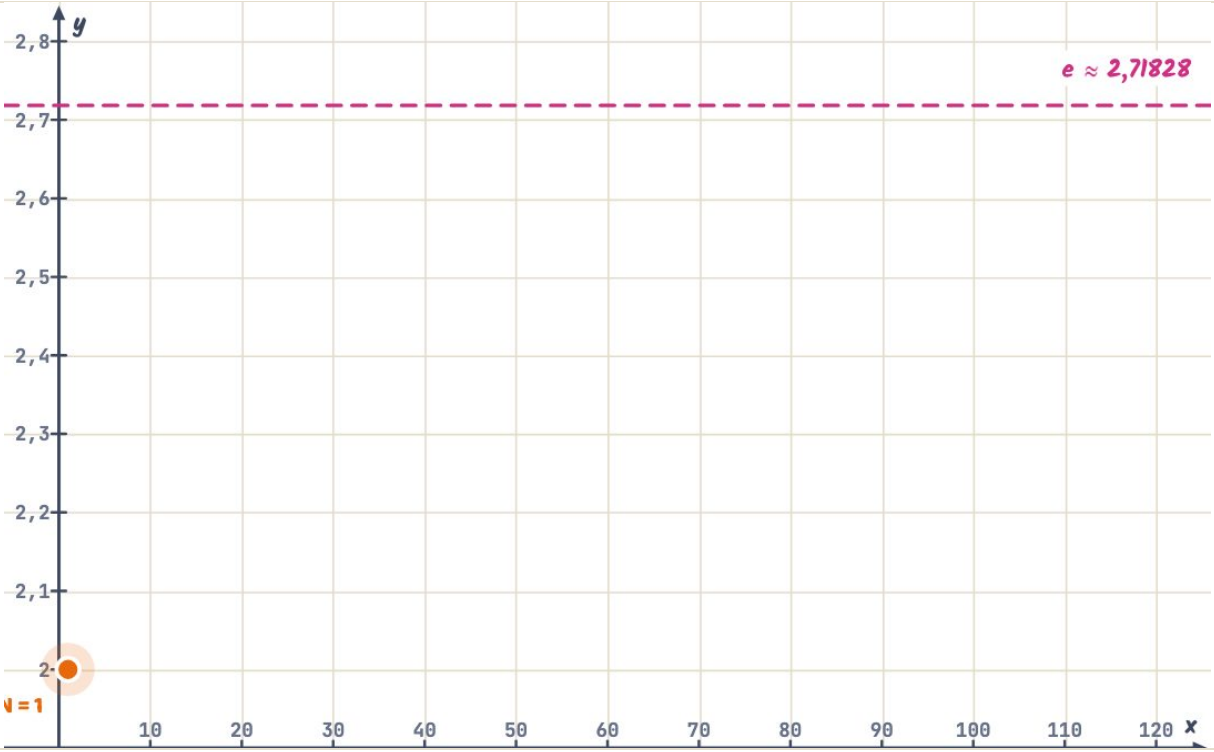
GRAFIK HIDUP

Mengejar bilangan e

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} \longrightarrow e = 2{,}71828\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$$



dibungakan sekali: Rp1 juta menjadi Rp2 juta

$(1 + 1/N)^N$	masih kurang dari e sebesar
2	0,71828

Tekan ▶ **Jalankan** atau seret titik oranye ke kanan. Titik-titik naik makin pelan dan "menempel" di bawah garis magenta. Bisakah kamu membuat selisihnya kurang dari 0,02?

TAMU DARI MASA LALU

Pada tahun 1683, Jacob Bernoulli dari Swiss memikirkan persis pertanyaan Bank Ajaib Ancil: apa yang terjadi jika bunga dibayarkan makin sering? Ia menemukan bahwa hasilnya tidak tumbuh tanpa batas, tetapi mendekati sebuah bilangan di antara 2 dan 3. Beberapa puluh tahun kemudian, Leonhard Euler memakai huruf e untuk bilangan itu dan menemukan bahwa e muncul di mana-mana, dari peluruhan radioaktif sampai kurva lonceng statistika.

TRIK KAK LINTANG: ATURAN 72

Ingin tahu kapan uang (atau utang!) berlipat dua? Bagi 72 dengan persentase pertumbuhannya per tahun. Bunga 6%: $72 : 6 = 12$ tahun. Harga barang yang naik 3% per tahun kira-kira berlipat dua dalam $72 : 3 = 24$ tahun. Hitungan tepatnya memakai logaritma (lihat 14.6): $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}06} \approx 11{,}9$ tahun. Aturan ini paling akurat untuk persentase sekitar 4–12%.

AWAS JEBAKAN

Bunga harian yang kelihatan kecil bisa membengkak menjadi sangat besar. Bayangkan sebuah pinjaman dengan bunga 0,3% per hari yang dibiarkan berbunga. Dalam sebulan utang menjadi $1{,}003^{30} \approx 1{,}094$ kali, dan dalam setahun $1{,}003^{365} \approx 2{,}98$ kali: utang Rp1 juta menjadi hampir Rp3 juta. Sebelum meminjam, hitung dulu, dan pastikan layanan pinjaman daring terdaftar serta diawasi OJK.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA E BEGITU ISTIMEWA?

Di antara semua grafik $y = b^x$, hanya $y = e^x$ yang kemiringan garis singgungnya di setiap titik **sama dengan nilai fungsinya sendiri**. Di titik $(0, 1)$ kemiringannya 1, di titik $(1, e)$ kemiringannya e, dan seterusnya. Dalam kalkulus (Bab 28) sifat ini ditulis $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$. Karena itu, setiap besaran yang **laju perubahannya sebanding dengan besarnya sendiri**, seperti populasi, bunga kontinu, atau zat radioaktif, berbentuk $N_0 e^{kt}$. Bentuk $N_0 b^{t/T}$ selalu bisa ditulis ulang sebagai $N_0 e^{kt}$ dengan $k = \dfrac{\ln b}{T}$.

14.4 Logaritma: pangkat yang dicari

Kembali ke pertanyaan Ancil: kapan bakteri tembus sejuta? Kita perlu $2^n = 1.000.000$. Coba-coba: $2^{19} = 524.288$ masih kurang, $2^{20} = 1.048.576$ sudah lewat. Jadi n berada di antara 19 dan 20, tepatnya sekitar 19,93. Bilangan "pangkat yang dicari" itulah yang disebut logaritma.

DEFINISI

Untuk $b > 0$, $b \neq 1$, dan $x > 0$:

$$\log_b x = y \quad \Longleftrightarrow \quad b^y = x$$

$\log_b x$ dibaca "logaritma x dengan basis b". Bilangan b disebut **basis** (bilangan pokok), x disebut **numerus**, dan y adalah hasil logaritmanya: **pangkat yang membuat b menjadi x**. Di banyak buku Indonesia, $\log_b x$ juga ditulis ${}^b\log x$.



Satu kalimat $2^3 = 8$ melahirkan tiga pertanyaan. Akar mencari bilangan pokoknya; logaritma mencari pangkatnya.

Dua basis punya singkatan khusus. $\log x$ tanpa basis berarti $\log_{10} x$ (**logaritma biasa**), dan $\ln x$ berarti $\log_e x$ (logaritma natural). Kalkulator ilmiah dan HP biasanya punya tombol **log** dan **ln**.

Bahasa sederhana · Logaritma itu seperti bertanya, "berapa kali aku harus mengali?" Contohnya $\log_{10} 1000$: berapa kali mengali 10 agar menjadi 1000? $10 \times 10 \times 10 = 1000$, tiga kali. Jadi $\log_{10} 1000 = 3$. Untuk basis 10, cukup hitung banyaknya angka nol!

RUMUS HIDUP **Logaritma: pangkat yang dicari**

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Logaritma menjawab satu pertanyaan: b harus dipangkatkan berapa supaya hasilnya x?



2 harus dipangkatkan **3** supaya menjadi **8**. Cek: **2** pangkat **3** hasilnya **8**.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LOG-DEFINISI

Kalimat pangkat	Kalimat logaritma	Dibaca
$2^{10} = 1024$	$\log_2 1024 = 10$	2 dipangkatkan 10 menjadi 1.024
$10^6 = 1.000.000$	$\log 1.000.000 = 6$	sejuta punya 6 angka nol
$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	pangkat negatif menghasilkan pecahan
$5^0 = 1$	$\log_5 1 = 0$	log dari 1 selalu 0
$e^1 = e$	$\ln e = 1$	log dari basisnya sendiri selalu 1
$16^{1/2} = 4$	$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$	pangkat pecahan = akar

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Logaritma dari nol atau bilangan negatif tidak terdefinisi (untuk bilangan real). Bilangan positif berapa pun yang dipangkatkan selalu menghasilkan bilangan positif, jadi tidak ada y yang membuat $2^y = 0$ atau $2^y = -8$. Karena itu, syarat **numerus harus positif** wajib dicek setiap kali menyelesaikan soal logaritma.

⏱ ADU CEPAT **Logaritma kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tanyakan: b dipangkatkan berapa agar hasilnya x? Pangkat negatif menghasilkan pecahan, misalnya 2 pangkat −2 = 0,25. Logaritma dari 1 selalu 0.

Karena logaritma "membatalkan" pangkat, fungsi $y = \log_b x$ adalah **invers** dari $y = b^x$. Ingat Bab 13: grafik fungsi dan inversnya saling bercermin terhadap garis $y = x$.

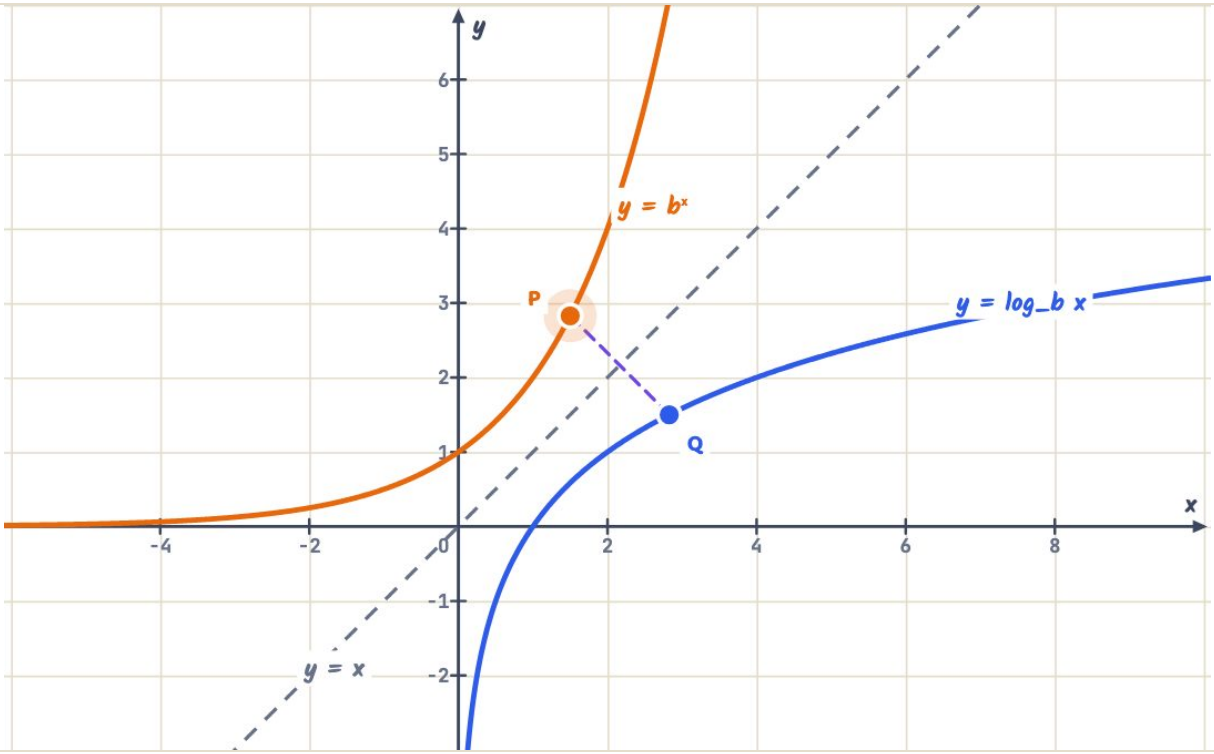
GRAFIK HIDUP

Eksponen dan logaritma saling bercermin

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14

$$y = b^x \quad \text{dan} \quad y = \log_b x$$

$$2^{1{,}5} \approx 2{,}828 \iff \log_2 2{,}828 \approx 1{,}5$$



P (pada y = bˣ)
(1,5; 2,83)

Q (pada y = log_b x)
(2,83; 1,5)

Seret titik P di sepanjang kurva oranye (atau tekan ▶ **Jalankan**). Titik Q selalu merupakan bayangan cermin P terhadap garis $y = x$: koordinatnya tinggal ditukar. Ubah b: mengapa kedua kurva selalu melewati $(0; 1)$ dan $(1; 0)$?

TAMU DARI MASA LALU

John Napier, seorang bangsawan Skotlandia, menerbitkan tabel logaritma pertama pada tahun 1614 setelah kira-kira dua puluh tahun berhitung. Henry Briggs lalu menyusun logaritma berbasis 10 yang kita pakai sekarang, dan Jost Bürgi dari Swiss menemukan gagasan serupa secara mandiri. Selama lebih dari 300 tahun, pelaut, astronom, dan insinyur menghitung dengan tabel logaritma dan mistar hitung, sampai kalkulator elektronik menggantikannya pada tahun 1970-an. Konon astronom Pierre-Simon Laplace berkata bahwa logaritma "menggandakan umur para astronom", karena memangkas waktu berhitung mereka.

CONTOH **Tiga logaritma, satu jawaban**

Hitung $\log_2 32 + \log_3 \frac{1}{9} - \log 0{,}01$**.**

1. $\log_2 32$: 2 dipangkatkan berapa menjadi 32? $2^5 = 32$, jadi hasilnya 5.
2. $\log_3 \frac{1}{9}$: $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, jadi hasilnya -2.
3. $\log 0{,}01$: $0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$, jadi hasilnya -2.
4. Jumlahkan: $5 + (-2) - (-2) = 5$.

Hasilnya 5. Kuncinya: ubah setiap numerus menjadi pangkat dari basisnya.

14.5 Sifat-sifat logaritma: perkalian menjadi penjumlahan

Mengapa orang dulu begitu bersemangat dengan logaritma? Karena logaritma mengubah perkalian yang sulit menjadi penjumlahan yang mudah. Sifat ini berasal langsung dari sifat pangkat: $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$. Saat dua pangkat dikalikan, pangkatnya dijumlahkan, dan logaritma adalah pangkat itu sendiri!

SIFAT-SIFAT LOGARITMA

Untuk $b, c > 0$, $b, c \neq 1$, $x, y > 0$, dan bilangan real k:

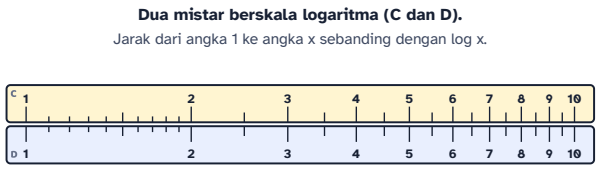
Sifat pangkat	Sifat logaritma	Nama
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	perkalian
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	pembagian
$(b^m)^k = b^{mk}$	$\log_b x^k = k \log_b x$	pangkat
$b^0 = 1,\ b^1 = b$	$\log_b 1 = 0,\ \log_b b = 1$	nilai khusus
$\log_b$ membatalkan $b^{(\cdot)}$	$b^{\log_b x} = x$	invers
$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, misalnya $\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2}$		ganti basis

Bukti sifat-sifat logaritma

Misalkan $\log_b x = m$ dan $\log_b y = n$. Menurut definisi, $x = b^m$ dan $y = b^n$.

- **Perkalian:** $xy = b^m b^n = b^{m+n}$, jadi $\log_b(xy) = m + n = \log_b x + \log_b y$.
- **Pembagian:** $\dfrac{x}{y} = b^{m-n}$, jadi $\log_b \dfrac{x}{y} = m - n$.
- **Pangkat:** $x^k = (b^m)^k = b^{km}$, jadi $\log_b x^k = km = k \log_b x$.
- **Ganti basis:** dari $b^m = x$, ambil $\log_c$ kedua ruas: $m \log_c b = \log_c x$, sehingga $m = \dfrac{\log_c x}{\log_c b}$.

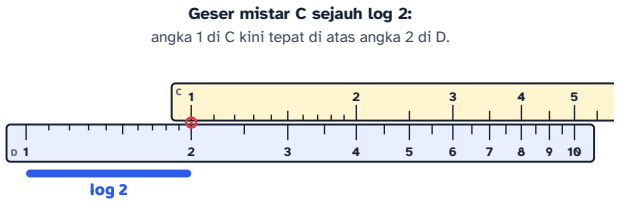
Sebelum ada kalkulator, sifat perkalian ini diwujudkan menjadi alat ajaib bernama **mistar hitung**: dua penggaris berskala logaritma. Menggeser penggaris berarti **menjumlahkan panjang**, dan menjumlahkan log berarti **mengalikan bilangan**. Lihat buktinya tanpa kata:



Langkah 1. Dua mistar berskala logaritma, C (atas) dan D (bawah). Jarak dari angka 1 ke angka x sebanding dengan $\log x$, sehingga angka-angkanya makin rapat ke kanan.



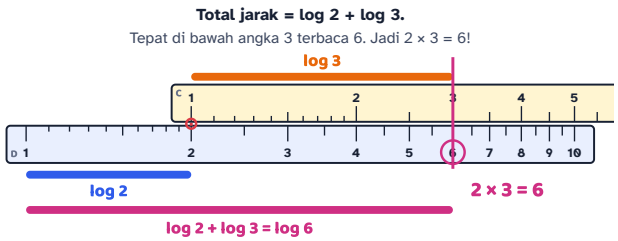
Langkah 2. Pada mistar D, jarak dari 1 ke 2 adalah $\log 2$ (garis biru).



Langkah 3. Geser mistar C ke kanan sejauh $\log 2$, sampai angka 1 pada C tepat di atas angka 2 pada D.



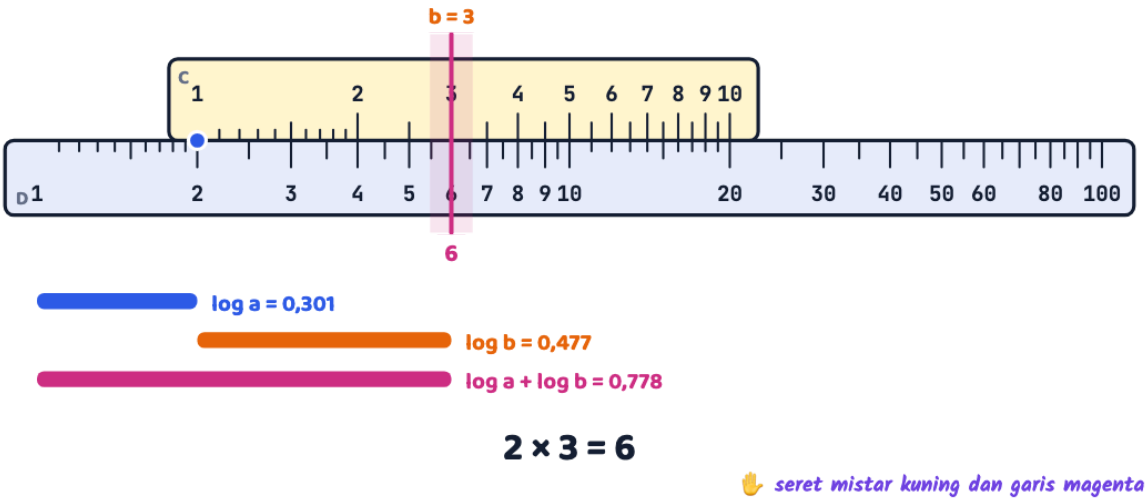
Langkah 4. Pada mistar C, jarak dari 1 ke 3 adalah $\log 3$ (garis oranye).



Langkah 5. Kedua jarak tersambung: $\log 2 + \log 3 = \log 6$. Tepat di bawah angka 3 pada C terbaca 6 pada D. Menjumlahkan panjang sama dengan mengalikan: $2 \times 3 = 6$!

LAB MINI Mistar hitung: mengali dengan menggeser

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14



log a	log b	log a + log b	bacaan = a × b
0,301	0,4771	0,7782	6

Seret mistar atas (kuning) agar angka 1-nya berada di atas a, lalu seret garis baca magenta ke angka b pada mistar atas. Hasil $a \times b$ terbaca di mistar bawah. Coba $2{,}5 \times 4$, lalu 3×3. Perhatikan tiga batang di bawah: biru + oranye selalu sama panjang dengan magenta.

AWAS JEBAKAN

$\log(a+b)$ tidak sama dengan $\log a + \log b$. Sifat perkalian hanya berlaku untuk perkalian di dalam log: $\log(ab) = \log a + \log b$. Contoh: $\log(1+1) = \log 2 \approx 0{,}301$, sedangkan $\log 1 + \log 1 = 0$. Begitu juga $\dfrac{\log a}{\log b}$ tidak sama dengan $\log \dfrac{a}{b}$.

TRIK KAK LINTANG: TABEL LOG SEUKURAN SAKU

Hafalkan dua angka saja: $\log 2 \approx 0{,}301$ dan $\log 3 \approx 0{,}477$. Dengan sifat-sifat log kamu langsung mendapat $\log 4 = 2\log 2 \approx 0{,}602$, $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 \approx 0{,}699$, $\log 6 \approx 0{,}778$, $\log 8 \approx 0{,}903$, dan $\log 9 \approx 0{,}954$. Hampir seluruh tabel log 1 sampai 10 ada di kepalamu!

KERJAKAN BERSAMA **Menghitung log tanpa kalkulator**

Diketahui $\log 2 \approx 0{,}301$ **dan** $\log 3 \approx 0{,}477$**. Tentukan** $\log 12$**,** $\log 1{,}5$**, dan** $\log_2 3$**.**

1. $12 = 2^2 \cdot 3$, jadi $\log 12 = 2\log 2 + \log 3 \approx 0{,}602 + 0{,}477 = 1{,}079$.
2. $1{,}5 = \frac{3}{2}$, jadi $\log 1{,}5 = \log 3 - \log 2 \approx 0{,}477 - 0{,}301 = 0{,}176$.
3. Ganti basis: $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx \dfrac{0{,}477}{0{,}301} \approx 1{,}585$.

$\log 12 \approx 1{,}079$**,** $\log 1{,}5 \approx 0{,}176$**, dan** $\log_2 3 \approx 1{,}585$**. Cek kewajaran:** 12 **di antara 10 dan 100, jadi log-nya memang di antara 1 dan 2.**

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGHITUNG DIGIT BILANGAN RAKSASA

Bilangan bulat positif N mempunyai $\lfloor \log N \rfloor + 1$ digit. Contohnya $\log 2026 \approx 3{,}31$, jadi 2026 punya 4 digit. Berapa digit 2^{100}? Hitung $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30{,}103$, jadi $10^{30} \le 2^{100} < 10^{31}$ dan 2^{100} punya **31 digit**. Bagian pecahannya juga bercerita: $10^{0{,}103} \approx 1{,}27$, sehingga $2^{100} \approx 1{,}27 \times 10^{30}$ dan digit pertamanya 1. Faktanya, 2^{100} = 1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376.

14.6 Persamaan eksponen dan logaritma

Persamaan eksponen adalah persamaan yang variabelnya berada di pangkat, misalnya $2^x = 32$ atau $1{,}06^t = 2$. Persamaan logaritma memuat variabel di dalam log. Ada empat senjata utama untuk menaklukkannya.

STRATEGI MENYELESAIKAN PERSAMAAN EKSPONEN DAN LOGARITMA

1. **Samakan basis.** Untuk $a > 0$, $a \neq 1$: jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, maka $f(x) = g(x)$.
2. **Ambil logaritma kedua ruas** jika basis tidak bisa disamakan: $1{,}06^t = 2 \Rightarrow t \log 1{,}06 = \log 2$.
3. **Substitusi** $u = a^x$ jika a^{2x} dan a^x muncul bersama; persamaannya berubah menjadi persamaan kuadrat (Bab 11).
4. **Persamaan log:** jika $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, maka $f(x) = g(x)$. Setelah itu, **wajib** cek syarat numerus: $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

KERJAKAN BERSAMA

Menyamakan basis

Selesaikan $3^{2x-1} = 27$.

1. Tulis 27 sebagai pangkat 3: $27 = 3^3$.
2. Basis sudah sama, jadi pangkatnya sama: $2x - 1 = 3$.
3. $2x = 4$, sehingga $x = 2$. Cek: $3^{2\cdot 2-1} = 3^3 = 27$. ✓

$x = 2$.

COBA SENDIRI

Kapan tabungan berlipat dua?

Ayu menabung Rp5 juta dengan bunga majemuk 6% per tahun. Setelah berapa tahun tabungannya pertama kali mencapai Rp10 juta?

1. Model: $5 \cdot 1{,}06^t = 10$, jadi $1{,}06^t = 2$. Basis 1,06 dan 2 tidak bisa disamakan.
2. Ambil log kedua ruas: $t \log 1{,}06 = \log 2$, sehingga $t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}06} \approx \dfrac{0{,}30103}{0{,}02531} \approx 11{,}9$.
3. Bunga dibayarkan per tahun, jadi saldo baru melewati Rp10 juta pada akhir tahun ke-12. Cek: $5 \cdot 1{,}06^{11} \approx 9{,}49$ dan $5 \cdot 1{,}06^{12} \approx 10{,}06$ juta.

Sekitar 12 tahun, cocok dengan Aturan 72 ($72 : 6 = 12$). Perhatikan bahwa jawabannya tidak bergantung pada modal awal: Rp5 juta atau Rp500 juta sama-sama berlipat dua dalam ±12 tahun.

COBA SENDIRI **Persamaan eksponen yang menyamar jadi kuadrat**

Selesaikan $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$**.**

1. Perhatikan $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Misalkan $u = 2^x$, dengan $u > 0$.
2. Persamaannya menjadi $u^2 - 6u + 8 = 0$, yaitu $(u - 2)(u - 4) = 0$, jadi $u = 2$ atau $u = 4$.
3. $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$, dan $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$.

Penyelesaiannya $x = 1$ atau $x = 2$. Kalau substitusi menghasilkan u negatif, nilai itu dibuang karena 2^x selalu positif.

KERJAKAN BERSAMA **Persamaan logaritma dan syarat numerus**

Selesaikan $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$**.**

1. Gabungkan dengan sifat perkalian: $\log_2[x(x - 2)] = 3$, jadi $x(x - 2) = 2^3 = 8$.
2. $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$, jadi $x = 4$ atau $x = -2$.
3. Cek syarat numerus: $x > 0$ dan $x - 2 > 0$, jadi $x > 2$. Nilai $x = -2$ gugur.

$x = 4$**. Cek:** $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$**.** ✓

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Penyelesaian persamaan logaritma harus selalu dicek ke soal aslinya. Saat beberapa log digabung, syarat numerus bisa "terlupakan", sehingga muncul jawaban palsu seperti $x = -2$ di atas.

Sekarang kita bisa menjawab pertanyaan Ancil di komik dengan tepat. Bakteri tembus sejuta saat $2^{t/20} = 10^6$. Ambil log kedua ruas: $\frac{t}{20}\log 2 = 6$, jadi $t = \frac{120}{\log 2} \approx 398{,}6$ menit. Kurang dari **7 jam**, dari satu bakteri menjadi sejuta!

14.7 Skala logaritma: gempa, desibel, dan pH

Beberapa besaran di alam punya rentang yang luar biasa lebar. Bunyi yang membuat telinga terasa sakit intensitasnya sekitar satu triliun kali bunyi paling pelan yang masih bisa kita dengar. Gempa terbesar melepaskan energi triliunan kali gempa terkecil yang masih tercatat alat. Kalau digambar di garis bilangan biasa, bilangan kecil akan berdesakan di ujung kiri. Solusinya: **skala logaritma**, yaitu skala yang setiap langkah samanya berarti **dikali** bilangan yang sama.



Pada garis bilangan biasa, 1, 10, dan 100 berdesakan. Pada garis logaritma, setiap "×10" mendapat jarak yang sama.

Tebak Dulu!

Gempa bermagnitudo 7 dibandingkan gempa bermagnitudo 5. Berapa kali lebih besar amplitudo getaran yang tercatat di seismograf (pada jarak yang sama)?

- 2 kali, karena 7 – 5 = 2.
- 1,4 kali, karena 7 : 5 = 1,4.
- Sekitar 100 kali.
- Sekitar 10 kali.

Jawabannya: sekitar 100 kali. Magnitudo adalah skala logaritma (gagasan awal Charles Richter, 1935). Setiap naik 1 angka, amplitudo getaran menjadi sekitar 10 kali. Naik 2 angka berarti $10 \times 10 = 100$ kali. Energi yang dilepaskan bahkan sekitar 1.000 kali lebih besar!

Untuk energi, setiap naik 1 magnitudo energinya dikali $10^{1{,}5} \approx 31{,}6$, atau kira-kira 32 kali. Jadi selisih magnitudo ΔM berarti perbandingan energi $10^{1{,}5\,\Delta M}$.

RUMUS HIDUP

Perbandingan energi dua gempa

$$\frac{E_B}{E_A} = 10^{\,1{,}5\,(M_B - M_A)}$$

Naik 1 magnitudo, energinya sekitar 32 kali. Naik 2 magnitudo, sekitar 1.000 kali.

M_A Magnitudo gempa A

M_B Magnitudo gempa B

E_B/E_A Energi gempa B dibanding A `kali`

ENERGI GEMPA B DIBANDING A

501,2

kali

Selisih magnitudo **1,8**. Amplitudo getaran gempa B sekitar **63,096** kali amplitudo gempa A, dan energinya sekitar **501,2** kali.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ENERGI-GEMPA

Skala	Rumus (disederhanakan)	Naik 1 angka berarti…	Contoh
Magnitudo gempa	$M = \log A - \log A_0$	amplitudo ±10 kali, energi ±32 kali	Cianjur 2022: M 5,6 · Palu 2018: M 7,4 · Aceh 2004: ±M 9,1
Tingkat bunyi (desibel)	$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$	naik 10 dB = intensitas 10 kali	bisikan ±30 dB · percakapan ±60 dB · lalu lintas padat ±80 dB · konser ±100–110 dB
Keasaman (pH)	$\mathrm{pH} = -\log [\mathrm{H}^+]$	pH **turun** 1 = keasaman 10 kali	cuka ±3 · kopi ±5 · air murni 7 · air laut ±8 · air sabun ±9–10

MAGNITUDO BUKAN UKURAN KERUSAKAN

Magnitudo mengukur energi di sumber gempa. Seberapa parah guncangan di suatu tempat (intensitas, misalnya skala MMI yang juga dilaporkan BMKG) bergantung pada kedalaman gempa, jarak, jenis tanah, dan kekuatan bangunan. Gempa Cianjur 2022 "hanya" bermagnitudo 5,6, tetapi sangat dangkal dan dekat permukiman sehingga menimbulkan banyak korban. Bangunan tahan gempa menyelamatkan nyawa.

MATEMATIKA NUSANTARA: GAMELAN DAN TELINGA LOGARITMIK

Telinga kita mendengar **perbandingan** frekuensi, bukan selisihnya. Nada yang frekuensinya dua kali lipat terdengar "sama, tetapi lebih tinggi": itulah satu *gembyang* (oktaf). Laras slendro membagi satu gembyang menjadi lima langkah yang kira-kira sama besar. Agar terdengar sama besar, setiap langkah harus **mengalikan** frekuensi dengan bilangan yang sama, misalnya r, sehingga $r^5 = 2$ dan $r = 2^{1/5} \approx 1{,}149$. Jadi deretan nada slendro adalah barisan eksponensial, dan "jarak" antarnada diukur dengan logaritma! (Setiap perangkat gamelan punya laras khas buatan pembuatnya, jadi angka ini hanya perkiraan ideal.)

MITOS

"log(a + b) = log a + log b."

FAKTA

Sifat itu hanya berlaku untuk **perkalian**: $\log(ab) = \log a + \log b$. Contoh: $\log(5 + 5) = \log 10 = 1$, padahal $\log 5 + \log 5 \approx 1{,}398$.

MITOS

"Gempa M 6 hanya sedikit lebih kuat daripada gempa M 5."

FAKTA

Magnitudo adalah skala logaritma. Naik 1 angka berarti amplitudo getaran ±10 kali dan energi ±32 kali. Gempa M 7 melepaskan energi ±1.000 kali gempa M 5.

MITOS

"Bunga 1% per bulan sama saja dengan 12% per tahun."

FAKTA

Jika bunganya ikut berbunga setiap bulan, setahun menjadi $1{,}01^{12} \approx 1{,}1268$ kali, yaitu ±12,68%. Selisih kecil ini membesar bila waktunya panjang atau jumlahnya besar.

MITOS

"Pertumbuhan eksponensial selalu kelihatan cepat."

FAKTA

Di awal justru tampak lambat. Eceng gondok yang berlipat dua tiap hari baru menutupi ±3% danau lima hari sebelum danau tertutup penuh. Bahayanya: saat terlihat, sering sudah terlambat.



BMKG & gempa

BMKG mengumumkan magnitudo gempa dalam hitungan menit. Selisih 1 magnitudo berarti energi sekitar 32 kali.



Jadwal minum obat

Dokter dan apoteker memakai waktu paruh obat untuk menentukan jarak antardosis, misalnya "tiap 8 jam".



Tabungan & utang

Bunga majemuk membuat tabungan tumbuh eksponensial, tetapi juga membuat utang yang tidak dibayar membengkak.



Umur fosil

Arkeolog menaksir umur tulang atau kayu kuno dari sisa karbon-14 yang waktu paruhnya sekitar 5.730 tahun.



Earphone & desibel

Mendengarkan musik keras (di atas ±85 dB) terlalu lama bisa merusak telinga. Naik 10 dB berarti intensitas bunyi 10 kali.



Pesan berantai

Jika setiap orang meneruskan pesan ke 5 orang, dalam 12 langkah pesan bisa mencapai $5^{12} \approx 244$ juta orang. Itulah sebabnya hoaks cepat viral, dan skema berantai "rekrut 5 orang" pasti runtuh.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

MEMBANDINGKAN RAKSASA DENGAN LOGARITMA

Mana yang lebih besar, 100^{101} atau 101^{100}? Keduanya punya sekitar 200 digit, jadi mustahil dihitung langsung. Ambil log: $\log 100^{101} = 101 \cdot 2 = 202$, sedangkan $\log 101^{100} = 100 \log 101 \approx 200{,}43$. Jadi 100^{101} lebih besar, kira-kira $10^{1{,}57} \approx 37$ kali! Secara umum, untuk $n \geq 3$ berlaku $n^{n+1} > (n+1)^n$. Buktinya memakai bilangan e: $\dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3 \leq n$.

Cek Cepat

Nilai $\log_2 64$ adalah...

- 32
- 8
- 6
- 128

Zat radioaktif 80 gram memiliki waktu paruh 5 hari. Setelah 15 hari, zat yang tersisa...

- 10 gram
- 0 gram
- 26,7 gram
- 40 gram

Nilai $\log 50 + \log 2$ adalah...

- $\log 52$
- 100
- 25
- 2

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: peluruhan dengan uang koin

Bahan: 50 uang koin (boleh campuran), wadah atau kotak, buku catatan, pensil.

1. Masukkan semua koin ke wadah, kocok, lalu tuang ke atas meja.
2. Singkirkan semua koin yang menunjukkan sisi **gambar**. Koin-koin itu "meluruh".
3. Hitung dan catat koin yang tersisa (sisi angka). Itulah hasil putaran 1.
4. Masukkan lagi koin yang tersisa ke wadah, kocok, tuang, dan ulangi sampai semua koin habis.
5. Buat grafik: putaran (sumbu mendatar) dan sisa koin (sumbu tegak). Gambar juga kurva $50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ untuk dibandingkan.

Pertanyaan: Berapa "waktu paruh" koinmu, dalam putaran? Mengapa hasil percobaanmu tidak persis sama dengan rumus? Jika koin diganti dadu dan yang disingkirkan hanya dadu yang muncul angka 6, apakah peluruhannya lebih cepat atau lebih lambat?

RINGKASAN KILAT

Bab 14 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- membedakan pertumbuhan **linear** (ditambah) dan **eksponensial** (dikali), lalu memodelkannya dengan $N = N_0 \cdot b^{t/T}$
- menghitung **waktu paruh** dan waktu lipat dua pada obat, zat radioaktif, dan tabungan
- menjelaskan asal-usul **bilangan e** lewat bunga majemuk
- memahami **logaritma** sebagai "pangkat yang dicari" dan memakai sifat-sifatnya
- menyelesaikan **persamaan eksponen dan logaritma**, serta membaca skala logaritma seperti magnitudo gempa, desibel, dan pH

Istilah kunci

pertumbuhan linear · pertumbuhan eksponensial · fungsi eksponen · peluruhan eksponensial · Waktu paruh · bunga tunggal · bunga majemuk · logaritma natural · basis · numerus · mistar hitung · skala logaritma

Rumus penting

$$N = N_0 \cdot b^{t/T}$$

Pertumbuhan & peluruhan eksponensial. Mulai dari N_0. Setiap lewat satu periode T, jumlahnya dikali b. Setelah waktu t, sudah lewat t/T periode.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^{n\,t}$$

Bunga majemuk. Setiap periode, saldo dikali (1 + r/100n). Dalam t tahun ada n·t periode, jadi pengali itu dipakai n·t kali.

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Logaritma: pangkat yang dicari. Logaritma menjawab satu pertanyaan: b harus dipangkatkan berapa supaya hasilnya x?

$$\frac{E_B}{E_A} = 10^{1{,}5\,(M_B - M_A)}$$

Perbandingan energi dua gempa. Naik 1 magnitudo, energinya sekitar 32 kali. Naik 2 magnitudo, sekitar 1.000 kali.

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- Kenaikan persen yang berulang tidak boleh dijumlahkan begitu saja.
- Dua kali waktu paruh tidak membuat zat habis.
- Bunga harian yang kelihatan kecil bisa membengkak menjadi sangat besar.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=14

Teka-teki untuk Bab 15

Konon, seorang raja ingin memberi hadiah kepada penemu permainan catur. Sang penemu hanya meminta beras: 1 butir di kotak pertama, 2 butir di kotak kedua, 4 butir di kotak ketiga, dan seterusnya, selalu berlipat dua sampai kotak ke-64. Raja tertawa, "Hanya beras?" Berapa butir beras di kotak terakhir saja? Dan berapa totalnya di seluruh papan?

▼ **Intip petunjuk**

Kotak ke-64 berisi 2^{63} butir. Dengan logaritma: $63 \log 2 \approx 18{,}96$, jadi $2^{63} \approx 9{,}2 \times 10^{18}$ butir. Totalnya $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$, kira-kira $1{,}8 \times 10^{19}$ butir: lebih banyak daripada beras yang dipanen seluruh dunia selama ratusan tahun! Mengapa jumlahnya tepat $2^{64} - 1$? Bab 15 akan membuka rahasia **deret geometri**.

BAB 15 · ALJABAR & FUNGSI

15 Barisan & Deret: Dari Sebutir Beras ke Tak Hingga

Sebutir beras yang berlipat dua di setiap petak catur bisa mengalahkan panen padi seluruh dunia. Seorang anak menjumlahkan 1 sampai 100 dalam sekejap. Tak hingga banyak potongan bisa pas mengisi satu persegi. Selamat datang di dunia pola yang terus berjalan!

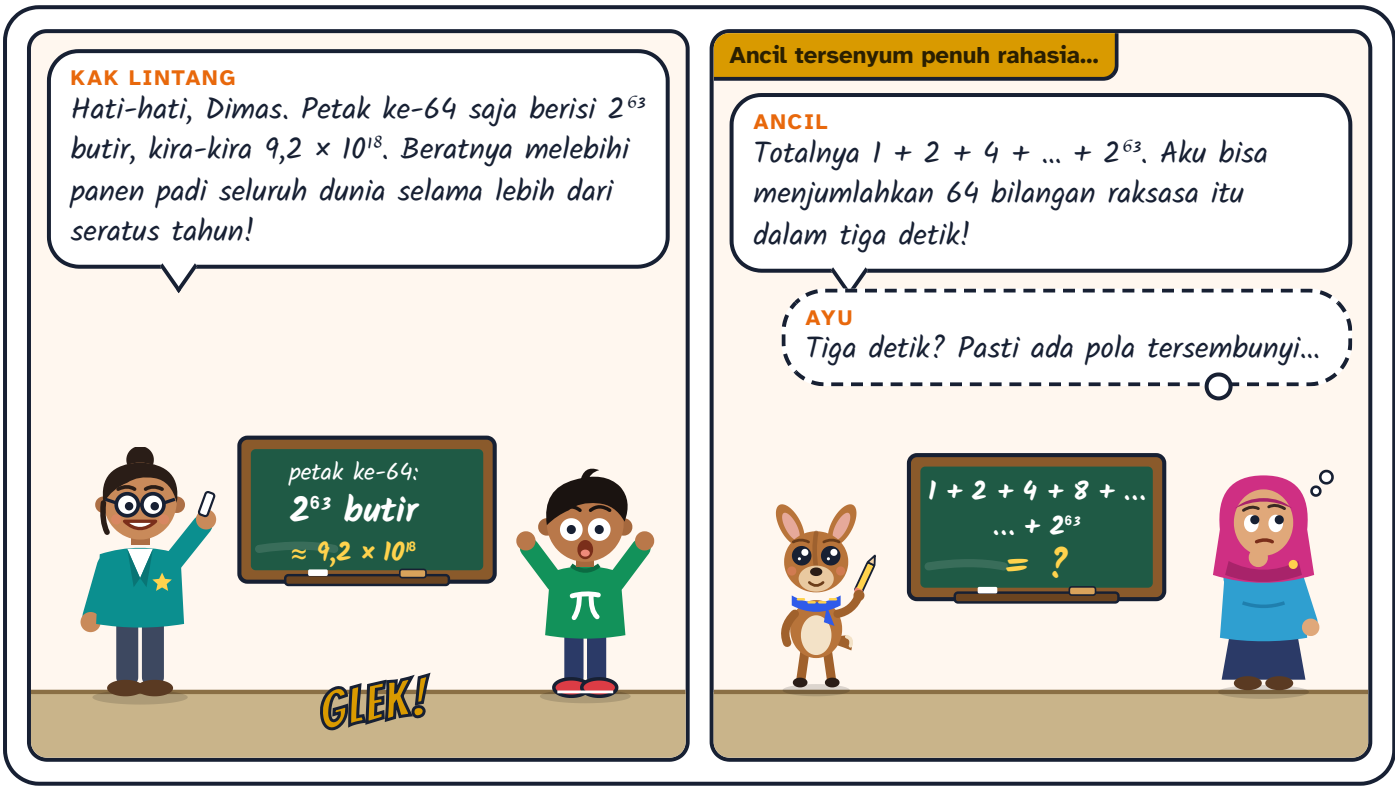
Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **pola** dan menuliskan rumus **suku ke-n** sebuah barisan;
- membedakan **barisan aritmetika** (beda tetap) dan **barisan geometri** (rasio tetap), lalu menghitung sukunya;
- menjumlahkan **deret aritmetika** dengan trik Gauss dan **deret geometri** dengan trik "kalikan rasio, lalu kurangkan";
- menghitung jumlah **deret geometri tak hingga** dan menjelaskan paradoks Zeno;
- memakai **notasi sigma** untuk tabungan rutin, anuitas, dan cicilan.

HADIAH DARI ANCIL

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Kalau seluruh beras di 64 petak itu dikumpulkan, kira-kira seberat apa? (Anggap sebutir beras ±0,02 gram.)

- Satu karung beras 25 kg.
- Satu truk penuh, ±8 ton.
- Isi semua gudang beras di satu provinsi.
- Ratusan kali panen padi seluruh dunia dalam setahun.

Jawabannya: ratusan kali panen padi dunia! Totalnya tepat 18.446.744.073.709.551.615 butir. Dikali 0,02 gram, beratnya ±369 miliar ton, padahal panen padi seluruh dunia ±800 juta ton per tahun. Butuh ±460 tahun panen sedunia untuk membayar hadiah Ancil. Di subbab 15.4 kamu akan menjumlahkannya sendiri dalam tiga detik, persis seperti Ancil.

15.1 Pola barisan: bilangan yang berbaris rapi

Nomor rumah di satu sisi jalan: 1, 3, 5, 7, ... Jadwal angkot dari terminal: 06.00, 06.15, 06.30, ... Banyak lipatan kertas: 1, 2, 4, 8, ... Semuanya adalah daftar bilangan yang tersusun menurut suatu **aturan**. Matematikawan menyebutnya **barisan**.

DEFINISI

Barisan adalah daftar bilangan yang berurutan menurut suatu aturan. Setiap bilangannya disebut **suku**. Suku pertama ditulis U_1, suku kedua U_2, dan suku ke-n ditulis U_n.

- **Rumus eksplisit** langsung memberi suku ke-n, misalnya $U_n = 2n + 1$ menghasilkan 3, 5, 7, 9, ...
- **Rumus rekursif** memberi suku berikutnya dari suku sebelumnya, misalnya $U_1 = 3$ dan $U_n = U_{n-1} + 2$.

Bahasa sederhana · Bayangkan barisan seperti antrean bilangan. Setiap bilangan punya nomor urut: yang pertama, yang kedua, dan seterusnya. Kalau kamu tahu aturannya, kamu bisa menebak bilangan nomor berapa pun tanpa menulis semuanya!

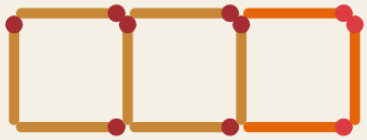
Cara terbaik menemukan aturan adalah **membangun polanya sendiri**. Di lab berikut, setiap pola dibuat dari batang korek api atau titik. Hitung bahannya, cari selisihnya, lalu tebak rumusnya sebelum menyalakan tombol rumus.

LAB MINI **Pabrik pola korek api**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

Pola ke-3: 10 batang

▪ *oranye = tambahan baru*



n	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	4	7	10	?	?	?	?	?
tambahan		+3	+3	?	?	?	?	?

Tebak isi kotak "?" sebelum menggeser n!

banyak bahan U_n
10

tambahan dari pola sebelumnya
3

jenis barisan
tebak dulu, lalu nyalakan rumus

Pilih pola, lalu geser n. Batang atau titik **oranye** adalah tambahan baru dari pola sebelumnya. Pola mana yang selalu bertambah dengan jumlah yang sama? Tebak suku ke-100 sebelum menyalakan **Tampilkan rumus**!

CONTOH **Menebak suku berikutnya**

Pola titik berbentuk persegi menghasilkan barisan 1, 4, 9, 16, ... Tentukan dua suku berikutnya dan suku ke-20.

1. Perhatikan: $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$. Jadi $U_n = n^2$.
2. Dua suku berikutnya: $U_5 = 25$ dan $U_6 = 36$.
3. Suku ke-20: $U_{20} = 20^2 = 400$.

Suku berikutnya 25 dan 36, sedangkan $U_{20} = 400$. Selisih antarsukunya 3, 5, 7, 9, ..., yaitu bilangan ganjil berurutan.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Beberapa suku pertama saja belum tentu cukup untuk memastikan sebuah pola. Taruh titik-titik di keliling lingkaran, lalu hubungkan setiap pasang titik dengan garis lurus (jangan sampai ada tiga garis yang berpotongan di satu titik). Untuk 1, 2, 3, 4, 5 titik, lingkaran terbagi menjadi 1, 2, 4, 8, 16 daerah. Pasti 32 untuk 6 titik? Ternyata hanya **31**! Karena itu, pola harus dibuktikan, bukan sekadar ditebak.

🕰 **TAMU DARI MASA LALU**

Pada tahun 1202, Leonardo dari Pisa (dikenal sebagai Fibonacci) menulis buku *Liber Abaci*. Di dalamnya ada teka-teki kelinci: setiap pasang kelinci dewasa melahirkan sepasang anak tiap bulan, dan anak kelinci menjadi dewasa setelah sebulan. Banyak pasangan kelinci tiap bulan membentuk barisan 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Setiap suku adalah jumlah dua suku sebelumnya. Barisan ini sudah dikenal lebih dulu oleh para ahli puisi dan musik di India.

🚀 **LANJUT · IB & OLIMPIADE**

REKURENSI FIBONACCI DAN RASIO EMAS

Barisan Fibonacci didefinisikan secara rekursif: $F_1 = F_2 = 1$ dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Bagilah suku dengan suku sebelumnya: $\frac{8}{5} = 1{,}6$, $\frac{13}{8} = 1{,}625$, $\frac{21}{13} \approx 1{,}615$, $\frac{89}{55} \approx 1{,}618$. Rasionya mendekati **rasio emas** $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Ada pula rumus eksplisit yang mengejutkan (rumus Binet):

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Rumus ini penuh bilangan irasional $\sqrt{5}$, tetapi hasilnya selalu bilangan bulat! Coba periksa untuk $n = 1$ dan $n = 2$.

15.2 Barisan aritmetika: langkah yang selalu sama

Dimas mengisi celengan Rp10.000 di minggu pertama. Setiap minggu ia menambah Rp2.000. Isi celengannya: 10.000, 12.000, 14.000, 16.000, ... Setiap suku diperoleh dengan **menambahkan bilangan yang sama**. Barisan seperti ini sangat sering kita temui.

DEFINISI

Barisan aritmetika adalah barisan yang selisih dua suku berurutannya selalu sama. Selisih tetap itu disebut **beda** dan ditulis b:

$$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \cdots = U_n - U_{n-1}.$$

Jika $b > 0$ barisannya naik, jika $b < 0$ barisannya turun, dan jika $b = 0$ semua sukunya sama.

Tebak Dulu!

Di sepanjang jalan desa yang panjangnya 1 km, dipasang tiang lampu setiap 50 m, termasuk di kedua ujung jalan. Berapa banyak tiang lampu?

- 20 tiang, karena 1.000 : 50 = 20.
- 21 tiang.
- 19 tiang, karena ujungnya tidak dihitung.
- 50 tiang.

Jawabannya: 21 tiang. Posisi tiang membentuk barisan aritmetika 0, 50, 100, ..., 1.000 meter. Ada 20 *jarak* antartiang, tetapi tiangnya selalu satu lebih banyak daripada jaraknya. Jebakan "kurang satu" ini adalah alasan munculnya $n - 1$ di rumus suku ke-n.

SUKU KE-N BARISAN ARITMETIKA

Untuk barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b,

$$U_n = a + (n - 1)\, b$$

Dari suku pertama ke suku ke-n ada $n - 1$ langkah, dan setiap langkah menambah b.

Bahasa sederhana · Gampangnya begini: suku pertama sudah ada. Untuk sampai ke suku ke-10, kamu cukup melangkah 9 kali. Kalau setiap langkah naik 2, suku ke-10 = suku pertama + 9 × 2.

RUMUS HIDUP

Suku ke-n barisan aritmetika

$$U_n = a + (n - 1)\, b$$

Mulai dari suku pertama, lalu tambahkan beda sebanyak n − 1 kali. Hanya ada n − 1 langkah dari suku pertama ke suku ke-n.

a Suku pertama · b Beda · n Nomor suku · U_n Suku ke-n

SUKU KE-N

39

barisan naik

Barisannya **3**, **7**, **11**, **15**, ... Dari suku pertama melangkah **9** kali dengan beda **4**: **3** + **9** × (**4**) = **39**.

Cek satuan: Satuan suku sama dengan satuan suku pertama dan beda (rupiah tetap rupiah, meter tetap meter).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUKU-ARITMETIKA

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Kesalahan paling sering adalah menulis $U_n = a + nb$. Coba periksa dengan $n = 1$: rumus yang benar harus menghasilkan suku pertama sendiri, yaitu $U_1 = a + 0 \cdot b = a$. Jadi pengalinya $n - 1$, bukan n.

Kalau titik-titik (n, U_n) digambar di bidang Kartesius, ada kejutan: semuanya berbaris pada **satu garis lurus**. Beda b tidak lain adalah kemiringan garis itu (ingat Bab 9). Barisan aritmetika adalah fungsi linear yang hanya "dicicipi" pada bilangan asli.

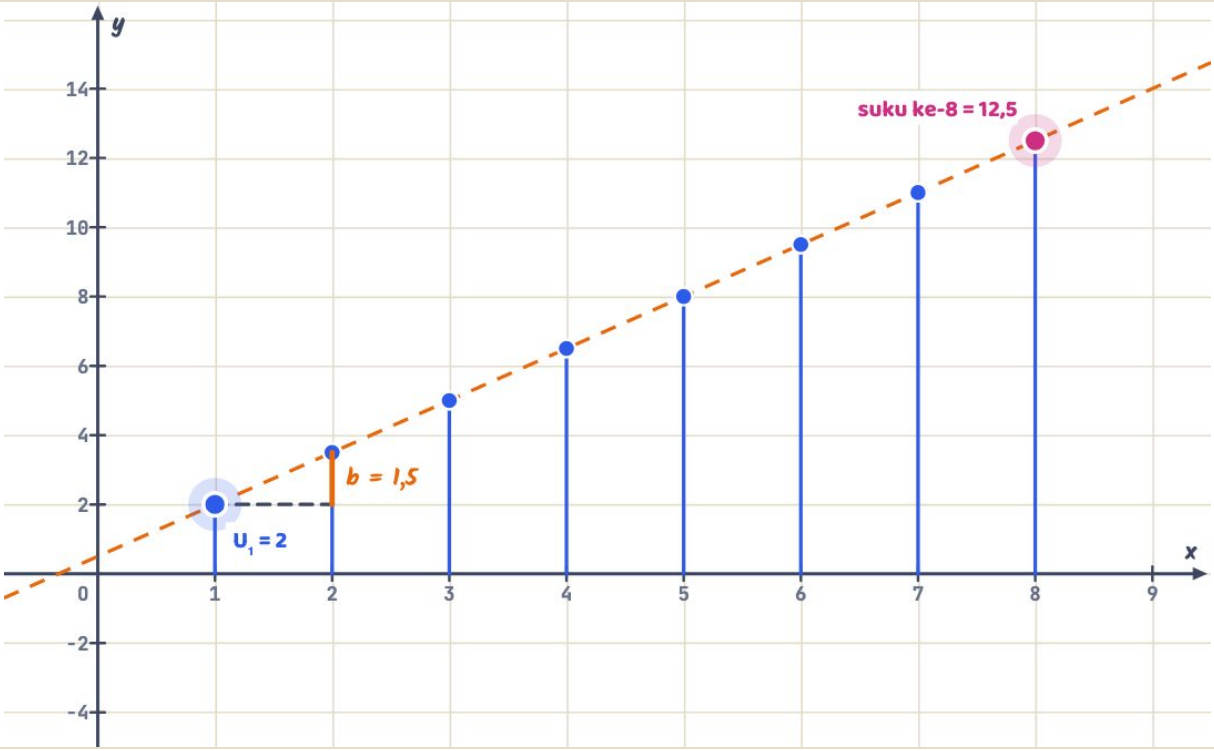
GRAFIK HIDUP

Barisan aritmetika berbaris di garis lurus

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

$$U_n = a + (n-1)\,b$$

$$U_n = 2 + 1{,}5(n-1)$$



naik: garisnya mendaki

Suku terakhir	Kemiringan garis	Jumlah semua titik
12,5	1,5	58

Seret titik biru ke atas atau ke bawah untuk mengubah suku pertama, dan seret titik magenta ke kanan untuk menambah suku. Geser beda b: garis putus-putus ikut menjadi lebih curam atau lebih landai. Setiap batang biru naik tepat b dari batang sebelumnya.

CONTOH **Kursi gedung pertunjukan**

Baris pertama sebuah gedung pertunjukan berisi 20 kursi. Setiap baris di belakangnya berisi 2 kursi lebih banyak daripada baris di depannya. Berapa kursi di baris ke-15?

1. Banyak kursi per baris membentuk barisan aritmetika dengan $a = 20$ dan $b = 2$.
2. $U_{15} = a + (15 - 1)b = 20 + 14 \times 2 = 48$.

Baris ke-15 berisi 48 kursi. Cek cepat: dari baris 1 ke baris 15 ada 14 langkah, bukan 15.

KERJAKAN BERSAMA **Dua suku yang berjauhan**

Suku ke-3 sebuah barisan aritmetika adalah 11, sedangkan suku ke-8 adalah 31. Tentukan suku ke-20.

1. Dari suku ke-3 ke suku ke-8 ada $8 - 3 = 5$ langkah, dan nilainya naik $31 - 11 = 20$. Jadi $b = \frac{20}{5} = 4$.
2. Mundur ke suku pertama: $a = U_3 - 2b = 11 - 8 = 3$.
3. $U_{20} = 3 + 19 \times 4 = 79$.

$U_{20} = 79$**. Barisannya 3, 7, 11, 15, ..., dan memang suku ke-8 adalah** $3 + 7 \times 4 = 31$**.**

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Untuk dua suku yang berjauhan, pakai rumus "naik dibagi langkah": $b = \dfrac{U_q - U_p}{q - p}$. Ini sama persis dengan kemiringan garis di Bab 9: perubahan nilai dibagi perubahan posisi.

ADU CEPAT **Suku ke-n kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Beda = suku kedua − suku pertama. Lalu $U_n = a + (n - 1)b$. Contoh: 4, 7, 10, ... punya beda 3, jadi $U_{10} = 4 + 9 \times 3 = 31$.

MATEMATIKA NUSANTARA

Naiklah ke tiga teras melingkar di bagian atas Candi Borobudur. Di teras paling bawah berdiri 32 stupa berlubang, di teras tengah 24 stupa, dan di teras paling atas 16 stupa. Barisan 32, 24, 16 adalah barisan aritmetika dengan beda -8, dan jumlahnya $32 + 24 + 16 = 72$ stupa, mengelilingi satu stupa induk di puncak. Pola yang tertata seperti ini membuat candi berumur lebih dari 1.200 tahun itu tampak seimbang dan megah.

15.3 Deret aritmetika dan trik Gauss

Kalau suku-suku sebuah barisan **dijumlahkan**, hasilnya disebut **deret**. Barisan 1, 2, 3, ..., 100 menghasilkan deret $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$. Jumlah n suku pertama ditulis S_n. Menjumlahkan satu per satu tentu bisa, tetapi lama dan mudah salah. Ada cara yang jauh lebih indah.

TAMU DARI MASA LALU

Konon, sekitar tahun 1786, seorang guru di Jerman menyuruh murid-muridnya menjumlahkan 1 sampai 100 agar kelas tenang. Baru sebentar, Carl Friedrich Gauss yang berumur sekitar 9 tahun sudah menyerahkan jawaban: 5.050. Detail kisah ini mungkin sudah dibumbui, tetapi triknya nyata. Jauh sebelumnya, ahli matematika India Aryabhata (±499 M) juga sudah menuliskan aturan menjumlahkan deret aritmetika.



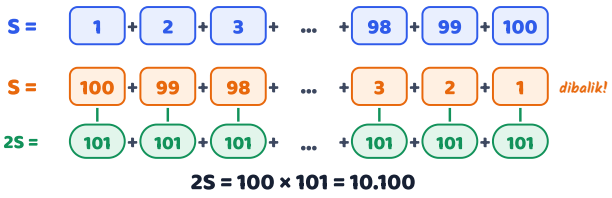
Langkah 1. Kita ingin menghitung $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$. Menjumlahkan satu per satu? Lama sekali, dan gampang salah hitung.



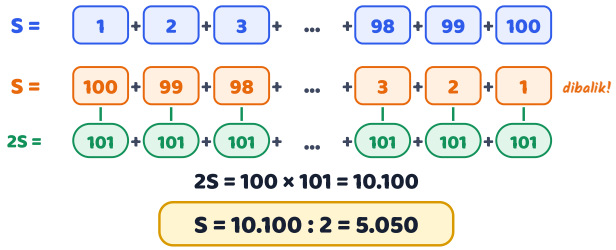
Langkah 2. Tulis jumlah yang sama sekali lagi, tetapi **dibalik**: dari 100 turun sampai 1. Isinya sama, jadi nilainya tetap S.



Langkah 3. Jumlahkan per kolom: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, dan seterusnya. Setiap kolom selalu bernilai 101!



Langkah 4. Ada 100 kolom, masing-masing bernilai 101. Dua baris itu bersama-sama bernilai $2S$, jadi $2S = 100 \times 101 = 10.100$.



Langkah 5. Karena setiap bilangan terhitung dua kali, bagi dua: S = 5.050. Inilah trik yang membuat Gauss kecil selesai paling cepat.

Bahasa sederhana · Intinya: pasangkan bilangan terkecil dengan terbesar, yang kedua terkecil dengan yang kedua terbesar, dan seterusnya. Setiap pasangan jumlahnya sama. Hitung saja ada berapa pasangan, lalu kalikan.

Trik yang sama bekerja untuk **semua** deret aritmetika, karena suku dari depan naik b dan suku dari belakang turun b. Jumlah setiap pasangan selalu "suku pertama + suku terakhir".

JUMLAH N SUKU PERTAMA DERET ARITMETIKA

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a + U_n\right) = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$

Dalam kata-kata: *jumlah = banyak suku × rata-rata suku pertama dan suku terakhir.*

Bukti (trik Gauss untuk deret aritmetika umum)

Tulis S_n maju dan mundur, lalu jumlahkan per kolom:

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + U_n \\ S_n &= U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \cdots + a \\ \hline 2S_n &= (a+U_n) + (a+U_n) + \cdots + (a+U_n) = n(a+U_n). \end{aligned}$$

Jadi $S_n = \frac{n}{2}(a+U_n)$. Substitusikan $U_n = a + (n-1)b$ untuk memperoleh bentuk kedua.

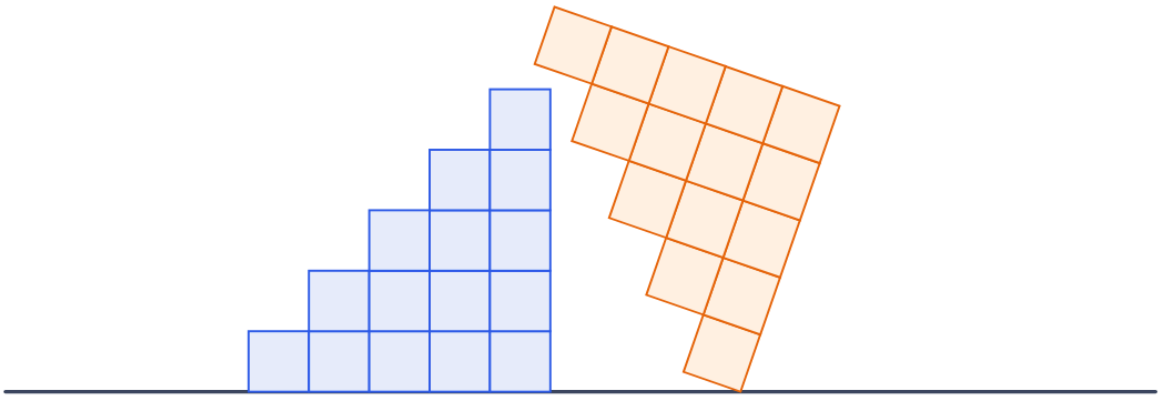
Trik Gauss juga punya **bukti tanpa kata**. Susun deretnya sebagai anak tangga dari kotak satuan, buat salinannya, putar salinan itu setengah putaran, lalu tumpuk. Hasilnya selalu persegi panjang!

LAB MINI

Tangga Gauss: dua tangga jadi persegi panjang

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = ?$$



anak tangga terakhir U_n	persegi panjang = 2 tangga	S_n = setengahnya
5	?	? (tekan ▶)

Atur banyak anak tangga n, tinggi anak tangga pertama a, dan kenaikan b. Tekan ▶ **Jalankan**: tangga oranye berputar 180° lalu menumpuk tepat di atas tangga biru. Mengapa hasilnya selalu persegi panjang selebar n dan setinggi $a + U_n$?

RUMUS HIDUP

Jumlah deret aritmetika

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$

Banyak suku dikali rata-rata suku pertama dan suku terakhir. Itulah trik Gauss dalam satu baris.

- a Suku pertama
- b Beda
- n Banyak suku
- S_n Jumlah n suku

JUMLAH N SUKU

5.050

✨ 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2

Suku pertama **1**, suku terakhir U_n = **100**. Rata-ratanya **50,5**, dikali banyak suku **100**, hasilnya **5.050**.

Cek satuan: Satuan jumlah sama dengan satuan sukunya, misalnya rupiah atau kursi.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DERET-ARITMETIKA

✏️

TRIK KAK LINTANG

Ingat satu kalimat saja: **jumlah = banyak suku × rata-rata ujung-ujungnya**. Contoh: $5 + 8 + 11 + \cdots + 50$. Banyak suku $= \frac{50-5}{3} + 1 = 16$, rata-rata ujung $= \frac{5+50}{2} = 27{,}5$, jadi jumlahnya $16 \times 27{,}5 = 440$.

KERJAKAN BERSAMA **Tabungan harian Ayu**

Ayu menabung Rp2.000 pada hari pertama. Setiap hari berikutnya ia menabung Rp500 lebih banyak daripada hari sebelumnya. Berapa total tabungannya setelah 30 hari?

1. Setoran harian membentuk barisan aritmetika: a = 2.000, b = 500, $n = 30$.
2. Setoran hari ke-30: U_{30} = 2.000 + 29 × 500 = 16.500.
3. $S_{30} = \frac{30}{2}(2.000 + 16.500) = 15 \times 18.500 = 277.500$.

Tabungan Ayu menjadi Rp277.500. Bandingkan dengan menabung tetap Rp2.000 per hari yang hanya menghasilkan Rp60.000.

ADU CEPAT **Jumlah kilat ala Gauss**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pasangkan suku pertama dan terakhir: jumlah = banyak suku × (pertama + terakhir) : 2.

HUBUNGAN SUKU DAN JUMLAH

Karena $S_n = S_{n-1} + U_n$, suku ke-n bisa dicari dari dua jumlah berurutan: $U_n = S_n - S_{n-1}$. Misalnya, jika $S_n = n^2$ untuk setiap n, maka $U_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$. Itulah bilangan ganjil 1, 3, 5, 7, ...

LANJUT · IB & OLIMPIADE

KEJUTAN: JUMLAH KUBIK

Perhatikan pola ini:

$$1^3 = 1^2, \quad 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2.$$

Bilangan 1, 3, 6, 10 adalah jumlah deret $1 + 2 + \cdots + n$. Jadi $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$: jumlah kubik sama dengan kuadrat jumlah! Rumus seperti ini dibuktikan dengan **induksi matematika** (Bab 35). Sebagai pasangannya, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

15.4 Barisan dan deret geometri: berlipat ganda

Kembali ke hadiah Ancil: 1, 2, 4, 8, 16, ... Kali ini suku berikutnya bukan diperoleh dengan menambah, melainkan dengan **mengalikan** bilangan yang sama. Barisan "berlipat" seperti ini tumbuh jauh lebih cepat daripada yang

dibayangkan intuisi kita.

DEFINISI

Barisan geometri adalah barisan yang hasil bagi dua suku berurutannya selalu sama. Hasil bagi tetap itu disebut **rasio** dan ditulis r:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \cdots = \frac{U_n}{U_{n-1}}.$$

SUKU KE-N BARISAN GEOMETRI

Untuk barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r,

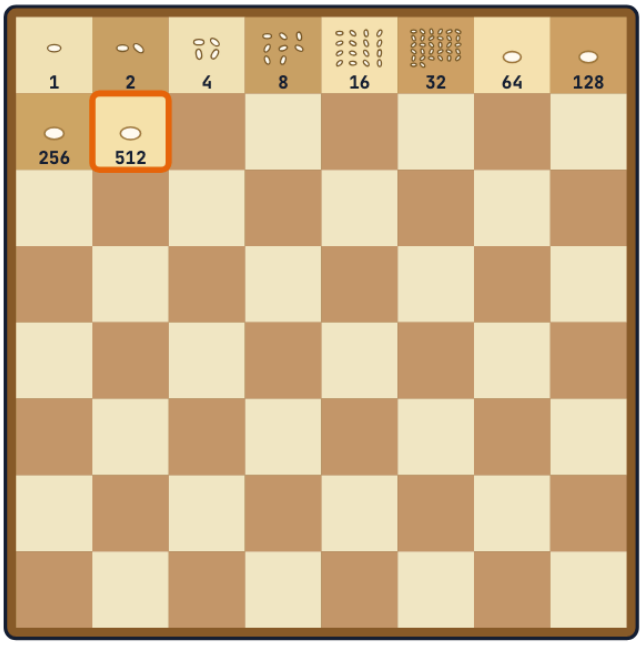
$$U_n = a \cdot r^{\,n-1}$$

Dari suku pertama ke suku ke-n ada $n-1$ langkah, dan setiap langkah mengalikan dengan r.

	Barisan aritmetika	Barisan geometri
Aturan	tambah beda b	kali rasio r
Cara mengecek	$U_n - U_{n-1}$ selalu sama	$U_n : U_{n-1}$ selalu sama
Suku ke-n	$a + (n-1)b$	ar^{n-1}
Jumlah n suku	$\frac{n}{2}\big(2a + (n-1)b\big)$	$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $r \neq 1$
Titik-titiknya	pada garis lurus	pada kurva eksponensial (Bab 14)
Contoh	3, 7, 11, 15, …	3, 6, 12, 24, …

LAB MINI **Beras di papan catur**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15



Petak ke-10

isi = 2^9 = 512 butir

total petak 1–10:

$2^{10} - 1$ = 1.023 butir

massa ≈ 20,46 gram

kurang dari sekantong 1 kg

Trik tiga detik Ancil

petak berikutnya: 2^{10} = 1.024

total sejauh ini = itu − 1 = 1.023

ketuk petak mana saja

isi petak terakhir (butir)	total butir	massa total (±0,02 g/butir)
512	1.023	20,46 gram

Tekan ▶ **Jalankan** atau ketuk sebuah petak. Petak 1 sampai 6 menampilkan butirnya satu per satu, setelah itu butirnya terlalu banyak untuk digambar! Perhatikan kotak kuning: total semua petak selalu **satu butir kurang** dari isi petak berikutnya. (Anggap 1 butir ±0,02 gram.)

Kotak kuning di lab itu menyimpan trik tiga detik Ancil: $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$. Mengapa? Kalikan seluruh deret dengan 2. Setiap suku bergeser satu petak ke depan, sehingga hampir semua suku muncul di kedua deret dan saling menghapus saat dikurangkan. Cara "kalikan rasio, lalu kurangkan" ini bekerja untuk semua deret geometri.

JUMLAH N SUKU PERTAMA DERET GEOMETRI

Untuk $r \neq 1$,

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

Kedua bentuk itu sama; pakai bentuk pertama bila $r > 1$ dan bentuk kedua bila $r < 1$ agar angkanya positif. Untuk $r = 1$, semua suku sama dan $S_n = na$.

Bukti: kalikan rasio, lalu kurangkan

$$\begin{aligned} rS_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ \hline rS_n - S_n &= ar^n - a. \end{aligned}$$

Semua suku tengah saling menghapus. Jadi $(r-1)S_n = a(r^n - 1)$, sehingga $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$. Untuk beras Ancil, $a = 1$, $r = 2$, $n = 64$: $S_{64} = \dfrac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1$ = 18.446.744.073.709.551.615 butir.



JALAN PINTAS ANCIL

Untuk deret berlipat dua, ingat: **total semua petak sebelumnya = isi petak berikutnya − 1**. Jadi $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1 = 31$, dan $1 + 2 + \cdots + 512 = 1024 - 1 = 1023$. Seandainya kamu punya sekeping uang Rp1, Rp2, Rp4, Rp8, … sampai Rp512, kamu bisa membayar *setiap* harga bulat dari Rp1 sampai Rp1.023 dengan uang pas. Itulah rahasia bilangan biner di komputermu!

RUMUS HIDUP

Jumlah deret geometri

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$$

Kalikan deret dengan rasionya, kurangkan dari deret semula, dan hampir semua suku saling menghapus.

a Suku pertama · r Rasio · n Banyak suku · S_n Jumlah n suku

JUMLAH N SUKU

1.023

suku makin besar: tumbuh meledak

Suku-sukunya **1**, **2**, **4**, …, sampai suku ke-**10** yaitu **512**. Jumlahnya **1.023**.

Cek satuan: Satuan jumlah sama dengan satuan suku pertama. Bilangan yang sangat besar ditulis dalam notasi ilmiah (Bab 6).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DERET-GEOMETRI

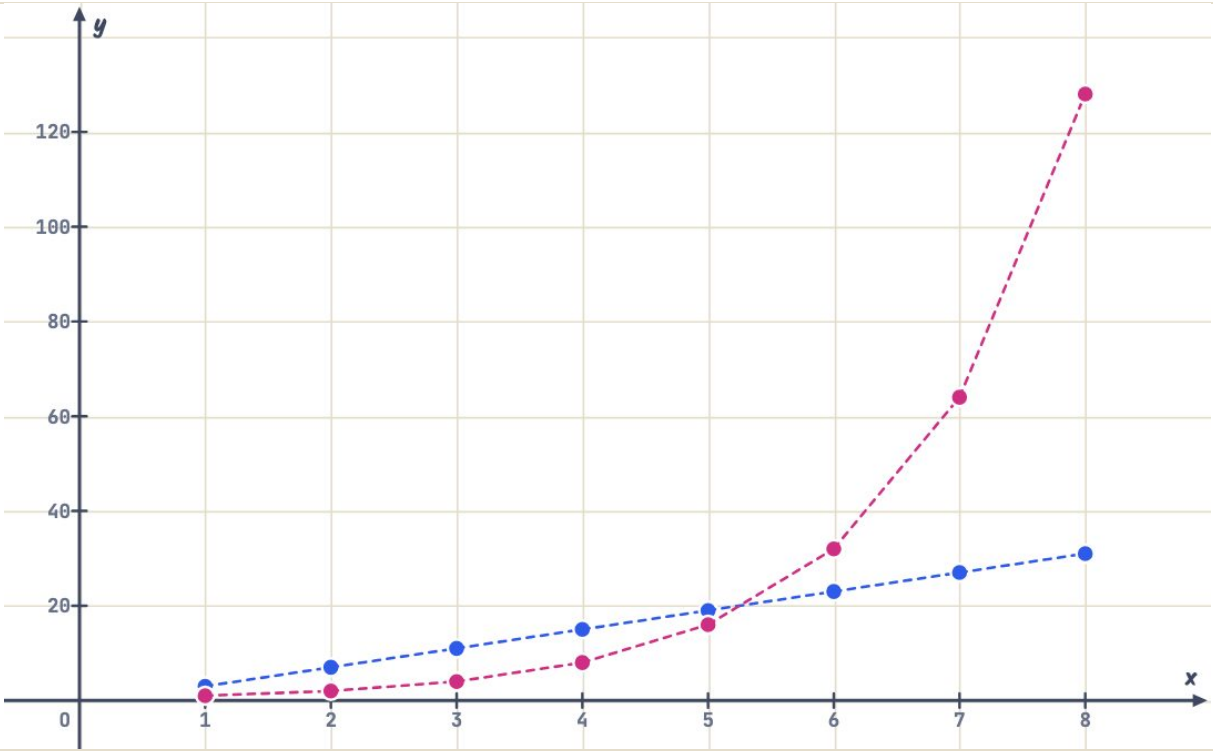
Seberapa cepat sebenarnya barisan geometri tumbuh? Adu dua barisan berikut. Barisan aritmetika biasanya unggul di awal, tetapi barisan geometri dengan $r > 1$ pasti menyalip, cepat atau lambat.

GRAFIK HIDUP **Lomba lari: aritmetika melawan geometri**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

$$U_n = a + (n-1)\,b \qquad \text{vs} \qquad V_n = c \cdot r^{\,n-1}$$

$$U_N = 31 \qquad V_N = 128$$



🚀 **geometri memimpin di suku ke-8**

Aritmetika U_N	Geometri V_N	Geometri unggul mulai suku ke-
31	128	6

Mulai dengan $N = 8$: barisan biru masih terlihat. Lalu geser N ke 15 dan lihat barisan biru "tenggelam" di dasar grafik. Coba buat aritmetika sekuat mungkin ($a = 20, b = 10$) dan geometri selemah mungkin dengan $r = 1{,}5$. Apakah geometri tetap menyalip sebelum suku ke-15? Bacaan "—" berarti geometri belum pernah unggul sampai suku ke-N.

CONTOH **Pesan berantai**

Pada jam pertama, satu orang menerima sebuah pesan berantai. Setiap jam, setiap penerima baru meneruskannya kepada 3 orang lain yang belum menerimanya. Berapa penerima baru pada jam ke-6, dan berapa orang yang sudah menerima pesan setelah 6 jam?

1. Penerima baru per jam: 1, 3, 9, 27, ... adalah barisan geometri dengan $a = 1$, $r = 3$.
2. Jam ke-6: $U_6 = 1 \cdot 3^5 = 243$ orang.
3. Total: $S_6 = \dfrac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} = \dfrac{728}{2} = 364$ orang.

Ada 243 penerima baru pada jam ke-6, dan 364 orang sudah menerima pesan. Begitulah hoaks menyebar: saring dulu sebelum berbagi!

COBA SENDIRI **Kapan beras menembus sejuta butir?**

Mulai dari petak pertama, beras Ancil dijumlahkan petak demi petak. Pada petak ke berapa totalnya pertama kali melebihi satu juta butir?

1. Total sampai petak ke-k adalah $2^k - 1$. Syaratnya $2^k - 1 > 1.000.000$, atau $2^k > 1.000.001$.
2. Pakai logaritma (Bab 14): $k > \dfrac{\log 1.000.001}{\log 2} \approx \dfrac{6}{0{,}301} \approx 19{,}9$.
3. Jadi $k = 20$. Cek: $2^{19} - 1$ = 524.287 (belum), sedangkan $2^{20} - 1$ = 1.048.575 (sudah).

Petak ke-20, baru di baris ketiga papan catur! Masih ada 44 petak lagi yang terus berlipat dua.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pangkatnya hanya menempel pada r: $U_n = a \cdot r^{n-1}$, bukan $(ar)^{n-1}$. Untuk 3, 6, 12, ..., suku ke-4 adalah $3 \cdot 2^3 = 24$, sedangkan $(3 \cdot 2)^3 = 216$ jelas keliru. Hati-hati juga dengan rasio negatif: barisan 5, −10, 20, −40, ... punya $r = -2$, dan tandanya bergantian.

15.5 Deret tak hingga dan paradoks Zeno

Ancil menantang seekor siput "balap" untuk adu lari. Siput diberi keuntungan start 9 meter di depan. Ancil berlari 10 kali lebih cepat daripada siput. Seorang filsuf kuno bernama Zeno pasti akan berkata: "Ancil tidak akan pernah menyusul!" Benarkah?

Tebak Dulu!

Saat Ancil tiba di posisi awal siput (9 m), siput sudah maju 0,9 m. Saat Ancil menempuh 0,9 m itu, siput maju lagi 0,09 m, dan seterusnya tanpa akhir. Jadi...

Ancil tidak pernah menyusul, karena langkahnya tak hingga banyak.

Ancil menyusul tepat setelah berlari 9 m.

Ancil menyusul setelah berlari 9,9 m.

Ancil menyusul tepat setelah berlari 10 m.

Jawabannya: tepat di 10 m. Jarak lari Ancil adalah $9 + 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = 9{,}999\ldots$, dan nilainya tepat 10. Langkahnya memang tak hingga banyak, tetapi semakin pendek dan waktunya juga semakin singkat, sehingga jumlahnya **terbatas**. Cek dengan aljabar: setelah Ancil berlari x meter, siput sudah berlari $\frac{x}{10}$ meter. Keduanya bertemu saat $x = 9 + \frac{x}{10}$, yaitu $x = 10$.

TAMU DARI MASA LALU

Zeno dari Elea (±490–430 SM) dari Yunani kuno terkenal dengan paradoks "Akhilles dan kura-kura": pelari tercepat seolah-olah tak mampu menyusul kura-kura yang diberi start lebih dulu. Paradoks ini membingungkan para pemikir selama berabad-abad. Jawaban yang memuaskan baru datang setelah matematikawan memahami bahwa **jumlah tak hingga banyak bilangan bisa bernilai terbatas**, gagasan yang menjadi dasar konsep limit di Bab 27. Di Nusantara, kita punya dongeng kancil yang kalah adu lari melawan siput karena tipuan. Kali ini Ancil menang berkat matematika!

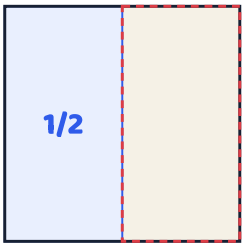
Cara paling indah untuk "melihat" jumlah tak hingga adalah dengan sebuah persegi. Ikuti langkah-langkahnya:



Persegi ini luasnya 1.

Aturan main: setiap langkah, isi setengah dari bagian yang masih kosong.

Langkah 1. Ambil persegi bersisi 1, jadi luasnya 1. Kita akan mengisinya dengan potongan yang makin kecil.

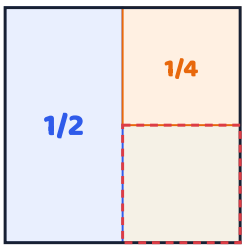


Isi setengahnya.

Terisi: 1/2

Sisa (garis merah): 1/2

Langkah 2. Isi setengah persegi: $\frac{1}{2}$. Bagian yang masih kosong (garis merah) juga $\frac{1}{2}$.

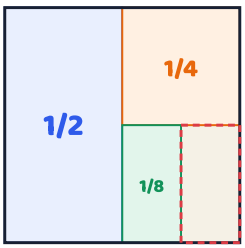


Isi setengah dari sisanya.

Terisi: 1/2 + 1/4 = 3/4

Sisa: 1/4

Langkah 3. Isi setengah dari bagian kosong itu: $\frac{1}{4}$. Terisi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, sisanya $\frac{1}{4}$.

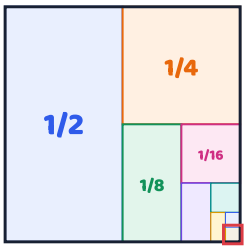


Lagi!

Terisi: 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8

Sisa: 1/8

Langkah 4. Ulangi: tambah $\frac{1}{8}$. Terisi $\frac{7}{8}$, sisa $\frac{1}{8}$. Setiap potongan baru tepat setengah dari potongan sebelumnya, jadi ini deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}$.



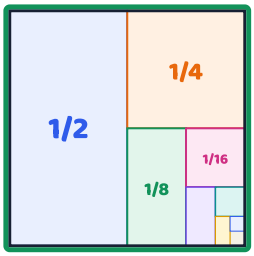
Setelah 8 potong:

Terisi: 255/256

Sisa: hanya 1/256!

Sisa selalu sama dengan potongan terakhir, dan terus mengecil menuju 0.

Langkah 5. Setelah 8 potongan, terisi $\frac{255}{256}$ dan sisanya hanya $\frac{1}{256}$. Sisa selalu sama dengan potongan terakhir, dan terus mengecil.



Tidak ada bagian yang tersisa.

Semua potongan, kalau dijumlahkan tanpa henti, mengisi persegi itu:

1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1

Langkah 6. Kalau proses ini diteruskan tanpa henti, sisanya mendekati 0. Jadi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$. Tak hingga banyak potongan, tetapi luasnya pas 1!

Mengapa ini berhasil? Untuk deret geometri, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$. Jika $-1 < r < 1$, pangkat r^n makin lama makin mendekati 0 (misalnya $0{,}5^{10} \approx 0{,}001$). Akibatnya S_n makin mendekati $\dfrac{a}{1-r}$. Deret yang jumlahnya mendekati satu bilangan tertentu disebut **konvergen**. Deret yang tidak demikian disebut **divergen**.

JUMLAH DERET GEOMETRI TAK HINGGA

Jika $-1 < r < 1$ (ditulis $|r| < 1$), maka

$$S_\infty = a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1 - r}$$

Jika $|r| \geq 1$, deret geometri tak hingga divergen (kecuali $a = 0$): jumlahnya tidak menuju satu bilangan.

Mengapa rumusnya $\frac{a}{1-r}$?

Dari $S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n$, suku kedua adalah "sisa" yang belum terjumlah. Karena $|r| < 1$, $r^n \to 0$ untuk $n \to \infty$, sehingga sisanya lenyap dan $S_n \to \frac{a}{1-r}$. Cara cepat lainnya: misalkan $S = a + ar + ar^2 + \ldots$. Maka $S = a + r(a + ar + \ldots) = a + rS$, jadi $S(1 - r) = a$. (Cara cepat ini hanya sah bila kita sudah tahu deretnya konvergen.)

RUMUS HIDUP

Jumlah deret geometri tak hingga

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

Kalau setiap suku menyusut dengan rasio di antara −1 dan 1, jumlah tak hingga banyak suku itu mendekati a dibagi (1 − r).

- a Suku pertama
- r Rasio
- S_∞ Jumlah tak hingga

JUMLAH TAK HINGGA

2

konvergen: jumlah parsial naik menuju batas

Suku-sukunya **1**, **0,5**, **0,25**, **0,125**, … **Rasionya di antara −1 dan 1, jadi deretnya konvergen.** Jumlah tak hingganya: **2** (tanda — berarti jumlahnya tidak menuju satu bilangan).

Cek satuan: Hasilnya bersatuan sama dengan suku pertama. Tanda — muncul bila |r| ≥ 1.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DERET-TAK-HINGGA

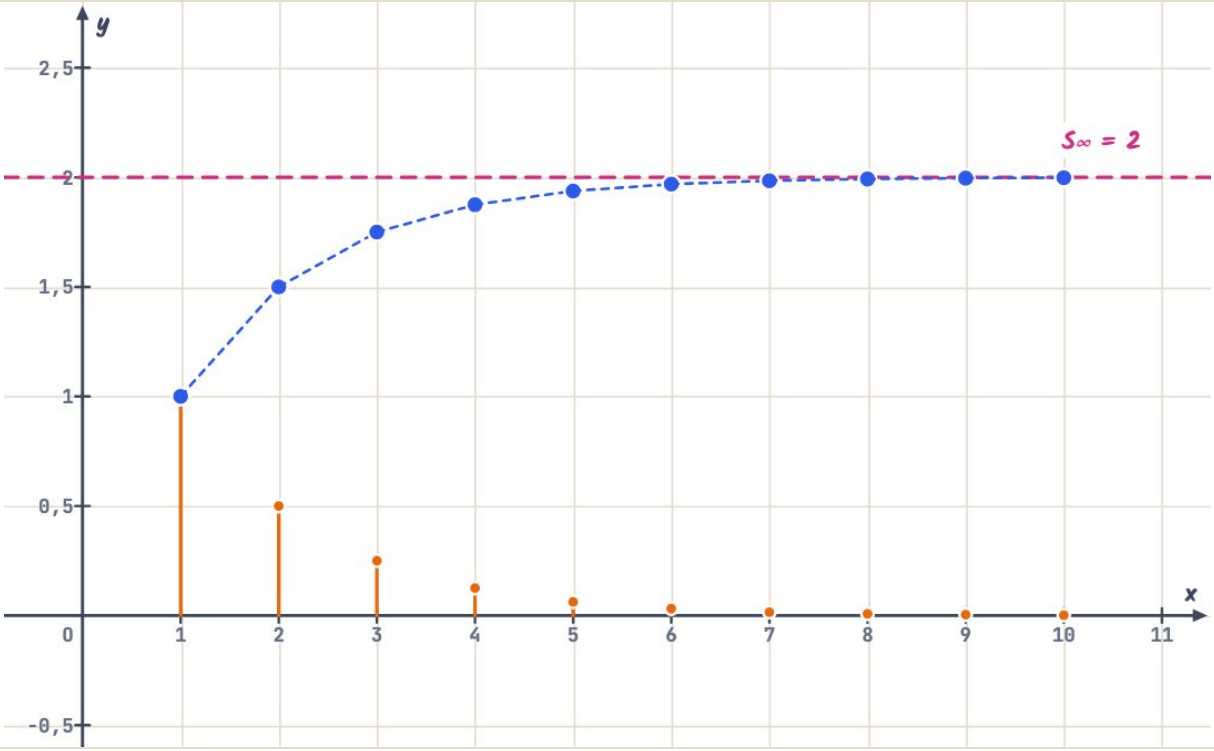
GRAFIK HIDUP

Jumlah parsial merayap ke batas

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} \longrightarrow S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1 - (0{,}5)} = 2$$



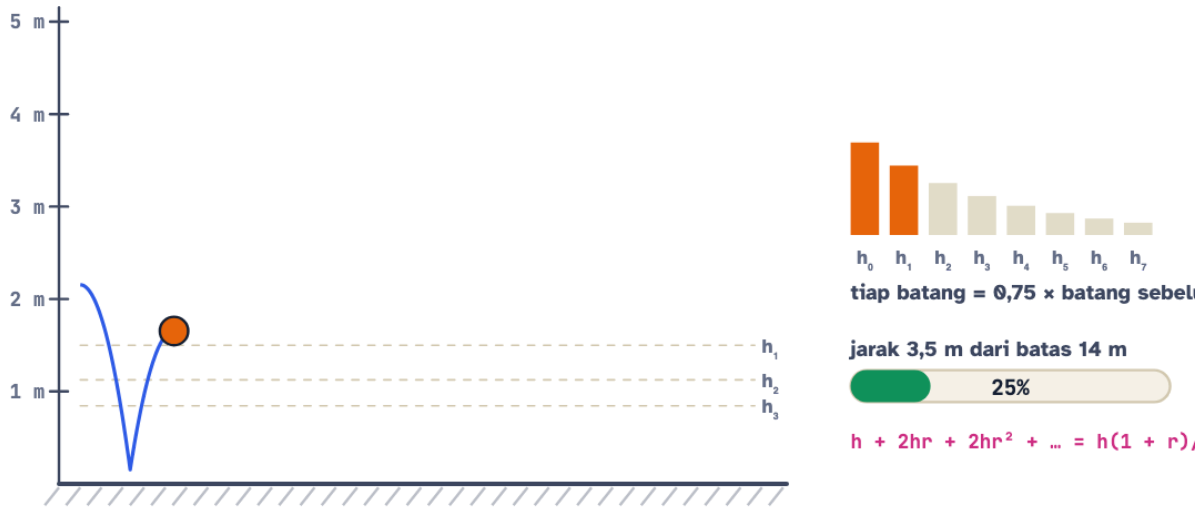
jumlah parsial naik perlahan menuju garis batas

S_N (jumlah N suku)	S∞ (batas)	Sisa S∞ – S_N
1,998	2	0,00195

Titik **biru** adalah jumlah parsial S_n, batang **oranye** adalah suku-sukunya, dan garis **magenta** adalah batas S_∞. Tambah N dan lihat sisanya mengecil. Lalu buat r negatif: jumlah parsialnya melompat-lompat di sekitar batas!

LAB MINI Bola yang memantul tanpa henti

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15



pantulan ke-	tinggi pantulan ini	jarak tempuh	batas h(1 + r)/(1 – r)	waktu semua pantulan
1	1,5 m	3,5 m	14 m	8,9 s

Bola dijatuhkan dari ketinggian h. Setiap kali memantul, tingginya tinggal r kali tinggi sebelumnya. Tekan ▶ **Jalankan**. Secara teori bola memantul tak hingga kali, tetapi jarak tempuhnya terbatas, dan waktu totalnya juga terbatas! Ubah r dan bandingkan jarak tempuh dengan batas $\dfrac{h(1+r)}{1-r}$.

KERJAKAN BERSAMA Panjang lintasan bola

Bola dijatuhkan dari ketinggian 2 m. Setiap memantul, bola mencapai $\frac{3}{4}$ tinggi sebelumnya. Berapa panjang seluruh lintasan bola sampai berhenti?

1. Jatuh pertama: 2 m. Setelah itu setiap pantulan naik lalu turun lagi, jadi tiap tinggi pantulan dihitung **dua kali**.

2. Tinggi pantulan: $1{,}5;\ 1{,}125;\ \ldots$ adalah deret geometri tak hingga dengan $a = 1{,}5$ dan $r = \frac{3}{4}$. Jumlahnya $\dfrac{1{,}5}{1 - 0{,}75} = 6$ m.

3. Panjang lintasan $= 2 + 2 \times 6 = 14$ m.

Panjang lintasan 14 m. Rumus umumnya $h \cdot \dfrac{1+r}{1-r} = 2 \cdot \dfrac{1{,}75}{0{,}25} = 14$. Cocokkan dengan Lab Mini di atas!

COBA SENDIRI **Desimal berulang menjadi pecahan**

Nyatakan $0{,}363636\ldots$ sebagai pecahan paling sederhana.

1. Pecah menjadi $0{,}36 + 0{,}0036 + 0{,}000036 + \ldots$, yaitu deret geometri tak hingga dengan $a = 0{,}36$ dan $r = 0{,}01$.

2. $S_\infty = \dfrac{0{,}36}{1 - 0{,}01} = \dfrac{0{,}36}{0{,}99} = \dfrac{36}{99}$.

3. Sederhanakan dengan membagi 9: $\dfrac{36}{99} = \dfrac{4}{11}$.

$0{,}363636\ldots = \dfrac{4}{11}$. **Cek dengan kalkulator:** $4 : 11 = 0{,}3636\ldots$ ✓. **Dengan cara yang sama,** $0{,}999\ldots = \dfrac{0{,}9}{1 - 0{,}1} = 1$.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Rumus $\dfrac{a}{1-r}$ hanya boleh dipakai jika $-1 < r < 1$. Kalau dipaksakan untuk $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ (dengan $r = 2$), hasilnya $\dfrac{1}{1-2} = -1$. Menjumlahkan bilangan positif kok hasilnya negatif? Jelas mustahil! Deret itu divergen karena jumlahnya membesar tanpa batas.

MITOS

"0,999... itu sedikit lebih kecil daripada 1."

FAKTA

Sama persis!
$0{,}999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = \dfrac{0{,}9}{1 - 0{,}1} = 1$
. Tidak ada satu bilangan pun yang bisa diselipkan di antara keduanya.

MITOS

"Menjumlahkan tak hingga banyak bilangan positif pasti hasilnya tak hingga."

FAKTA

Belum tentu:
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$
. Namun hati-hati,
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$
justru membesar tanpa batas walaupun sukunya makin kecil.

MITOS

"Barisan geometri selalu makin besar."

FAKTA

Jika
$0 < r < 1$
, sukunya makin kecil, misalnya sisa obat di dalam tubuh. Jika
r
negatif, tandanya bergantian positif dan negatif.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

DERET HARMONIK: SUKU MENGECIL, JUMLAH TETAP MELEDAK

Sekitar tahun 1350, Nicole Oresme dari Prancis membuktikan bahwa deret harmonik $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ divergen. Kelompokkan sukunya:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \dots$$

Setiap kelompok bernilai lebih dari $\frac{1}{2}$, dan ada tak hingga banyak kelompok, jadi jumlahnya melampaui bilangan berapa pun. Pelajarannya: suku yang menuju 0 **belum cukup** untuk membuat deret konvergen. Uniknya, pertumbuhannya sangat lambat: agar jumlahnya melewati 10, dibutuhkan 12.367 suku!

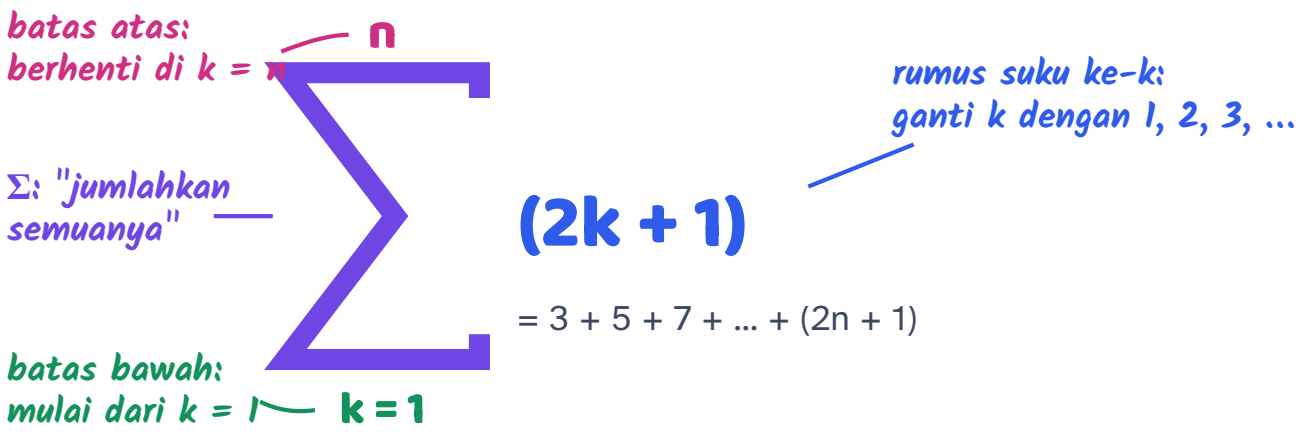
15.6 Notasi sigma, anuitas, dan cicilan

Menulis "1 + 2 + 3 + … + 100" itu panjang. Matematikawan memakai huruf Yunani **Σ** (sigma, huruf S besar untuk *sum*, jumlah) sebagai singkatan.

DEFINISI: NOTASI SIGMA

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n.$$

Huruf k disebut **indeks**. Angka di bawah sigma adalah **batas bawah** (indeks mulai), dan angka di atasnya adalah **batas atas** (indeks berhenti).



Notasi sigma dibaca "jumlah $2k+1$ untuk k dari 1 sampai n".

SIFAT-SIFAT NOTASI SIGMA

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ (menjumlahkan bilangan tetap c sebanyak n kali);
- $\sum_{k=1}^{n} c\,U_k = c\sum_{k=1}^{n} U_k$ (faktor tetap boleh dikeluarkan);
- $\sum_{k=1}^{n} (U_k + V_k) = \sum_{k=1}^{n} U_k + \sum_{k=1}^{n} V_k$ (jumlah boleh dipisah);
- $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (trik Gauss).

KERJAKAN BERSAMA **Menghitung dengan sifat sigma**

Hitunglah $\sum_{k=1}^{20} (3k-1)$.

1. Pisahkan: $\sum_{k=1}^{20} (3k-1) = 3\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 1$.
2. $\sum_{k=1}^{20} k = \dfrac{20 \times 21}{2} = 210$ dan $\sum_{k=1}^{20} 1 = 20$.
3. Hasilnya $3 \times 210 - 20 = 610$.

Jumlahnya 610. Cek dengan rumus deret aritmetika: sukunya 2, 5, 8, ..., 59, jadi $S_{20} = \frac{20}{2}(2 + 59) = 610$ ✓.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Banyak suku dari $k = p$ sampai $k = q$ adalah $q - p + 1$, bukan $q - p$. Jadi $\sum_{k=3}^{10} 5$ bernilai $8 \times 5 = 40$, karena $k = 3, 4, \ldots, 10$ ada 8 nilai. Ini jebakan tiang lampu lagi!

Sekarang kita pakai deret geometri untuk urusan uang. Kalau tabungan memberi bunga i per bulan (misalnya 0,5% = 0,005), uang Rp1 hari ini bernilai $(1 + i)$ rupiah sebulan kemudian, $(1 + i)^2$ dua bulan kemudian, dan seterusnya. Pembayaran rutin yang besarnya sama setiap periode disebut **anuitas**. Contohnya setoran tabungan rencana atau angsuran kredit.

COBA SENDIRI **Tabungan rutin berbunga**

Setiap akhir bulan, Kak Lintang menyetor Rp500.000 ke tabungan berbunga majemuk 0,5% per bulan. Berapa saldonya tepat setelah setoran ke-12?

1. Setoran terakhir belum berbunga, setoran ke-11 berbunga 1 bulan, ..., setoran pertama berbunga 11 bulan.
2. Saldo $= 500.000\left(1 + 1{,}005 + 1{,}005^2 + \cdots + 1{,}005^{11}\right)$: deret geometri dengan $a = 500.000$, $r = 1{,}005$, $n = 12$.
3. $S_{12} = 500.000 \times \dfrac{1{,}005^{12} - 1}{0{,}005} \approx 500.000 \times 12{,}3356 \approx 6.167.781$.

Saldonya ±Rp6.167.781. Kak Lintang menyetor Rp6.000.000, jadi bunganya ±Rp167.781.

Cicilan bekerja seperti tabungan yang dibalik. Misalkan kamu meminjam M rupiah dengan bunga i per bulan dan melunasinya dengan n angsuran sama besar A. Jika tidak dicicil, utangmu tumbuh menjadi $M(1 + i)^n$. Agar lunas, nilai itu harus sama dengan "tabungan" dari semua angsuran:

$$M(1+i)^n = A\left(1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1}\right) = A \cdot$$

Dari persamaan itu ke rumus angsuran

Kalikan kedua ruas dengan i, lalu bagi dengan $(1 + i)^n - 1$: $A = \dfrac{Mi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$. Bagi pembilang dan penyebut dengan $(1 + i)^n$:

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}.$$

RUMUS HIDUP

Angsuran cicilan (anuitas)

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Angsuran tiap bulan ditentukan oleh besar pinjaman, bunga per bulan, dan lama cicilan. Semakin lama mencicil, angsurannya lebih ringan, tetapi total bunganya lebih besar.

- M Pinjaman `juta Rp`
- i Bunga per bulan `%`
- n Lama cicilan `bulan`
- A Angsuran per bulan `ribu Rp`

ANGSURAN PER BULAN

898,6

ribu Rp

Pinjaman Rp**18** juta, bunga **1,5**% per bulan, **24** kali angsuran: angsurannya ±Rp**898,6** ribu per bulan. Total yang dibayar ±Rp**21,567** juta, jadi total bunganya ±Rp**3,567** juta. Sebagai pembanding, bunga flat **1,5**% per bulan menghasilkan angsuran Rp**1.020** ribu.

Cek satuan: M dalam juta rupiah, i dalam persen per bulan, n dalam bulan, dan A dalam ribu rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ANGSURAN-ANUITAS

BUNGA FLAT DAN BUNGA EFEKTIF

Sebagian kredit kendaraan memakai **bunga flat**: bunga setiap bulan dihitung dari pokok awal, sehingga total bunganya $M \cdot i \cdot n$, sebuah deret aritmetika. Rumus anuitas di atas memakai **bunga efektif**: bunga dihitung dari sisa utang yang terus berkurang. Untuk persentase yang sama, bunga flat lebih mahal. Pinjaman Rp18 juta selama 24 bulan dengan bunga 1,5% per bulan berangsur ±Rp898.600 (efektif) tetapi Rp1.020.000 (flat). Selalu tanyakan jenis bunganya sebelum menandatangani perjanjian!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

DERET TELESKOPIK: RUNTUH SEPERTI TEROPONG

Deret $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$ bukan deret aritmetika maupun geometri. Kuncinya: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Maka

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Suku-suku di tengah saling menghapus seperti teropong yang dipendekkan, sehingga hanya ujung-ujungnya yang tersisa. Untuk $n\to\infty$, jumlahnya menuju 1. Teknik **teleskopik** adalah senjata favorit di soal olimpiade.

Celengan bertingkat

Menabung Rp1.000 di hari pertama, Rp2.000 di hari kedua, dan seterusnya selama 30 hari menghasilkan Rp465.000. Itu deret aritmetika!

Cicilan motor

Angsuran bulanan dihitung dengan rumus anuitas, yang lahir dari deret geometri dengan rasio $1+i$.

Obat dalam tubuh

Jika tubuh membuang sebagian obat secara teratur, dosis yang diulang-ulang menumpuk menuju batas $\frac{a}{1-r}$, bukan naik terus.

Kursi gedung pertunjukan

Baris belakang lebih lebar, sehingga jumlah kursi per baris sering bertambah tetap: barisan aritmetika.

Nanas dan bunga matahari

Hitung spiral sisik nanas: biasanya ada 8 ke satu arah dan 13 ke arah lain, dua bilangan Fibonacci berurutan.

Pesan berantai

Jika setiap penerima meneruskan ke 5 orang baru, putaran ke-8 saja menjangkau 5^8 = 390.625 orang baru. Barisan geometri menyebar sangat cepat.

Cek Cepat

Suku ke-20 barisan 5, 8, 11, 14, ... adalah...

65

60

62

68

Rasio barisan geometri 48, –24, 12, –6, ... adalah...

$-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

-2

-24

Nilai $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ **adalah...**

tak hingga

$\frac{4}{3}$

1

$\frac{3}{2}$

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: bola yang tak mau berhenti

Bahan: bola pingpong atau bola bekel, meteran gulung, selotip, HP dengan mode video gerak lambat (slow motion), buku catatan.

1. Tempelkan meteran tegak di dinding, dengan angka 0 di lantai.
2. Jatuhkan bola dari ketinggian 100 cm di depan meteran sambil merekam dengan mode gerak lambat.
3. Putar ulang videonya. Catat tinggi puncak pantulan pertama, kedua, dan ketiga.
4. Hitung rasio r = tinggi pantulan : tinggi sebelumnya untuk setiap pantulan. Ulangi percobaan tiga kali.
5. Hitung rata-rata r, lalu prediksi panjang lintasan total dengan rumus $h \cdot \frac{1+r}{1-r}$.

Pertanyaan: Apakah rasionya hampir sama di setiap pantulan? Jika benar, pantulan bolamu membentuk barisan geometri. Menurut rumus, bola memantul tak hingga kali. Mengapa bola sungguhan tetap berhenti?

RINGKASAN KILAT

Bab 15 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- mengenali **pola** dan menuliskan rumus **suku ke-n** sebuah barisan
- membedakan **barisan aritmetika** (beda tetap) dan **barisan geometri** (rasio tetap), lalu menghitung sukunya
- menjumlahkan **deret aritmetika** dengan trik Gauss dan **deret geometri** dengan trik "kalikan rasio, lalu kurangkan"
- menghitung jumlah **deret geometri tak hingga** dan menjelaskan paradoks Zeno
- memakai **notasi sigma** untuk tabungan rutin, anuitas, dan cicilan

Istilah kunci

barisan · Barisan · suku · rasio emas · Barisan aritmetika · beda · deret · Barisan geometri · rasio · konvergen · divergen · indeks · anuitas · teleskopik

Rumus penting

$$U_n = a + (n-1)\,b$$

Suku ke-n barisan aritmetika. Mulai dari suku pertama, lalu tambahkan beda sebanyak n – 1 kali. Hanya ada n – 1 langkah dari suku pertama ke suku ke-n.

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$

Jumlah deret aritmetika. Banyak suku dikali rata-rata suku pertama dan suku terakhir. Itulah trik Gauss dalam satu baris.

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

Jumlah deret geometri. Kalikan deret dengan rasionya, kurangkan dari deret semula, dan hampir semua suku saling menghapus.

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

Jumlah deret geometri tak hingga. Kalau setiap suku menyusut dengan rasio di antara –1 dan 1, jumlah tak hingga banyak suku itu mendekati a dibagi (1 – r).

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Angsuran cicilan (anuitas). Angsuran tiap bulan ditentukan oleh besar pinjaman, bunga per bulan, dan lama cicilan. Semakin lama mencicil, angsurannya lebih ringan, tetapi total bunganya lebih besar.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Beberapa suku pertama saja belum tentu cukup untuk memastikan sebuah pola.
- Kesalahan paling sering adalah menulis $U_n = a + nb$.
- Pangkatnya hanya menempel pada r: $U_n = a \cdot r^{n-1}$, bukan $(ar)^{n-1}$.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=15

🧩 Teka-teki untuk Bab 16

Ancil menulis di papan: $\frac{x^5 - 1}{x - 1}$. Dimas mencoba $x = 2$: hasilnya $\frac{31}{1} = 31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$. Ayu mencoba $x = 3$: hasilnya $\frac{242}{2} = 121 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$. Apakah $x^5 - 1$ selalu habis dibagi $x - 1$? Apa hasil baginya? Dan kalau $x^5 + 3$ yang dibagi $x - 1$, berapa sisanya?

▼ **Intip petunjuk**

Ingat rumus deret geometri dengan $a = 1$ dan rasio x: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$. Jadi $x^5 - 1$ habis dibagi $x - 1$, dan hasil baginya adalah suku banyak $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Karena $x^5 + 3 = (x^5 - 1) + 4$, sisanya 4. Coba hitung nilai $x^5 + 3$ untuk $x = 1$. Kebetulan? Bab 16 membahas pembagian suku banyak dan Teorema Sisa yang menjelaskannya!

16 BAB 16 · ALJABAR & FUNGSI
Polinomial: Bilangan yang Menyamar

Bisakah huruf dibagi huruf? Mengapa 11 × 11 × 11 = 1331 mirip barisan segitiga Pascal? Dan bagaimana caranya menebak sisa pembagian tanpa membagi sama sekali? Selamat datang di dunia suku banyak.

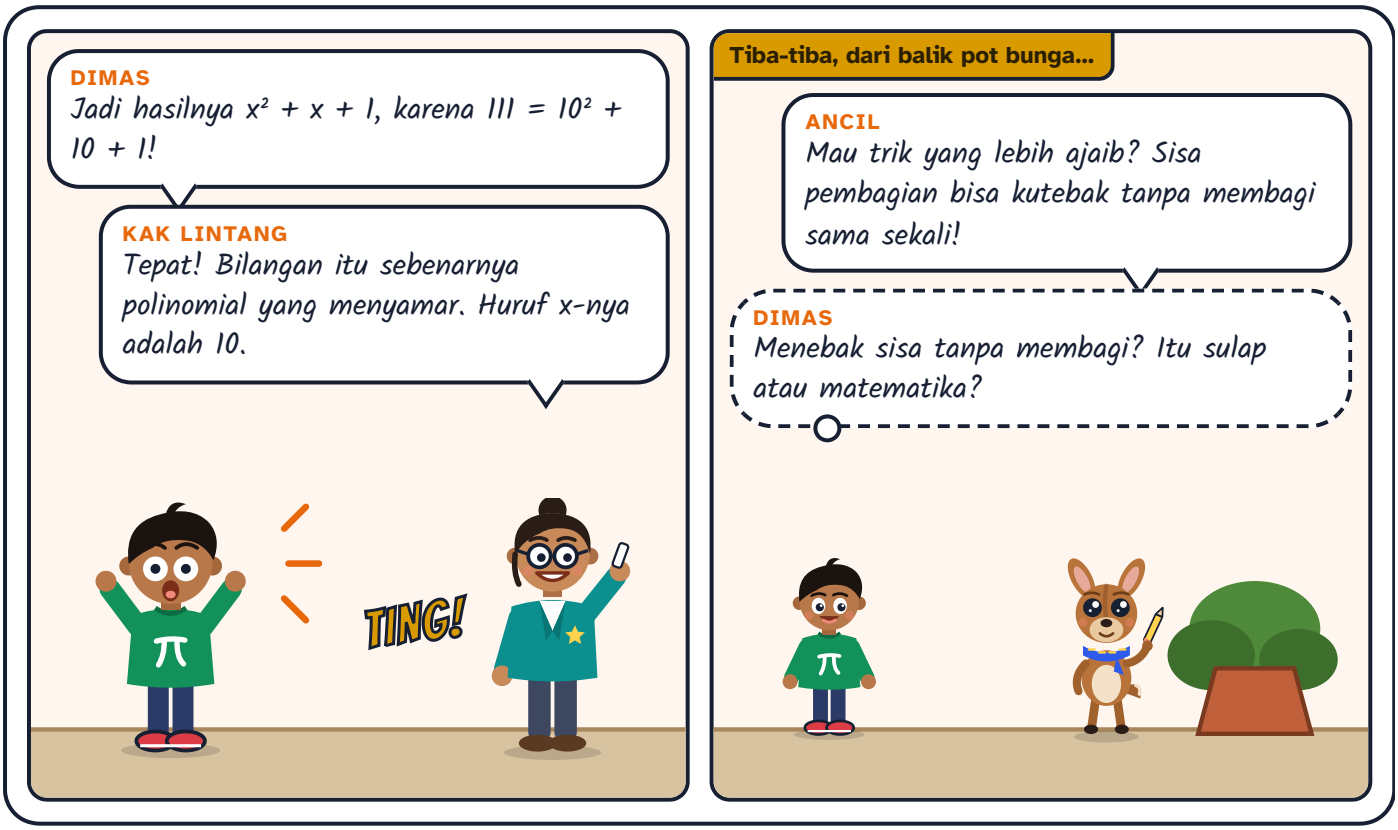
Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **suku**, **koefisien**, dan **derajat** sebuah polinomial, lalu menghitung nilainya;
- menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan polinomial, serta memakai **kesamaan polinomial**;
- membagi polinomial dengan **cara bersusun** dan **metode Horner**;
- memakai **teorema sisa** dan **teorema faktor** untuk mencari sisa, faktor, dan akar;
- membaca **grafik polinomial** (akar, akar kembar, perilaku ujung) dan memakai **rumus Vieta** derajat tiga.

MEMBAGI HURUF?

KOMIK · 4 PANEL





16.1 Suku banyak: anatomi dan derajat

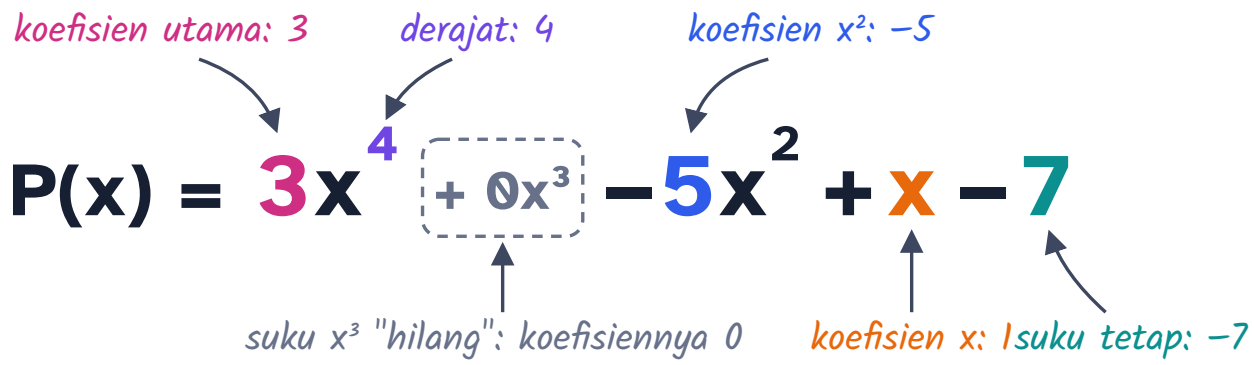
Lihat bilangan 2.026. Sebenarnya ia singkatan dari $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$. Ganti setiap 10 dengan huruf x, dan muncullah $2x^3 + 2x + 6$. Bentuk seperti ini disebut **polinomial** atau **suku banyak**: jumlah beberapa suku, dan setiap suku berupa bilangan yang dikalikan dengan pangkat x.

DEFINISI

Polinomial dalam x yang berderajat n adalah bentuk

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

dengan n bilangan cacah. Bilangan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ disebut **koefisien**. Pangkat tertinggi n disebut **derajat**, a_n disebut **koefisien utama**, dan a_0 disebut **suku tetap** (konstanta).



Polinomial ini berderajat 4. Suku x^3 tidak tertulis, artinya koefisiennya 0. Ingat ini baik-baik: nanti di metode Horner, angka 0 itu wajib ditulis!

Bahasa sederhana · Gampangnya, polinomial itu seperti rangkaian gerbong kereta. Setiap gerbong (suku) membawa sebuah angka (koefisien) dan sebuah x yang dipangkatkan bilangan cacah: 0, 1, 2, 3, dan seterusnya. Gerbong dengan pangkat paling besar adalah lokomotifnya. Pangkat lokomotif itulah **derajat** polinomial.

Derajat	Nama	Contoh	Bentuk grafiknya
0	konstan	7	garis mendatar
1	linear	$2x + 1$	garis lurus miring (Bab 9)
2	kuadrat	$x^2 - 4x + 3$	parabola (Bab 12)
3	kubik	$x^3 - x$	lengkung berkelok seperti huruf N atau S
4	kuartik	$x^4 - 5x^2 + 4$	bisa mirip huruf W atau M
5	kuintik	$x^5 - 5x^3 + 4x$	ular berkelok, paling banyak 4 belokan

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Derajat ditentukan oleh pangkat tertinggi, bukan oleh suku yang ditulis paling depan. Polinomial $5 + 2x - x^3$ berderajat 3 dengan koefisien utama -1. Ingat juga: pangkat x harus bilangan cacah, jadi $\frac{1}{x} = x^{-1}$ dan $\sqrt{x} = x^{1/2}$ **bukan** suku polinomial. Sebaliknya, koefisien boleh berupa pecahan atau akar: $\sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{2}$ tetap polinomial.

Menghitung **nilai polinomial** $P(a)$ berarti mengganti setiap x dengan bilangan a. Bilangan 2.026 tadi tidak lain adalah nilai $P(x) = 2x^3 + 2x + 6$ di $x = 10$.

CONTOH **Menghitung nilai polinomial**

Diketahui $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$. Hitung $P(2)$, $P(-1)$, dan $P(0)$.

1. $P(2) = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 4 = 16 - 12 + 4 = 8$.
2. $P(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 4 = -2 - 3 + 4 = -1$. Hati-hati: $(-1)^3 = -1$, tetapi $(-1)^2 = +1$.
3. $P(0) = 0 - 0 + 4 = 4$. Nilai di nol selalu sama dengan suku tetapnya.

$P(2) = 8$, $P(-1) = -1$, dan $P(0) = 4$. Iseng-iseng: $P(10) = 2.000 - 300 + 4 = 1.704$.

Polinomial tidak hanya hidup di buku. Ambil karton 30 cm × 20 cm, potong persegi bersisi x cm di keempat pojoknya, lalu lipat sisi-sisinya ke atas. Jadilah kotak terbuka dengan alas $(30 - 2x) \times (20 - 2x)$ dan tinggi x. Volumenya

$$V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x,$$

sebuah polinomial derajat tiga! Geser-geser rumus di bawah, lalu simpan pertanyaan ini: potongan berapa sentimeter yang membuat kotaknya paling lega? Kita akan menjawabnya di 16.6.

RUMUS HIDUP **Volume kotak dari karton**

$$V = x\,(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume = tinggi × panjang alas × lebar alas. Tingginya x, sedangkan panjang dan lebar karton masing-masing berkurang 2x karena dipotong di kedua ujungnya.

x Potongan pojok cm | p Panjang karton cm | l Lebar karton cm

V Volume kotak cm^3

VOLUME KOTAK

1.056

cm^3

🏆 **hampir volume terbesar untuk karton ini!**

Alas kotak **22** cm × **12** cm, tinggi **4** cm, jadi volumenya **1.056** cm^3 (sekitar **1,056** liter). Dalam bentuk polinomial: V(x) = $4x^3$ – **100**x^2 + **600**x.

Cek satuan: cm × cm × cm = cm^3. Ingat, 1.000 cm^3 = 1 liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VOLUME-KARDUS

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Dua jalan pintas yang sering menyelamatkan: $P(0)$ selalu sama dengan **suku tetap**, dan $P(1)$ selalu sama dengan **jumlah semua koefisien**. Untuk $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$: $V(1) = 4 - 100 + 600 = 504$. Cek dengan kardusnya: $1 \times 28 \times 18 = 504$. Cocok!

16.2 Operasi polinomial dan rahasia 11^n

Menjumlahkan dan mengurangkan polinomial berarti menggabungkan **suku sejenis**, yaitu suku-suku dengan pangkat x yang sama. Persis seperti menjumlahkan satuan dengan satuan dan puluhan dengan puluhan:

$$(3x^3 - 2x + 5) + (x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 4x^3 + 4x^2 +$$

Perhatikan: suku x lenyap karena $-2x + 2x = 0$. **Mengalikan** polinomial berarti mengalikan setiap suku dengan setiap suku. Agar tidak ada yang tercecer, pakai *tabel kotak*: setiap sel berisi hasil kali kepala baris dan kepala kolomnya.

×	x^2	$-x$	4
$2x$	$2x^3$	$-2x^2$	$8x$
3	$3x^2$	$-3x$	12

Jumlahkan isi semua sel, kelompokkan menurut pangkat: $(2x + 3)(x^2 - x + 4) = 2x^3 + (-2x^2 + 3x^2) + (8x - 3x) + 12 = 2x^3 + x^2 + 5x + 12$.

SIFAT DERAJAT

- Derajat hasil kali = **jumlah** derajatnya: $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$. (Contoh: derajat 1 × derajat 2 = derajat 3.)
- Derajat hasil jumlah atau selisih **paling tinggi** sama dengan derajat terbesar di antara keduanya. Bisa lebih kecil jika suku-suku terdepannya saling menghapus, misalnya $(x^2 + x) - (x^2 - 3) = x + 3$.

Sekarang, kejutan kecil. Bilangan 11 adalah $x + 1$ dengan $x = 10$. Jadi pangkat-pangkat 11 hanyalah $(x + 1)^n$ yang menyamar:

n	$(x + 1)^n$	**Koefisien**	11^n
1	$x + 1$	1 1	11
2	$x^2 + 2x + 1$	1 2 1	121
3	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	1 3 3 1	1.331
4	$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$	1 4 6 4 1	14.641
5	$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$	1 5 10 10 5 1	?

Tebak Dulu!

Koefisien $(x+1)^n$ membentuk barisan segitiga Pascal. Baris kelima adalah 1, 5, 10, 10, 5, 1. Berapakah 11^5?

15.101.051, tinggal tulis baris Pascal berjajar.

161.051

1.615.051

Tidak bisa ditebak, karena polanya hanya kebetulan sampai 11^4.

Jawabannya: 161.051. Polanya tetap benar, tetapi ada "simpanan" seperti penjumlahan bersusun: $1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1 = 100.000 + 50.000 + 10.000 + 1.000 + 50 + 1 = 161.051$. Koefisien 10 terlalu besar untuk satu kolom angka, jadi ia meluap ke kolom kirinya. Polinomialnya rapi, bilangannya saja yang "berantakan" karena simpanan.

Dua polinomial disebut **sama** (identik, ditulis $\equiv$) jika nilainya sama untuk **setiap** x. Ini terjadi tepat ketika koefisien suku-suku sejenisnya sama. Sifat ini sangat berguna untuk mencari bilangan yang belum diketahui.

KERJAKAN BERSAMA

Mencocokkan koefisien

Tentukan a dan b agar $(x-2)(x+a) \equiv x^2 + bx - 6$.

1. Jabarkan ruas kiri: $(x-2)(x+a) = x^2 + ax - 2x - 2a = x^2 + (a-2)x - 2a$.
2. Cocokkan suku tetap: $-2a = -6$, jadi $a = 3$.
3. Cocokkan koefisien x: $b = a - 2 = 3 - 2 = 1$.

$a = 3$ **dan** $b = 1$**. Cek:** $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$**.** ✓

LANJUT · IB & OLIMPIADE

DUA TITIK MENENTUKAN GARIS, TIGA TITIK MENENTUKAN PARABOLA

Polinomial berderajat paling tinggi n ditentukan secara **tunggal** oleh nilainya di $n+1$ titik. Mengapa? Jika P dan Q bernilai sama di $n+1$ titik, maka $P-Q$ (derajatnya paling tinggi n) punya $n+1$ akar. Padahal polinomial tak nol berderajat n paling banyak punya n akar, karena setiap akar a menyumbang satu faktor $(x-a)$. Jadi $P-Q$ haruslah polinomial nol, dan $P \equiv Q$. Ide yang sama dipakai dalam *berbagi rahasia Shamir* di kriptografi: rahasia disimpan sebagai suku tetap sebuah polinomial, dan hanya gabungan beberapa pemegang kunci yang dapat membukanya.

16.3 Pembagian bersusun dan metode Horner

Membagi 17 dengan 5 menghasilkan 3 sisa 2, yang bisa ditulis $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Polinomial dibagi dengan cara yang sama persis. Bedanya, "ukuran" sisa diukur dengan derajat, bukan dengan besar bilangan.

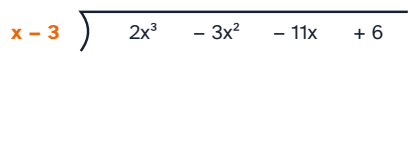
ALGORITMA PEMBAGIAN

Untuk polinomial $P(x)$ dan pembagi $D(x)$ yang bukan nol, selalu ada tepat satu **hasil bagi** $H(x)$ dan satu **sisa** $S(x)$ sehingga

$$P(x) = D(x) \cdot H(x) + S(x), \qquad \deg S < \deg D.$$

Jika pembaginya berbentuk $x - a$ (derajat 1), sisanya pasti sebuah bilangan (derajat 0).

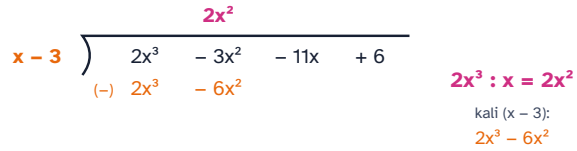
Mari bagi $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ dengan $x - 3$ secara bersusun, lalu lihat bagaimana semuanya menyusut menjadi tabel mungil.



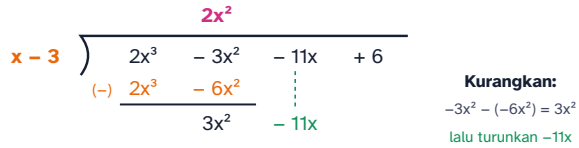
Seperti pembagian bersusun bilangan:

bagi → kali → kurang → turunkan, ulangi.

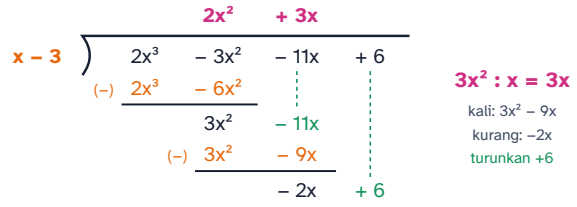
Langkah 1. Susun seperti pembagian bersusun bilangan: pembagi $x - 3$ di kiri, $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ di bawah "atap". Urutkan suku dari pangkat tertinggi.



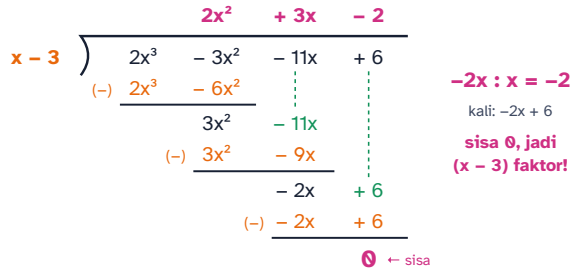
Langkah 2. Bagi suku terdepan: $2x^3 : x = 2x^2$. Tulis $2x^2$ di atas, lalu kalikan: $2x^2(x - 3) = 2x^3 - 6x^2$.



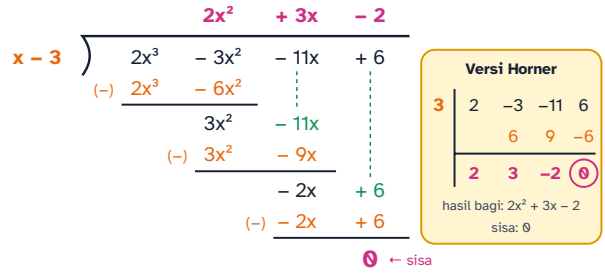
Langkah 3. Kurangkan: $(2x^3 - 3x^2) - (2x^3 - 6x^2) = 3x^2$. Suku $2x^3$ pasti habis, itulah tujuannya. Turunkan suku berikutnya, $-11x$.



Langkah 4. Ulangi: $3x^2 : x = 3x$. Kalikan $3x(x - 3) = 3x^2 - 9x$, kurangkan, lalu turunkan $+6$. Sisanya sekarang $-2x + 6$.



Langkah 5. Sekali lagi: $-2x : x = -2$. Kalikan $-2(x - 3) = -2x + 6$, kurangkan: sisanya 0. Jadi $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$.



Langkah 6. Perhatikan: semua x hanya "penanda kolom". Buang mereka dan simpan koefisiennya saja. Tulis 3 (bukan -3) di kiri agar kita cukup **menjumlah**, bukan mengurang. Pembagian panjang tadi menyusut menjadi tabel Horner yang mungil!

Bahasa sederhana · Kalau bingung, ingat pembagian bersusun bilangan di SD: **bagi, kali, kurang, turunkan**, lalu ulangi sampai habis. Polinomial memakai empat langkah yang sama. Metode Horner hanyalah versi hematnya: tanpa huruf x, tanpa tanda kurang.

LAB MINI Mesin Horner: bagi polinomial dalam hitungan detik

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-16

P(x) = 2x³ − 3x² − 11x + 6

▶ *Jalankan = lihat langkahnya*

dibagi (x − 3) → tulis a = 3 di kotak kiri



P(x) = (x − 3)(2x² + 3x − 2) + 0

🎯 Sisa 0: (x − 3) adalah faktor, dan x = 3 adalah akar P(x)!

Hasil bagi H(x)	Sisa	P(a) dihitung langsung
$2x^2 + 3x - 2$	0	0

Atur koefisien $P(x)$ dan nilai a pada pembagi $(x - a)$, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat langkahnya satu per satu: turunkan, kali, jumlahkan. Bandingkan kotak **sisa** dengan **P(a)**. Kebetulan? Coba tombol 🔍 **Berburu akar** untuk mencari a yang membuat sisanya 0.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Suku yang hilang wajib ditulis dengan koefisien 0. Untuk $x^3 - 7x + 6$, baris koefisiennya adalah $1, 0, -7, 6$, bukan $1, -7, 6$. Kalau angka 0 dilupakan, semua kolom bergeser dan hasilnya kacau. Satu lagi: pembagi $x + 3$ sama dengan $x - (-3)$, jadi yang ditulis di kotak kiri adalah -3.

KERJAKAN BERSAMA

Horner dengan suku yang hilang

Bagilah $x^3 - 7x + 6$ dengan $x + 3$. Lalu faktorkan $x^3 - 7x + 6$ sepenuhnya.

1. Koefisien: $1, 0, -7, 6$ (suku x^2 hilang, tulis 0). Pembagi $x + 3$, jadi $a = -3$.
2. Turunkan 1. Kali $1 \times (-3) = -3$, jumlahkan $0 + (-3) = -3$. Kali $-3 \times (-3) = 9$, jumlahkan $-7 + 9 = 2$. Kali $2 \times (-3) = -6$, jumlahkan $6 + (-6) = 0$.
3. Baris bawah $1, -3, 2 \mid 0$: hasil bagi $x^2 - 3x + 2$, sisa 0.
4. Faktorkan hasil baginya: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$. **Akar-akarnya -3, 1, dan 2.**

PEMBAGI BERBENTUK $AX - B$

Tulis $ax - b = a\left(x - \frac{b}{a}\right)$. Pakai Horner dengan $\frac{b}{a}$, lalu bagi hasil baginya dengan a; sisanya tidak berubah. Contoh: $(4x^3 - 2x^2 + 6x - 1) : (2x - 1)$. Horner dengan $\frac{1}{2}$ memberi baris $4, 0, 6 \mid 2$, jadi $4x^3 - 2x^2 + 6x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 6) + 2 = (2x - 1)(2x^2 + 3) + 2$. Hasil baginya $2x^2 + 3$ dan sisanya 2.

TAMU DARI MASA LALU

Metode ini memakai nama William George Horner, matematikawan Inggris yang menerbitkannya pada 1819. Paolo Ruffini dari Italia sudah menulis cara serupa pada 1804, sehingga di beberapa negara ia disebut *aturan Ruffini*. Yang lebih mengejutkan, matematikawan Tiongkok Qin Jiushao sudah memakai langkah-langkah yang setara dalam bukunya tahun 1247, dengan batang-batang hitung yang digeser di atas papan. Satu ide yang sama ditemukan ulang berkali-kali, karena ia memang sangat hemat: menghitung nilai polinomial derajat n cukup dengan n perkalian.

16.4 Teorema sisa: menebak sisa tanpa membagi

Tebak Dulu!

Berapa sisa pembagian $x^{100}+1$ oleh $x-1$? (Jangan membagi bersusun, nanti seratus langkah!)

- 0, karena pangkat 100 bisa dibagi habis.
- 1, karena sisanya pasti suku tetapnya.
- 2
- 101

Jawabannya: 2. Ancil benar, sisa bisa ditebak tanpa membagi. Sisanya sama dengan nilai polinomial di $x=1$: $1^{100}+1=2$. Seratus langkah diganti satu langkah. Bukti ajaibnya ada tepat di bawah.

Mulai dari algoritma pembagian dengan pembagi $x-a$: $P(x)=(x-a)\cdot H(x)+S$, dengan S sebuah bilangan. Kesamaan ini benar untuk **setiap** x, jadi boleh kita isi $x=a$. Faktor $(x-a)$ menjadi nol dan "menelan" seluruh hasil bagi, sehingga yang tersisa hanya S.

TEOREMA SISA

Sisa pembagian polinomial $P(x)$ oleh $(x-a)$ adalah $P(a)$.

$$P(x) : (x-a) \text{ bersisa } P(a)$$

Lebih umum, sisa pembagian $P(x)$ oleh $(ax-b)$ adalah $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Bukti singkat

Menurut algoritma pembagian, $P(x)=(x-a)H(x)+S$ untuk suatu polinomial H dan bilangan S. Substitusikan $x=a$:

$$P(a)=(a-a)H(a)+S=0\cdot H(a)+S=S.$$

Untuk pembagi $ax-b$, tulis $P(x)=(ax-b)H(x)+S$, lalu substitusikan $x=\frac{b}{a}$ sehingga $a\cdot\frac{b}{a}-b=0$. ∎

Bahasa sederhana · Bayangkan teorema sisa sebagai **mesin cek**: masukkan $x = a$ ke dalam polinomial, dan keluarlah sisanya. Pembagi $(x - 2)$? Masukkan 2. Pembagi $(x + 5)$? Masukkan -5, karena itulah bilangan yang membuat pembaginya nol.

RUMUS HIDUP

Teorema Sisa

$$S = P(a) = a^3 + b\,a^2 + c\,a + d$$

Mau tahu sisa pembagian P(x) oleh (x – a)? Tidak perlu membagi: cukup masukkan x = a ke dalam P(x).

- b Koefisien x^2
- c Koefisien x
- d Suku tetap
- a Nilai a pada (x – a)
- S Sisa pembagian

SISA PEMBAGIAN

6

P(x) = x^3 **– 6**x^2 **+ 11**x **– 6** dibagi (x **– 4**) bersisa **6**. Geser a ke 1, 2, dan 3. Apa yang terjadi?

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEOREMA-SISA

ADU CEPAT

Sisa kilat: cukup masukkan nilai a!

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-16

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pembagi (x – a) berarti hitung P(a). Hati-hati: pembagi (x + 2) berarti masukkan x = –2.

COBA SENDIRI **Sisa pembagian oleh polinomial kuadrat**

Tentukan sisa pembagian $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ oleh $x^2 - x - 2$, tanpa membagi bersusun.

1. Pembaginya berderajat 2, jadi sisanya berderajat paling tinggi 1: misalkan $S(x) = px + q$.
2. Faktorkan pembagi: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Maka $P(x) = (x - 2)(x + 1)H(x) + px + q$.
3. Isi $x = 2$: $P(2) = 16 - 24 + 4 - 5 = -9$, jadi $2p + q = -9$. Isi $x = -1$: $P(-1) = 1 + 3 - 2 - 5 = -3$, jadi $-p + q = -3$.
4. Kurangkan kedua persamaan: $3p = -6$, sehingga $p = -2$ dan $q = -3 + p = -5$.

Sisanya $-2x - 5$. Trik ini memilih nilai x yang membuat pembagi nol, persis seperti teorema sisa, hanya saja dipakai dua kali.

16.5 Teorema faktor dan berburu akar rasional

Apa artinya sisa sama dengan nol? Pembagiannya *habis*, sama seperti 12 habis dibagi 3 karena 3 adalah faktor 12. Dari teorema sisa langsung lahir senjata paling ampuh di bab ini.



TEOREMA FAKTOR

$(x - a)$ adalah faktor $P(x)$ **jika dan hanya jika** $P(a) = 0$. Bilangan a seperti itu disebut **akar** (atau pembuat nol) polinomial P.

Tetapi bagaimana menemukan a yang tepat? Untung ada petunjuk dari koefisiennya.



TEOREMA AKAR RASIONAL

Jika polinomial berkoefisien bulat $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ punya akar rasional $\frac{p}{q}$ (pecahan paling sederhana), maka p membagi suku tetap a_0 dan q membagi koefisien utama a_n. Khususnya, jika $a_n = 1$, setiap akar bulatnya pasti pembagi a_0.

Resep berburu akar: (1) daftar semua calon $\pm\frac{p}{q}$; (2) uji calon-calon itu dengan teorema sisa atau Horner, mulai dari yang kecil; (3) begitu ketemu akar, bagi dengan Horner sehingga derajatnya turun satu; (4) ulangi, atau selesaikan sisa kuadratnya dengan pemfaktoran atau rumus abc (Bab 11). Tombol 🔍 **Berburu akar** di Mesin Horner menjalankan resep ini untukmu.

TRIK KAK LINTANG

Selalu cek $x = 1$ dan $x = -1$ lebih dulu, karena hitungannya paling ringan. $P(1)$ = jumlah semua koefisien. $P(-1)$ = jumlah koefisien pangkat genap dikurangi jumlah koefisien pangkat ganjil. Contoh: koefisien $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ berjumlah $1 - 2 - 5 + 6 = 0$, jadi $x = 1$ akar dan $(x - 1)$ faktornya, tanpa coret-coret!

COBA SENDIRI **Mencari k, lalu memfaktorkan**

Diketahui $(x - 2)$ adalah faktor dari $P(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$. Tentukan k, faktorkan $P(x)$, lalu tentukan semua akar realnya.

1. Teorema faktor: $P(2) = 0$. Jadi $8 + 4k - 2 - 2 = 0$, atau $4k + 4 = 0$, sehingga $k = -1$.
2. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$. Horner dengan $a = 2$: koefisien $1, -1, -1, -2$ menghasilkan baris $1, 1, 1 \mid 0$.
3. Jadi $P(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$.
4. Diskriminan $x^2 + x + 1$ adalah $1 - 4 = -3 < 0$, jadi faktor kuadrat itu tidak punya akar real.

$k = -1$, $P(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$, dan akar realnya hanya satu: $x = 2$. Polinomial derajat tiga tidak selalu punya tiga akar real!

AWAS JEBAKAN

"$(x + 2)$ faktor dari $P(x)$" berarti $P(-2) = 0$, bukan $P(2) = 0$. Akar sebuah faktor adalah bilangan yang membuat faktor itu bernilai nol, jadi tandanya selalu berlawanan dengan yang tertulis di dalam kurung.

MITOS

"Polinomial derajat 3 pasti punya tiga akar real."

FAKTA

Bisa hanya satu! Contohnya $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)$. Yang pasti: kubik selalu punya **minimal satu** akar real, karena kedua ujung grafiknya menuju arah yang berlawanan.

MITOS

"Pembagian polinomial cuma trik hafalan tanpa makna."

FAKTA

Ia sama persis dengan pembagian bersusun bilangan. Contohnya $1.331 : 11 = 121$ adalah $(x^3+3x^2+3x+1) : (x+1) = x^2+2x+1$ di $x = 10$.

MITOS

"Kalau dibagi $(x+3)$, masukkan saja $x = 3$."

FAKTA

Pembagi $x+3 = x-(-3)$, jadi yang dimasukkan adalah $x = -3$, bilangan yang membuat pembagi bernilai nol.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA TEOREMA AKAR RASIONAL BENAR, DAN BATAS KEKUATANNYA

Misalkan $\frac{p}{q}$ akar dengan $\gcd(p,q) = 1$. Substitusikan, lalu kalikan kedua ruas dengan q^n:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Semua suku kecuali $a_0 q^n$ memuat faktor p, jadi $p \mid a_0 q^n$. Karena p dan q saling prima, $p \mid a_0$. Dengan cara serupa, semua suku kecuali $a_n p^n$ memuat q, sehingga $q \mid a_n$. Fakta menarik: persamaan derajat 3 dan 4 punya rumus umum (rumit sekali!) yang diterbitkan di Italia pada abad ke-16. Namun untuk derajat 5 ke atas, Niels Henrik Abel (1824) membuktikan bahwa **tidak ada** rumus umum yang hanya memakai tambah, kurang, kali, bagi, dan tanda akar. Karena itulah berburu akar rasional dan metode numerik begitu penting.

16.6 Grafik polinomial: akar, pantulan, dan perilaku ujung

Akar polinomial adalah titik potong grafiknya dengan sumbu-x, karena di situ $y = P(x) = 0$. Bentuk faktor $P(x) = k(x - r)(x - s)(x - t)$ memamerkan ketiga akarnya secara langsung. Seret titik-titik akar di bawah dan lihat polinomialnya ikut berubah.

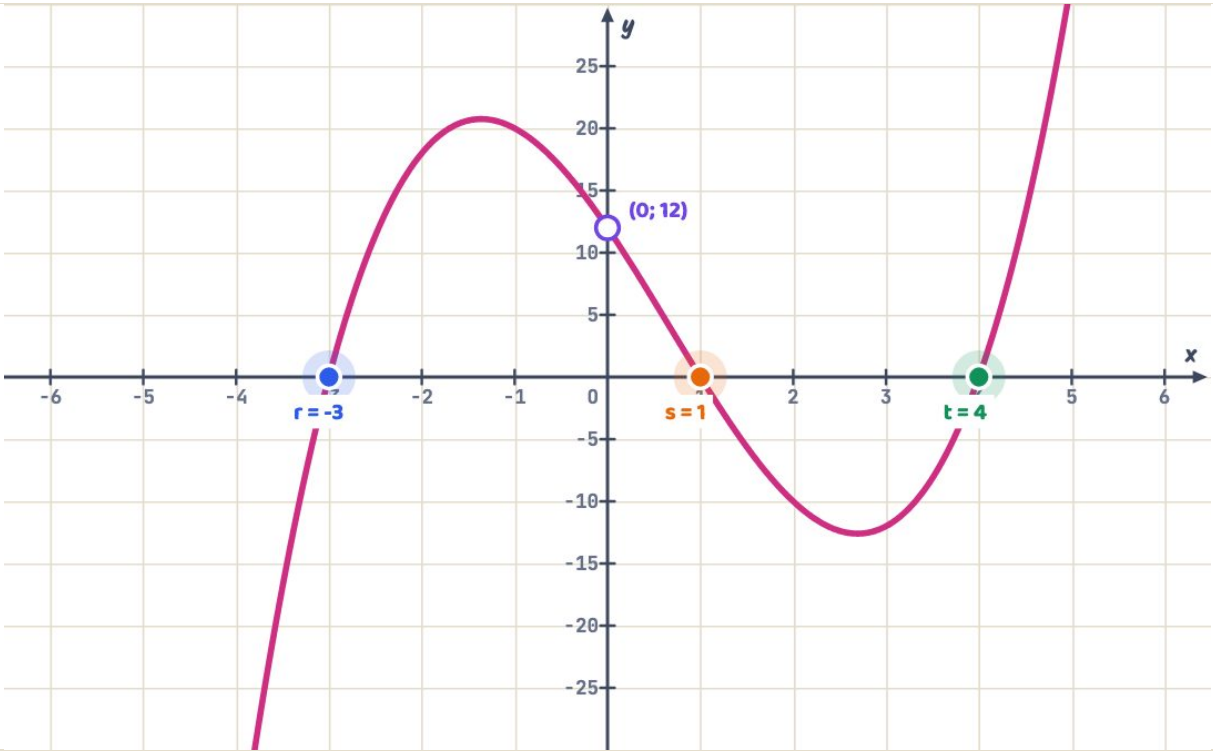
GRAFIK HIDUP **Kubik dengan akar yang bisa diseret**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-16

$$y = k\,(x - r)(x - s)(x - t)$$

$$y = (x + 3)(x - 1)(x - 4) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

Bentuk faktor menunjukkan akar; bentuk panjang menyimpan rahasia Vieta (16.7).



k > 0: ujung kiri turun ↙, ujung kanan naik ↗

r + s + t	rs + rt + st	r · s · t	Potong sumbu-y
2	-11	-12	12

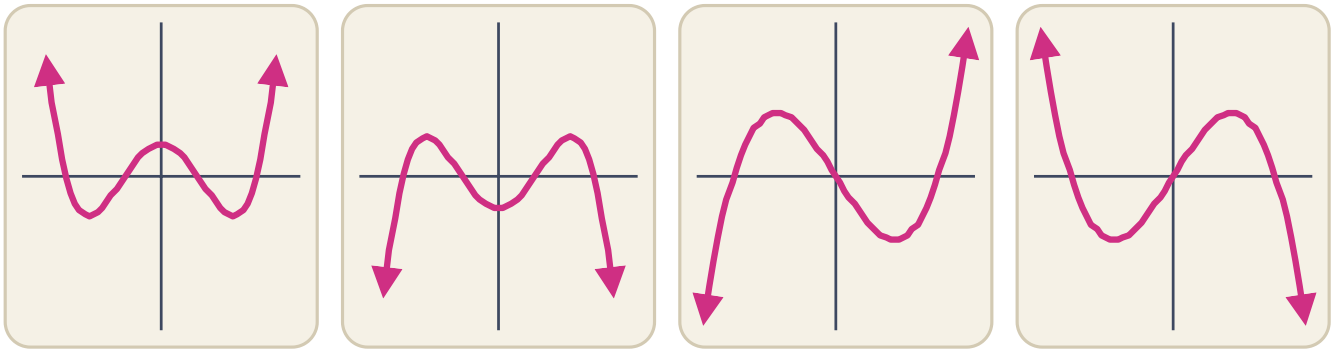
Seret titik akar di sumbu-x. Coba tumpuk dua akar di tempat yang sama: apakah grafiknya masih menembus sumbu-x? Lalu ubah tanda k dan perhatikan kedua ujung grafik.

AKAR KEMBAR: MENEMBUS ATAU MEMANTUL?

Jika faktor $(x - r)$ muncul tepat m kali, r disebut akar dengan **kelipatan** m.

- m ganjil (1, 3, ...): grafik **menembus** sumbu-x di r. Untuk $m = 3$, grafik sempat mendatar sebelum menembus.
- m genap (2, 4, ...): grafik **menyinggung** sumbu-x di r lalu memantul kembali, karena $(x - r)^2$ tidak pernah negatif.

Bagaimana dengan ujung-ujung grafik, jauh di kiri dan jauh di kanan? Di sana, suku berpangkat tertinggi menang telak. Untuk $x = 100$, suku x^3 bernilai sejuta, sedangkan $-10x$ hanya -1.000. Jadi **perilaku ujung** polinomial hanya ditentukan oleh **derajat** (genap atau ganjil) dan **tanda koefisien utamanya**.



n genap, a > 0
kedua ujung naik

n genap, a < 0
kedua ujung turun

n ganjil, a > 0
kiri turun, kanan naik

n ganjil, a < 0
kiri naik, kanan turun

Perilaku ujung hanya bergantung pada derajat n (genap atau ganjil) dan tanda koefisien utama a. Suku-suku lain hanya membuat "kelokan" di bagian tengah.

GRAFIK HIDUP

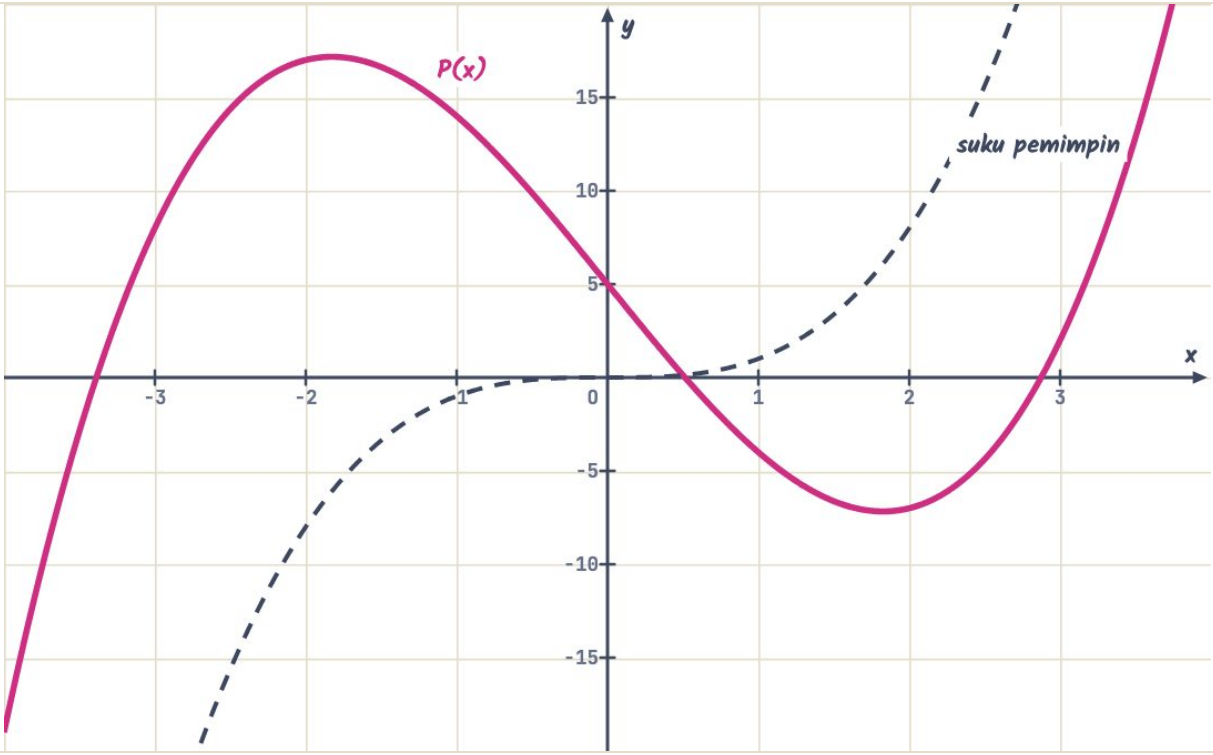
Mundur jauh-jauh: suku pemimpin berkuasa di ujung

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-16

$$P(x) = a\,x^{n} - 10x + 5$$

$$P(x) = x^3 - 10x + 5 \qquad y = x^3$$

Kurva magenta adalah P(x); kurva putus-putus hanya suku pemimpinnya. Tekan ▶ untuk mundur (zoom keluar) dan lihat keduanya makin berimpit.



n ganjil, a > 0: kiri turun ↓, kanan naik ↑

Tepi kanan x =	P(x) ÷ (a·xⁿ) di tepi kanan
4	0,453

Tekan ▶ **Jalankan** atau geser "zoom keluar". Dari jauh, kelokan di tengah mengecil dan $P(x)$ nyaris berimpit dengan suku pemimpinnya. Perhatikan pembacaan "P ÷ axⁿ" yang makin mendekati 1.

Kembali ke kardus 30 cm × 20 cm. Grafik $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$ berakar di $x = 0$, $x = 10$, dan $x = 15$, tetapi kardus hanya masuk akal untuk $0 < x < 10$. Di antara dua akar pertama, grafiknya naik lalu turun. Di puncak itulah kotak terbesar bersembunyi.

Tebak Dulu!

Dari karton 30 cm × 20 cm, kamu memotong persegi berukuran sama di keempat pojok lalu melipat sisinya menjadi kotak terbuka. Potongan seperti apa yang menghasilkan volume terbesar?

Sekecil mungkin, misalnya 1 cm, supaya alasnya lebar.

Sebesar mungkin, misalnya 9 cm, supaya kotaknya tinggi.

Sedang-sedang saja, sekitar 4 cm.

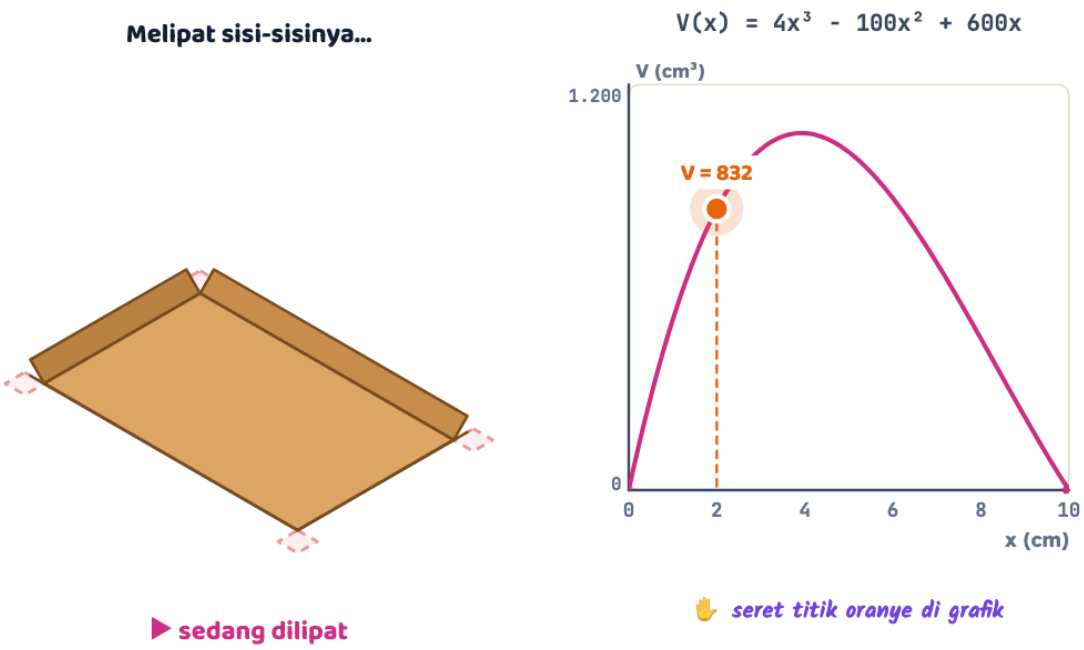
Semua potongan menghasilkan volume yang sama, karena kartonnya sama.

Jawabannya: sekitar 4 cm. Potongan 1 cm memberi $1 \times 28 \times 18 = 504$ cm³, potongan 9 cm hanya $9 \times 12 \times 2 = 216$ cm³, sedangkan potongan 4 cm memberi $4 \times 22 \times 12 = 1.056$ cm³. Terlalu kecil membuat kotak pendek, terlalu besar membuat alasnya sempit. Juaranya ada di tengah, dan Lab Mini di bawah menunjukkan letak tepatnya.

LAB MINI

Pabrik kardus: potong, lipat, ukur volumenya

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-16



Ukuran kotak (p × l × t)	Volume	Juara volume
26 × 16 × 2 cm	832 cm³	rahasia

Geser ukuran potongan x atau seret titik oranye di grafik. Tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat karton dilipat menjadi kotak. Bisakah kamu menemukan puncak grafik $V(x)$ sebelum menyalakan sakelar "Tunjukkan titik maksimum"? Coba juga karton berukuran lain.

BOCORAN DARI BAB 29

Untuk karton 30 cm × 20 cm, puncaknya ada di $x \approx 3{,}92$ cm dengan volume $\approx 1.056{,}3$ cm³. Menemukan titik puncak secara tepat memerlukan **turunan**, alat kalkulus yang akan kamu pelajari di Bab 28 dan 29. Untuk sekarang, grafik polinomial sudah memberi jawaban yang sangat dekat.

MATEMATIKA NUSANTARA

Di banyak desa di Jawa, perajin menganyam **besek**, kotak bambu wadah nasi berkat dan oleh-oleh. Lembar anyaman berbentuk persegi panjang ditekuk di keempat sisinya, dan pojok-pojoknya dilipat ke dalam. Ukuran kotaknya mengikuti aturan yang sama dengan karton kita: tekukan setinggi x membuat alas berukuran $(p - 2x) \times (l - 2x)$. Para perajin menemukan tekukan yang "pas" lewat pengalaman turun-temurun. Kita bisa menemukannya lewat polinomial $V(x) = x(p - 2x)(l - 2x)$.

Pabrik kemasan

Volume kardus dan kotak makanan dari selembar karton adalah polinomial derajat tiga dari ukuran potongannya.

Tikungan jalan & rel

Peralihan dari jalan lurus ke tikungan dibuat bertahap memakai lengkung peralihan. Salah satu bentuk klasiknya adalah parabola kubik, agar penumpang tidak tersentak.

Kode QR

Kode QR tetap terbaca walau sebagian tertutup stiker karena memakai kode Reed–Solomon, yang bekerja dengan polinomial.

Huruf di layar HP

Lengkung setiap huruf pada font disimpan sebagai kurva Bézier, yaitu potongan-potongan polinomial derajat dua atau tiga.

Menyimpan rahasia

Kunci brankas digital bisa dipecah menjadi beberapa "titik" sebuah polinomial; rahasia baru terbuka bila cukup banyak titik dikumpulkan.

16.7 Rumus Vieta: akar dan koefisien bersekongkol

Coba lihat lagi Grafik Hidup di 16.6. Saat akar diseret, koefisien bentuk panjangnya ikut berubah dengan pola yang rapi. Pola itu disebut **rumus Vieta**, menurut François Viète (1540–1603), ahli hukum Prancis yang gemar aljabar dan termasuk orang pertama yang memakai huruf untuk bilangan yang belum diketahui.

RUMUS VIETA DERAJAT TIGA

Jika x_1, x_2, x_3 adalah akar-akar $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, maka

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Bukti: jabarkan bentuk faktornya

Karena x_1, x_2, x_3 akar-akarnya, menurut teorema faktor $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Jabarkan ruas kanan:

$$a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\right].$$

Cocokkan koefisien (kesamaan polinomial, 16.2): $b = -a(x_1 + x_2 + x_3)$, $c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, dan $d = -a\,x_1x_2x_3$. Bagi dengan a, selesai. ∎

RUMUS HIDUP

Vieta: dari akar ke koefisien

$$d = -rst$$

Untuk $x^3 + bx^2 + cx + d$ dengan akar r, s, t: suku tetapnya adalah hasil kali ketiga akar dengan tanda dibalik. Koefisien b dan c juga bisa dibaca langsung dari akar-akarnya.

- r Akar pertama
- s Akar kedua
- t Akar ketiga
- d Suku tetap d

SUKU TETAP D

-6

Akar **1**, **2**, dan **3**: b = –(r + s + t) = **-6**, c = rs + rt + st = **11**, dan d = –rst = **-6**. Jadi (x – r)(x – s)(x – t) = x^3 **– 6**x^2 **+ 11**x **– 6**.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VIETA-KUBIK

KERJAKAN BERSAMA

Akar yang hilang, dicari dengan Vieta

Salah satu akar $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ adalah 3. Tentukan dua akar lainnya tanpa membagi.

1. Misalkan akar-akarnya $3, u, v$. Jumlah akar: $3 + u + v = -\frac{-4}{1} = 4$, jadi $u + v = 1$.
2. Hasil kali akar: $3uv = -\frac{6}{1} = -6$, jadi $uv = -2$.
3. Dua bilangan berjumlah 1 dan berhasil kali -2 adalah akar $t^2 - t - 2 = 0$, yaitu $(t - 2)(t + 1) = 0$.

Akar lainnya 2 dan -1. Cek: $P(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$ dan $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$. ✓

COBA SENDIRI **Jumlah kuadrat akar tanpa mencari akarnya**

Akar-akar $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ adalah x_1, x_2, x_3. Hitung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

1. Vieta: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2}$ dan $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-4}{2} = -2$.
2. Kuadratkan jumlahnya: $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.
3. Jadi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(-2) = \frac{25}{4} + 4 = \frac{41}{4}$.

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{41}{4} = 10{,}25$. **Cek: akarnya ternyata 3, $\frac{1}{2}$, dan -1, dan $9 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{4}$.** ✓

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TRIK OLIMPIADE: JIKA $A + B + C = 0$, MAKA $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$

Pandang a, b, c sebagai akar-akar $t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc = 0$. Karena $a + b + c = 0$, persamaannya menjadi $t^3 + et - abc = 0$ dengan $e = ab + bc + ca$. Setiap akar memenuhi $t^3 = -et + abc$. Jumlahkan untuk $t = a, b, c$:

$$a^3 + b^3 + c^3 = -e(a+b+c) + 3abc = 3abc.$$

Contoh kilat: $13^3 + (-5)^3 + (-8)^3$ tanpa kalkulator. Karena $13 - 5 - 8 = 0$, hasilnya $3 \cdot 13 \cdot (-5) \cdot (-8) = 1.560$. Cek: $2.197 - 125 - 512 = 1.560$. ✓

Cek Cepat

Derajat polinomial $(x^2 + 1)(x^3 - x)$ adalah...

- 6
- 5
- 3
- 2

Sisa pembagian $x^3 - 2x + 7$ oleh $x + 1$ adalah...

- 6
- 4
- 8
- 10

Manakah yang merupakan faktor dari $x^3 + 2x^2 - x - 2$?

- $x + 2$
- $x - 2$
- $x + 3$
- $x - 3$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: pabrik kotak dari kertas bekas

Bahan: 4 lembar kertas atau karton bekas berukuran sama (misalnya HVS A4, 29,7 cm × 21 cm), penggaris, pensil, gunting, selotip, beras atau kacang hijau, dan sendok makan.

1. Potong persegi di keempat pojok setiap lembar: 2 cm untuk lembar pertama, lalu 3 cm, 4 cm, dan 5 cm untuk lembar lainnya.
2. Lipat sisi-sisinya ke atas dan rekatkan pojoknya dengan selotip.
3. Isi setiap kotak dengan beras sampai penuh dan rata. Hitung berapa sendok yang kamu perlukan.
4. Hitung juga volume tiap kotak dengan rumus $V(x) = x(29{,}7 - 2x)(21 - 2x)$.
5. Urutkan keempat kotak dari yang paling sedikit sampai yang paling banyak menampung beras.

Pertanyaan: Apakah urutan hasil takaran berasmu sama dengan urutan hasil rumus? Potongan berapa sentimeter (boleh desimal) yang menurutmu memberi kotak terbesar untuk kertas A4? Cek tebakanmu dengan Rumus Hidup volume kotak di 16.1.

RINGKASAN KILAT **Bab 16 dalam 3 menit**

☑ Kamu sekarang bisa...

- mengenali **suku**, **koefisien**, dan **derajat** sebuah polinomial, lalu menghitung nilainya
- menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan polinomial, serta memakai **kesamaan polinomial**
- membagi polinomial dengan **cara bersusun** dan **metode Horner**
- memakai **teorema sisa** dan **teorema faktor** untuk mencari sisa, faktor, dan akar
- membaca **grafik polinomial** (akar, akar kembar, perilaku ujung) dan memakai **rumus Vieta** derajat tiga

🔑 Istilah kunci

polinomial · suku banyak · koefisien · derajat · koefisien utama · suku tetap · nilai polinomial · suku sejenis · sama · hasil bagi · sisa · akar · kelipatan · perilaku ujung · rumus Vieta

🧮 Rumus penting

$$V = x\,(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume kotak dari karton. Volume = tinggi × panjang alas × lebar alas. Tingginya x, sedangkan panjang dan lebar karton masing-masing berkurang 2x karena dipotong di kedua ujungnya.

$$S = P(a) = a^3 + b\,a^2 + c\,a + d$$

Teorema Sisa. Mau tahu sisa pembagian P(x) oleh (x – a)? Tidak perlu membagi: cukup masukkan x = a ke dalam P(x).

$$d = -\,r\,s\,t$$

Vieta: dari akar ke koefisien. Untuk $x^3 + bx^2 + cx + d$ dengan akar r, s, t: suku tetapnya adalah hasil kali ketiga akar dengan tanda dibalik. Koefisien b dan c juga bisa dibaca langsung dari akar-akarnya.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Derajat ditentukan oleh pangkat tertinggi, bukan oleh suku yang ditulis paling depan.
- Suku yang hilang wajib ditulis dengan koefisien 0.
- "$(x + 2)$ faktor dari $P(x)$" berarti $P(-2) = 0$, bukan $P(2) = 0$.

⛰ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=16

Teka-teki untuk Bab 17

Jumlah sudut dalam segi-n ternyata sebuah polinomial derajat satu: $S(n) = 180n - 360$ (dalam derajat). Segi empat: $S(4) = 360^\circ$. Segi lima: $S(5) = 540^\circ$. Segitiga: $S(3) = 180^\circ$. Tetapi tunggu dulu. Mengapa **setiap** segitiga, entah kecil atau raksasa, lancip atau tumpul, sudutnya selalu berjumlah tepat 180°? Bisakah kamu meyakinkan temanmu hanya dengan selembar kertas?

▼ **Intip petunjuk**

Gunting sebuah segitiga dari kertas, sobek ketiga pojoknya, lalu jajarkan ketiga ujung sudut itu pada satu titik. Bentuk apa yang muncul? Bab 17 akan menjelaskan rahasianya dengan garis-garis sejajar.

BAB 17 · GEOMETRI & PENGUKURAN

17 Garis, Sudut & Segitiga: Misteri Angka 180



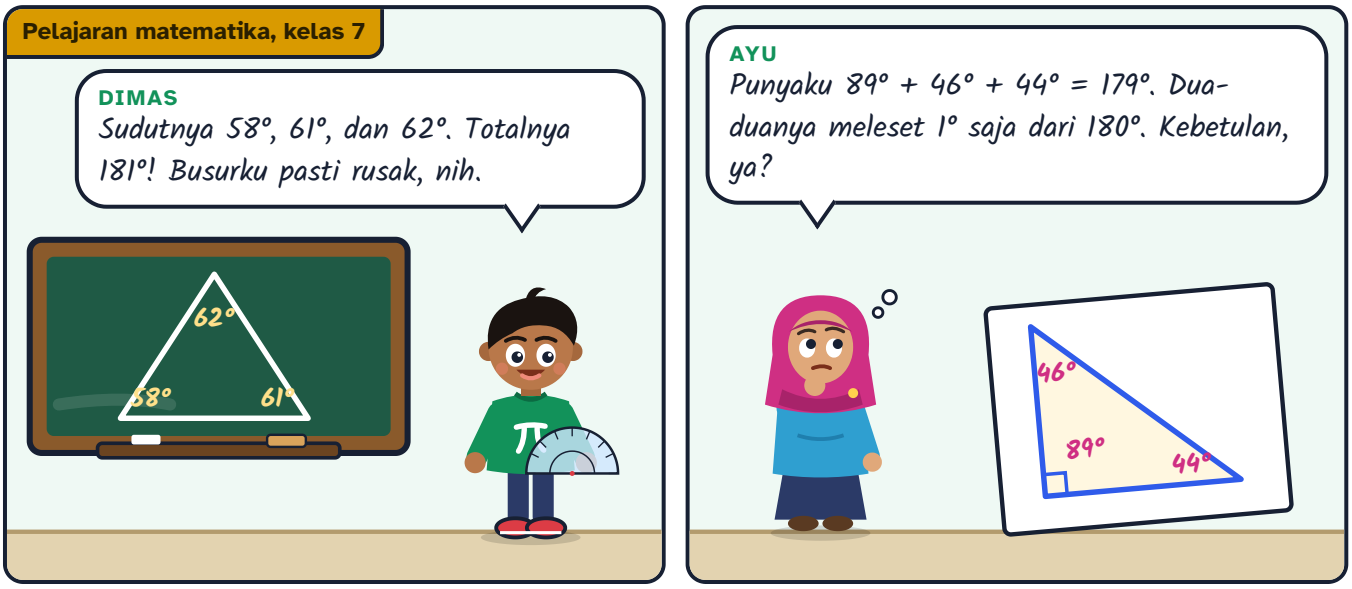
Ukur ketiga sudut segitiga apa saja, sekecil kuku atau sebesar lapangan bola, lalu jumlahkan. Hasilnya selalu 180°. Kebetulan? Di bab ini kamu akan merobek kertas, menyeret segitiga, dan membuktikannya sendiri.

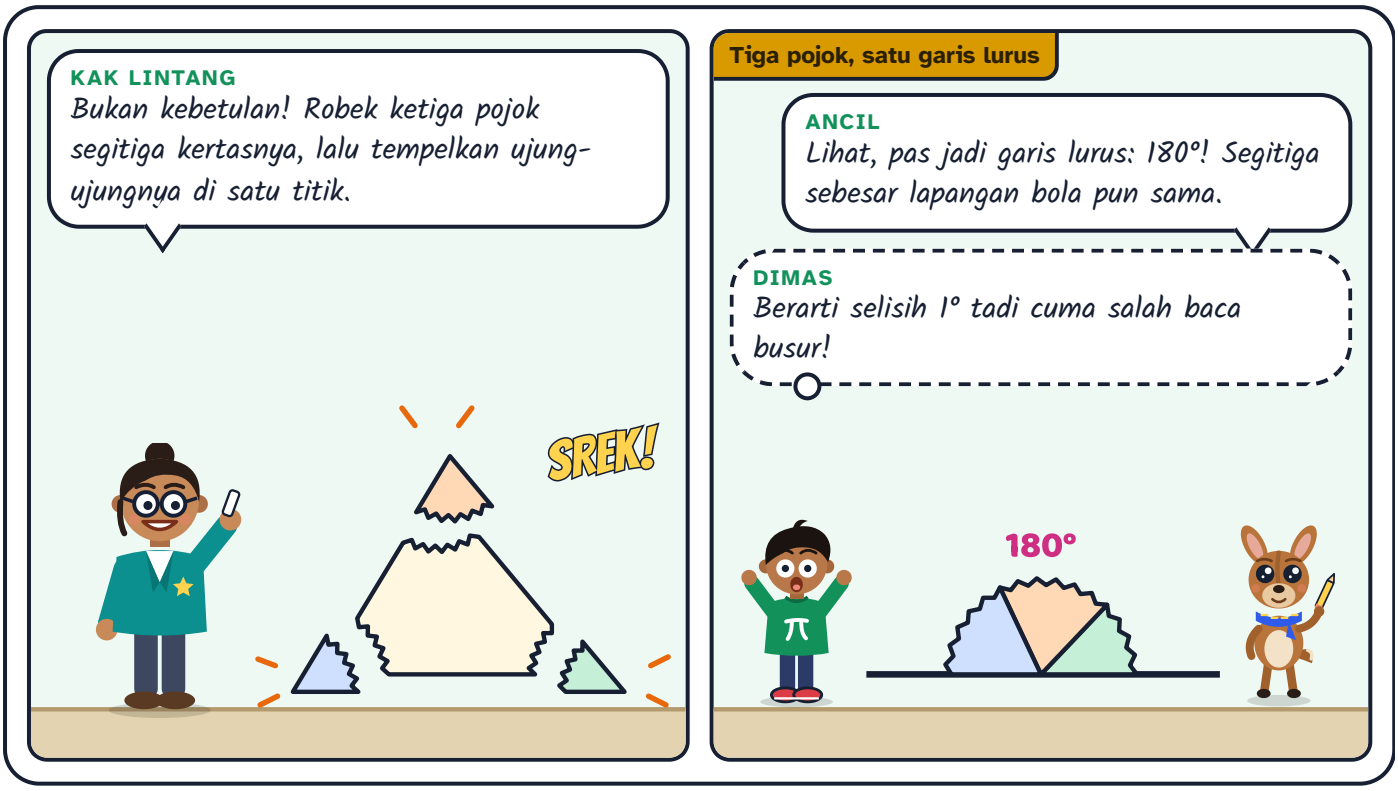
Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan **titik, garis, sinar, dan ruas garis**, serta mengukur dan menggolongkan sudut dengan **busur derajat**;
- memakai sifat sudut **berpelurus, berpenyiku, dan bertolak belakang**;
- menemukan sudut-sudut pada **dua garis sejajar** yang dipotong garis lain (sehadap, berseberangan, sepihak);
- membuktikan bahwa **jumlah sudut segitiga 180°** dan memakai sifat **sudut luar** segitiga;
- memakai **ketaksamaan segitiga** dan menghitung jumlah **sudut dalam dan sudut luar poligon**.

BUSUR DIMAS RUSAK?

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Segitiga A sekecil kuku jari. Segitiga B sebesar lapangan sepak bola. Jumlah ketiga sudut segitiga mana yang lebih besar?

- Segitiga B, karena ukurannya jauh lebih besar.
- Segitiga A, karena sudut-sudutnya lebih "rapat".
- Sama saja: keduanya 180°.
- Tergantung panjang sisi-sisinya.

Jawabannya: sama, 180°. Besar sudut mengukur seberapa lebar *bukaan*, bukan seberapa panjang sisinya. Memperbesar segitiga seperti memperbesar foto: sisinya memanjang, tetapi bukaan pojoknya tetap. Di subbab 17.4 kamu akan membuktikan bahwa jumlahnya selalu 180°, berapa pun ukurannya.

17.1 Titik, garis, sudut, dan cara mengukurnya

Geometri dimulai dari benda yang sangat sederhana. Sebuah **titik** hanya menunjukkan letak dan tidak punya ukuran. **Garis** lurus memanjang tanpa ujung ke dua arah. **Sinar garis** punya satu titik pangkal lalu memanjang ke satu arah, seperti sinar senter. **Ruas garis** punya dua ujung, jadi panjangnya bisa diukur.



titik A
tanpa ukuran

garis AB
tak berujung

sinar AB
satu pangkal

ruas garis AB
dua ujung

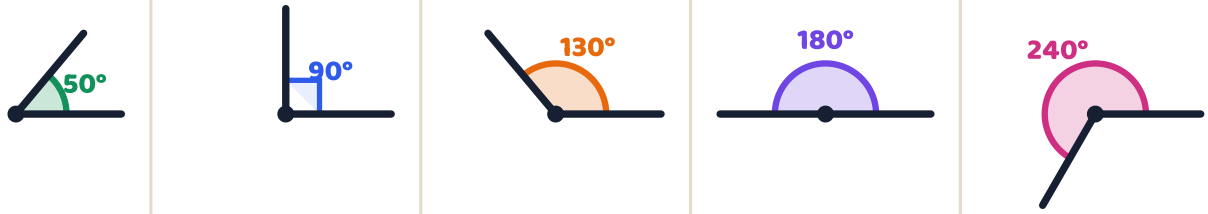
Titik ditulis dengan huruf kapital. Garis, sinar, dan ruas garis diberi nama dengan dua titik yang dilaluinya.

DEFINISI

Sebuah **sudut** dibentuk oleh dua sinar yang titik pangkalnya sama. Titik pangkal itu disebut **titik sudut**, dan kedua sinarnya disebut **kaki sudut**. **Besar sudut** menyatakan seberapa jauh satu kaki harus *diputar* agar berimpit dengan kaki lainnya. Satu putaran penuh dibagi menjadi 360 bagian sama besar; setiap bagian disebut **satu derajat** (1°).

Bahasa sederhana · Gampangnya: buka sebuah gunting. Makin lebar bukaannya, makin besar sudutnya. Panjang mata guntingnya tidak berpengaruh sama sekali!

Sudut dinamai dengan titik sudutnya, misalnya $\angle A$, atau dengan tiga huruf, misalnya $\angle BAC$ (huruf tengah selalu titik sudutnya). Berdasarkan besarnya, sudut dibagi menjadi lima jenis.



lancip
kurang dari 90°

siku-siku
tepat 90°

tumpul
antara 90° dan 180°

lurus
tepat 180°

refleks
lebih dari 180°

Tanda kotak kecil berarti sudut siku-siku, yaitu tepat 90° atau seperempat putaran.

Alat untuk mengukur sudut adalah **busur derajat**. Letakkan titik tengah busur tepat di titik sudut, impitkan garis 0° dengan salah satu kaki sudut, lalu baca angka yang dilewati kaki lainnya.

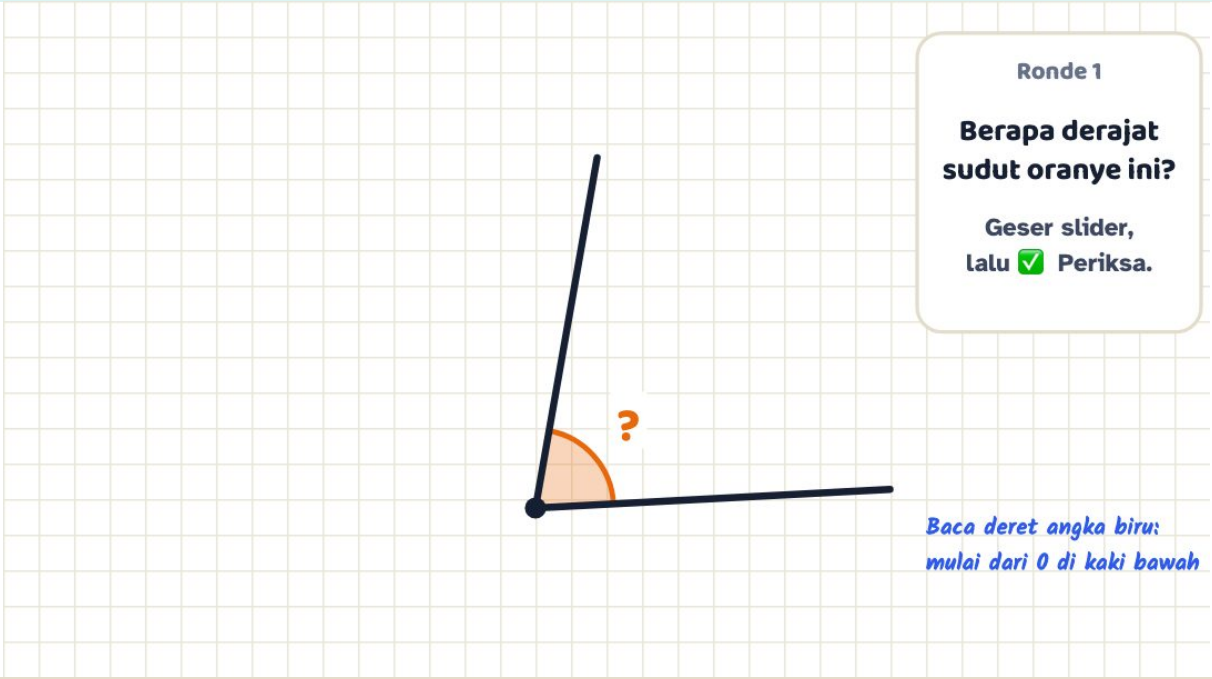
AWAS JEBAKAN

Busur derajat punya **dua deret angka**: satu berjalan dari 0° ke 180° searah jarum jam, satu lagi berlawanan arah. Pilih deret yang angka 0-nya berada di kaki sudut pertama. Kalau sudutnya jelas lancip tetapi kamu membaca 130°, berarti kamu membaca deret yang salah!

LAB MINI

Mata Elang: tebak besar sudutnya!

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17



Tebakan	Sebenarnya	Selisih	Jenis sudut	Skor
90 °	—	—	?	0 poin · 0 ronde

Tebak besar sudut oranye hanya dengan mata, geser slider **Tebakanmu**, lalu tekan ☑ **Periksa**. Selisih paling banyak 3° = mata elang! Nyalakan **Pasang busur derajat** untuk berlatih membaca busur (tanpa skor).

TAMU DARI MASA LALU

Mengapa satu putaran dibagi menjadi 360°, bukan 100°? Kebiasaan ini diwariskan para astronom Babilonia (±2.000 tahun SM) yang berhitung dengan bilangan basis 60. Salah satu dugaan sejarawan: angka 360 dekat dengan banyaknya hari dalam setahun, dan 360 mudah dibagi oleh 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, dan masih banyak lagi. Itulah sebabnya 360 sangat praktis untuk membagi lingkaran.

Jam dinding adalah busur derajat raksasa. Dua belas angka membagi satu putaran, jadi jarak antara dua angka berurutan adalah $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Jarum menit berputar 360° dalam 60 menit (6° per menit), sedangkan jarum jam hanya bergeser 30° dalam 60 menit ($0{,}5^\circ$ per menit).

RUMUS HIDUP **Sudut jarum jam**

$$\theta = |30\,j - 5{,}5\,m|$$

Jarum jam berada di 30j + 0,5m derajat, jarum menit di 6m derajat (diukur dari angka 12). Selisihnya adalah sudutnya; kalau lebih dari 180°, ambil 360° dikurangi selisih itu.

j Jam jam · m Menit menit · θ Sudut terkecil °



Pukul **3.00**: jarum jam di **90°** dan jarum menit di **0°** (diukur dari angka 12). Selisihnya **90°**, jadi sudut terkecil di antara kedua jarum **90°**.

Cek satuan: satu putaran 360° dibagi 12 angka jam, jadi tiap angka berjarak 30°.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-JARUM-JAM

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Untuk sudut jarum jam, ingat dua angka saja: **30** (derajat per angka jam) dan **5,5** (selisih kecepatan kedua jarum per menit: $6 - 0{,}5$). Pukul 4.30? $|30 \times 4 - 5{,}5 \times 30| = |120 - 165| = 45°$. Jangan menjawab 60° hanya karena jarum menit di angka 6: jarum jam sudah bergeser ke tengah-tengah angka 4 dan 5!

17.2 Sudut berpelurus, berpenyiku, dan bertolak belakang

Sudut sering muncul berpasangan. Dua sudut yang bersebelahan pada sebuah garis lurus selalu "berbagi" setengah putaran. Dua sudut yang bersama-sama membentuk pojok siku-siku berbagi seperempat putaran.

📓 **DEFINISI**

Dua sudut disebut **berpelurus** (saling melengkapi menjadi garis lurus) jika jumlahnya $180°$. Dua sudut disebut **berpenyiku** jika jumlahnya $90°$. Contoh: pelurus $70°$ adalah $110°$, dan penyiku $70°$ adalah $20°$.

TRIK KAK LINTANG

Dengarkan bunyi katanya. Pe-**nyiku** → **siku** → 90°. Pe-**lurus** → **lurus** → 180°. Tidak perlu hafalan tambahan!

Sekarang silangkan dua sumpit. Terbentuk empat sudut. Sudut-sudut yang saling berhadapan di seberang titik potong disebut **sudut bertolak belakang**.

SIFAT SUDUT BERTOLAK BELAKANG

Jika dua garis berpotongan, sudut-sudut yang bertolak belakang **sama besar**: $\angle 1 = \angle 3$ dan $\angle 2 = \angle 4$.

Bukti (cukup dua baris)

$\angle 1$ dan $\angle 2$ bersebelahan pada satu garis lurus, jadi $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. $\angle 2$ dan $\angle 3$ juga bersebelahan pada garis lurus yang lain, jadi $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 2 = \angle 3.$$

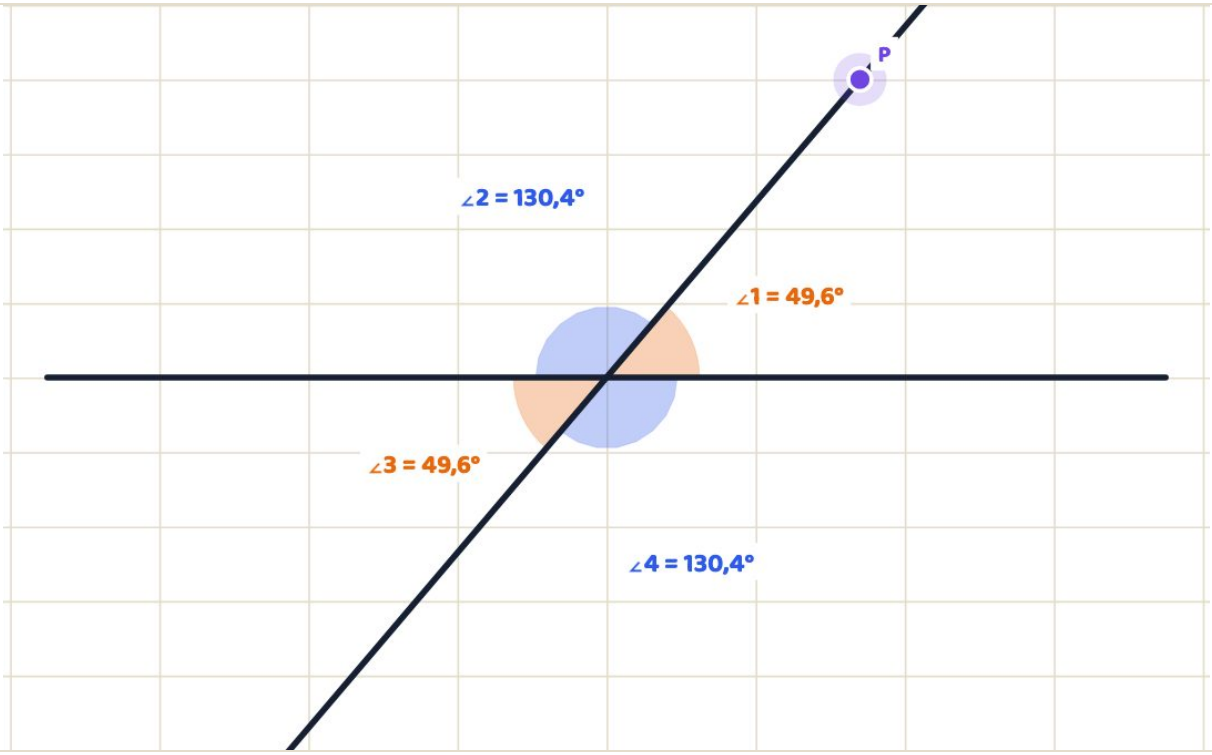
Dengan cara yang sama, $\angle 2 = \angle 4$. Terbukti.

GRAFIK HIDUP **Dua garis bersilang**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \quad \text{dan} \quad \angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 1 = \angle 3 = 49{,}6^\circ \qquad \angle 2 = \angle 4 = 130{,}4^\circ$$



∠1	∠2	∠3	∠4
49,6 °	130,4 °	49,6 °	130,4 °

Seret titik ungu **P** untuk memutar garis miring. Berapa pun sudutnya, $\angle 1$ selalu kembar dengan $\angle 3$, dan $\angle 1 + \angle 2$ selalu 180°. Bisakah kamu membuat keempat sudut sama besar?

CONTOH **Bambu layangan bersilang**

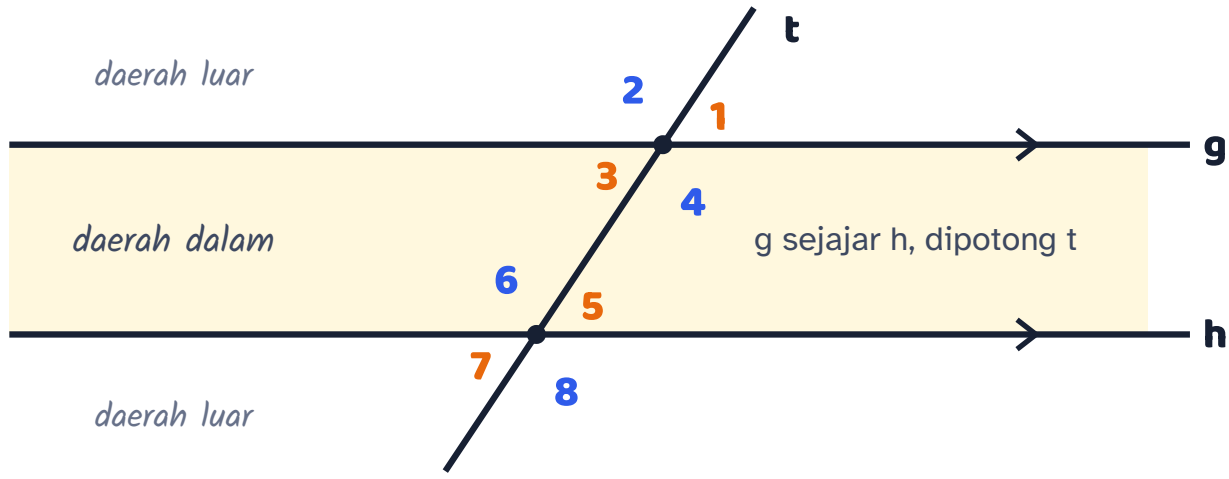
Dua batang bambu rangka layangan bersilang. Salah satu sudut di persilangan besarnya $(2x + 15)^\circ$, sedangkan sudut yang bertolak belakang dengannya $(4x - 25)^\circ$. Tentukan x dan keempat sudut di persilangan itu.

1. Sudut bertolak belakang sama besar: $2x + 15 = 4x - 25$.
2. Pindahkan suku: $15 + 25 = 4x - 2x$, jadi $40 = 2x$ dan $x = 20$.
3. Besar sudutnya $2(20) + 15 = 55^\circ$. Cek: $4(20) - 25 = 55^\circ$. Cocok!
4. Dua sudut lainnya adalah pelurusnya: $180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

$x = 20$. **Keempat sudutnya** $55^\circ, 125^\circ, 55^\circ, 125^\circ$**, dan jumlahnya tepat** 360°**, satu putaran penuh.**

17.3 Garis sejajar dan garis yang memotongnya

Dua rel kereta tidak pernah bertemu, sejauh apa pun kamu menelusurinya. Garis seperti itu disebut **garis sejajar** dan ditulis $g \parallel h$. Sebuah garis yang memotong keduanya, misalnya jalan raya yang melintasi rel, disebut **garis transversal**. Perpotongan itu menghasilkan delapan sudut.



Sudut 3, 4, 5, 6 berada di daerah dalam (di antara kedua garis). Sudut 1, 2, 7, 8 berada di daerah luar. Tanda panah kecil pada garis berarti kedua garis sejajar.

SIFAT SUDUT PADA DUA GARIS SEJAJAR

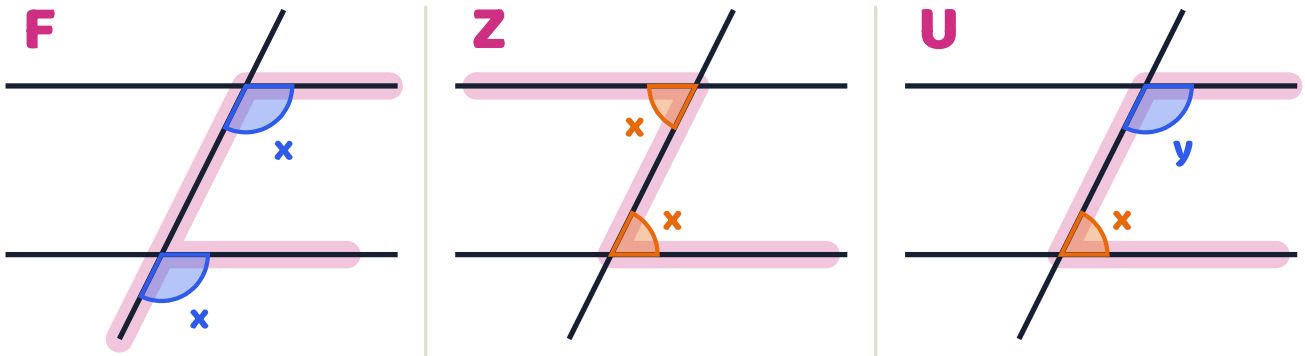
Jika $g \parallel h$ dipotong garis transversal t, maka:

- **sudut sehadap** (posisinya sama di tiap perpotongan) sama besar: $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$;
- **sudut dalam berseberangan** sama besar: $\angle 3 = \angle 5$ dan $\angle 4 = \angle 6$;
- **sudut luar berseberangan** sama besar: $\angle 1 = \angle 7$ dan $\angle 2 = \angle 8$;
- **sudut dalam sepihak** berjumlah $180°$: $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ dan $\angle 3 + \angle 6 = 180°$.

Bahasa sederhana · Gampangnya: pada dua garis sejajar, hanya ada **dua ukuran sudut**. Sudut yang kecil semuanya sama, sudut yang besar semuanya sama, dan satu sudut kecil ditambah satu sudut besar selalu 180°.

Mengapa sudut sehadap sama besar?

Bayangkan garis g **digeser** lurus ke bawah sepanjang garis t sampai menempel pada h. Karena $g \parallel h$, arahnya tidak berubah, jadi pergeseran itu membawa $\angle 1$ tepat menutupi $\angle 5$. Ini adalah sifat dasar garis sejajar. Sifat lainnya tinggal diturunkan: $\angle 3 = \angle 1$ (bertolak belakang) $= \angle 5$, jadi sudut dalam berseberangan sama; dan $\angle 4 = 180° - \angle 1 = 180° - \angle 5$, jadi $\angle 4 + \angle 5 = 180°$.



sehadap
sama besar

dalam berseberangan
sama besar

dalam sepihak
jumlahnya 180°

Cari huruf tersembunyi pada gambar: F untuk sudut sehadap, Z untuk sudut dalam berseberangan, U untuk sudut dalam sepihak.

TRIK KAK LINTANG

Cari **huruf F, Z, dan U** (huruf U boleh terbalik atau miring) yang tersembunyi di gambar. Di pojok huruf **F** dan **Z**, sudutnya kembar. Di dalam huruf **U**, kedua sudutnya bergandengan menjadi 180°.

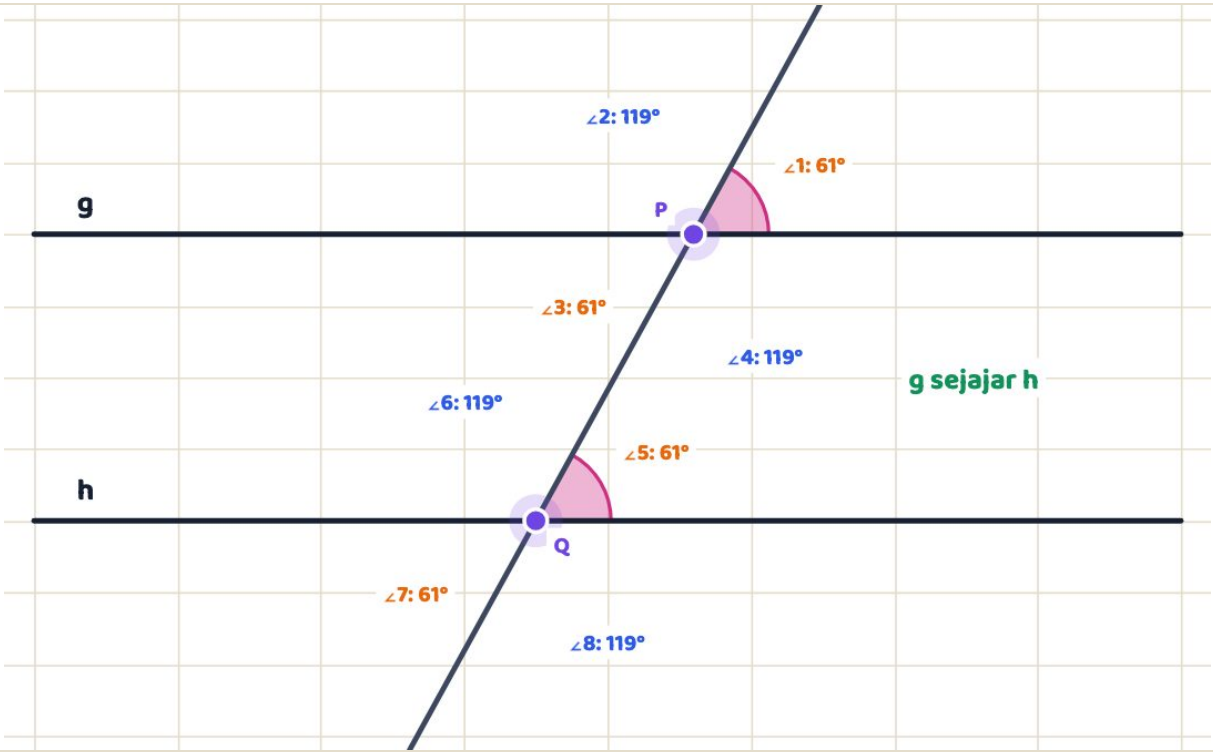
GRAFIK HIDUP

Garis sejajar dipotong garis transversal

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17

$$g \parallel h \Rightarrow \angle 1 = \angle 5,\quad \angle 4 = \angle 6,\quad \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\angle 1 = 61{,}2^\circ, \qquad \angle 5 = 61{,}2^\circ$$



☑ g sejajar h, jadi pasangan ini sama besar

Pasangan	Selisih	Jumlah
sehadap	0 °	122,4 °

Seret titik **P** dan **Q** untuk mengubah kemiringan garis transversal. Slider **pasangan** memilih pasangan sudut yang disorot (1 sehadap, 2 dalam berseberangan, 3 luar berseberangan, 4 dalam sepihak). Lalu miringkan garis **h** sedikit saja: apa yang terjadi pada pasangan yang tadinya kembar?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Sifat sehadap, berseberangan, dan sepihak **hanya berlaku jika kedua garis sejajar**. Pada dua garis yang tidak sejajar, sudut sehadapnya tidak sama besar. Sebelum memakai sifat itu, pastikan ada tanda sejajar (panah kecil) atau keterangan $g \parallel h$ di soal.

KERJAKAN BERSAMA **Jalan raya melintasi rel kereta**

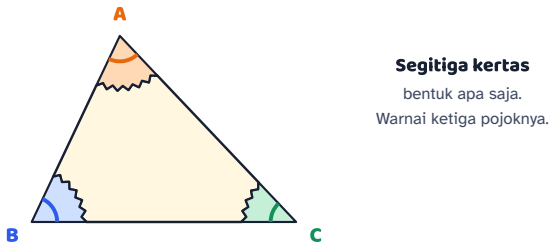
Pada gambar penomoran di atas, jalan raya t melintasi dua rel sejajar g dan h. Diketahui $\angle 1 = 65^\circ$. Tentukan $\angle 6$ dan $\angle 8$ beserta alasannya.

1. $\angle 5 = \angle 1 = 65^\circ$ karena keduanya **sehadap** (huruf F).
2. $\angle 6$ dan $\angle 5$ bersebelahan pada garis h, jadi berpelurus: $\angle 6 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.
3. $\angle 8$ bertolak belakang dengan $\angle 6$, jadi $\angle 8 = 115^\circ$.

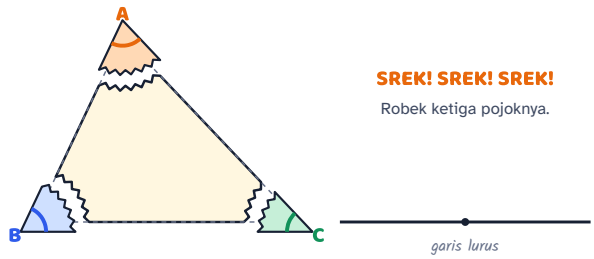
$\angle 6 = \angle 8 = 115^\circ$. **Cek dengan huruf U:** $\angle 4 + \angle 5 = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$. **Cocok!**

17.4 Jumlah sudut segitiga: bukti robek kertas

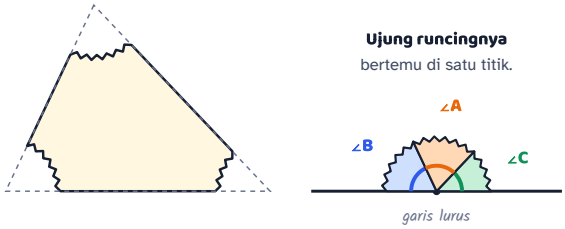
Saatnya menjawab misteri komik di awal bab. Dimas dan Ayu sama-sama mendapat hasil yang *hampir* 180°. Ternyata hasil tepatnya memang selalu 180°; selisih 1° itu hanya kesalahan membaca busur. Lihat buktinya tanpa satu angka pun.



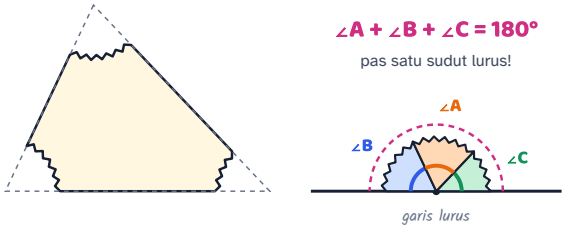
Langkah 1. Gunting sebuah segitiga dari kertas, bentuk apa saja. Warnai ketiga pojoknya: $\angle A$ oranye, $\angle B$ biru, $\angle C$ hijau.



Langkah 2. Robek ketiga pojoknya. Ujung runcing setiap sobekan adalah titik sudutnya.



Langkah 3. Pindahkan sobekan ke sebuah garis lurus. Tempelkan ketiga ujung runcingnya di satu titik, berdampingan tanpa celah dan tanpa tumpang tindih.



Langkah 4. Ketiganya pas mengisi setengah putaran, yaitu sudut lurus. Jadi $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$!

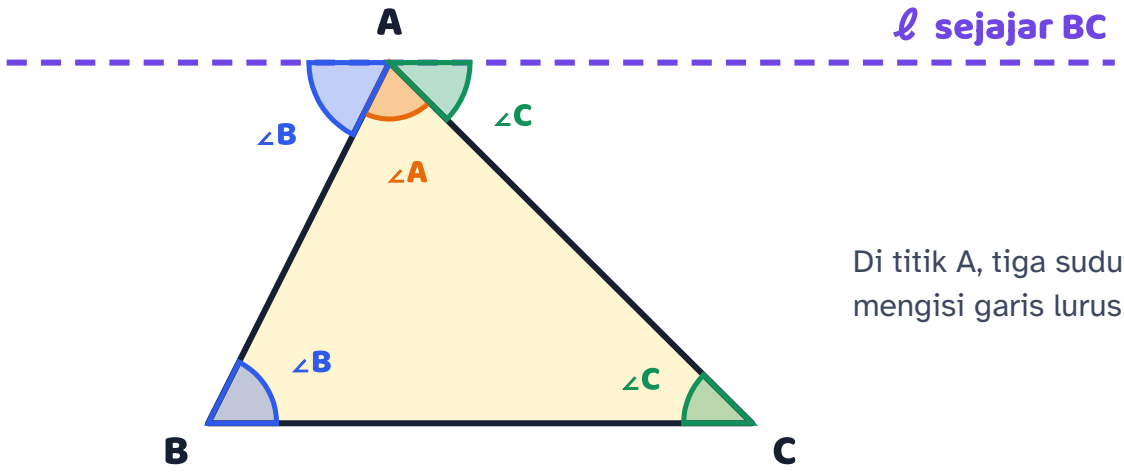
TEOREMA JUMLAH SUDUT SEGITIGA

Pada setiap segitiga ABC berlaku

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Bukti dengan garis sejajar (berlaku untuk semua segitiga)

Robek kertas meyakinkan, tetapi kita hanya mencobanya pada beberapa segitiga. Agar yakin untuk *semua* segitiga, tarik garis ℓ melalui A yang sejajar dengan BC.

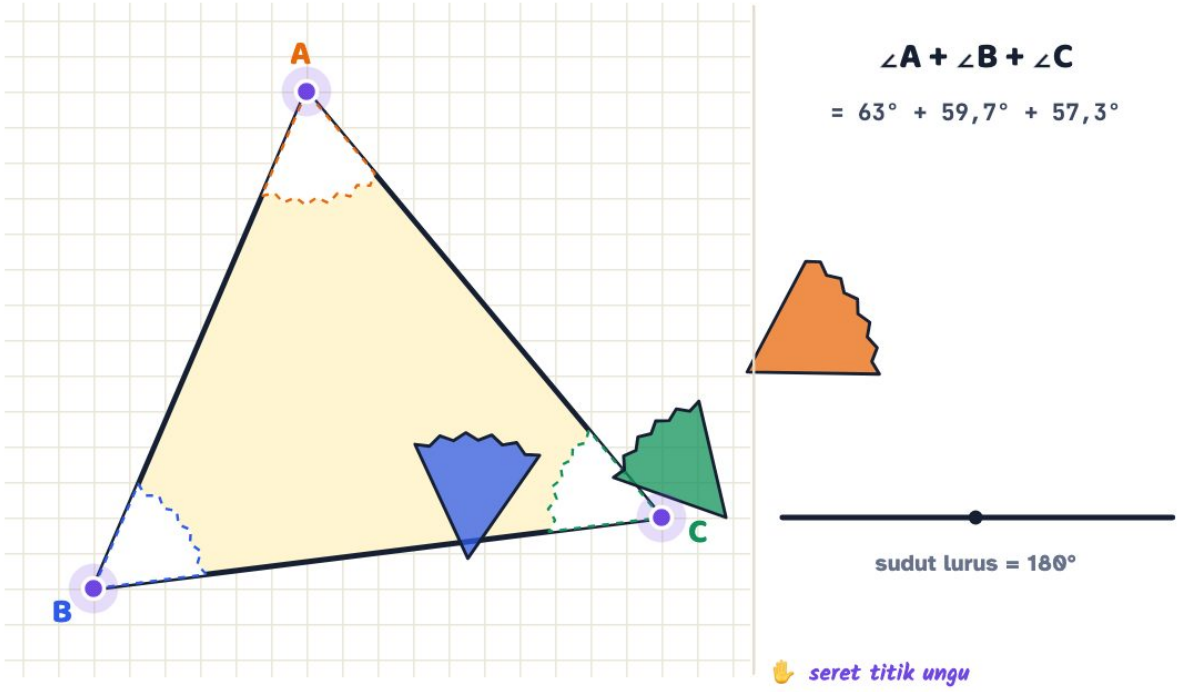


Di titik A, tiga sudut mengisi garis lurus ℓ.

Karena $\ell \parallel BC$ dan AB memotong keduanya, sudut di kiri A sama dengan $\angle B$ (sudut dalam berseberangan, huruf Z). Dengan alasan yang sama, sudut di kanan A sama dengan $\angle C$. Ketiga sudut di titik A mengisi garis lurus ℓ, jadi $\angle B + \angle A + \angle C = 180^\circ$. Terbukti.

LAB MINI **Segitiga ajaib: seret, robek, jajarkan**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17



∠A	∠B	∠C	∠A + ∠B + ∠C	Jenis segitiga
63 °	59,7 °	57,3 °	180 °	lancip · sembarang

Seret titik ungu A, B, atau C di kertas berpetak, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk merobek pojok-pojoknya. Setelah sobekan tiba di garis lurus, seret lagi titik sudutnya: kipas warna-warni selalu pas setengah lingkaran! Pilih **Tampilan** lain untuk melihat bukti garis sejajar dan sudut luar.

Bahasa sederhana · Gampangnya: tiga pojok segitiga kalau disatukan selalu membentuk garis lurus. Jadi kalau dua sudut sudah diketahui, sudut ketiga tinggal dihitung: **180 dikurangi keduanya**.

CONTOH **Sudut ketiga tanpa busur**

Dimas mengukur dua sudut segitiga kertasnya: 47° dan 68°. Tanpa memakai busur lagi, berapa sudut ketiganya?

1. Jumlah ketiga sudut segitiga 180°.
2. Sudut ketiga $= 180^\circ - 47^\circ - 68^\circ = 65^\circ$.

Sudut ketiganya 65°. Semua sudutnya kurang dari 90°, jadi segitiga Dimas adalah segitiga lancip.

ADU CEPAT **Sudut ketiga kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17

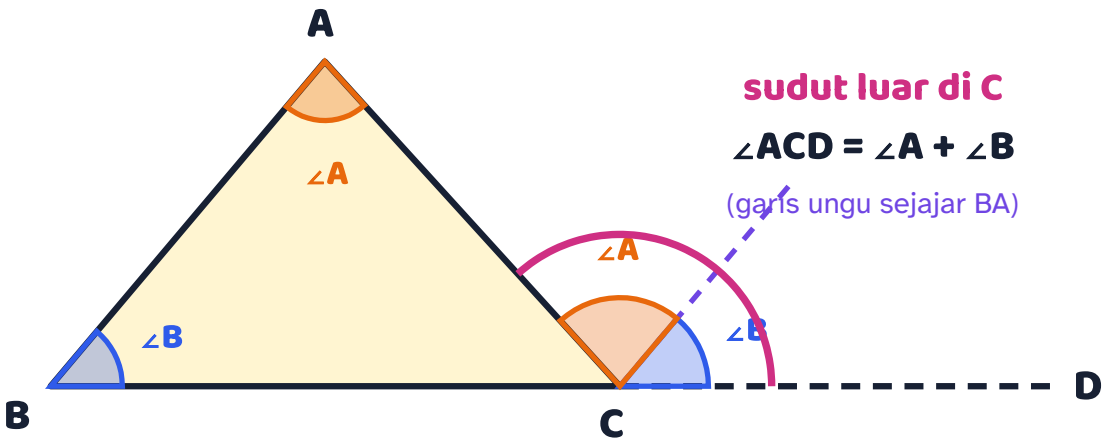
Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangkan kedua sudut dari 180. Trik cepat: jumlahkan dulu kedua sudut, lalu cari berapa lagi menuju 180.

Teorema 180° juga memberi hadiah gratis. Perpanjang sisi BC melewati C sampai titik D. Sudut $\angle ACD$ yang terbentuk di luar segitiga disebut **sudut luar**.

SIFAT SUDUT LUAR SEGITIGA

Sudut luar segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam yang **tidak bersisian** dengannya: $\angle ACD = \angle A + \angle B$.



Bukti: $\angle ACD = 180^\circ - \angle C$ (berpelurus), dan $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$ (jumlah sudut segitiga). Jadi keduanya sama.

KERJAKAN BERSAMA

Kuda-kuda atap rumah

Kuda-kuda (rangka atap) sebuah rumah berbentuk segitiga sama kaki. Sudut di puncaknya 120°. Berapa kemiringan atapnya, yaitu besar setiap sudut alasnya?

1. Segitiga sama kaki punya dua sudut alas yang sama besar; misalkan masing-masing x.
2. $x + x + 120^\circ = 180^\circ$, jadi $2x = 60^\circ$.
3. $x = 30^\circ$.

Setiap sudut alas 30°: atapnya cukup landai. Atap yang lebih curam (sudut alas lebih besar) membuat sudut puncaknya lebih kecil.

COBA SENDIRI **Mata panah di antara rel sejajar**

Pada gambar, $AB \parallel CD$, $\angle BAE = 35^\circ$, dan $\angle DCE = 50^\circ$. Tentukan $\angle AEC$.



1. Kuncinya: tarik garis bantu melalui E yang sejajar AB (dan juga sejajar CD).
2. Garis bantu itu membagi $\angle AEC$ menjadi dua bagian. Bagian atas sama dengan $\angle BAE = 35^\circ$ (dalam berseberangan, huruf Z).
3. Bagian bawah sama dengan $\angle DCE = 50^\circ$ (huruf Z juga).
4. $\angle AEC = 35^\circ + 50^\circ$.

$\angle AEC = 85^\circ$. **Strategi "tarik garis sejajar lewat titik tengah" adalah jurus andalan dalam soal kejar-sudut.**

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 300 SM, Euclid dari Aleksandria menulis *Elemen*, buku pelajaran geometri yang dipakai lebih dari dua ribu tahun. Pada Buku I, Proposisi 32, ia membuktikan bahwa sudut luar segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam di seberangnya, dan bahwa ketiga sudut segitiga berjumlah "dua sudut siku-siku". Buktinya memakai garis sejajar, persis seperti bukti di atas.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

SEGITIGA DI PERMUKAAN BOLA: 270°!

Teorema 180° berlaku di bidang **datar**. Di permukaan bola, ceritanya lain. Mulailah di Kutub Utara, berjalan lurus ke selatan sampai khatulistiwa, belok kiri 90°, berjalan sepanjang khatulistiwa seperempat keliling Bumi, belok kiri 90° lagi, lalu berjalan lurus kembali ke Kutub Utara. Lintasanmu membentuk "segitiga" dengan **tiga sudut siku-siku**: jumlahnya 270°! Perbedaan ini berasal dari *postulat kesejajaran* Euclid. Di bidang datar, melalui satu titik di luar sebuah garis hanya ada tepat satu garis sejajar; di permukaan bola, tidak ada garis sejajar sama sekali. Matematikawan abad ke-19 seperti Gauss, Bolyai, Lobachevsky, dan Riemann mengembangkan **geometri non-Euclides**, yang kelak dipakai dalam teori relativitas Einstein.

17.5 Jenis segitiga dan ketaksamaan segitiga

Segitiga dapat dikelompokkan menurut **panjang sisinya**: **segitiga sama sisi** (ketiga sisinya sama, setiap sudutnya 60°), **segitiga sama kaki** (dua sisinya sama, dan dua sudut alasnya juga sama), serta **segitiga sembarang** (semua sisinya berbeda). Menurut **sudut terbesarnya**, segitiga bisa lancip, siku-siku, atau tumpul. Kedua cara ini bisa digabung. Tetapi apakah semua gabungan mungkin?

	Sama sisi	Sama kaki	Sembarang
Lancip	✅ 60°, 60°, 60°	✅ 70°, 70°, 40°	✅ 50°, 60°, 70°
Siku-siku	❌ mustahil: semua sudutnya 60°	✅ 45°, 45°, 90°	✅ 30°, 60°, 90°
Tumpul	❌ mustahil	✅ 30°, 30°, 120°	✅ 20°, 40°, 120°

SISI DAN SUDUT SALING "BERHADAPAN"

Pada setiap segitiga, **sisi terpanjang berhadapan dengan sudut terbesar**, dan sisi terpendek berhadapan dengan sudut terkecil. Akibatnya, segitiga paling banyak punya satu sudut siku-siku atau satu sudut tumpul. Sudut-sudut yang sama besar berhadapan dengan sisi-sisi yang sama panjang.

Tebak Dulu!

Dimas punya tiga lidi: 4 cm, 5 cm, dan 10 cm. Bisakah ia merangkainya menjadi segitiga (ujung bertemu ujung)?

Bisa, tiga lidi apa pun pasti bisa menjadi segitiga.

Bisa, asalkan lidi 10 cm dipakai sebagai alas.

Tidak bisa, karena 4 + 5 kurang dari 10.

Tidak bisa, karena panjang ketiganya berbeda.

Jawabannya: tidak bisa. Dua lidi pendek yang direntangkan lurus pun hanya mencapai $4 + 5 = 9$ cm, masih kurang 1 cm dari lidi 10 cm. Ujung-ujungnya tidak akan pernah bertemu. Coba sendiri di Lab Mini di bawah!

KETAKSAMAAN SEGITIGA

Tiga bilangan positif a, b, c bisa menjadi panjang sisi sebuah segitiga jika dan hanya jika jumlah dua sisi mana pun **lebih besar** daripada sisi ketiga:

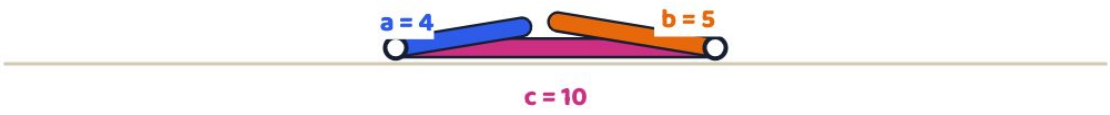
$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad a + c > b$$

Cara cepatnya: cukup cek apakah **dua sisi terpendek** berjumlah lebih dari **sisi terpanjang**.

LAB MINI

Tiga lidi: jadi segitiga atau tidak?

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17



Jumlah dua lidi terpendek	Lidi terpanjang	Hasil	Jenis
9 cm	10 cm	menutup…	–

Atur panjang tiga lidi. Lidi biru dan oranye berengsel di ujung alas dan berayun saling mendekat. Kapan ujungnya bertemu? Coba buat kasus "pas-pasan" ketika dua lidi pendek tepat sama dengan lidi terpanjang (tombol 😮 **3–4–7**).

MENGAPA HARUS "LEBIH BESAR", BUKAN "SAMA DENGAN"?

Jika $a + b = c$, kedua lidi pendek rebah tepat di atas lidi panjang. Ujungnya memang bertemu, tetapi segitiganya **gepeng**: tidak ada ruang di dalamnya dan luasnya nol. Itu bukan segitiga sungguhan. Ketaksamaan segitiga juga menjelaskan mengapa **jalan pintas** lurus selalu lebih pendek daripada jalan berbelok: sisi c selalu lebih pendek daripada $a + b$.

MATEMATIKA NUSANTARA

Para tukang kayu di Indonesia menyebut rangka segitiga penopang atap **kuda-kuda**. Mengapa segitiga, bukan segi empat? Begitu panjang ketiga sisinya dikunci, bentuk segitiga tidak bisa berubah lagi; sudut-sudutnya ikut terkunci. Segi empat dari empat batang kayu masih bisa "miring" menjadi jajargenjang jika didorong. Itulah sebabnya kuda-kuda, rangka menara, dan jembatan rangka baja yang melintasi banyak sungai di Indonesia tersusun dari deretan segitiga.

MITOS

"Sudut makin besar kalau kaki sudutnya diperpanjang."

FAKTA

Besar sudut adalah besar **putaran** di antara kedua kaki, bukan panjang kakinya. Memperpanjang kaki sudut tidak mengubah bukaannya sedikit pun.

MITOS

"Segitiga yang besar punya jumlah sudut yang lebih besar."

FAKTA

Di bidang datar, jumlahnya selalu 180°, baik segitiga di kuku maupun segitiga selebar lapangan bola. Ukuran sisi tidak berpengaruh.

MITOS

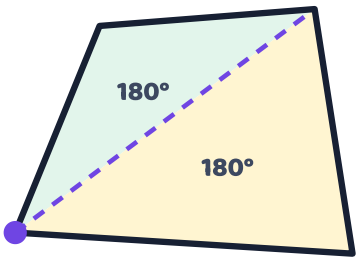
"Tiga lidi berapa pun panjangnya pasti bisa dirangkai menjadi segitiga."

FAKTA

Dua lidi terpendek harus berjumlah **lebih dari** lidi terpanjang. Lidi 3 cm, 4 cm, dan 8 cm tidak akan pernah bisa bertemu ujungnya.

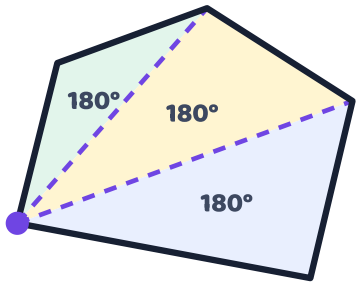
17.6 Sudut-sudut poligon

Poligon (segi banyak) adalah bangun datar tertutup yang dibatasi ruas-ruas garis. Segi-n punya n sisi dan n titik sudut. Berapa jumlah sudut dalamnya? Gunakan kembali trik andalan: **potong menjadi segitiga**! Dari satu titik sudut, tarik semua diagonal yang mungkin.



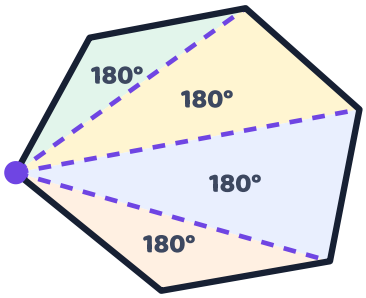
segi empat: 2 segitiga

2 × 180° = 360°



segi lima: 3 segitiga

3 × 180° = 540°



segi enam: 4 segitiga

4 × 180° = 720°

Dari satu titik sudut (ungu), segi-n selalu terpotong menjadi $n - 2$ segitiga. Setiap segitiga menyumbang 180°.

JUMLAH SUDUT DALAM POLIGON

Jumlah sudut dalam segi-n adalah

$$S = (n-2) \times 180^\circ$$

Pada **segi-n beraturan** (semua sisi dan semua sudutnya sama), setiap sudut dalamnya $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$.

RUMUS HIDUP

Jumlah sudut dalam segi-n

$$S = (n-2) \times 180^\circ$$

Potong segi-n menjadi segitiga dari satu titik sudut: hasilnya selalu n − 2 segitiga, dan setiap segitiga menyumbang 180°.

n Banyak sisi `sisi`

S Jumlah sudut dalam °

JUMLAH SUDUT DALAM

540

°

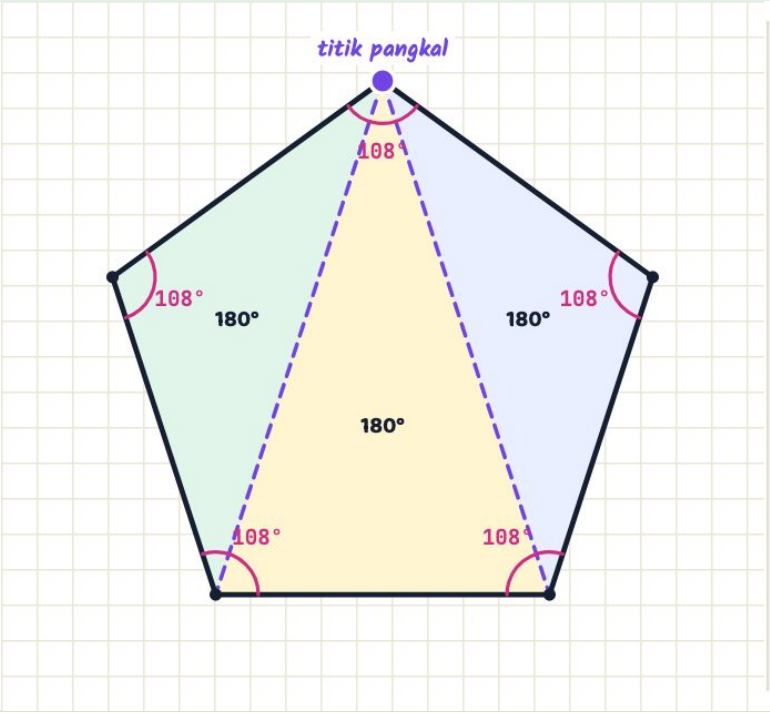
Segi-**5** dipotong dari satu titik sudut menjadi **3** segitiga, jadi jumlah sudut dalamnya **3** × 180° = **540°**. Kalau segi-**5** itu beraturan, setiap sudut dalamnya **540°** : **5** = **108°**.

Cek satuan: hasilnya dalam derajat (°); n adalah bilangan asli 3 atau lebih.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-SUDUT-POLIGON

LAB MINI **Segi-n: potong jadi segitiga, lalu kelilingi**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17



Segi-5

3 dari 3 segitiga

$3 \times 180° = 540°$

jumlah sudut terukur:

540°

Rumus: $(n - 2) \times 180°$

Dari titik pangkal ditarik
$n - 3 = 2$ diagonal.

▶ = *potong satu per satu*

Banyak segitiga	Jumlah sudut dalam	Total belokan Ancil
3	540 °	0 °

Pilih banyak sisi n, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk memotongnya menjadi segitiga satu per satu. Lalu pilih kegiatan **Ancil keliling**: Ancil berjalan menyusuri tepi dan berbelok di setiap pojok. Berapa total belokannya? Coba juga **Bentuk tak beraturan**.

Saat Ancil berjalan menyusuri tepi poligon, di setiap pojok ia berbelok. Besar belokan itu adalah **sudut luar** poligon: sudut antara perpanjangan satu sisi dan sisi berikutnya. Sudut dalam dan sudut luar di satu pojok selalu berpelurus.

Tebak Dulu!

Ancil berjalan mengelilingi sawah berbentuk segi lima tak beraturan, berbelok di setiap pojok, sampai kembali ke titik awal dan menghadap arah semula. Berapa jumlah semua belokannya?

540°, sama dengan jumlah sudut dalam segi lima.

360°, tepat satu putaran penuh.

180°, sama seperti segitiga.

Tidak bisa ditentukan karena bentuknya tak beraturan.

Jawabannya: 360°. Ancil mulai menghadap ke satu arah dan berakhir menghadap ke arah yang sama, setelah berputar tepat satu kali. Jadi jumlah semua belokan, yaitu jumlah sudut luar, selalu 360°, apa pun bentuk poligon cembungnya dan berapa pun banyak sisinya.

JUMLAH SUDUT LUAR POLIGON

Jumlah sudut luar setiap poligon cembung adalah 360°. Pada segi-n beraturan, setiap sudut luarnya $\dfrac{360^\circ}{n}$, sehingga setiap sudut dalamnya $180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$.

Bukti aljabar: sudut luar berjumlah 360°

Di setiap pojok, sudut dalam + sudut luar $= 180^\circ$. Ada n pojok, jadi jumlah semuanya $n \times 180^\circ$. Dikurangi jumlah sudut dalam:

$$\text{jumlah sudut luar} = 180^\circ n - (n-2) \times 180^\circ = 360^\circ.$$

RUMUS HIDUP

Sudut dalam segi-n beraturan

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Sudut luar segi-n beraturan adalah 360° dibagi n. Sudut dalamnya adalah pelurusnya: 180° dikurangi sudut luar.

n Banyak sisi sisi

α Sudut dalam °

SUDUT DALAM

120

°

ubin jenis ini bisa menutup lantai tanpa celah

Sudut luar = 360° : **6** = **60**°. Sudut dalam = 180° − **60**° = **120**°. Cek dengan rumus jumlah: (**6** − 2) × 180° : **6** = **120**°. Sama!

Cek satuan: sudut luar dan sudut dalam sama-sama dalam derajat; jumlah keduanya 180°.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-POLIGON-BERATURAN

n	Nama	Jumlah sudut dalam	Tiap sudut dalam (beraturan)	Tiap sudut luar (beraturan)
3	segitiga	180°	60°	120°
4	segi empat	360°	90°	90°
5	segi lima	540°	108°	72°
6	segi enam	720°	120°	60°
8	segi delapan	1.080°	135°	45°
10	segi sepuluh	1.440°	144°	36°

12	segi dua belas	1.800°	150°	30°

ADU CEPAT **Sudut dalam poligon beraturan**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Hitung dulu sudut luarnya (360 : n), lalu kurangkan dari 180. Contoh segi-10: 360 : 10 = 36, jadi 180 − 36 = 144.

COBA SENDIRI **Menebak banyak sisi dari satu sudut**

Setiap sudut dalam sebuah poligon beraturan besarnya 156°. Berapa banyak sisinya, dan berapa jumlah semua sudut dalamnya?

1. Mulai dari sudut luar (lebih mudah): $180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$.
2. Semua sudut luar berjumlah 360°, jadi $n = 360^\circ : 24^\circ = 15$.
3. Jumlah sudut dalam $= (15 - 2) \times 180^\circ = 2.340^\circ$.
4. Cek: $15 \times 156^\circ = 2.340^\circ$. Cocok!

Poligon itu segi-15 beraturan, dan jumlah sudut dalamnya 2.340°.

MATEMATIKA NUSANTARA

Banyak masjid di Indonesia menghias lantai, jendela, atau dindingnya dengan motif geometris: bintang bersudut delapan, segi delapan, dan persegi yang saling mengunci. Motif itu bisa menutup bidang tanpa celah karena di setiap titik pertemuan jumlah sudutnya tepat 360°. Contohnya, dua segi delapan beraturan dan satu persegi: $135^\circ + 135^\circ + 90^\circ = 360^\circ$. Lebah pun "tahu" aturan ini: tiga sel segi enam bertemu di satu titik karena $3 \times 120^\circ = 360^\circ$.

MITOS

"Makin banyak sisi poligon, makin besar jumlah sudut luarnya."

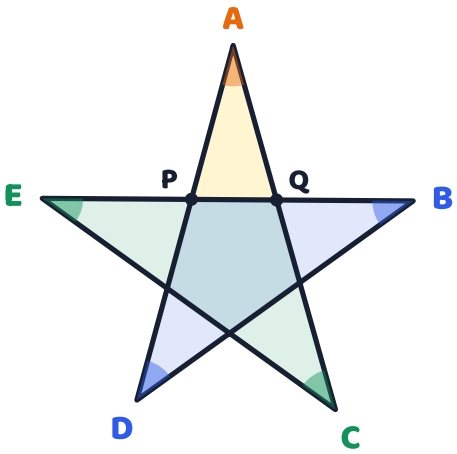
FAKTA

Jumlah sudut luar poligon cembung selalu 360°, satu putaran penuh. Yang bertambah adalah jumlah sudut **dalam**: 180° untuk setiap sisi tambahan.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

KEJAR-SUDUT: RAHASIA BINTANG LIMA

Gambarlah bintang lima sembarang (tidak harus beraturan) dengan ujung A, B, C, D, E. Berapa jumlah kelima sudut ujungnya? Jurus olimpiade bernama **kejar-sudut** (*angle chasing*) menjawabnya tanpa mengukur.



∠APQ = ∠B + ∠D

∠AQP = ∠C + ∠E

∠A + ∠APQ + ∠AQP = 180°

jadi jumlah 5 ujung = 180°

Garis BE memotong AD di P dan AC di Q. Pada segitiga BDP, $\angle APQ$ adalah sudut luar, jadi $\angle APQ = \angle B + \angle D$. Dengan cara yang sama pada segitiga CEQ, $\angle AQP = \angle C + \angle E$. Pada segitiga APQ, $\angle A + \angle APQ + \angle AQP = 180^\circ$. Jadi $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$, untuk *setiap* bintang lima! Tantangan: berapa jumlah ujung bintang tujuh yang dibuat dengan memperpanjang sisi-sisi segi tujuh? (Ada di bank soal Lv 6.)

Kuda-kuda atap

Kemiringan atap ditentukan oleh sudut alas segitiga kuda-kuda. Atap curam membuat air hujan cepat mengalir.

Jembatan rangka baja

Deretan segitiga membuat jembatan kaku dan kuat, karena segitiga tidak bisa berubah bentuk tanpa mengubah panjang sisinya.

Rel kereta & zebra cross

Rel dan garis zebra cross adalah garis sejajar. Jalan yang melintasinya membentuk sudut sehadap yang sama besar.

Ubin & motif masjid

Ubin bisa menutup lantai tanpa celah jika sudut-sudut di setiap titik pertemuan berjumlah $360°$.

Rangka layangan

Dua bambu yang bersilang membentuk sudut bertolak belakang yang sama besar, sehingga layangan seimbang kiri dan kanan.

Pantulan bola biliar

Bola memantul dari dinding meja dengan sudut datang sama dengan sudut pantul; pemain menghitungnya untuk membidik.

Cek Cepat

Dua garis berpotongan. Sudut yang bertolak belakang dengan sudut $70°$ besarnya...

- $110°$
- $20°$
- $70°$
- $290°$

Jumlah semua sudut dalam segi enam adalah...

- $360°$
- $540°$
- $1.080°$
- $720°$

Manakah yang dapat menjadi panjang sisi-sisi sebuah segitiga?

- 5, 7, 11
- 3, 3, 6
- 2, 4, 7
- 1, 10, 12

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: robek, susun, buktikan!

Bahan: kertas bekas, gunting, spidol atau krayon tiga warna, busur derajat (jika ada), lem atau selotip, buku tulis.

1. Gambar dan gunting tiga segitiga yang bentuknya berbeda: satu lancip, satu siku-siku, dan satu tumpul.
2. Jika punya busur, ukur ketiga sudut setiap segitiga lalu jumlahkan. Catat hasilnya.
3. Warnai ketiga pojok setiap segitiga dengan warna berbeda, lalu robek pojok-pojoknya dengan tangan.
4. Gambar sebuah garis lurus di buku. Tempelkan ketiga sobekan sehingga ujung runcingnya bertemu di satu titik pada garis itu.
5. Bonus: lakukan hal yang sama pada sebuah segi empat. Robek keempat pojoknya dan susun ujungnya di satu titik.

Pertanyaan: Apakah ketiga sobekan selalu membentuk garis lurus? Jika jumlah hasil ukur busurmu bukan tepat 180°, dari mana selisihnya? Pada segi empat, bangun apa yang terbentuk oleh keempat sobekan, dan mengapa jumlahnya 360°?

RINGKASAN KILAT

Bab 17 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- membedakan **titik, garis, sinar, dan ruas garis**, serta mengukur dan menggolongkan sudut dengan **busur derajat**
- memakai sifat sudut **berpelurus, berpenyiku, dan bertolak belakang**
- menemukan sudut-sudut pada **dua garis sejajar** yang dipotong garis lain (sehadap, berseberangan, sepihak)
- membuktikan bahwa **jumlah sudut segitiga 180°** dan memakai sifat **sudut luar** segitiga

- memakai **ketaksamaan segitiga** dan menghitung jumlah **sudut dalam dan sudut luar poligon**

🔑 Istilah kunci

titik · Garis · Sinar garis · Ruas garis · sudut · busur derajat · berpelurus · berpenyiku · sudut bertolak belakang · garis sejajar · garis transversal · sudut luar · segitiga sama sisi · segitiga sama kaki · Poligon

🧮 Rumus penting

$$\theta = |30\,j - 5{,}5\,m|$$

Sudut jarum jam. Jarum jam berada di 30j + 0,5m derajat, jarum menit di 6m derajat (diukur dari angka 12). Selisihnya adalah sudutnya; kalau lebih dari 180°, ambil 360° dikurangi selisih itu.

$$S = (n-2) \times 180^\circ$$

Jumlah sudut dalam segi-n. Potong segi-n menjadi segitiga dari satu titik sudut: hasilnya selalu n – 2 segitiga, dan setiap segitiga menyumbang 180°.

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Sudut dalam segi-n beraturan. Sudut luar segi-n beraturan adalah 360° dibagi n. Sudut dalamnya adalah pelurusnya: 180° dikurangi sudut luar.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Busur derajat punya dua deret angka: satu berjalan dari 0° ke 180° searah jarum jam, satu lagi berlawanan arah.
- Sifat sehadap, berseberangan, dan sepihak hanya berlaku jika kedua garis sejajar.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=17

🧩 Teka-teki untuk Bab 18

Pak Joko, seorang tukang bangunan, harus membuat pojok fondasi rumah yang tepat siku-siku. Busurnya tertinggal, dan penggaris sikunya terlalu kecil untuk fondasi sepanjang 6 meter. Ia hanya punya seutas tali panjang yang diberi 12 simpul berjarak sama. Bagaimana caranya membuat sudut tepat 90° hanya dengan tali itu?

▼ **Intip petunjuk**

Rentangkan tali menjadi segitiga dengan sisi 3, 4, dan 5 ruas ($3 + 4 + 5 = 12$). Sudut di antara sisi 3 dan sisi 4 ternyata siku-siku! Mengapa bisa begitu? Perhatikan bahwa $3^2 + 4^2 = 5^2$. Bab 18 membuka rahasia tali berumur ribuan tahun ini: **Teorema Pythagoras**.

BAB 18 · GEOMETRI & PENGUKURAN

18 Teorema Pythagoras: Rahasia Tali 3–4–5

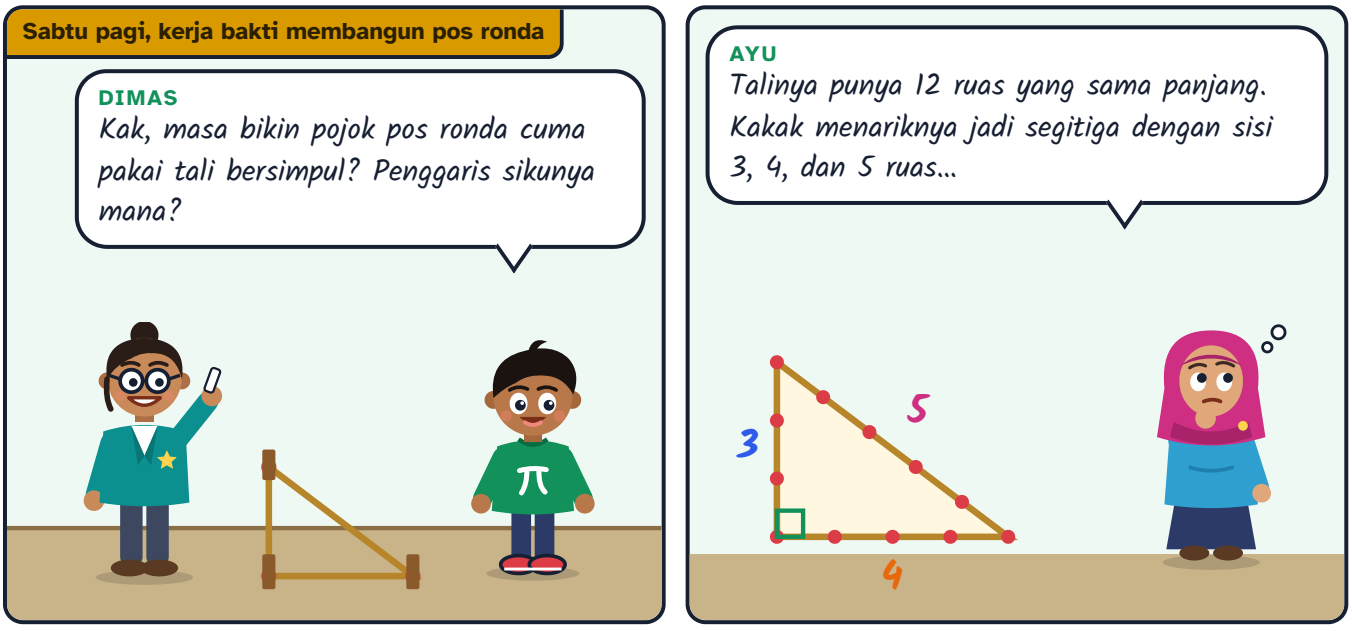
Bagaimana tukang bangunan membuat pojok yang siku-siku sempurna hanya dengan seutas tali? Mengapa layar "32 inci" diukur miring? Satu kalimat berumur ribuan tahun menjawab semuanya.

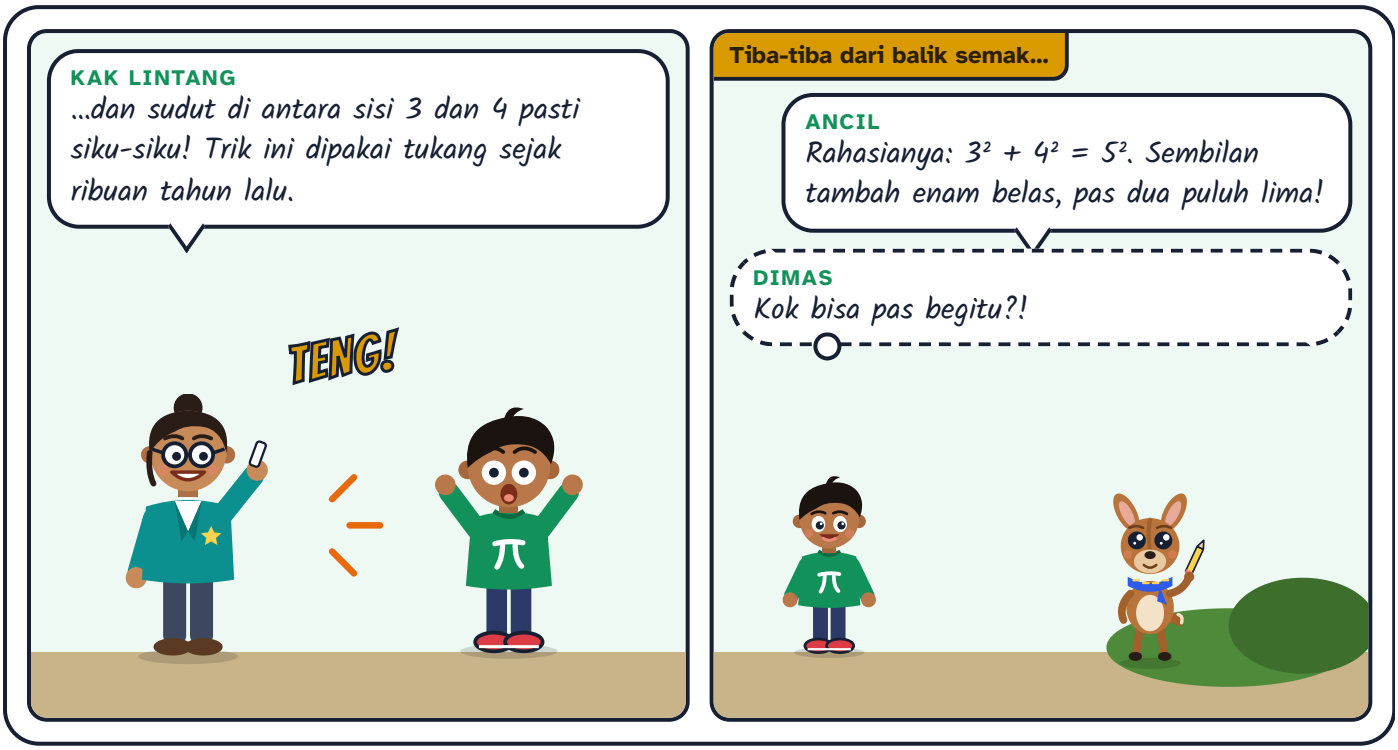
Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **hipotenusa** dan kaki-kaki segitiga siku-siku;
- menjelaskan **bukti visual** Teorema Pythagoras dan memakainya untuk menghitung sisi yang belum diketahui;
- mengenali dan membuat **tripel Pythagoras**;
- memakai **kebalikan teorema** untuk menentukan apakah segitiga lancip, siku-siku, atau tumpul;
- menghitung **jarak dua titik** di bidang koordinat dan **diagonal ruang** sebuah kotak.

TALI BERSIMPUL KAK LINTANG

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Toko elektronik menjual TV "32 inci". Angka 32 inci itu mengukur apa?

- Lebar layar dari kiri ke kanan.
- Tinggi layar dari atas ke bawah.
- Panjang diagonal layar, dari pojok ke pojok.
- Keliling bingkai layar.

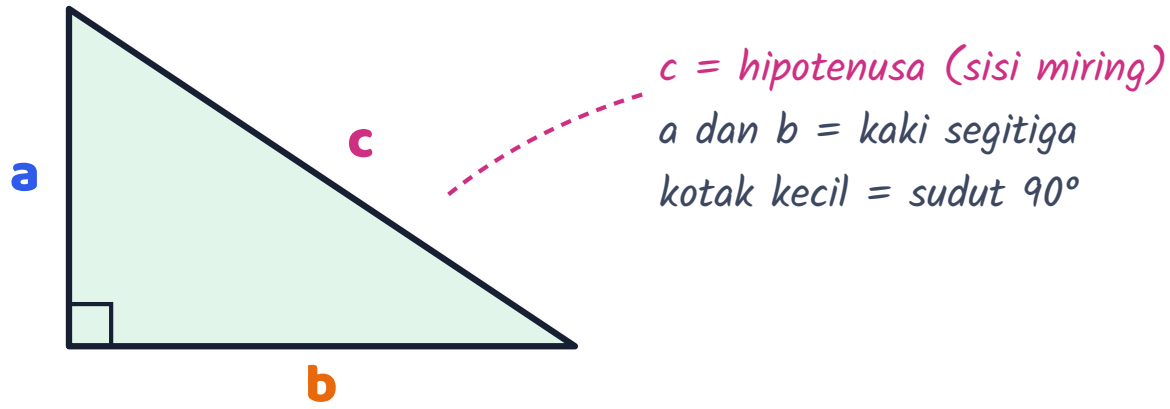
Jawabannya: diagonal layar. Layar TV berbentuk persegi panjang, dan ukurannya dinyatakan lewat garis miring dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas. Diagonal itu adalah sisi terpanjang sebuah segitiga siku-siku yang dibentuk lebar dan tinggi layar. Di akhir bab kamu akan bisa menghitung lebar layar 32 inci itu sendiri!

18.1 Segitiga siku-siku dan tiga sisinya

Pojok buku, pojok ubin, pertemuan dinding dan lantai: semuanya membentuk **sudut siku-siku** (90°). Segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku disebut **segitiga siku-siku**. Ketiga sisinya punya nama khusus.

DEFINISI

Pada segitiga siku-siku, sisi di depan sudut siku-siku disebut **hipotenusa** (sisi miring). Hipotenusa selalu menjadi sisi **terpanjang**. Dua sisi lain yang mengapit sudut siku-siku disebut **kaki** segitiga (sisi tegak dan sisi alas).



Hipotenusa c selalu berada di seberang kotak kecil penanda sudut siku-siku.

Bahasa sederhana · Gampangnya: cari dulu **pojok yang siku** (ditandai kotak kecil). Sisi yang **tidak menyentuh** pojok itu adalah sisi miring, dan dialah sisi paling panjang.

AWAS JEBAKAN

Hipotenusa tidak selalu digambar miring atau di sebelah kanan. Kalau segitiganya diputar, cari sisi yang berhadapan dengan sudut 90°. Jangan menebak dari posisi gambar!

18.2 Teorema Pythagoras dan bukti tanpa kata

Gambarlah persegi pada setiap sisi segitiga siku-siku. Ada sesuatu yang ajaib: **luas dua persegi kecil, jika dijumlahkan, selalu tepat sama dengan luas persegi besar**.

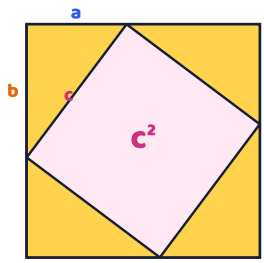
TEOREMA PYTHAGORAS

Pada segitiga siku-siku dengan kaki a dan b serta hipotenusa c, berlaku

$$a^2 + b^2 = c^2$$

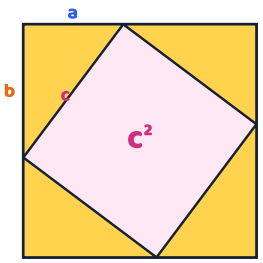
Dalam kata-kata: *luas persegi pada sisi miring sama dengan jumlah luas persegi pada kedua kaki.*

Mengapa begitu? Lihat bukti di bawah. Tidak perlu hafalan: cukup **menggeser empat segitiga**.



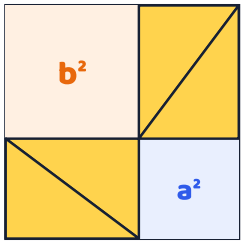
Persegi besar bersisi a + b.
Di dalamnya ada 4 segitiga siku-siku yang sama persis (kuning).

Langkah 1. Buat persegi bersisi $a + b$. Letakkan empat segitiga siku-siku yang identik (kaki a dan b, hipotenusa c) di keempat pojoknya.



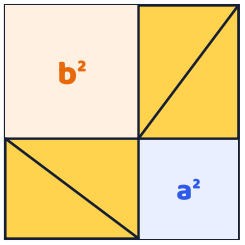
Bagian yang tidak tertutup segiti
persegi miring bersisi c.
Luas kosong = c²

Langkah 2. Bagian tengah yang tidak tertutup adalah persegi miring bersisi c. Luas bagian kosong $= c^2$.



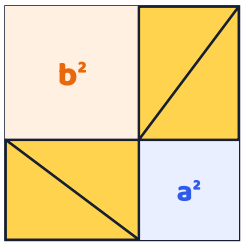
Geser segitiganya, jangan diputar
Tiga segitiga pindah tempat,
satu tetap di pojok kiri bawah.

Langkah 3. Sekarang geser tiga segitiga ke posisi baru. Hanya digeser, tidak diputar, jadi luasnya tidak berubah.



Sekarang bagian kosongnya
berupa dua persegi:
b² dan a²

Langkah 4. Bagian yang kosong sekarang berupa dua persegi: satu bersisi b (luas b^2) dan satu bersisi a (luas a^2).



persegi besar sama, 4 segitiga sama
⇒ luas sisanya juga sama:
a² + b² = c²

Langkah 5. Persegi besarnya sama, empat segitiganya sama, jadi luas bagian kosong pun harus sama: $a^2 + b^2 = c^2$. Terbukti, tanpa satu pun rumus rumit!

Bukti dengan aljabar (untuk yang suka hitungan)

Luas persegi besar dapat dihitung dengan dua cara. Pertama, sisinya $a + b$, jadi luasnya $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Kedua, persegi itu terdiri atas persegi miring c^2 dan empat segitiga yang masing-masing luasnya $\frac{1}{2}ab$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}ab \quad \Longrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad \Longrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

RUMUS HIDUP

Teorema Pythagoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Kuadratkan kedua kaki, jumlahkan, lalu tarik akarnya. Itulah panjang sisi miring.

a Kaki a satuan

b Kaki b satuan

c Hipotenusa satuan

HIPOTENUSA

5

satuan

✨ **semua sisi bulat: tripel Pythagoras!**

Kaki **3** dan **4**: kuadratnya **9** dan **16**, jumlahnya **25**. Akar dari **25** adalah **5**. Perhatikan: hipotenusa selalu lebih panjang daripada kaki mana pun, tetapi lebih pendek daripada a + b = **7**.

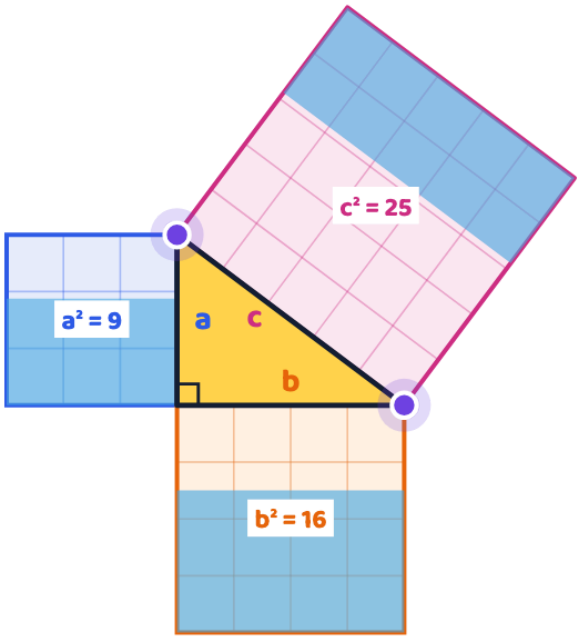
Cek satuan: Satuan sisi miring sama dengan satuan kaki-kakinya (cm tetap cm, m tetap m).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PYTHAGORAS

LAB MINI

Persegi di tiap sisi: tuang airnya!

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18



$a^2 + b^2 = c^2$

$9 + 16 = 25$

$c = \sqrt{25}$

≈ 5

✨ tripel Pythagoras!

✋ *seret titik ungu*

a^2	b^2	$a^2 + b^2$	sisi miring c	Air
9	16	25	5	menuang… 37%

Seret titik ungu untuk mengubah kaki a dan b. Lalu tekan ▶ **Jalankan**: air dari dua persegi kecil dituang ke persegi besar. Apakah selalu pas, tidak tumpah dan tidak kurang?

CONTOH

Tangga bersandar di tembok

Kaki tangga diletakkan 3 m dari tembok. Ujung atasnya menyentuh tembok setinggi 4 m. Berapa panjang tangga itu?

1. Tembok, lantai, dan tangga membentuk segitiga siku-siku. Tangga adalah hipotenusanya, karena berhadapan dengan sudut siku-siku di kaki tembok.
2. $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$
3. $c = \sqrt{25} = 5.$

Panjang tangga 5 m. Inilah tali 3–4–5 Kak Lintang dalam ukuran meter!

KERJAKAN BERSAMA **Mencari kaki, bukan hipotenusa**

Tali layangan sepanjang 50 m terentang lurus. Layangan berada tepat di atas titik yang berjarak 30 m dari Dimas. Berapa tinggi layangan dari tangan Dimas?

1. Tali adalah hipotenusa ($c = 50$), jarak mendatar adalah satu kaki ($b = 30$), tinggi adalah kaki lainnya (a).
2. Susun ulang teorema: $a^2 = c^2 - b^2 = 2500 - 900 = 1600$.
3. $a = \sqrt{1600} = 40$.

Tinggi layangan 40 m di atas tangan Dimas. Saat mencari kaki, kurangkan; saat mencari hipotenusa, jumlahkan.



TAMU DARI MASA LALU

Teorema ini memakai nama Pythagoras dari Samos (±570–495 SM), tetapi hubungannya sudah dikenal jauh lebih awal. Lempeng tanah liat Babilonia bernama *Plimpton 322* (±1800 SM) memuat daftar bilangan yang berkaitan dengan tripel Pythagoras. Kitab *Sulba Sutra* dari India dan kitab *Zhoubi Suanjing* dari Tiongkok (yang menyebutnya teorema *gougu*) juga membahasnya. Yang istimewa dari tradisi Yunani adalah upaya **membuktikan** bahwa teorema ini selalu benar, bukan hanya mencobanya pada beberapa contoh.

18.3 Tripel Pythagoras: angka-angka yang "pas"

Tiga bilangan asli a, b, c yang memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$ disebut **tripel Pythagoras**. Tripel ini sangat disukai pembuat soal karena hasil akarnya bulat. Hafalkan beberapa yang paling sering muncul, dan kamu akan menghemat banyak waktu.

Tripel dasar	Cek	Kelipatannya juga tripel
3, 4, 5	9 + 16 = 25	6, 8, 10 · 9, 12, 15 · 30, 40, 50
5, 12, 13	25 + 144 = 169	10, 24, 26 · 15, 36, 39
8, 15, 17	64 + 225 = 289	16, 30, 34
7, 24, 25	49 + 576 = 625	14, 48, 50
20, 21, 29	400 + 441 = 841	40, 42, 58

TRIK KAK LINTANG

Kalau tiga sisi punya faktor persekutuan, bagi dulu! Segitiga 15–20–25 itu sebenarnya 3–4–5 yang dikali 5. Jadi kalau kakinya 15 dan 20, sisi miringnya pasti 25, tanpa menghitung akar.

ADU CEPAT

Sisi miring kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kenali tripel dasarnya, lalu kalikan. Contoh: 9 dan 12 adalah 3 dan 4 yang dikali 3, jadi c = 15.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

PABRIK TRIPEL EUCLID

Untuk bilangan asli $m > n$, tiga bilangan berikut selalu membentuk tripel Pythagoras:

$$a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2.$$

Cek: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$. Jika $\gcd(m, n) = 1$ dan $m - n$ ganjil, tripelnya **primitif** (tidak punya faktor persekutuan). Karena ada tak hingga banyak pasangan seperti itu, tripel Pythagoras primitif juga ada tak hingga banyaknya. Hebatnya, *setiap* tripel primitif dapat dibuat dengan cara ini.

RUMUS HIDUP **Pabrik tripel Euclid**

$$c = m^2 + n^2$$

Pilih dua bilangan m dan n. Sisi miringnya m² + n², sedangkan kakinya m² − n² dan 2mn.

m Bilangan m n Bilangan n c Sisi miring

SISI MIRING
5

tripel primitif

Dengan m = **2** dan n = **1**: kaki a = **3**, kaki b = **4**, sisi miring c = **5**. Cek: a² + b² = **25** dan c² = **25**. Jika muncul '—', berarti m belum lebih besar daripada n.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRIPEL-EUCLID

18.4 Kebalikan teorema: lancip, siku-siku, atau tumpul?

Teorema Pythagoras juga bisa dibalik. Kalau tiga sisi memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$, segitiganya **pasti** siku-siku. Itulah sebabnya tali 3–4–5 Kak Lintang bekerja: $3^2 + 4^2 = 5^2$, jadi sudut di antara sisi 3 dan 4 pasti 90°.

KEBALIKAN TEOREMA PYTHAGORAS

Misalkan c adalah sisi **terpanjang** sebuah segitiga dengan sisi a, b, c.

- Jika $a^2 + b^2 = c^2$, segitiga itu **siku-siku**.
- Jika $a^2 + b^2 > c^2$, segitiga itu **lancip** (semua sudut kurang dari 90°).
- Jika $a^2 + b^2 < c^2$, segitiga itu **tumpul** (satu sudut lebih dari 90°).

Tebak Dulu!

Segitiga dengan sisi 5 cm, 6 cm, dan 8 cm termasuk segitiga apa?

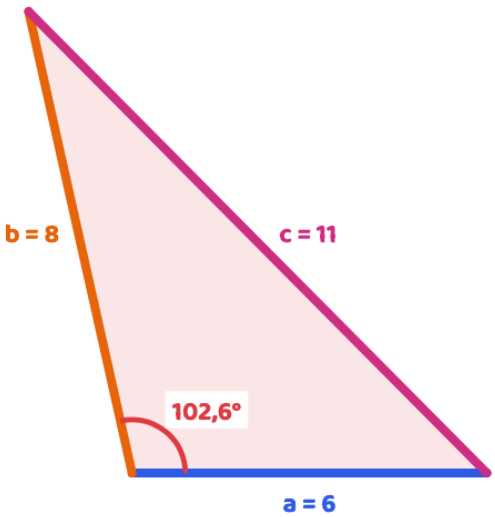
- Siku-siku, karena 5 + 6 > 8.
- Lancip, karena semua sisinya berbeda.
- Tumpul, karena 5^2 + 6^2 kurang dari 8^2.
- Bukan segitiga sama sekali.

Jawabannya: tumpul. Sisi terpanjang 8, jadi bandingkan $5^2 + 6^2 = 61$ dengan $8^2 = 64$. Karena $61 < 64$, sisi terpanjangnya "terlalu panjang" untuk siku-siku, sehingga sudut di depannya melebar menjadi tumpul. Syarat $5 + 6 > 8$ hanya memastikan ketiga sisi *bisa* membentuk segitiga.

LAB MINI Penguji sudut: tarik tali sesuka hatimu

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

sisi terpanjang: c = 11



$6^2 + 8^2 = 100$

<

$11^2 = 121$

TUMPUL

jumlah kuadrat 2 sisi pendek	kuadrat sisi terpanjang	sudut terbesar	Jenis
100	121	102,6 °	tumpul

Atur panjang tiga sisi. Lihat sudut terbesar berubah warna: **biru** = lancip, **hijau** = tepat 90°, **merah** = tumpul. Bisakah kamu menemukan tiga tripel Pythagoras yang berbeda?

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Saat menguji jenis segitiga, yang dikuadratkan dan dibandingkan harus **sisi terpanjang**. Untuk sisi 13, 5, 12, jangan menghitung $13^2 + 5^2$ lalu membandingkannya dengan 12^2. Urutkan dulu: $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$, jadi siku-siku.

MITOS

"Rumus $a^2 + b^2 = c^2$ berlaku untuk semua segitiga."

FAKTA

Hanya untuk segitiga **siku-siku**. Untuk segitiga lain hubungannya lancip ($a^2 + b^2 > c^2$) atau tumpul ($a^2 + b^2 < c^2$). Rumus umumnya adalah aturan kosinus yang akan kamu pelajari di Bab 25.

MITOS

"Kalau kakinya 3 dan 4, sisi miringnya 3 + 4 = 7."

FAKTA

Sisi miring selalu **lebih pendek** daripada jumlah dua kaki (jalan pintas selalu lebih pendek daripada jalan memutar). Hitung dengan kuadrat: $\sqrt{9 + 16} = 5$, bukan 7.

MITOS

"Pythagoras sendiri yang pertama kali menemukan rumus ini."

FAKTA

Bangsa Babilonia, India, dan Tiongkok sudah memakai hubungan ini berabad-abad sebelumnya. Pythagoras dan murid-muridnya terkenal karena dianggap ikut **membuktikannya** secara umum.

18.5 Pythagoras di bidang koordinat: jarak dan lingkaran

Di peta digital, posisi dinyatakan dengan koordinat. Untuk mengukur jarak lurus antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, gambarlah segitiga siku-siku dengan kaki mendatar $\Delta x = x_2 - x_1$ dan kaki tegak $\Delta y = y_2 - y_1$. Jaraknya adalah hipotenusa:

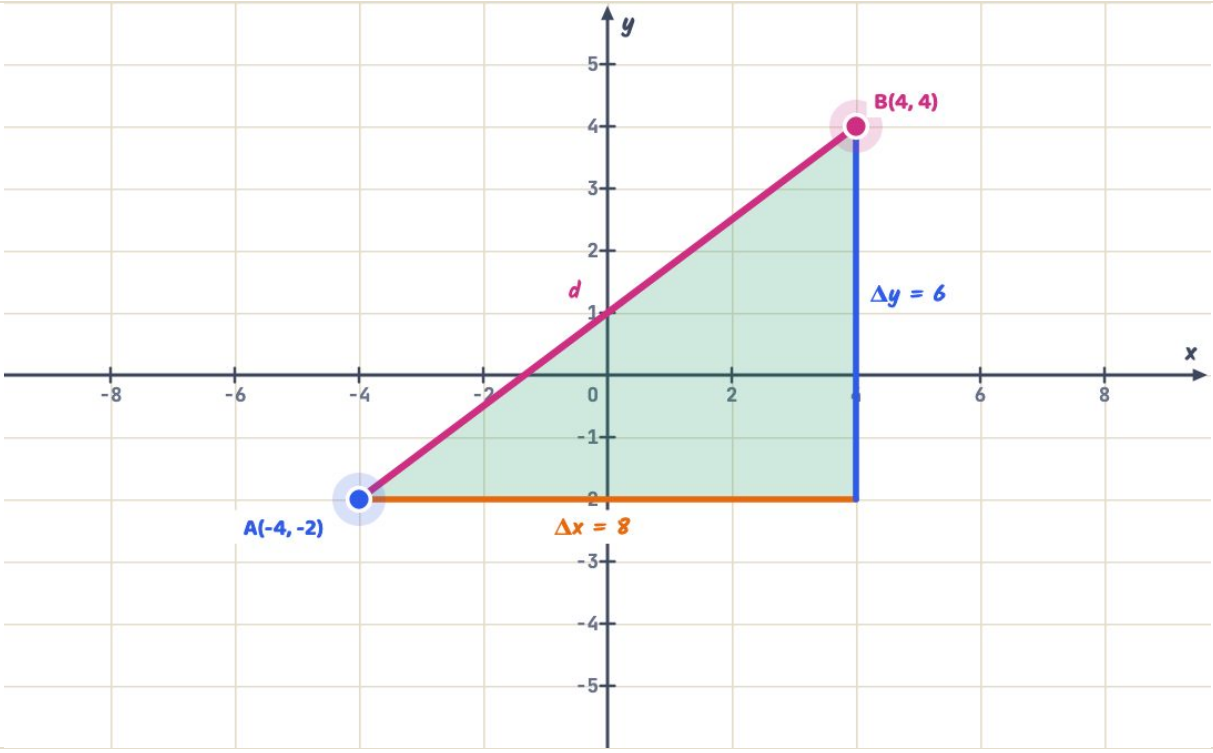
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

GRAFIK HIDUP **Jarak dua titik di peta kota**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} \approx 10$$



✨ **jaraknya bulat: ada tripel Pythagoras tersembunyi!**

Δx	Δy	Jarak d
8	6	10

Seret titik A dan B (atau geser slider). Kaki hijau selalu mendatar dan tegak, jadi selalu ada sudut siku-siku di pojoknya. Coba buat jarak tepat 10 tanpa menaruh titik di garis lurus yang sama!

Sekarang bayangkan semua titik $P(x, y)$ yang jaraknya **tepat** r dari pusat $O(0, 0)$. Menurut Pythagoras, $x^2 + y^2 = r^2$. Kumpulan semua titik itu membentuk **lingkaran**. Jadi persamaan lingkaran tidak lain adalah Teorema Pythagoras yang berputar!

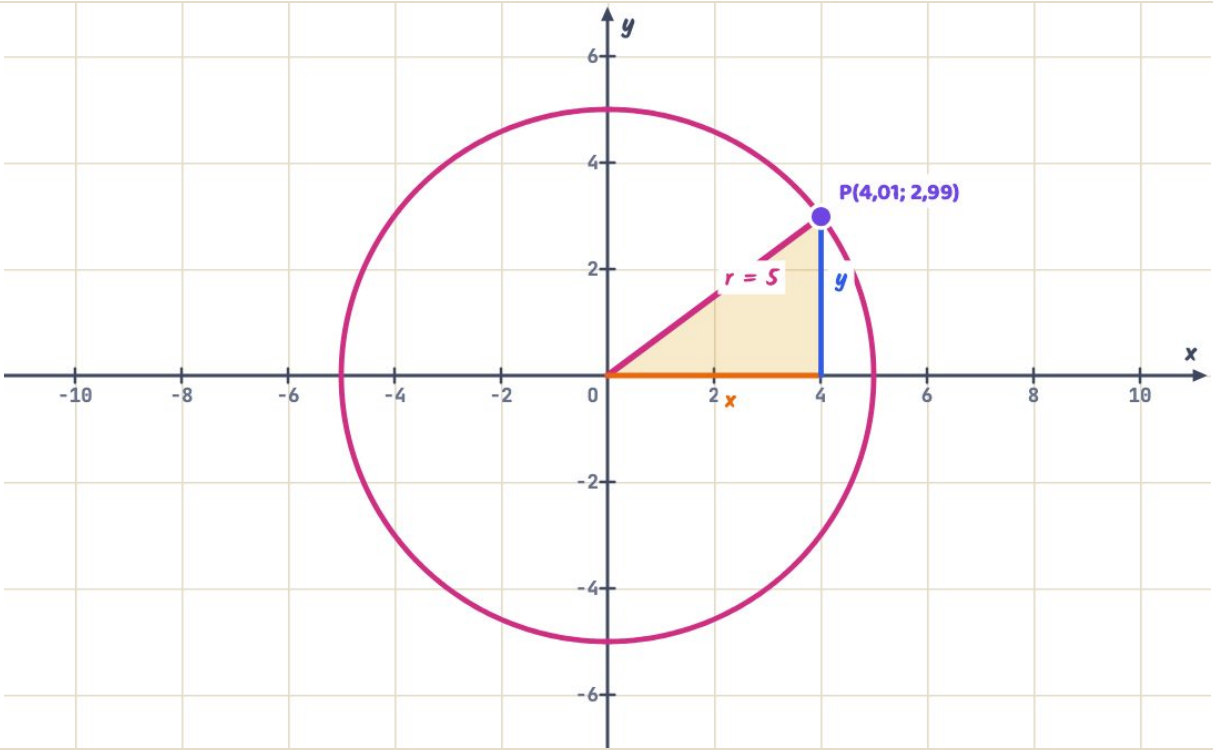
GRAFIK HIDUP

Lingkaran = Pythagoras yang berputar

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(4{,}01)^2 + (2{,}99)^2 = 25 = 5^2$$



x	y	$x^2 + y^2$
4,01	2,99	25

Tekan ▶ **Jalankan**: titik P berkeliling, tetapi $x^2 + y^2$ tidak pernah berubah. Ubah r dan perhatikan hasilnya selalu r^2.

KERJAKAN BERSAMA **Drone pengantar paket**

Di peta kota bergrid (satuan km), gudang berada di $A(-2, 1)$ dan rumah pelanggan di $B(4, 9)$. Ojek harus mengikuti jalan (mendatar lalu tegak), sedangkan drone terbang lurus. Berapa km drone lebih hemat?

1. Jarak lewat jalan: $|\Delta x| + |\Delta y| = |4 - (-2)| + |9 - 1| = 6 + 8 = 14$ km.
2. Jarak lurus: $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ km.
3. Selisih: $14 - 10 = 4$ km.

Drone menempuh 10 km, 4 km lebih pendek daripada rute jalan 14 km.

18.6 Pythagoras tiga dimensi dan di sekitarmu

Berapa panjang tongkat terpanjang yang muat di dalam kardus? Tongkat itu terbentang dari pojok bawah ke pojok atas yang berseberangan: **diagonal ruang**. Pakai Pythagoras **dua kali**: pertama untuk diagonal alas $\sqrt{p^2 + l^2}$, lalu sekali lagi bersama tinggi t:

$$d = \sqrt{\left(\sqrt{p^2 + l^2}\right)^2 + t^2} = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

RUMUS HIDUP

Diagonal ruang kotak

$$d = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Tongkat terpanjang yang muat di kotak = akar dari jumlah kuadrat panjang, lebar, dan tinggi.

p Panjang cm | l Lebar cm | t Tinggi cm | d Diagonal ruang cm

DIAGONAL RUANG

130

cm

Kardus **120** × **30** × **40** cm: diagonal alasnya **123,693** cm, dan diagonal ruangnya **130** cm. Payung lipat 125 cm **muat** di dalamnya.

Cek satuan: Semua rusuk memakai satuan yang sama (cm), jadi diagonalnya juga dalam cm.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DIAGONAL-RUANG

COBA SENDIRI

Lebar layar TV 32 inci

Layar TV 32 inci punya perbandingan lebar : tinggi = 16 : 9. Berapa lebar layarnya dalam cm? (1 inci = 2,54 cm)

1. Misalkan lebar $16k$ dan tinggi $9k$. Diagonalnya $\sqrt{(16k)^2 + (9k)^2} = k\sqrt{256 + 81} = k\sqrt{337}$.
2. Diagonal = 32 inci, jadi $k = \dfrac{32}{\sqrt{337}} \approx \dfrac{32}{18{,}36} \approx 1{,}743$.
3. Lebar $= 16k \approx 27{,}9$ inci $\approx 27{,}9 \times 2{,}54 \approx 70{,}8$ cm. Tinggi $= 9k \approx 15{,}7$ inci $\approx 39{,}8$ cm.

Lebar layar ±70,8 cm dan tingginya ±39,8 cm. Sekarang kamu tahu mengapa TV "32 inci" tidak selebar 32 inci!

MATEMATIKA NUSANTARA

Tukang bangunan di banyak daerah di Indonesia memeriksa pojok fondasi dengan cara **60–80–100**: ukur 60 cm di satu sisi dan 80 cm di sisi lain, lalu pastikan jarak kedua ujungnya tepat 100 cm. Itu tripel 3–4–5 yang dikalikan 20! Para petani juga memakai patok dan tali dengan cara serupa saat membagi petak sawah agar berbentuk persegi panjang.



Tangga mobil pemadam

Petugas menghitung panjang tangga yang perlu dijulurkan dari jarak truk ke gedung dan tinggi jendela yang dituju.



Ukuran layar

TV, laptop, dan ponsel dijual berdasarkan diagonal layar, yaitu hipotenusa dari lebar dan tingginya.



GPS & peta digital

Aplikasi peta menghitung jarak lurus antarlokasi dengan rumus jarak, versi koordinat dari Pythagoras.



Tenda pramuka

Panjang tali pancang dihitung dari tinggi tiang dan jarak patok ke kaki tiang.



Rangka atap rumah

Panjang kaso miring ditentukan dari setengah lebar rumah dan tinggi bubungan atap.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

SEMUT DI DALAM KARDUS

Seekor semut di pojok lantai kardus $8 \times 6 \times 3$ ingin ke pojok langit-langit yang berseberangan, tetapi harus berjalan di permukaan. Rahasianya: **buka kardus menjadi jaring-jaring**, lalu tarik garis lurus. Ada tiga cara membuka yang berbeda, menghasilkan $\sqrt{(8+6)^2+3^2} = \sqrt{205}$, $\sqrt{(8+3)^2+6^2} = \sqrt{157}$, dan $\sqrt{(6+3)^2+8^2} = \sqrt{145}$. Yang terpendek $\sqrt{145} \approx 12{,}04$, lebih panjang daripada diagonal ruang $\sqrt{109} \approx 10{,}44$ yang hanya bisa ditempuh nyamuk yang terbang. Trik "buka jaring-jaring" ini sering muncul di soal olimpiade.

Cek Cepat

Pada segitiga siku-siku dengan kaki 9 dan 12, panjang hipotenusanya adalah...

- 21
- 15
- $\sqrt{63}$
- 108

Manakah yang bukan tripel Pythagoras?

- 6, 8, 10
- 5, 12, 13
- 8, 15, 17
- 4, 5, 6

Jarak antara titik $A(1,1)$ dan $B(4,5)$ adalah...

- 5
- 7
- 25
- $\sqrt{7}$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: detektif pojok siku-siku

Bahan: meteran jahit atau tali + penggaris, pensil, buku catatan.

1. Pilih sebuah pojok: pojok meja, pojok kamar di lantai, atau pojok ubin.
2. Dari titik pojok, ukur 30 cm di sepanjang sisi pertama dan beri tanda.
3. Dari titik pojok yang sama, ukur 40 cm di sepanjang sisi kedua dan beri tanda.
4. Ukur jarak lurus antara kedua tanda. Kalau hasilnya tepat 50 cm, pojok itu siku-siku sempurna.
5. Periksa minimal tiga pojok berbeda dan catat hasilnya.

Pertanyaan: Pojok mana yang paling "tidak siku"? Jika jaraknya lebih dari 50 cm, apakah sudutnya lebih besar atau lebih kecil daripada 90°? Jelaskan dengan kebalikan Teorema Pythagoras.

RINGKASAN KILAT

Bab 18 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- mengenali **hipotenusa** dan kaki-kaki segitiga siku-siku
- menjelaskan **bukti visual** Teorema Pythagoras dan memakainya untuk menghitung sisi yang belum diketahui
- mengenali dan membuat **tripel Pythagoras**
- memakai **kebalikan teorema** untuk menentukan apakah segitiga lancip, siku-siku, atau tumpul
- menghitung **jarak dua titik** di bidang koordinat dan **diagonal ruang** sebuah kotak

Istilah kunci

sudut siku-siku · segitiga siku-siku · hipotenusa · kaki · tripel Pythagoras · lingkaran · diagonal ruang

Rumus penting

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema Pythagoras. Kuadratkan kedua kaki, jumlahkan, lalu tarik akarnya. Itulah panjang sisi miring.

$$c = m^2 + n^2$$

Pabrik tripel Euclid. Pilih dua bilangan m dan n. Sisi miringnya $m^2 + n^2$, sedangkan kakinya $m^2 - n^2$ dan $2mn$.

$$d = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Diagonal ruang kotak. Tongkat terpanjang yang muat di kotak = akar dari jumlah kuadrat panjang, lebar, dan tinggi.

Jangan sampai terjebak

- Hipotenusa tidak selalu digambar miring atau di sebelah kanan.
- Saat menguji jenis segitiga, yang dikuadratkan dan dibandingkan harus sisi terpanjang.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=18

🧩 Teka-teki untuk Bab 19

Pak Darto punya sawah berbentuk segi empat tak beraturan dengan sisi 30 m, 40 m, 48 m, dan 14 m. Sebuah pematang lurus sepanjang 50 m menghubungkan dua pojok yang berseberangan, membelah sawah menjadi segitiga 30–40–50 dan segitiga 14–48–50. Bisakah kamu menghitung luas sawahnya tanpa alat ukur luas apa pun?

▼ **Intip petunjuk**

Cek kedua segitiga dengan kebalikan Teorema Pythagoras: apakah $30^2 + 40^2 = 50^2$? Apakah $14^2 + 48^2 = 50^2$? Kalau keduanya siku-siku, luas masing-masing = ½ × kaki × kaki. Bab 19 membahas luas bangun datar sampai rumus Heron untuk segitiga yang tidak siku-siku!

BAB 19 · GEOMETRI & PENGUKURAN

19 Keliling & Luas: Potong, Geser, Tempel!

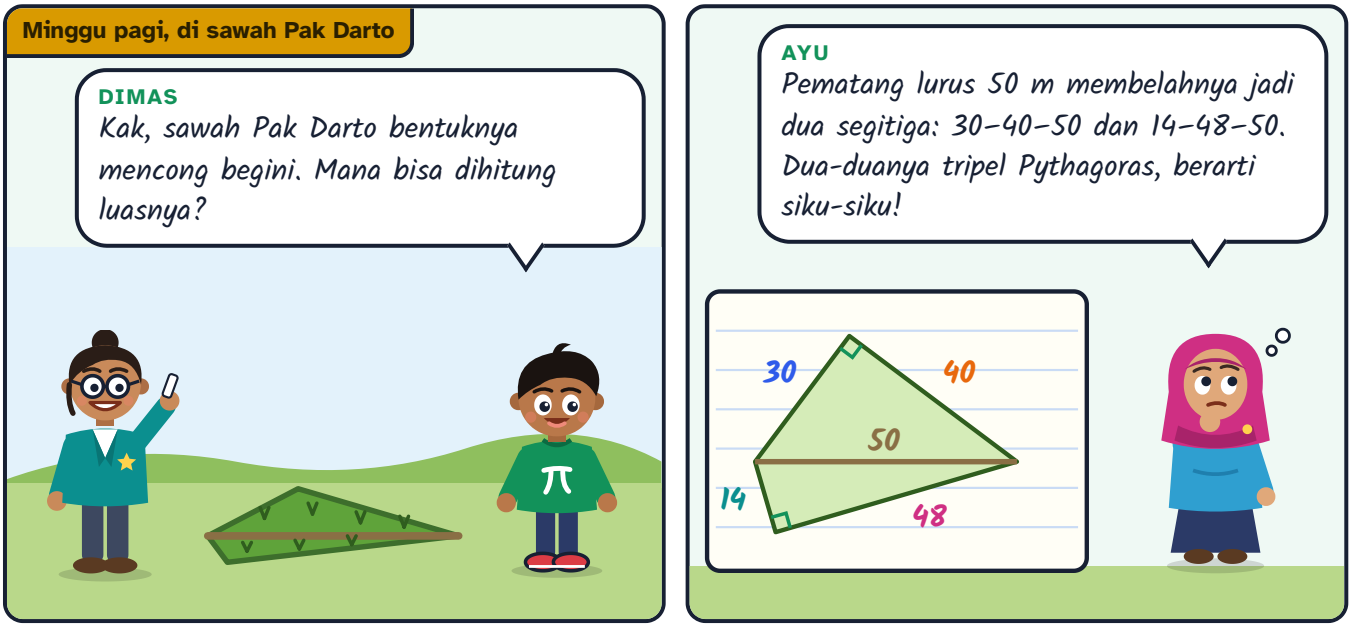
Berapa meter pagar untuk mengelilingi kebun? Berapa keramik untuk menutup lantai? Dengan gunting imajiner, hampir setiap bangun datar bisa diubah menjadi persegi panjang, dan rahasia luasnya pun terbongkar.

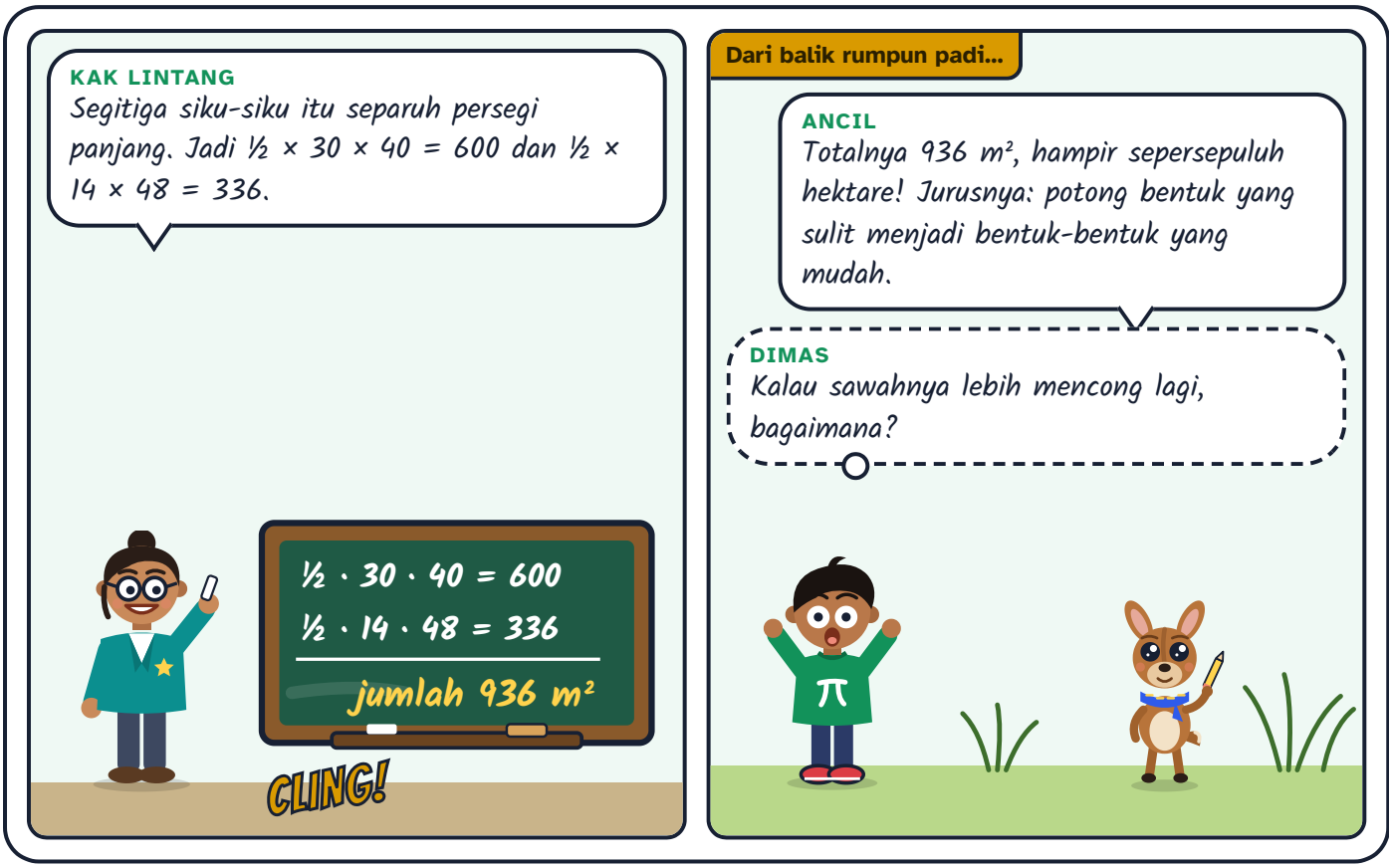
Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan **keliling** dan **luas** beserta satuannya (cm dan cm^2);
- menurunkan rumus luas persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang dengan **potong-geser-tempel**;
- menghitung keliling dan luas **bangun gabungan** dengan cara memotong atau menambal;
- memakai **rumus Heron** untuk segitiga yang hanya diketahui ketiga sisinya;
- menghitung luas poligon di kertas berpetak dengan **teorema Pick**.

SAWAH MENCONG PAK DARTO

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Dimas dan Ayu masing-masing punya 24 m kawat untuk memagari kandang ayam berbentuk persegi panjang. Dimas membuat kandang 11 m × 1 m, sedangkan Ayu membuat kandang 6 m × 6 m. Kandang siapa yang lebih luas?

- Sama luas, karena panjang kawatnya sama.
- Kandang Dimas, karena lebih panjang.
- Kandang Ayu.
- Tidak bisa ditentukan tanpa mengetahui harga kawatnya.

Jawabannya: kandang Ayu. Kelilingnya memang sama-sama 24 m, tetapi luas kandang Dimas hanya $11 \times 1 = 11$ m², sedangkan kandang Ayu $6 \times 6 = 36$ m², lebih dari tiga kali lipat! Keliling yang sama *tidak* menjamin luas yang sama. Di subbab 19.2 kamu akan menyeret pojok kandang sendiri dan menemukan bentuk juaranya.

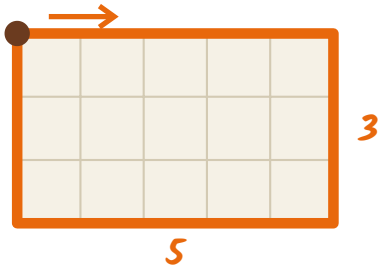
19.1 Keliling dan luas: dua ukuran yang berbeda

Bayangkan seekor semut berjalan menyusuri tepi sebuah ubin sampai kembali ke titik awal. Panjang jalan yang ditempuhnya disebut **keliling**. Sekarang bayangkan seluruh permukaan ubin itu dicat. Banyaknya permukaan yang tertutup cat disebut **luas**. Keliling mengukur **pinggiran**, luas mengukur **isi**.

DEFINISI

Keliling bangun datar adalah panjang seluruh batas (tepi) bangun itu. Satuannya satuan panjang: cm, m, km. **Luas** adalah banyaknya **persegi satuan** yang dapat menutupi daerah bangun itu tanpa celah dan tanpa tumpang tindih. Satuannya satuan persegi: cm^2, m^2, km^2. Satu cm^2 adalah luas sebuah persegi bersisi 1 cm.

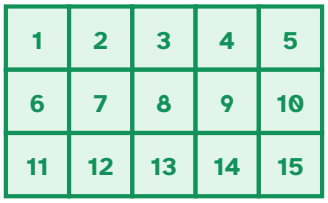
KELILING = jalan semut



5 + 3 + 5 + 3 = 16 satuan

satuan panjang: cm, m, km

LUAS = ubin penutup



3 baris × 5 kolom = 15 petak

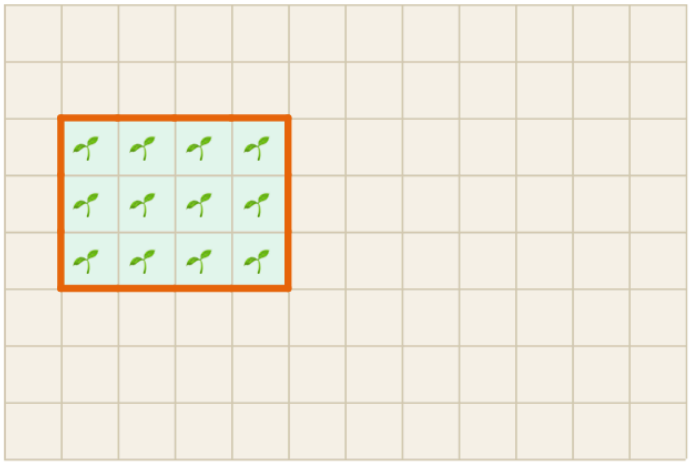
satuan persegi: cm^2, m^2, km^2

Bangun yang sama punya dua ukuran berbeda: keliling 16 satuan (panjang garis jingga) dan luas 15 satuan persegi (banyak petak hijau).

Bahasa sederhana · Gampangnya: **keliling = pagar**, **luas = ubin**. Kalau kamu ingin tahu berapa meter tali untuk mengelilingi lapangan, hitunglah kelilingnya. Kalau ingin tahu berapa banyak rumput untuk menutupi lapangan, hitunglah luasnya.

LAB MINI **Kebun petak: luas sama, keliling berbeda?**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19



Kebun petakmu

Luas = 12 petak

Keliling = 14 sisi

Kebun tersambung berluas 12: keliling 14 (gemuk) s.d. 26 (kurus)

🎯 **Target: luas 12, keliling 20**

Luas sudah pas ✓

Keliling kurang 6: buat lebih kurus.

✋ *klik atau seret untuk menanam / mencabut*

Luas	Keliling	Target	Keadaan
12 petak	14 sisi	luas 12, keliling 20	Luas sudah pas ✓

Klik atau seret di kisi untuk menanam dan mencabut petak. Mulailah dari kebun 4 × 3 (luas 12, keliling 14). Bisakah kamu membuat kebun berluas 12 dengan keliling 20? Dengan keliling 26? Bentuk seperti apa yang kelilingnya paling kecil? Tekan 🎯 **Target baru** untuk tantangan lain.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Keliling bersatuan panjang (cm), sedangkan luas bersatuan persegi (cm²), jadi jangan sampai tertukar. Hati-hati juga saat mengubah satuan luas: 1 m = 100 cm, tetapi 1 m² = 100 cm × 100 cm = **10.000 cm²**, bukan 100 cm².

💡 **TANGGA SATUAN LUAS**

Pada satuan panjang, setiap turun satu anak tangga (km → hm → dam → m → dm → cm → mm) dikali 10. Pada satuan luas, setiap turun satu anak tangga dikali **100**, karena panjang dan lebarnya sama-sama dikali 10. Petani memakai **hektare**: 1 ha = 1 hm² = 10.000 m², hampir satu setengah kali luas lapangan sepak bola. Ada juga **are**: 1 are = 1 dam² = 100 m².

19.2 Persegi panjang dan persegi

Mengapa luas persegi panjang sama dengan panjang × lebar? Tutupi persegi panjang 5 cm × 3 cm dengan persegi satuan: ada 3 baris, dan tiap baris berisi 5 persegi. Jadi luasnya $3 \times 5 = 15$ cm². Rumus luas hanyalah cara cepat **menghitung ubin** tanpa menghitungnya satu per satu.

RUMUS PERSEGI PANJANG DAN PERSEGI

Untuk persegi panjang dengan panjang p dan lebar l, serta persegi dengan sisi s:

$$\text{Persegi panjang: } K = 2(p + l), \quad L = p \times l$$

$$\text{Persegi: } K = 4s, \quad L = s^2$$

Persegi adalah persegi panjang istimewa dengan $p = l = s$. Itulah sebabnya s^2 dibaca "s kuadrat": *quadratus* dalam bahasa Latin berarti persegi!

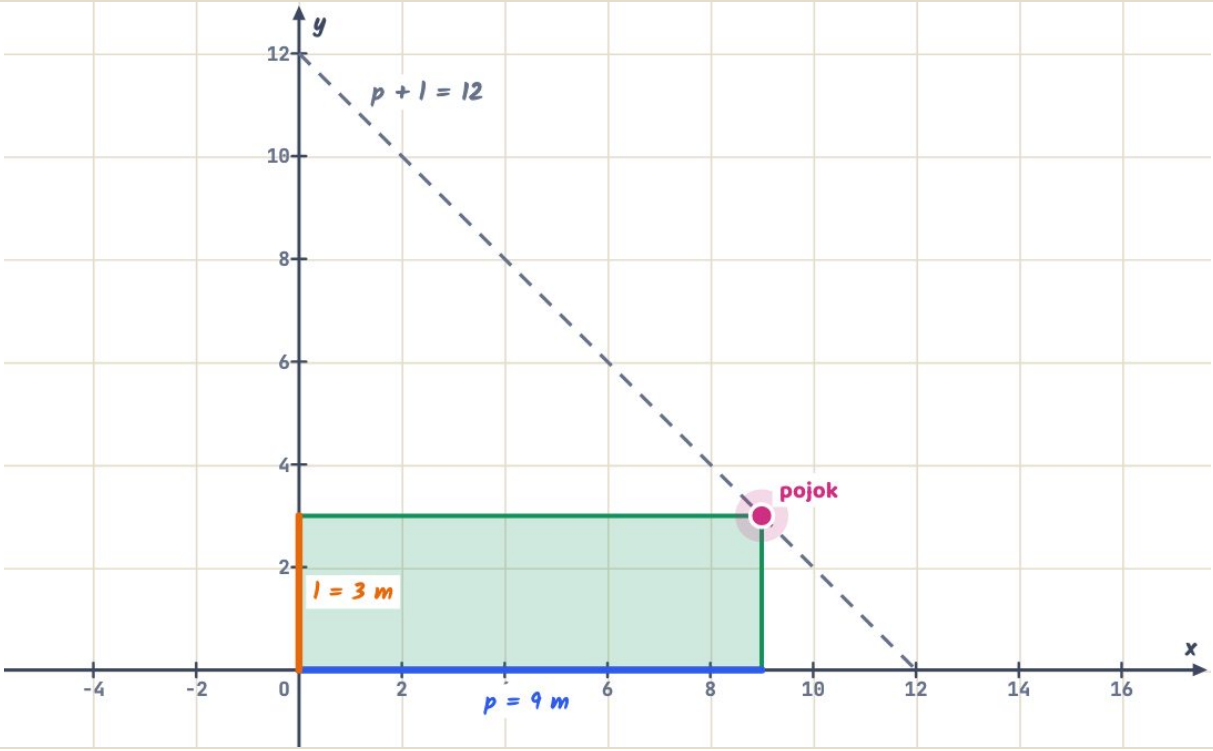
GRAFIK HIDUP

Pagar 24 meter: kandang mana yang paling luas?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19

$$K = 2(p + l) = 24 \implies l = 12 - p$$

$$L = p \times l = 9 \times 3 = 27\ \text{m}^2$$



Panjang	Lebar	Keliling	Luas
9 m	3 m	24 m	27 m²

Seret pojok kandang (titik magenta) di sepanjang garis putus-putus. Semua pojok di garis itu memberi keliling tepat 24 m. Di mana luasnya paling besar? Apa bentuk kandangnya saat itu?

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA PERSEGI SELALU JUARA?

Misalkan keliling K tetap, jadi $p + l = \frac{K}{2}$. Perhatikan identitas

$$p \cdot l = \left(\frac{p+l}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-l}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{16} - \left(\frac{p-l}{2}\right)^2.$$

Suku pertama tetap, sedangkan suku kedua tidak pernah negatif. Luas terbesar terjadi saat suku kedua nol, yaitu saat $p = l$: **persegi**. Untuk pagar 24 m, luas terbesarnya $\frac{24^2}{16} = 36$ m². Jurus "tulis sebagai kuadrat dikurangi sesuatu yang tak negatif" ini adalah senjata andalan olimpiade.

CONTOH **Keramik kamar Ayu**

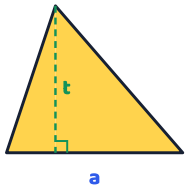
Lantai kamar Ayu berukuran 4 m × 3 m akan dipasangi keramik persegi bersisi 40 cm. Satu dus berisi 6 keramik. Berapa keramik dan berapa dus yang perlu dibeli?

1. Samakan satuan dulu: 40 cm = 0,4 m. Luas lantai $= 4 \times 3 = 12$ m², luas satu keramik $= 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$ m².
2. Banyak keramik $= 12 : 0{,}16 = 75$. Cek: sepanjang 4 m muat 10 keramik dan sepanjang 3 m muat 7,5 keramik, jadi $10 \times 7{,}5 = 75$ (baris terakhir dipotong setengah).
3. Banyak dus $= 75 : 6 = 12{,}5$. Dus tidak bisa dibeli setengah, jadi dibulatkan **ke atas** menjadi 13 dus.

Perlu 75 keramik, yaitu 13 dus. Sisanya 3 keramik bisa disimpan sebagai cadangan kalau ada yang retak.

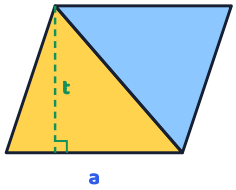
19.3 Segitiga: separuh jajargenjang

Gunting selembar kertas persegi panjang menurut diagonalnya. Kamu mendapat dua segitiga siku-siku yang kembar, jadi luas segitiga siku-siku tepat setengah luas persegi panjang. Bagaimana dengan segitiga yang tidak siku-siku? Ikuti animasi ini.



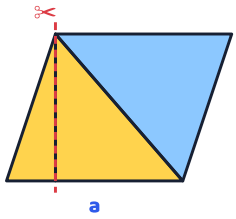
Segitiga: alas a, tinggi t.
Tinggi = jarak tegak lurus dari puncak ke alas.

Langkah 1. Ini segitiga dengan alas a dan tinggi t. Tinggi selalu diukur tegak lurus dari puncak ke garis alas.



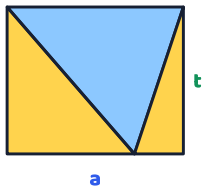
Buat kembarannya,
putar 180° pada titik tengah sisi kanan.
Jadilah jajargenjang!

Langkah 2. Buat segitiga kembar (biru), lalu putar 180° terhadap titik tengah sisi kanannya. Dua segitiga kembar itu menempel menjadi **jajargenjang** beralas a dan bertinggi t.



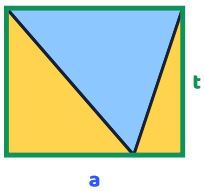
Gunting di sepanjang
garis tinggi (merah).

Langkah 3. Gunting jajargenjang di sepanjang garis tinggi. Terpotonglah sebuah segitiga siku-siku kecil di sebelah kiri.



Geser potongan ke kanan
sejauh a. Jadilah
persegi panjang a × t!

Langkah 4. Geser potongan itu ke kanan sejauh a. Tidak ada kertas yang hilang, dan jajargenjang berubah menjadi persegi panjang $a \times t$.



persegi panjang = 2 segitiga
a × t = 2 × L
L = ½ × a × t

Langkah 5. Persegi panjang itu terdiri atas **dua** segitiga kembar, jadi satu segitiga luasnya $\frac{1}{2} \times a \times t$. Sekaligus terbukti: luas jajargenjang $= a \times t$.

LUAS DAN KELILING SEGITIGA

Untuk segitiga dengan sisi a, b, c, alas a, dan tinggi t (jarak tegak lurus dari puncak ke garis alas):

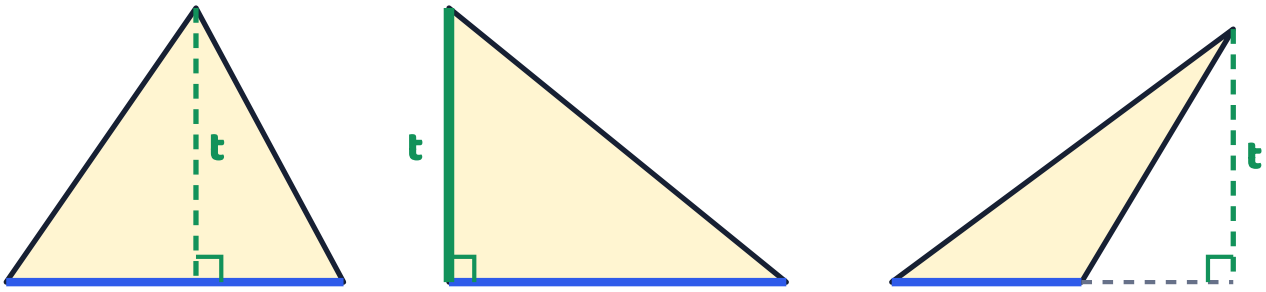
$$L = \frac{1}{2} \times a \times t, \qquad K = a + b + c$$

Sisi mana pun boleh dijadikan alas, asalkan tingginya diukur tegak lurus terhadap sisi itu.

Bukti lain: belah dengan garis tinggi

Jika kaki garis tinggi jatuh di dalam alas, garis tinggi membelah segitiga menjadi dua segitiga siku-siku beralas x dan $a - x$. Masing-masing separuh persegi panjang, jadi $L = \frac{1}{2}xt + \frac{1}{2}(a-x)t = \frac{1}{2}at$.

Jika kaki garis tinggi jatuh di luar alas (segitiga tumpul), segitiga itu adalah **selisih** dua segitiga siku-siku: $L = \frac{1}{2}(a+y)t - \frac{1}{2}yt = \frac{1}{2}at$. Rumusnya tetap sama!



lancip: tinggi di dalam | siku-siku: tinggi = sisi tegak | tumpul: tinggi di luar

Alas digambar biru dan tinggi hijau. Pada segitiga tumpul, garis tinggi jatuh pada perpanjangan alas (garis putus-putus abu-abu).

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Tinggi segitiga harus tegak lurus terhadap alas, bukan sisi miringnya. Pada segitiga tumpul, garis tinggi bahkan jatuh di **luar** segitiga, pada perpanjangan alas. Rumus $\frac{1}{2} \times a \times t$ tetap berlaku.

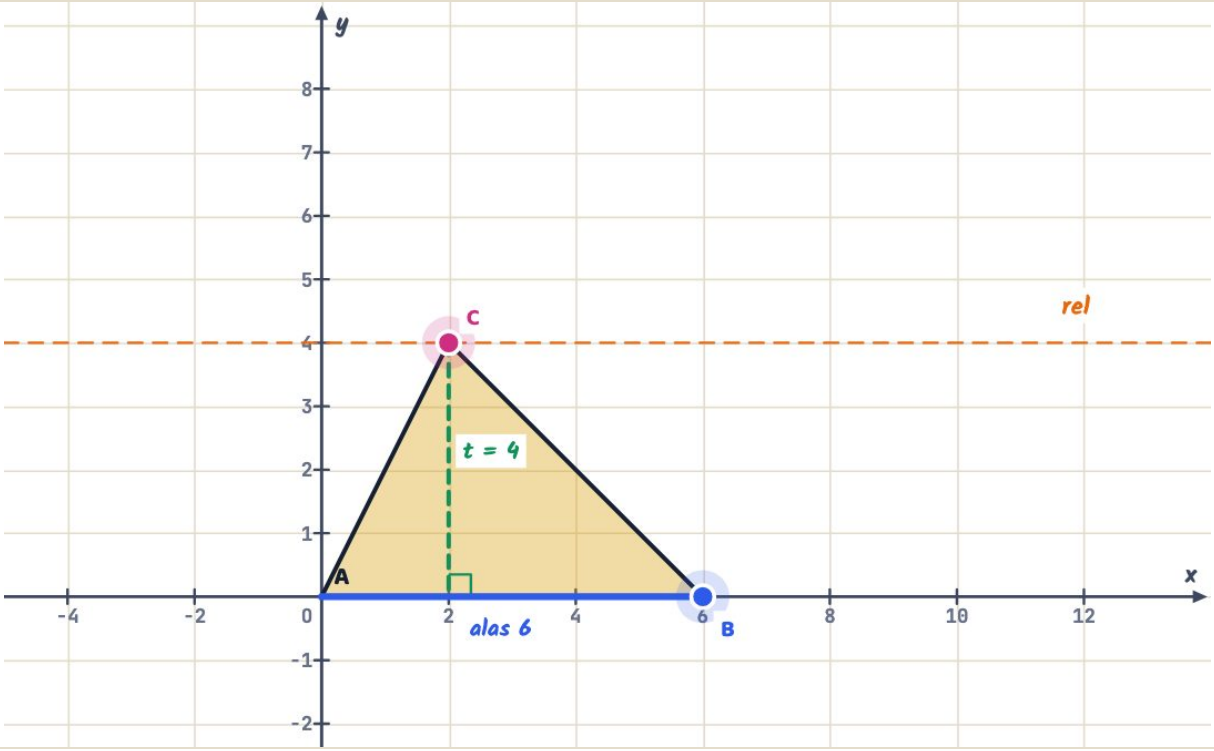
GRAFIK HIDUP

Puncak di atas rel: luas yang keras kepala

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19

$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



Alas	Tinggi	Luas	Keliling
6	4	12	16,13

Seret puncak C ke kiri dan ke kanan di sepanjang rel jingga. Kelilingnya berubah-ubah, tetapi luasnya tidak bergeming! Mengapa? Lalu seret C ke atas atau ubah titik B: kapan luasnya berubah?

KERJAKAN BERSAMA **Sawah Pak Darto, langkah demi langkah**

Ingat komik di awal bab: sawah Pak Darto bersisi 30 m, 40 m, 48 m, dan 14 m, dengan pematang lurus 50 m yang menghubungkan dua pojok berseberangan. Hitung luas dan keliling sawah itu, lalu perkirakan hasil panennya jika setiap m² sawah menghasilkan sekitar 0,6 kg gabah.

1. Uji segitiga pertama dengan kebalikan Teorema Pythagoras (Bab 18): $30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 = 50^2$. Siku-siku!
2. Segitiga kedua: $14^2 + 48^2 = 196 + 2304 = 2500 = 50^2$. Siku-siku juga!
3. Pada segitiga siku-siku, kedua kaki saling tegak lurus, jadi satu kaki menjadi alas dan kaki lainnya menjadi tinggi: $L = \frac{1}{2} \times 30 \times 40 + \frac{1}{2} \times 14 \times 48 = 600 + 336 = 936$ m².
4. Keliling $= 30 + 40 + 48 + 14 = 132$ m. Pematang 50 m tidak dihitung karena berada di dalam sawah.
5. Panen $\approx 936 \times 0{,}6 \approx 562$ kg gabah.

Luas sawah 936 m² (hampir 0,1 hektare), kelilingnya 132 m, dan panennya sekitar 5,6 kuintal gabah.

19.4 Jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang

Keempat bangun segi empat ini punya satu rahasia: dengan sedikit potong, geser, dan tempel, mereka bisa diubah menjadi persegi panjang. Luasnya tidak berubah, karena tidak ada kertas yang hilang atau bertambah.

Tebak Dulu!

Bingkai foto dibuat dari empat bilah kayu (dua bilah 8 cm dan dua bilah 6 cm) yang disambung dengan paku keling sehingga pojoknya bisa bergerak. Mula-mula bingkai berbentuk persegi panjang. Kalau bingkai didorong makin miring, apa yang terjadi?

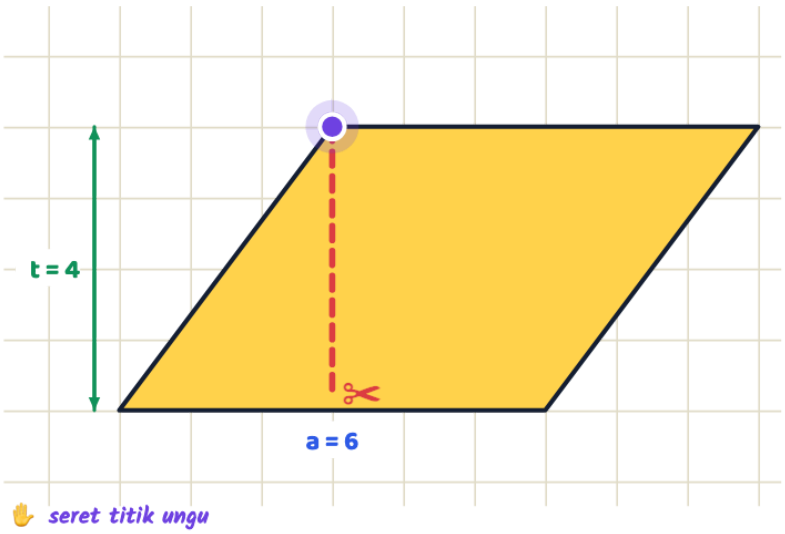
- Keliling dan luasnya tetap.
- Kelilingnya tetap, luasnya makin kecil.
- Kelilingnya tetap, luasnya makin besar.
- Keliling dan luasnya sama-sama makin kecil.

Jawabannya: keliling tetap, luas makin kecil. Panjang keempat bilah tidak berubah, jadi kelilingnya tetap 28 cm. Tetapi luas jajargenjang = alas × **tinggi**, dan tinggi bingkai makin rendah saat didorong miring. Kalau didorong sampai gepeng, luasnya hampir nol! Itulah sebabnya rangka bangunan diberi batang silang agar tidak "melipat".

LAB MINI

Mesin potong-geser-tempel

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19



Jajargenjang

→ persegi panjang

alas 6, tinggi 4

L = a × t

= 6 × 4 = 24

memotong…

Luas awal	Luas akhir	Keadaan
24 satuan²	–	memotong…

Pilih bentuknya, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Gunting memotong di sepanjang garis merah, lalu potongan merah muda digeser atau diputar 180°. Seret titik ungu untuk memiringkan bangun. Hitunglah kotak satuannya: apakah luasnya berubah?

RUMUS LUAS SEGI EMPAT ISTIMEWA

- **Jajargenjang** beralas a dan bertinggi t: $L = a \times t$.
- **Trapesium** dengan sisi sejajar a dan b serta tinggi t: $L = \frac{1}{2} \times (a + b) \times t$.
- **Belah ketupat** dan **layang-layang** dengan diagonal d_1 dan d_2: $L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$.

Kelilingnya selalu jumlah keempat sisi. Untuk jajargenjang dan layang-layang bersisi a dan b: $K = 2(a + b)$; untuk belah ketupat bersisi s: $K = 4s$.

Bukti rumus trapesium dengan trapesium kembar

Buat trapesium kembar, putar 180°, lalu tempelkan pada salah satu kakinya. Sisi a bersambung dengan sisi b milik kembarannya, sehingga terbentuk jajargenjang beralas $a + b$ dan bertinggi t. Luas jajargenjang itu $(a + b) \times t$, dan isinya dua trapesium. Jadi satu trapesium luasnya $\frac{1}{2}(a + b)t$. Lab Mini di atas memakai cara lain: memotong di setengah tinggi, lalu memutar bagian atasnya. Dua cara, satu rumus!

RUMUS HIDUP

Luas trapesium

$$L = \frac{1}{2} \times (a + b) \times t$$

Jumlahkan kedua sisi sejajar, kalikan dengan tinggi, lalu ambil separuhnya. Sama saja dengan rata-rata kedua sisi sejajar dikali tinggi.

a Sisi sejajar bawah m

b Sisi sejajar atas m

t Tinggi m

L Luas m²

LUAS
66
m²

Rata-rata sisi sejajar (**14** + **8**) : 2 = **11** m, dikali tinggi **6** m, hasilnya **66** m². Geser b ke 0: trapesium berubah menjadi segitiga. Samakan b dengan a: trapesium menjadi jajargenjang!

Cek satuan: m + m = m, lalu m × m = m². Satuan luas selalu satuan panjang yang dikuadratkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRAPESIUM-LUAS

ADU CEPAT

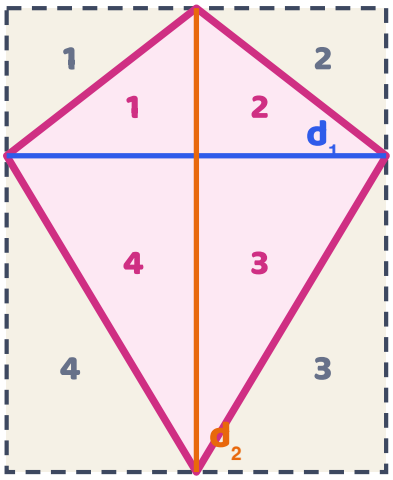
Luas trapesium kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Rata-ratakan dua sisi sejajar, lalu kalikan tinggi. Contoh: 6 dan 10 rata-ratanya 8; dengan tinggi 5, luasnya 40.

Bagaimana dengan layang-layang? Gambarlah persegi panjang yang membungkusnya, dengan sisi-sisi sejajar kedua diagonal. Kedua diagonal membagi persegi panjang itu menjadi empat kotak kecil, dan setiap sisi layang-layang membelah satu kotak menjadi dua segitiga kembar: satu di dalam, satu di luar.



Persegi panjang pembungkus: $d_1 \times d_2$.

Tiap kotak kecil dibelah dua oleh sisi layang-layang: bagian dalam (merah muda) = bagian luar (abu-abu).

$$L = \tfrac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

Berlaku juga untuk belah ketupat dan persegi.

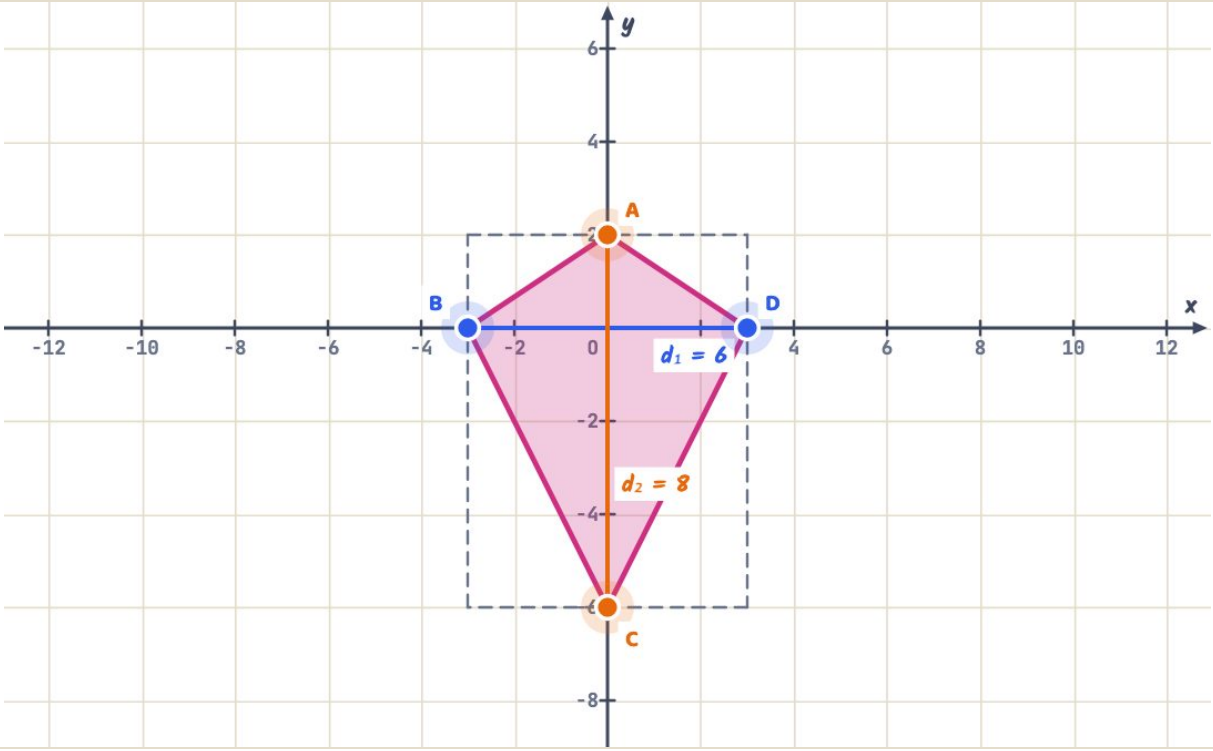
Pasangan bernomor sama adalah segitiga kembar. Jadi layang-layang tepat separuh persegi panjang pembungkusnya.

GRAFIK HIDUP **Layangan Dimas: geser ujung-ujungnya**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19

$$L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$L = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$



layang-layang: satu diagonal membagi dua diagonal lainnya

d_1	d_2	Luas layangan	Luas pembungkus
6	8	24	48

Seret keempat ujung layangan. Luasnya selalu tepat separuh persegi panjang putus-putus. Buatlah belah ketupat, lalu persegi. Coba juga bentuk "miring" yang bukan layang-layang: apakah rumusnya masih benar?

KERJAKAN BERSAMA

Kertas minyak untuk layangan

Dimas membuat layangan dari dua bilah bambu yang bersilangan tegak lurus. Bilah mendatar sepanjang 60 cm diikat tepat di tengahnya pada bilah tegak sepanjang 80 cm, di titik yang berjarak 20 cm dari ujung atas. Berapa luas kertas minyak yang diperlukan, dan berapa panjang benang hias untuk menyusuri tepinya?

1. Bilah bambu adalah diagonal: $d_1 = 60$ cm dan $d_2 = 80$ cm. Luas $= \frac{1}{2} \times 60 \times 80 = 2400$ cm².
2. Sisi atas: segitiga siku-siku berkaki 30 (setengah bilah mendatar) dan 20, jadi panjangnya $\sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300} \approx 36{,}06$ cm.
3. Sisi bawah: kakinya 30 dan $80 - 20 = 60$, jadi panjangnya $\sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{4500} \approx 67{,}08$ cm.
4. Keliling $= 2 \times (36{,}06 + 67{,}08) \approx 206{,}3$ cm.

Kertas minyaknya 2.400 cm² (ditambah sedikit lebihan untuk dilem), dan benang hiasnya sekitar 2,1 m.

Bangun	Keliling	Luas	Asal-usul rumus luas
Persegi panjang	$2(p + l)$	$p \times l$	baris × kolom petak satuan
Persegi	$4s$	s^2	persegi panjang dengan $p = l$
Segitiga	$a + b + c$	$\frac{1}{2} \times a \times t$	separuh jajargenjang
Jajargenjang	$2(a + b)$	$a \times t$	digeser menjadi persegi panjang
Trapesium	jumlah 4 sisi	$\frac{1}{2}(a + b) \times t$	dua kembar menjadi jajargenjang
Belah ketupat	$4s$	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$	separuh persegi panjang pembungkus
Layang-layang	$2(a + b)$	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$	separuh persegi panjang pembungkus



TRIK KAK LINTANG

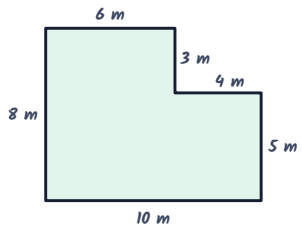
Cukup ingat **satu** rumus: persegi panjang $p \times l$. Sisanya turunan: jajargenjang = persegi panjang yang digeser ($a \times t$); segitiga = separuh jajargenjang ($\frac{1}{2}at$); trapesium = "jajargenjang rata-rata" ($\frac{a+b}{2} \times t$); belah ketupat dan layang-layang = separuh persegi panjang pembungkusnya ($\frac{1}{2}d_1d_2$). Lupa rumus? Gambar, potong, geser!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Luas jajargenjang memakai tinggi, bukan sisi miring. Jajargenjang beralas 10 cm dengan sisi miring 8 cm dan tinggi 6 cm luasnya $10 \times 6 = 60$ cm², bukan $10 \times 8 = 80$ cm². Hal yang sama berlaku untuk trapesium: kakinya yang miring tidak dipakai untuk luas.

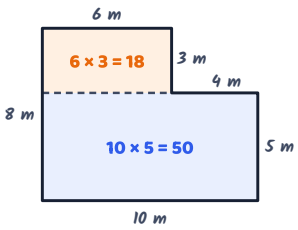
19.5 Bangun gabungan dan daerah diarsir

Denah rumah, lapangan, dan taman jarang berbentuk sederhana. Kuncinya ada dua jurus: **potong** bangun menjadi bagian-bagian sederhana lalu jumlahkan, atau **tambal** menjadi bangun sederhana lalu kurangi tambalannya.



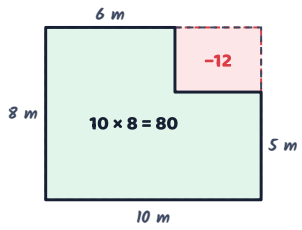
Lantai rumah berbentuk L.
Berapa luas dan kelilingnya?

Langkah 1. Denah lantai berbentuk huruf L dan semua pojoknya siku-siku. Tidak ada rumus "luas huruf L". Lalu bagaimana?



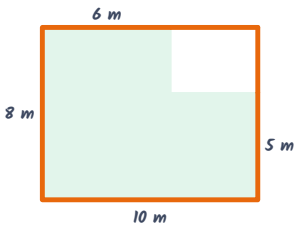
Cara 1 · Potong:
50 + 18 = 68 m²

Langkah 2. Cara potong: belah menjadi dua persegi panjang, 10 × 5 dan 6 × 3. Luasnya $50 + 18 = 68$ m².



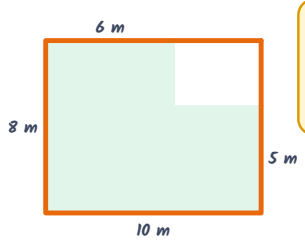
Cara 2 · Tambal, lalu kurangi:
80 − 12 = 68 m²

Langkah 3. Cara tambal: lengkapi menjadi persegi panjang $10 \times 8 = 80$ m², lalu kurangi tambalannya $4 \times 3 = 12$ m². Hasilnya sama: 68 m².



Keliling: geser sisi lekukan
ke luar. Jadilah tepi persegi panjang 10 × 8:
K = 2 × (10 + 8) = 36 m

Langkah 4. Trik keliling: geser kedua sisi lekukan ke luar. Panjangnya tidak berubah, dan tepinya kini persis tepi persegi panjang 10 × 8. Jadi $K = 2 \times (10 + 8) = 36$ m.



Luas: potong atau tambal, hasilnya sama-sama 68 m².

Keliling bangun "tangga" = keliling persegi panjang pembungkus.

Langkah 5. Untuk luas, pilih jurus yang lebih mudah: potong atau tambal. Untuk keliling bangun "tangga" (semua pojok siku-siku, tanpa lekukan berbentuk huruf U), kelilingnya sama dengan keliling persegi panjang pembungkusnya.

KERJAKAN BERSAMA

Mengecat dinding kamar

Satu dinding kamar berukuran 6 m × 3 m. Di dinding itu ada pintu 0,9 m × 2 m dan jendela 1,2 m × 1 m. Satu liter cat cukup untuk 10 m² sekali lapis, dan dinding akan dicat dua lapis. Berapa liter cat yang dibutuhkan?

1. Luas dinding utuh $= 6 \times 3 = 18$ m².
2. Kurangi bagian yang tidak dicat: pintu $0{,}9 \times 2 = 1{,}8$ m² dan jendela $1{,}2 \times 1 = 1{,}2$ m². Luas yang dicat $= 18 - 1{,}8 - 1{,}2 = 15$ m².
3. Dua lapis berarti $2 \times 15 = 30$ m², jadi catnya $30 : 10 = 3$ liter.

Dibutuhkan 3 liter cat. Jurus "luas utuh dikurangi lubang" inilah inti bangun gabungan.

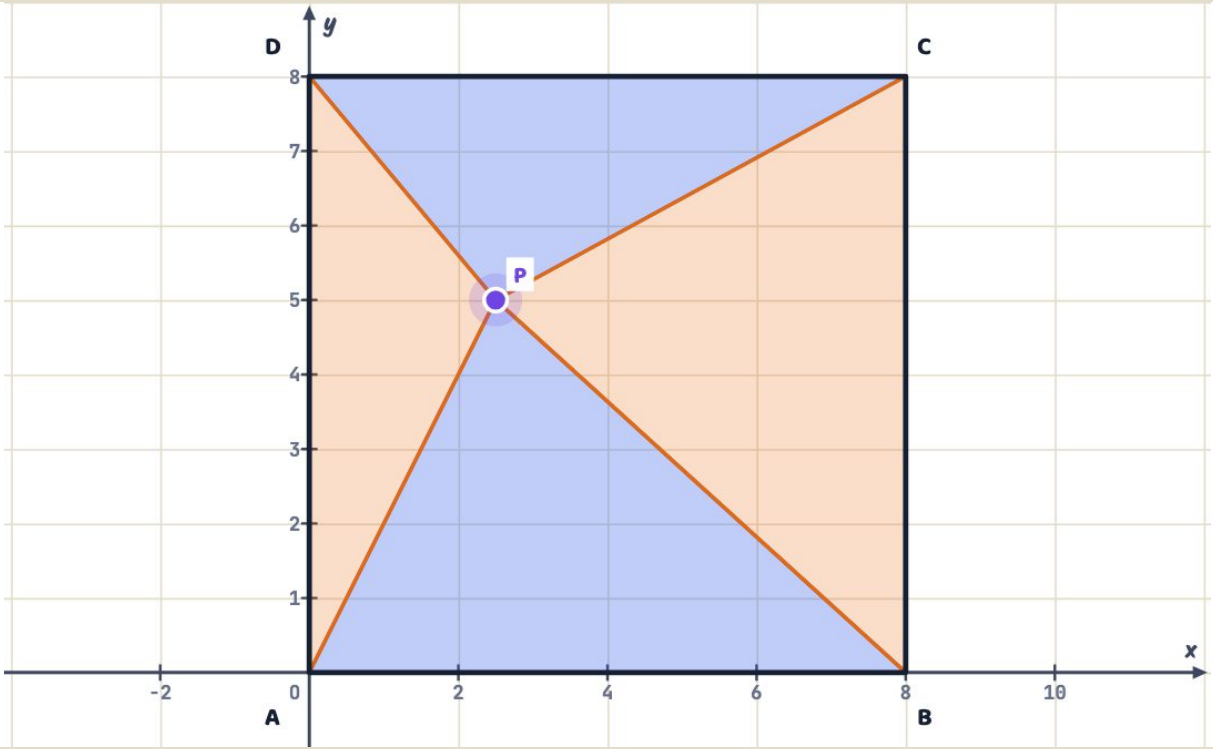
Soal olimpiade sering meminta luas daerah diarsir yang tampak rumit. Rahasianya biasanya **simetri** atau **menggeser potongan** tanpa mengubah luasnya. Contoh cantiknya ada di Grafik Hidup berikut.

GRAFIK HIDUP **Titik P si pengembara di dalam persegi**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19

$$L_{PAB} + L_{PCD} = \frac{1}{2} \times \text{luas persegi}$$

$$L_{PAB} + L_{PCD} = 20 + 12 = 32$$



PAB	PCD	PAB + PCD	PBC + PDA
20	12	32	32

Persegi $ABCD$ bersisi 8 (luas 64). Seret titik P ke mana saja. Luas dua segitiga biru selalu 32, separuh persegi! Mengapa? Kedua segitiga biru beralas 8, dan tinggi keduanya selalu berjumlah 8.

MITOS

"Kalau kelilingnya sama, luasnya pasti sama."

FAKTA

Kandang 11 m × 1 m dan 6 m × 6 m sama-sama berkeliling 24 m, tetapi luasnya 11 m² dan 36 m². Di antara persegi panjang yang kelilingnya sama, persegilah yang paling luas.

MITOS

"Luas jajargenjang = alas × sisi miring."

FAKTA

Yang dipakai adalah **tinggi**, yang tegak lurus alas. Bingkai yang didorong miring sisi-sisinya tetap, tetapi luasnya menyusut karena tingginya turun.

MITOS

"Kalau semua sisi digandakan, luasnya ikut menjadi dua kali lipat."

FAKTA

Luasnya menjadi **empat** kali lipat (2×2). Persegi 1 m × 1 m digandakan menjadi 2 m × 2 m = 4 m². Kalau semua sisi dikali tiga, luasnya menjadi sembilan kali lipat.

MATEMATIKA NUSANTARA

Jauh sebelum hektare dikenal, petani Nusantara sudah punya satuan luas sendiri. Di Jawa dikenal **bahu** (sekitar 0,7 hektare) dan **ru** (sekitar 14 m²), sedangkan di tanah Sunda dikenal **tumbak** (juga sekitar 14 m²). Sampai sekarang, iklan tanah di beberapa daerah masih mencantumkan harga "per tumbak" atau "per ru". Di Bali, petak-petak sawah terasering diairi bersama melalui sistem *subak*, yang membagi air secara adil ke setiap petak.



Keramik lantai

Tukang membagi luas lantai dengan luas satu keramik, lalu menambah sedikit cadangan untuk potongan di tepi ruangan.



Cat tembok

Kaleng cat mencantumkan daya sebar per m². Luas dinding dikurangi pintu dan jendela menentukan banyak kaleng yang dibeli.



Sawah & pupuk

Kebutuhan benih dan pupuk dihitung per hektare. Petani yang tahu luas sawahnya bisa membeli secukupnya, tidak kurang dan tidak mubazir.



Layangan

Luas kertas minyak sama dengan setengah hasil kali panjang kedua bilah bambu yang bersilangan.



Sertifikat tanah

Luas tanah tercantum dalam m², dan harganya biasanya dihitung per m². Juru ukur memecah bidang tanah yang tak beraturan menjadi segitiga-segitiga.



Penjahit & kain batik

Penjahit menaksir luas pola baju untuk menentukan berapa meter kain batik yang harus dibeli.

19.6 Rumus Heron dan teorema Pick

Bagaimana kalau kita hanya tahu ketiga sisi sebuah segitiga, tanpa tingginya? Misalnya taman segitiga di pertigaan jalan: sisi-sisinya mudah diukur dengan meteran, tetapi tingginya sulit karena harus tegak lurus. Untunglah ada rumus yang hanya memerlukan sisi.

RUMUS HERON

Segitiga dengan sisi a, b, c dan **setengah keliling** $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ memiliki luas

$$L = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Bukti singkat dengan Pythagoras

Jadikan c sebagai alas dan misalkan kaki garis tinggi h membagi alas sehingga salah satu bagiannya x. Dari dua segitiga siku-siku: $h^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$, sehingga $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$. Maka

$$4c^2h^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = \big(a^2-(b-c)^2\big)\big((b+c)^2-a^2\big)$$

Uraikan setiap selisih kuadrat: hasilnya $(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c) = 2(s-b)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-a)\cdot 2s$. Karena $L = \frac{1}{2}ch$, kita dapat $16L^2 = 4c^2h^2 = 16\,s(s-a)(s-b)(s-c)$. Terbukti!

RUMUS HIDUP

Rumus Heron

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Hitung setengah keliling s. Kurangi s dengan tiap sisi, kalikan keempat bilangan itu, lalu tarik akarnya. Tidak perlu tinggi sama sekali!

a Sisi a m | b Sisi b m | c Sisi c m | L Luas segitiga m²

LUAS SEGITIGA

84

m²

✨ **luasnya bulat: segitiga Heron!**

Setengah keliling s = **21**. Selisihnya: s − a = **8**, s − b = **7**, s − c = **6**. Hasil kali keempatnya **7.056**, dan akarnya **84** m². Jika muncul '—', salah satu selisih negatif: ketiga sisi itu tidak bisa membentuk segitiga.

Cek satuan: Di dalam akar ada m × m × m × m = m⁴, dan akar dari m⁴ adalah m². Satuannya pas!

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-HERON-TIGA-SISI

TAMU DARI MASA LALU

Menghitung luas ladang termasuk matematika tertua. Di Mesir kuno, banjir Sungai Nil sering menghapus batas-batas ladang sehingga juru ukur harus mengukur ulang, dan papirus Rhind (±1650 SM) memuat soal-soal luas ladang segitiga dan persegi panjang. Sekitar abad pertama Masehi, **Heron dari Aleksandria** menulis buku *Metrica* yang memuat rumus luas segitiga dari ketiga sisinya. Rumus itu kini memakai namanya, walaupun para sejarawan menduga Archimedes sudah mengetahuinya lebih dulu.

COBA SENDIRI **Taman segitiga di pertigaan**

Di sebuah pertigaan ada taman berbentuk segitiga dengan sisi 13 m, 14 m, dan 15 m. Pengurus RW ingin menanaminya rumput gajah mini seharga Rp35.000 per m². Tidak ada alat untuk mengukur tinggi segitiga. Berapa biayanya?

1. Setengah keliling: $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$.
2. Heron: $L = \sqrt{21 \times (21-13) \times (21-14) \times (21-15)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7056} = 84$ m².
3. Cek dengan cara lain: segitiga ini adalah gabungan segitiga 5–12–13 dan 9–12–15 yang ditempel pada tinggi 12, jadi $\frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$. Cocok!
4. Biaya $= 84 \times \text{Rp}35.000 = \text{Rp}2.940.000$.

Luas taman 84 m², dan biaya rumputnya Rp2.940.000. Rumus Heron menyelamatkan kita dari mengukur tinggi!

Sekarang cara yang sama sekali berbeda. Di toko mainan edukatif ada **papan paku** (*geoboard*): papan berisi paku-paku yang tersusun berpetak, tempat karet gelang dikaitkan membentuk poligon. Paku-paku itu menempati **titik letis**, yaitu titik yang kedua koordinatnya bilangan bulat. Ternyata luas poligon bisa ditebak hanya dengan **menghitung paku**!

TEOREMA PICK

Untuk poligon sederhana (tidak memotong dirinya sendiri) yang semua titik sudutnya titik letis, dengan I = banyak titik letis di **dalam** poligon dan B = banyak titik letis pada **tepi** poligon (termasuk titik sudutnya),

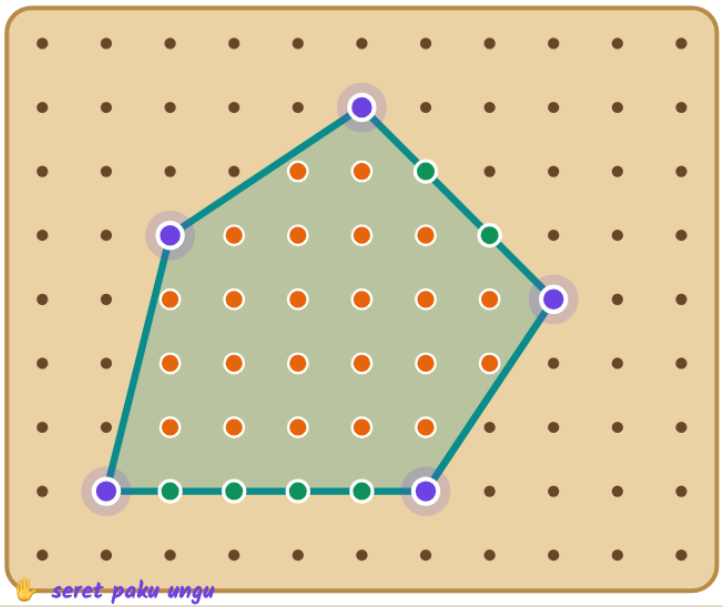
$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

Cek pada persegi panjang (dan ide buktinya)

Ambil persegi panjang $m \times n$ yang sisinya mengikuti garis kisi. Titik di dalamnya $I = (m-1)(n-1)$ dan titik di tepinya $B = 2m + 2n$. Maka $I + \frac{B}{2} - 1 = mn - m - n + 1 + m + n - 1 = mn$. Cocok! Sifat istimewanya: jika dua poligon ditempel sepanjang satu sisi, rumus Pick tetap berlaku untuk gabungannya. Karena setiap poligon bisa dipotong menjadi segitiga, cukup dibuktikan untuk segitiga, dan setiap segitiga bisa diperoleh dari persegi panjang dengan memotong segitiga siku-siku.

LAB MINI Papan paku: luas dari menghitung paku

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19



Hitung paku!

B (di tepi) = 11

I (di dalam) = 23

Pick: I + B/2 - 1
= 23 + 5,5 - 1
= 27,5

Luas (tali sepatu):
27,5 satuan²

✓sama persis!

B (di tepi)	I (di dalam)	I + B/2 – 1	Luas (tali sepatu)	Keadaan
11	23	27,5	27,5	cocok ✓

Seret paku ungu untuk mengubah bentuk karet gelang. Titik **hijau** = paku yang tersentuh karet (B), titik **jingga** = paku yang terkurung di dalam (I). Apa pun bentuknya, $I + \frac{B}{2} - 1$ selalu sama dengan luasnya. Coba buat karetnya menyilang: apa yang terjadi?

MENGHITUNG B TANPA REPOT

Pada sisi dari (x_1, y_1) ke (x_2, y_2) terdapat $\mathrm{FPB}(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$ ruas kecil di antara titik-titik letisnya. Jadi B sama dengan jumlah FPB itu untuk semua sisi. Contoh: sisi dari $(0, 0)$ ke $(6, 4)$ memuat $\mathrm{FPB}(6, 4) = 2$ ruas, dengan titik letis $(0, 0)$, $(3, 2)$, dan $(6, 4)$.

RUMUS HIDUP

Teorema Pick

$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

Hitung paku di dalam (I) dan paku yang tersentuh karet (B). Luasnya: I ditambah separuh B, lalu dikurangi satu.

- I Titik di dalam `titik`
- B Titik di tepi `titik`
- L Luas poligon `satuan²`

LUAS POLIGON

11

satuan²

7 titik di dalam dan **10** titik di tepi: **7** + **5** − 1 = **11** satuan luas. Setiap titik di dalam bernilai 1, setiap titik di tepi bernilai ½, lalu dikurangi 1.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PICK-PETAK

TAMU DARI MASA LALU

Teorema ini ditemukan oleh matematikawan Austria **Georg Alexander Pick** pada tahun 1899. Walaupun sangat sederhana, teorema ini nyaris terlupakan dan baru terkenal luas setengah abad kemudian setelah dimuat dalam buku matematika populer karya Hugo Steinhaus.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RUMUS TALI SEPATU (*SHOELACE FORMULA*)

Jika titik-titik sudut poligon $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ditulis berurutan mengelilingi poligon, maka

$$L = \tfrac{1}{2}\left|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_ny_1 - x_1y_n)\right|.$$

Coba pada sawah Pak Darto. Letakkan pojok siku-siku segitiga 30–40–50 di titik asal: $A(0,30)$, $B(0,0)$, $C(40,0)$, dan pojok keempat $D(11{,}2;\ 38{,}4)$. Hasilnya $\frac{1}{2}\,|0 + 0 + 40 \cdot 38{,}4 + 11{,}2 \cdot 30| = \frac{1}{2}(1536 + 336) = 936$ m², sama dengan hasil komik! Namanya "tali sepatu" karena pola perkalian silangnya mirip tali sepatu yang dianyam. Rumus inilah yang dipakai aplikasi peta untuk menghitung luas bidang tanah dari koordinat GPS.

Cek Cepat

Keliling persegi panjang berukuran 9 cm × 4 cm adalah...

- 36 cm
- 13 cm
- 26 cm
- 52 cm

Jajargenjang dengan alas 10 cm, tinggi 6 cm, dan sisi miring 8 cm memiliki luas...

- 60 cm^2
- 80 cm^2
- 30 cm^2
- 48 cm^2

Karet gelang di papan paku menyentuh 6 paku di tepinya dan mengurung 4 paku di dalamnya. Luas poligonnya...

- 10
- 7
- 9
- 6

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: berapa luas telapak tanganmu?

Bahan: buku tulis berpetak (kotak 0,5 cm atau 1 cm), pensil, benang, penggaris.

1. Letakkan telapak tanganmu (jari dirapatkan) di atas kertas berpetak, lalu jiplak tepinya dengan pensil.
2. Hitung petak yang tertutup **penuh** dan beri tanda centang.
3. Hitung petak yang tertutup **sebagian** dan beri tanda titik. Anggaplah rata-rata setengahnya tertutup.
4. Taksiran luas ≈ (petak penuh + ½ × petak sebagian) × luas satu petak.
5. Untuk keliling, letakkan benang menyusuri garis jiplakan, lalu ukur panjang benangnya dengan penggaris.

Pertanyaan: Bandingkan tanganmu dengan tangan anggota keluarga lain. Apakah tangan yang kelilingnya lebih panjang selalu lebih luas? Bagaimana cara membuat taksiranmu lebih teliti? (Petunjuk: apa yang terjadi jika petaknya lebih kecil?)

RINGKASAN KILAT

Bab 19 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- membedakan **keliling** dan **luas** beserta satuannya (cm dan cm^2)
- menurunkan rumus luas persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang dengan **potong-geser-tempel**
- menghitung keliling dan luas **bangun gabungan** dengan cara memotong atau menambal
- memakai **rumus Heron** untuk segitiga yang hanya diketahui ketiga sisinya
- menghitung luas poligon di kertas berpetak dengan **teorema Pick**

Istilah kunci

keliling · luas · Keliling · Luas · persegi satuan · setengah keliling · papan paku · titik letis

Rumus penting

$$L = \tfrac{1}{2} \times (a + b) \times t$$

Luas trapesium. Jumlahkan kedua sisi sejajar, kalikan dengan tinggi, lalu ambil separuhnya. Sama saja dengan rata-rata kedua sisi sejajar dikali tinggi.

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Rumus Heron. Hitung setengah keliling s. Kurangi s dengan tiap sisi, kalikan keempat bilangan itu, lalu tarik akarnya. Tidak perlu tinggi sama sekali!

$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

Teorema Pick. Hitung paku di dalam (I) dan paku yang tersentuh karet (B). Luasnya: I ditambah separuh B, lalu dikurangi satu.

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- Keliling bersatuan panjang (cm), sedangkan luas bersatuan persegi (cm^2), jadi jangan sampai tertukar.
- Tinggi segitiga harus tegak lurus terhadap alas, bukan sisi miringnya.
- Luas jajargenjang memakai tinggi, bukan sisi miring.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=19

🧩 Teka-teki untuk Bab 20

Dimas naik motor dari Jakarta ke Bandung, menempuh sekitar 150 km. Roda motornya (termasuk ban) berdiameter kira-kira 60 cm. Berapa kali roda itu berputar sepanjang perjalanan? Semua rumus di bab ini memakai sisi lurus, padahal roda tidak punya sisi lurus sama sekali!

▼ **Intip petunjuk**

Satu putaran roda menempuh jarak sepanjang **keliling lingkaran**, yaitu sekitar $3{,}14 \times \text{diameter}$. Hitung keliling roda dalam cm, ubah 150 km menjadi cm, lalu bagi. Hasilnya puluhan ribu putaran! Bab 20 mengungkap dari mana bilangan ajaib 3,14 (bilangan π) berasal.

BAB 20 · GEOMETRI & PENGUKURAN

20 Lingkaran: Bundar, Sempurna, dan Penuh Rahasia π

Mengapa keliling tutup botol, roda motor, sampai bedug masjid selalu sedikit lebih dari tiga kali garis tengahnya? Bagaimana sepotong martabak bisa membuktikan rumus luas lingkaran? Ayo menggelinding ke dunia π!

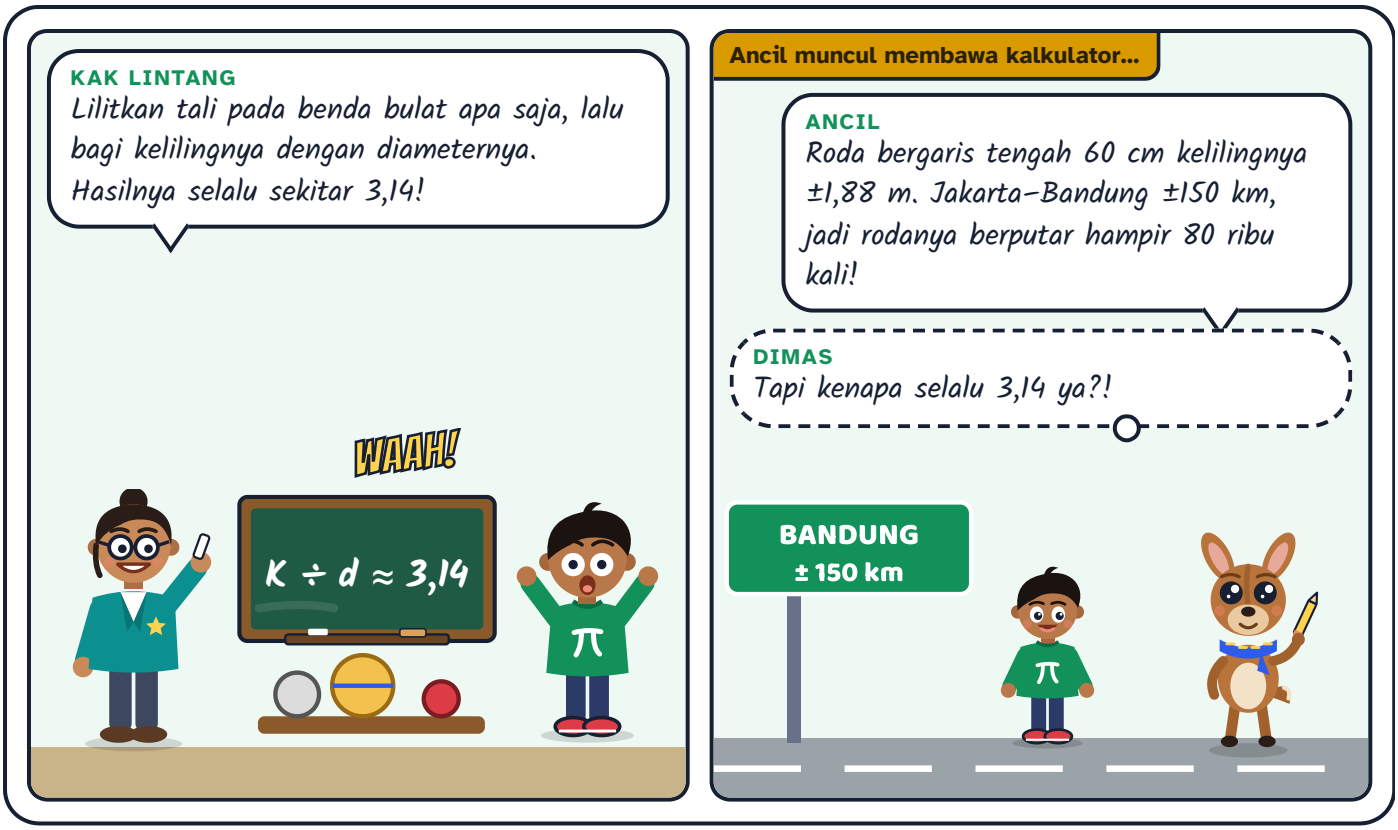
Setelah bab ini, kamu bisa

- menyebutkan **unsur-unsur lingkaran**: pusat, jari-jari, diameter, tali busur, apotema, busur, juring, dan tembereng;
- menjelaskan dari mana **bilangan π** berasal, lalu menghitung **keliling** dan **luas** lingkaran;
- menghitung **panjang busur**, **luas juring**, dan **luas tembereng**;
- memakai hubungan **sudut pusat dan sudut keliling** serta sifat **garis singgung**;
- mengubah derajat ke **radian** dan memakai rumus $s = r\theta$.

BERAPA KALI RODA BERPUTAR?

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Sebuah gelas tinggi berukuran tinggi 15 cm dengan garis tengah mulut 6,5 cm. Mana yang lebih panjang: tinggi gelas atau keliling mulut gelas?

- Tinggi gelas, jelas jauh lebih panjang.
- Keduanya hampir sama panjang.
- Keliling mulut gelas lebih panjang.
- Tidak bisa ditentukan tanpa mengukur langsung.

Jawabannya: keliling mulut gelas. Keliling lingkaran kira-kira 3,14 kali garis tengahnya: $3{,}14 \times 6{,}5 \approx 20{,}4$ cm, lebih panjang daripada tinggi 15 cm. Mata kita mudah tertipu karena keliling itu melengkung. Coba lilitkan benang di mulut gelas di rumah, lalu bentangkan di samping gelas!

20.1 Mengenal lingkaran dan unsur-unsurnya

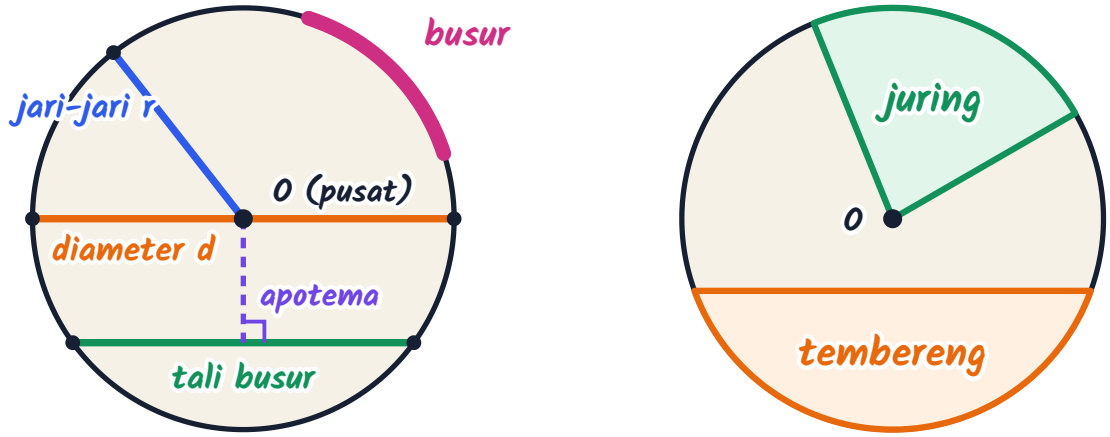
Tancapkan paku di papan, ikatkan seutas tali, lalu putar pensil di ujung tali yang lain sambil menjaga tali tetap tegang. Jadilah sebuah **lingkaran**. Setiap titik yang digambar pensil berjarak **sama** dari paku. Jangka di kotak pensilmu bekerja dengan cara yang persis sama.

DEFINISI

Lingkaran adalah kumpulan semua titik pada bidang datar yang jaraknya sama terhadap satu titik tetap. Titik tetap itu disebut **pusat** (biasanya O), dan jarak yang sama itu disebut **jari-jari** (r). Ruas garis yang melalui pusat dan menghubungkan dua titik pada lingkaran disebut **diameter** atau garis tengah: $d = 2r$.

Selain pusat, jari-jari, dan diameter, lingkaran punya beberapa "anggota keluarga" lagi:

- **Tali busur** *(chord)*: ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran. Diameter adalah tali busur terpanjang.
- **Busur** *(arc)*: bagian lengkung lingkaran di antara dua titik.
- **Apotema**: jarak terpendek dari pusat ke sebuah tali busur (tegak lurus tali busur).
- **Juring** *(sector)*: daerah yang dibatasi dua jari-jari dan sebuah busur, seperti sepotong martabak.
- **Tembereng** *(segment)*: daerah yang dibatasi sebuah tali busur dan busurnya.



Kiri: unsur yang berupa garis dan lengkungan. Kanan: dua daerah di dalam lingkaran, yaitu juring (menyentuh pusat) dan tembereng (tidak menyentuh pusat).

Bahasa sederhana · Gampangnya: **jari-jari** itu dari tengah ke pinggir, **diameter** itu dari pinggir ke pinggir lewat tengah, jadi panjangnya dua kali jari-jari. **Juring** bentuknya seperti potongan martabak (ujungnya di tengah), sedangkan **tembereng** seperti pinggiran semangka yang dipotong lurus.

AWAS JEBAKAN

Juring selalu punya "ujung lancip" di pusat lingkaran, sedangkan tembereng tidak menyentuh pusat sama sekali. Jangan tertukar: juring dibatasi **dua jari-jari + busur**, tembereng dibatasi **tali busur + busur**.

20.2 Bilangan π: rahasia semua benda bulat

Kak Lintang benar. Ambil tutup botol, piring, atau roda sepeda. Ukur kelilingnya K dengan tali, ukur juga diameternya d, lalu hitung $K \div d$. Hasilnya selalu sedikit di atas 3, sekitar 3,14. Mengapa? Karena semua

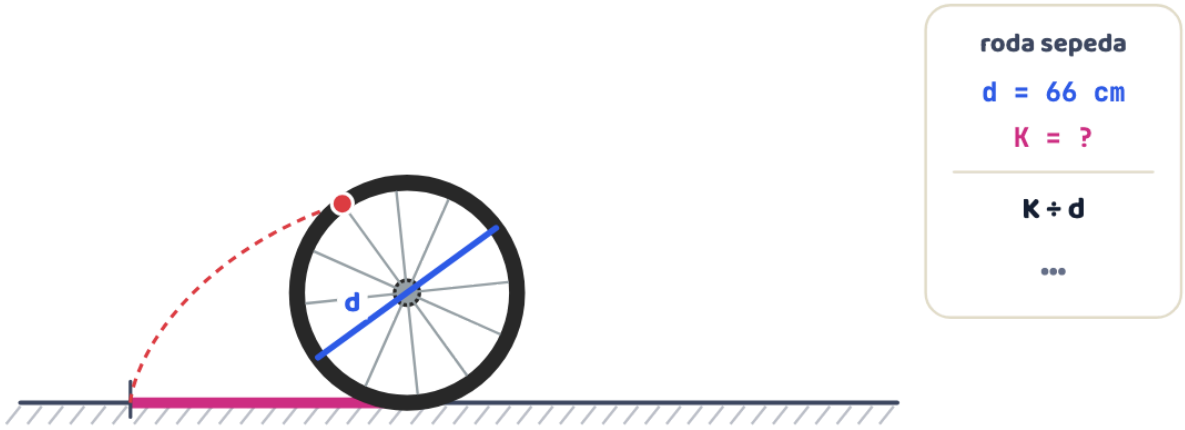
lingkaran **sebangun**: lingkaran besar hanyalah lingkaran kecil yang diperbesar. Kalau diameternya dikali 10, kelilingnya juga dikali 10, sehingga perbandingannya tidak berubah.

Perbandingan tetap itu diberi nama **π** (dibaca "pi"), huruf Yunani yang dipopulerkan oleh William Jones (1706) dan Leonhard Euler.

$$\pi = \frac{K}{d} = 3{,}14159\,26535\,89793\ldots$$

LAB MINI **Gelindingkan, lalu ukur!**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20



diameter d	keliling K	K ÷ d	Keadaan
66 cm	—	—	menggelinding… 40%

Pilih benda, lalu tekan ▶ **Jalankan** (atau seret rodanya). Benda menggelinding tepat satu putaran sambil "mengecat" kelilingnya di tanah. Setelah itu, tongkat sepanjang diameter dijajarkan di atas jejak cat. Berapa tongkat yang muat? Apakah jawabannya berubah untuk benda yang lebih besar?

Jejak cat selalu memuat **tiga** tongkat diameter ditambah sepotong kecil (sekitar 0,14 diameter). Sepotong kecil itulah yang membuat π bukan bilangan bulat. Lebih hebat lagi, π adalah bilangan **irasional**: angka di belakang komanya tidak pernah berhenti dan tidak pernah berulang membentuk pola.

Siapa dan kapan	Nilai π yang dipakai	Desimal
Babilonia (±1900–1600 SM)	$3\frac{1}{8}$	3,125
Mesir, Papirus Rhind (±1650 SM)	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$	3,1605…

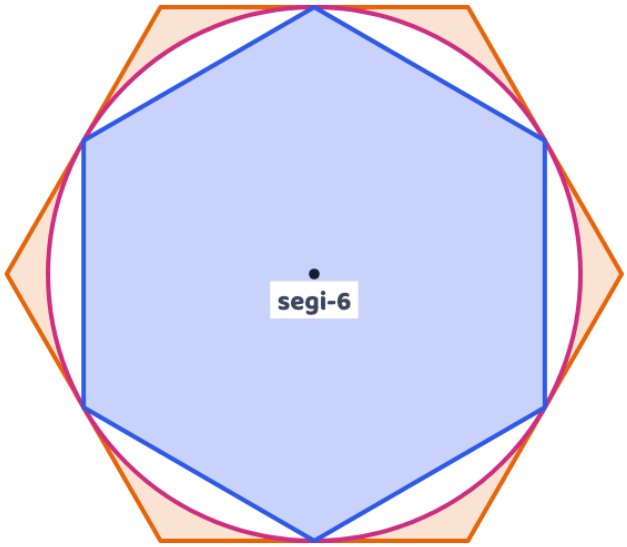
Archimedes (±250 SM)	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$	3,1408... s.d. 3,1428...
Zu Chongzhi, Tiongkok (abad ke-5)	$\frac{355}{113}$	3,1415929...
Al-Kashi, Samarkand (1424)	16 angka desimal benar	3,1415926535897932
Komputer masa kini	lebih dari 100 triliun digit	tidak pernah berhenti

TAMU DARI MASA LALU

Archimedes dari Syrakusa (±287–212 SM) tidak punya kalkulator, tetapi ia punya ide cemerlang: **mengepung** lingkaran. Ia menggambar segi-6 beraturan di dalam lingkaran dan segi-6 lain di luarnya. Keliling lingkaran pasti terletak di antara keliling kedua segi banyak itu. Lalu ia menggandakan sisinya: 12, 24, 48, sampai 96 sisi! Hasilnya, $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Batas atas $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ inilah yang sampai sekarang kita pakai sebagai pendekatan π.

LAB MINI Mengepung π ala Archimedes

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20



Segi-6 beraturan (diameter 1)

dalam: 3

luar : 3,4641

3 < π < 3,4641



Tekan ×2 sisi untuk mempersempit pagar!

Nyalakan "Kaca pembesar" untuk melihat celah di dekat pojok.

keliling dalam ÷ d	keliling luar ÷ d	lebar "pagar"
3	3,4641	0,4641

Tekan **×2 sisi** berulang kali seperti Archimedes: 6 → 12 → 24 → 48 → 96. Segi banyak biru ada di dalam lingkaran, yang oranye di luar. Perhatikan "pagar" kedua bilangan makin rapat mengepung π. Nyalakan **kaca pembesar** untuk melihat celahnya.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RESEP ARCHIMEDES TANPA Π

Misalkan diameter lingkaran 1. Tulis a_n = keliling segi-n di luar lingkaran dan b_n = keliling segi-n di dalamnya. Untuk segi-6, $a_6 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}4641$ dan $b_6 = 3$. Archimedes (dalam bahasa modern) memakai dua langkah penggandaan:

$$a_{2n} = \frac{2\,a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{(rata-rata harmonik)}, \qquad b_{2n} = \sqrt{a_{2n}\,b_n} \quad \text{(rata-rata geometrik)}.$$

Lima kali penggandaan memberi $b_{96} \approx 3{,}14103$ dan $a_{96} \approx 3{,}14271$. Hebatnya, resep ini **tidak memakai π sama sekali**, hanya akar kuadrat! Archimedes membulatkan akar-akarnya dengan hati-hati ke arah yang aman, sehingga batasnya sedikit lebih longgar: $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

20.3 Keliling dan luas lingkaran

Dari definisi $\pi = K/d$ langsung didapat rumus keliling. Rumus luasnya lebih mengejutkan: ia bisa dibuktikan dengan sepotong martabak manis!

RUMUS KELILING DAN LUAS LINGKARAN

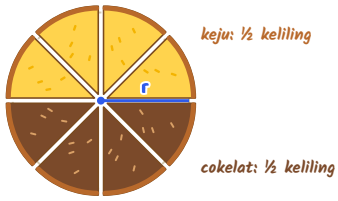
Untuk lingkaran berjari-jari r dan berdiameter $d = 2r$:

$$K = \pi d = 2\pi r \qquad\qquad L = \pi r^2$$

Dalam kata-kata: *keliling adalah π kali diameter; luas adalah π kali kuadrat jari-jari.*



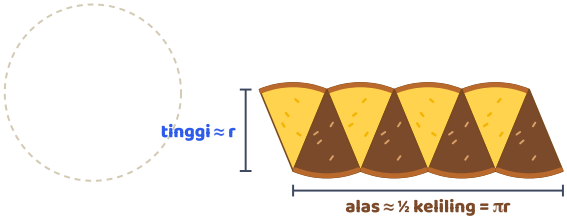
Langkah 1. Sebuah martabak manis berjari-jari r: setengah bagian atas rasa keju, setengah bagian bawah rasa cokelat. Kelilingnya $2\pi r$, jadi pinggiran keju sepanjang πr dan pinggiran cokelat juga πr.



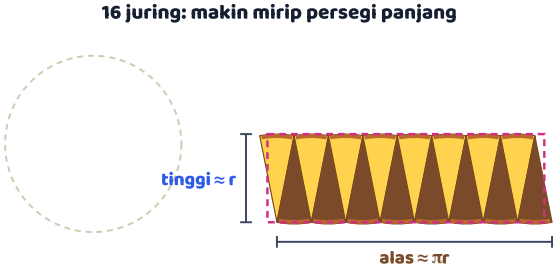
Langkah 2. Potong martabak menjadi 8 juring yang sama besar. Luas totalnya tidak berubah.



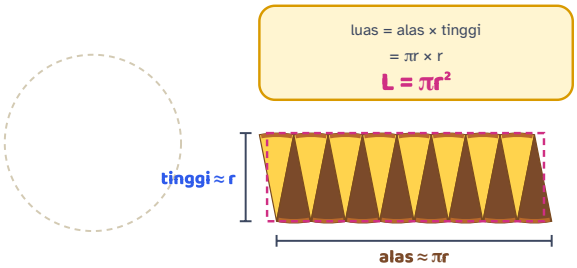
Langkah 3. Susun selang-seling: juring keju menghadap ke bawah, juring cokelat menghadap ke atas, rapat berdampingan. Juring hanya dipindah dan diputar, tidak ada yang hilang.



Langkah 4. Bentuknya mirip jajargenjang bergelombang. Alasnya terbuat dari pinggiran cokelat ($\approx \pi r$), sisi atasnya dari pinggiran keju ($\approx \pi r$), dan tingginya hampir sama dengan jari-jari r.



Langkah 5. Kalau dipotong lebih banyak, misalnya 16 juring, tepinya makin lurus dan bentuknya makin mirip persegi panjang (garis putus-putus) berukuran $\pi r \times r$.



Langkah 6. Luas persegi panjang = alas × tinggi $= \pi r \times r = \pi r^2$. Itulah luas lingkaran!

Bukti kedua: kupas bawang menjadi segitiga

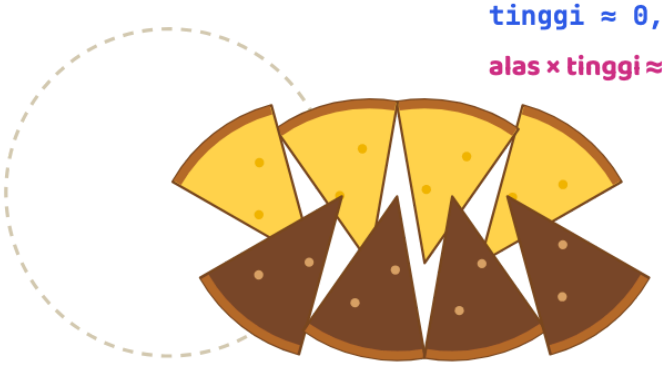
Bayangkan lingkaran tersusun atas banyak sekali gelang tipis, seperti irisan bawang. Gelang yang berjarak x dari pusat panjangnya $2\pi x$. Gunting setiap gelang di satu tempat lalu luruskan, dan susun dari yang terpendek (di pusat, panjang 0) sampai yang terpanjang (di tepi, panjang $2\pi r$). Hasilnya sebuah segitiga dengan alas $2\pi r$ dan tinggi r:

$$L = \tfrac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} = \tfrac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2.$$

Ide "potong tipis-tipis lalu jumlahkan" ini adalah benih kalkulus integral yang akan kamu temui di Bab 30.

LAB MINI Potong martabaknya, susun ulang!

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20



8 juring · geser "Susun ulang" atau tekan ▶

alas ≈ 3,0615 r (π ≈ 3,1416)

tinggi ≈ 0,9239 r (target: r)

alas × tinggi ≈ 2,8284 r²

alas (lurus) ÷ r	tinggi ÷ r	alas × tinggi ÷ r^2	luas martabak ÷ r^2
3,0615	0,9239	2,8284	3,1416

Atur banyak potongan, lalu tekan ▶ **Jalankan** atau geser slider **Susun ulang**. Dengan 8 potong, bentuknya masih bergelombang. Coba 48 potong: masihkah kamu bisa membedakannya dari persegi panjang $\pi r \times r$?

RUMUS HIDUP

Keliling & luas lingkaran

$$L = \pi r^2$$

Luas lingkaran adalah π kali jari-jari kuadrat, sedangkan kelilingnya 2π kali jari-jari.

r Jari-jari cm

L Luas lingkaran cm²

LUAS LINGKARAN

153,94

cm²

r kelipatan 7: pakai π ≈ 22/7 agar hitungan tangan bulat

Jari-jari **7** cm berarti diameter **14** cm dan keliling 2πr ≈ **43,982** cm. Luasnya πr² ≈ **153,94** cm². Coba gandakan r: keliling ikut menjadi 2 kali, tetapi luas menjadi 4 kali!

Cek satuan: keliling memakai cm (panjang), luas memakai cm² (banyaknya petak 1 cm × 1 cm).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LINGKARAN-LUAS

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Rumus luas memakai **jari-jari**, padahal soal sering memberi **diameter**. Untuk tampah bergaris tengah 56 cm, jari-jarinya 28 cm, jadi $L = \frac{22}{7} \times 28^2 = 2.464$ cm², bukan $\frac{22}{7} \times 56^2$ yang empat kali lebih besar.

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Pilih pendekatan π yang membuat hitungan ringan. Kalau jari-jari atau diameternya kelipatan 7 (7, 14, 21, 28, 35), pakai $\frac{22}{7}$ karena angka 7 langsung "dicoret". Kalau kelipatan 10 atau angka lain, pakai 3,14. Kalau soal meminta jawaban eksak, biarkan saja π-nya: $L = 49\pi$ cm² adalah jawaban yang sempurna.

CONTOH

Seratus putaran roda sepeda

Roda sepeda Ayu bergaris tengah 70 cm. Berapa meter Ayu maju jika rodanya berputar 100 kali? (Pakai $\pi = \frac{22}{7}$.)

1. Satu putaran = satu keliling: $K = \pi d = \frac{22}{7} \times 70 = 220$ cm.
2. 100 putaran: $100 \times 220 = 22.000$ cm.
3. 22.000 cm $= 220$ m.

Ayu maju 220 m. Inilah cara kerja meteran jarak (odometer) pada sepeda dan motor: menghitung putaran roda, lalu mengalikannya dengan keliling roda.

RUMUS HIDUP

Penghitung putaran roda

$$n = \frac{s}{\pi\, d}$$

Satu putaran berarti maju sejauh satu keliling. Jadi banyak putaran sama dengan jarak tempuh dibagi keliling roda.

s Jarak tempuh km

d Diameter roda cm

n Banyak putaran kali

BANYAK PUTARAN

79.577

kali

🛵 **teka-teki Ancil: Jakarta–Bandung ≈ 80 ribu putaran!**

Keliling roda = π × **60** cm ≈ **188,496** cm. Jarak **150** km = **1,5 × 10⁷** cm, jadi roda berputar sekitar **79.577** kali.

Cek satuan: samakan satuan dulu: 1 km = 100.000 cm.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PUTARAN-RODA

Tebak Dulu!

Seutas tali dililitkan pas mengelilingi khatulistiwa Bumi (±40.000 km). Tali itu diperpanjang 1 meter, lalu diatur melingkar dengan celah yang sama tinggi di mana-mana. Seberapa tinggi celah antara tali dan tanah?

- Setipis rambut, kurang dari 1 mm.
- Sekitar 16 cm, cukup untuk seekor kucing menyelinap.
- Sekitar 1 m.
- Sekitar 1 km.

Jawabannya: sekitar 16 cm! Kalau jari-jari bertambah Δr, keliling bertambah $2\pi\,\Delta r$. Jadi $2\pi\,\Delta r = 1$ m, sehingga $\Delta r = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ m. Ukuran Bumi sama sekali tidak berpengaruh: tali di sekeliling bola pingpong pun naik 16 cm jika diperpanjang 1 m.

KERJAKAN BERSAMA

Jalan setapak di tepi kolam

Kolam ikan berbentuk lingkaran berjari-jari 10 m. Di sekelilingnya dibuat jalan setapak selebar 2 m. Berapa luas jalan setapak itu? (Pakai $\pi = 3{,}14$.)

1. Jalan setapak = lingkaran besar dikurangi lingkaran kolam. Jari-jari lingkaran besar $10 + 2 = 12$ m.
2. $L = \pi \cdot 12^2 - \pi \cdot 10^2 = \pi(144 - 100) = 44\pi$.
3. $44 \times 3{,}14 = 138{,}16$ m².

Luas jalan setapak ±138,16 m². Bentuk seperti cincin ini disebut *gelang lingkaran* (anulus); luasnya selalu $\pi(R^2 - r^2)$.

ADU CEPAT Luas lingkaran kilat (awas: yang diberikan diameter!)

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bagi dulu diameternya dengan 2, lalu kuadratkan. Ketik jawaban dengan π, misalnya 36π, atau desimal dengan π ≈ 3,14.

COBA SENDIRI Satu martabak besar atau dua martabak kecil?

Penjual martabak manis menawarkan dua pilihan dengan harga sama: satu martabak bergaris tengah 30 cm, atau dua martabak bergaris tengah 20 cm. Pilihan mana yang memberi martabak lebih banyak (tebal sama)?

1. Satu martabak besar: $r = 15$, $L = \pi \cdot 15^2 = 225\pi \approx 706{,}9$ cm².
2. Dua martabak kecil: $r = 10$, $L = 2 \times \pi \cdot 10^2 = 200\pi \approx 628{,}3$ cm².
3. Selisihnya $25\pi \approx 78{,}5$ cm², kira-kira seluas satu martabak mini bergaris tengah 10 cm.

Satu martabak besar lebih banyak! Garis tengah $30 < 20 + 20$, tetapi luas bergantung pada kuadrat jari-jari, jadi yang besar "menang banyak".

MITOS

"π itu sama dengan 22/7."

FAKTA

Hanya mendekati.
$\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$
, sedangkan
$\pi = 3{,}141592\ldots$
, sudah berbeda di angka desimal ketiga. π irasional: tidak ada pecahan yang tepat sama dengannya.

MITOS

"Kalau diameternya dua kali lipat, luasnya juga dua kali lipat."

FAKTA

Kelilingnya memang dua kali, tetapi luasnya **empat** kali, karena
$\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$
. Itu sebabnya satu martabak besar bisa mengalahkan dua martabak kecil.

MITOS

"Suatu hari angka di belakang koma π akan habis atau berulang."

FAKTA

Tidak akan pernah. Johann Lambert membuktikan pada 1761 bahwa π irasional. Komputer sudah menghitung lebih dari 100 triliun digitnya tanpa menemukan ujung atau pengulangan.

20.4 Busur, juring, dan tembereng

Sepotong martabak dari 8 potongan yang sama adalah $\frac{1}{8}$ martabak. Sudut di ujungnya $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Jadi pecahannya bisa dibaca dari sudut pusat: $\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$. Busur dan luas juring mengikuti pecahan yang sama.

PANJANG BUSUR DAN LUAS JURING

Untuk juring dengan sudut pusat θ (dalam derajat) pada lingkaran berjari-jari r:

$$\text{panjang busur} = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r \qquad \text{luas juri}$$

Luas tembereng = luas juring − luas segitiga yang dibentuk dua jari-jari dan tali busurnya.

Bahasa sederhana · Cara gampang mengingatnya: tanyakan "**juring ini berapa bagian dari lingkaran?**" Juring 90° itu seperempat lingkaran, jadi busurnya seperempat keliling dan luasnya seperempat luas lingkaran.

RUMUS HIDUP

Busur, juring, dan tembereng

$$L_{\text{juring}} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi\, r^2$$

Juring adalah pecahan lingkaran. Pecahannya θ/360°, jadi luas juring = pecahan itu dikali luas lingkaran.

- θ Sudut pusat °
- r Jari-jari cm
- L_{juring} Luas juring cm²

LUAS JURING

62,83

cm²

Juring ini adalah **0,2** bagian lingkaran. Panjang busurnya ≈ **12,566** cm, luas juringnya ≈ **62,83** cm², dan luas temberengnya (juring dikurangi segitiga) ≈ **15,279** cm².

Cek satuan: busur dalam cm (panjang), juring dan tembereng dalam cm² (luas).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUSUR-JURING

CONTOH

Ujung jarum menit

Jarum menit sebuah jam dinding panjangnya 21 cm. Berapa jauh ujung jarum itu bergerak selama 20 menit? (Pakai $\pi = \frac{22}{7}$.)

1. Dalam 60 menit jarum menit berputar 360°, jadi dalam 20 menit ia berputar $\frac{20}{60} \times 360^\circ = 120^\circ$.
2. Panjang busur $= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = \frac{1}{3} \times 132 = 44$ cm.

Ujung jarum menit menempuh 44 cm. Jarum yang lebih panjang menempuh busur lebih panjang dalam waktu yang sama, walaupun sudutnya sama.

KERJAKAN BERSAMA **Kaca jendela berbentuk tembereng**

Kaca di atas pintu masjid berbentuk tembereng dari lingkaran berjari-jari 14 dm dengan sudut pusat 90°. Berapa luas kacanya? (Pakai $\pi = \frac{22}{7}$.)

1. Luas juring $= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 14^2 = \frac{1}{4} \times 616 = 154$ dm².
2. Segitiga dengan dua jari-jari yang saling tegak lurus: luas $= \frac{1}{2} \times 14 \times 14 = 98$ dm².
3. Luas tembereng $= 154 - 98 = 56$ dm².

Luas kaca 56 dm² $= 0{,}56$ m². Kunci tembereng: juring dikurangi segitiga.

MATEMATIKA NUSANTARA

Di puncak Candi Borobudur (abad ke-8–9) terdapat tiga teras berbentuk lingkaran yang mengelilingi stupa induk. Di atasnya berdiri 72 stupa berlubang: 32 stupa di teras terbawah, 24 di tengah, dan 16 di teras teratas. Agar jaraknya rata, setiap stupa harus menempati juring yang sama besar: $\frac{360^\circ}{32} = 11{,}25^\circ$, $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$, dan $\frac{360^\circ}{16} = 22{,}5^\circ$. Membagi lingkaran sama rata adalah keterampilan yang dikuasai para perancang candi lebih dari seribu tahun lalu.

20.5 Sudut pusat dan sudut keliling

Ada dua cara "memandang" sebuah busur AB. Dari pusat O, kita mendapat **sudut pusat** $\angle AOB$. Dari sebuah titik P pada lingkaran, kita mendapat **sudut keliling** $\angle APB$, yang kaki-kakinya berupa tali busur. Keduanya ternyata selalu berhubungan dengan cara yang sangat rapi.

TEOREMA SUDUT KELILING

Sudut keliling sama dengan **setengah** sudut pusat yang menghadap busur yang sama:

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

Akibatnya:

- Semua sudut keliling yang menghadap busur yang sama besarnya **sama**.
- Sudut keliling yang menghadap **diameter** selalu 90° (teorema Thales).
- Pada **segi empat tali busur** *(cyclic quadrilateral)*, jumlah dua sudut yang berhadapan selalu 180°.

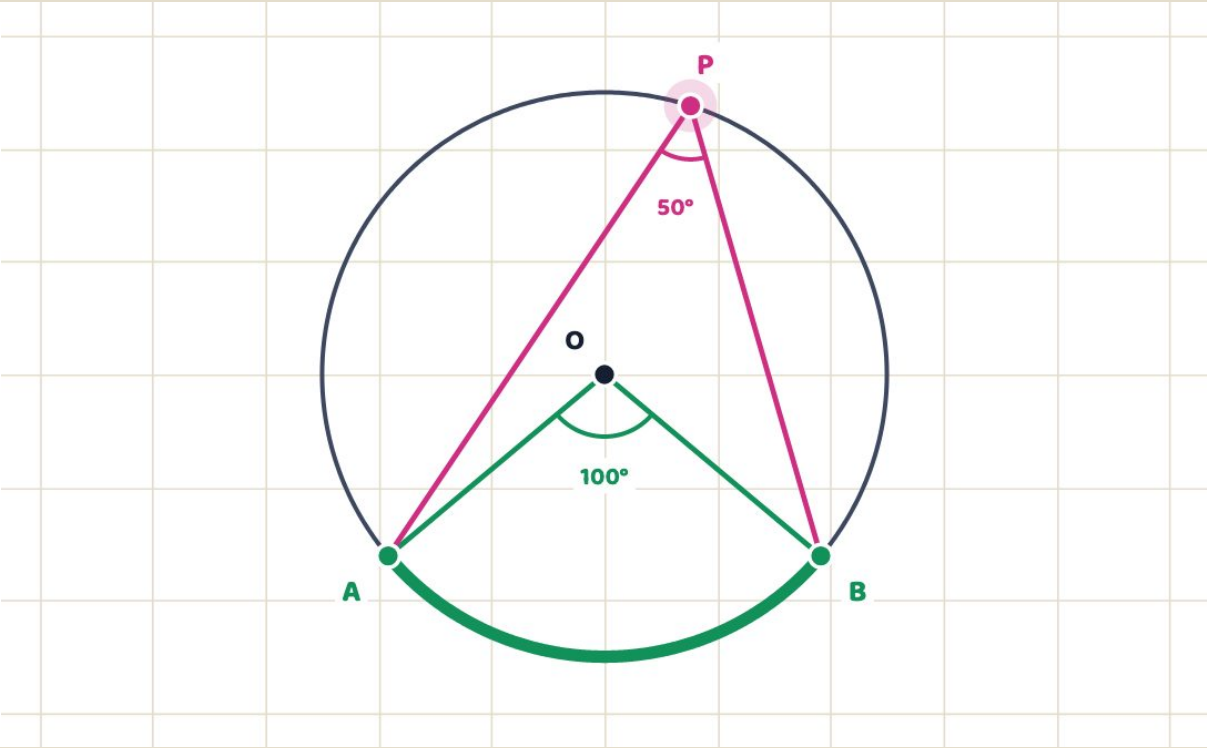
GRAFIK HIDUP

Seret P: sudut keliling selalu setengah sudut pusat

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

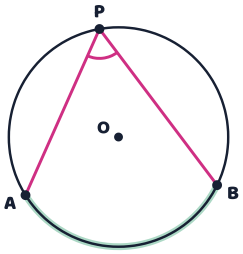
$$\angle APB = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$$



∠AOB (sudut pusat)	∠APB (diukur)	½ × ∠AOB	P berada di
100 °	50 °	50 °	busur seberang AB

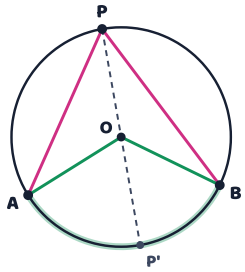
Seret titik magenta P berkeliling di busur atas: angka sudutnya tidak berubah sedikit pun! Geser slider sudut pusat sampai 180° untuk melihat teorema Thales. Lalu seret P masuk ke busur hijau: apa yang terjadi?

Mengapa selalu setengah? Buktinya hanya memakai dua fakta dari Bab 17: segitiga sama kaki punya dua sudut alas yang sama, dan sudut luar segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam yang tidak bersebelahan.



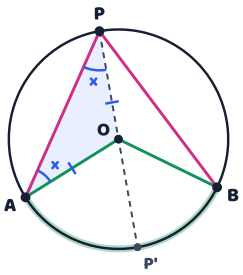
Sudut keliling ∠APB (magenta) dan sudut pusat ∠AOB menghadap busur AB yang sama (hijau).
Mau dibuktikan:
∠AOB = 2 × ∠APB

Langkah 1. Sudut keliling $\angle APB$ dan sudut pusat $\angle AOB$ sama-sama menghadap busur AB (hijau). Kita akan membuktikan $\angle AOB = 2\angle APB$.



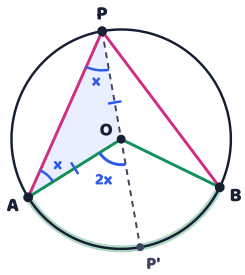
Tarik garis dari P lewat pusat O sampai menembus lingkaran di P′. Tarik juga jari-jari OA dan OB.

Langkah 2. Tarik garis dari P melalui pusat O sampai memotong lingkaran di P'. Tarik juga jari-jari OA dan OB.



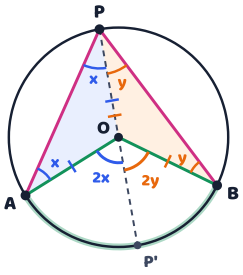
Segitiga OPA sama kaki: OP = OA = r (sama-sama jari-jari). Jadi dua sudut alasnya sama, kita sebut x.

Langkah 3. Segitiga OPA sama kaki karena $OP = OA = r$. Jadi kedua sudut alasnya sama; sebut saja x.



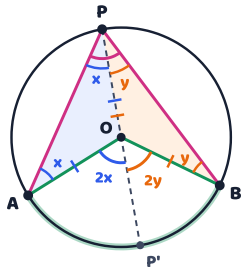
Sudut luar segitiga = jumlah dua sudut dalam yang tidak bersebelahan:
∠AOP′ = x + x = 2x

Langkah 4. $\angle AOP'$ adalah sudut luar segitiga OPA, sehingga $\angle AOP' = x + x = 2x$.



Sama untuk segitiga OPB: OP = OB, sudut alasnya y, **sehingga ∠P′OB = 2y.**

Langkah 5. Dengan cara yang sama, segitiga OPB sama kaki dengan sudut alas y, dan $\angle P'OB = 2y$.



Terbukti! Berapa pun letak P di busur besar, hasilnya sama.

∠AOB = 2x + 2y = 2(x + y)
dan ∠APB = x + y, jadi
∠AOB = 2 ∠APB

Langkah 6. $\angle AOB = 2x + 2y = 2(x + y) = 2\angle APB$. Terbukti!

TAMU DARI MASA LALU

Menurut tradisi Yunani, Thales dari Miletus (±624–546 SM) adalah orang pertama yang **membuktikan** bahwa sudut keliling yang menghadap diameter selalu siku-siku. Konon ia begitu gembira sampai mempersembahkan seekor sapi sebagai syukuran. Teorema kecil ini dianggap salah satu bukti matematika tertua yang tercatat.

TRIK KAK LINTANG

"Mata di pusat melihat dua kali lebih lebar." Pusat lebih dekat ke busur, jadi sudut pandangnya dua kali sudut pandang dari tepi lingkaran. Untuk mencari sudut keliling, cari dulu sudut pusat yang menghadap busur yang sama, lalu bagi dua.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pastikan sudut keliling dan sudut pusat menghadap busur yang **sama**. Jika titik P berada pada busur AB itu sendiri (busur kecil), maka $\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$, bukan $\frac{1}{2}\angle AOB$.

KERJAKAN BERSAMA **Berburu sudut**

Titik A, B, C, D terletak pada lingkaran berpusat O dengan $\angle AOB = 130^\circ$. Titik C berada pada busur besar AB, sedangkan D pada busur kecil AB. Tentukan $\angle ACB$ dan $\angle ADB$.

1. $\angle ACB$ menghadap busur kecil AB, yang juga dihadap sudut pusat 130°. Jadi $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ$.

2. $ACBD$ adalah segi empat tali busur, dan C, D saling berhadapan. Jadi $\angle ADB = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

3. Cek dengan cara lain: $\angle ADB$ menghadap busur besar yang sudut pusatnya $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$, jadi $\angle ADB = \frac{1}{2} \times 230^\circ = 115^\circ$. Cocok!

$\angle ACB = 65^\circ$ dan $\angle ADB = 115^\circ$. Teorema sudut keliling tetap berlaku untuk sudut pusat lebih dari 180°.

🚀 **LANJUT · IB & OLIMPIADE**

SEGI EMPAT TALI BUSUR DAN TEOREMA PTOLEMY

Jika $ABCD$ segi empat tali busur, $\angle A$ menghadap busur BCD dan $\angle C$ menghadap busur BAD. Kedua busur itu bersama-sama membentuk lingkaran penuh, jadi $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$. Kebalikannya juga benar, dan inilah alat favorit olimpiade untuk membuktikan bahwa empat titik terletak pada satu lingkaran.

Ptolemy (±150 M) menemukan hubungan panjang yang indah: pada segi empat tali busur, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. Terapkan pada persegi panjang bersisi a, b, dan diagonal c: $c \cdot c = a \cdot a + b \cdot b$. Teorema Pythagoras muncul lagi!

20.6 Garis singgung lingkaran

Sebuah roda yang menggelinding di jalan hanya menyentuh jalan di satu titik. Garis yang menyentuh lingkaran tepat di satu titik disebut **garis singgung** *(tangent)*, dan titik sentuhnya disebut **titik singgung**.

SIFAT GARIS SINGGUNG

- Garis singgung selalu **tegak lurus** terhadap jari-jari di titik singgungnya.
- Dari sebuah titik T di luar lingkaran, dapat ditarik tepat dua garis singgung, dan keduanya **sama panjang**:

$$TS_1 = TS_2 = \sqrt{OT^2 - r^2}$$

Mengapa tegak lurus dan sama panjang?

Tegak lurus. Semua titik pada garis singgung, kecuali titik singgung S, berada di luar lingkaran, jadi jaraknya ke O lebih dari r. Artinya OS adalah jarak *terpendek* dari O ke garis itu. Jarak terpendek dari sebuah titik ke garis selalu diukur tegak lurus, jadi $OS \perp$ garis singgung.

Sama panjang. Segitiga OS_1T dan OS_2T sama-sama siku-siku (di S_1 dan S_2), punya sisi miring yang sama (OT), dan kaki yang sama ($OS_1 = OS_2 = r$). Menurut Pythagoras, $TS_1 = \sqrt{OT^2 - r^2} = TS_2$.

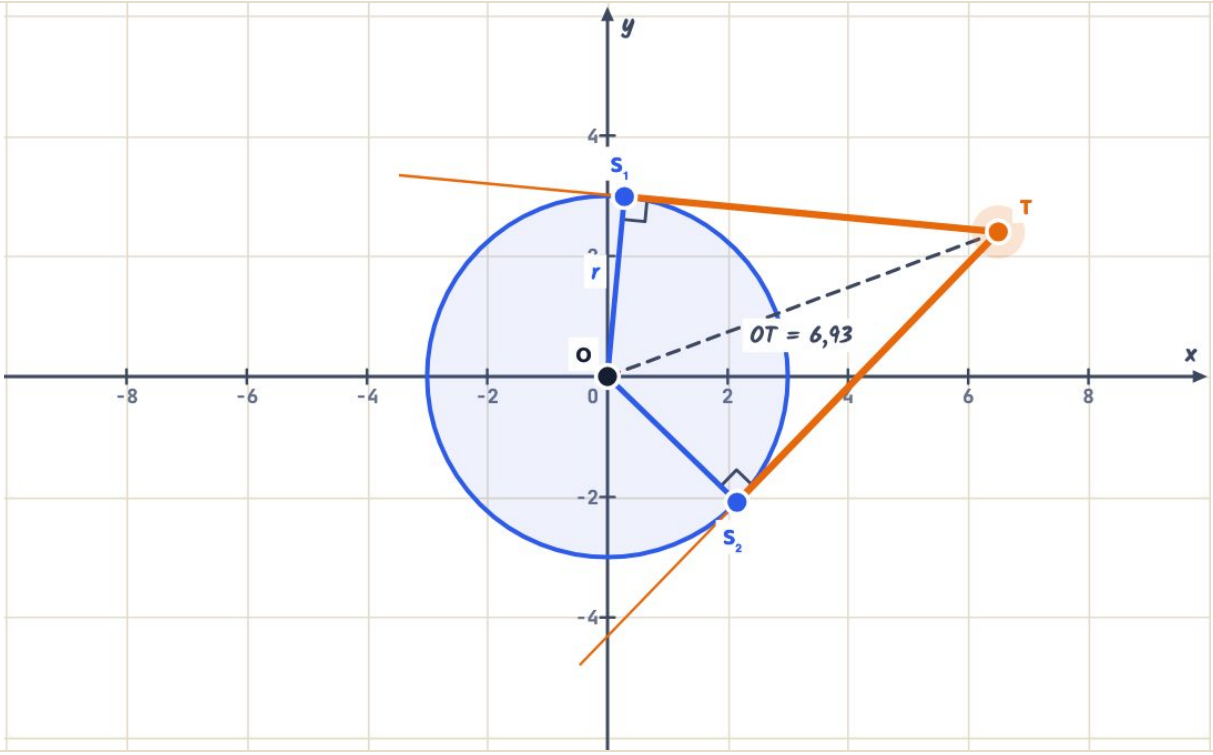
GRAFIK HIDUP

Dua garis singgung dari satu titik

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

$$TS_1 = TS_2 = \sqrt{OT^2 - r^2}$$

$$TS_1 = TS_2 = \sqrt{6{,}93^2 - 3^2} \approx 6{,}25$$



OT	$TS_1 = TS_2$	$r^2 + TS^2$	OT^2
6,93	6,25	48,01	48,01

Seret titik oranye T. Kedua ruas oranye selalu sama panjang, dan tanda siku di S_1, S_2 tidak pernah hilang. Coba dorong T masuk ke dalam lingkaran: mengapa ia tertahan?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Panjang garis singgung dari T **bukan** $OT - r$. Ruas $OT - r$ adalah jarak T ke titik terdekat pada lingkaran, yang letaknya di garis OT, bukan di garis singgung. Hitunglah dengan Pythagoras: $\sqrt{OT^2 - r^2}$.

CONTOH **Panjang garis singgung**

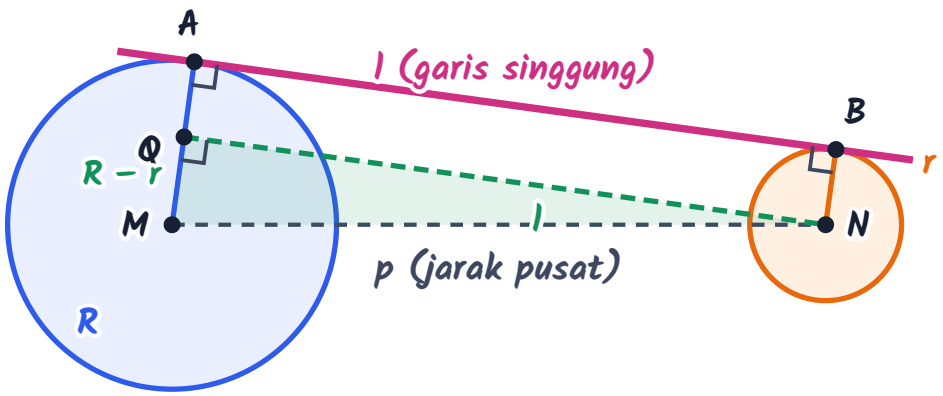
Titik T berjarak 10 cm dari pusat lingkaran berjari-jari 6 cm. Berapa panjang garis singgung dari T ke lingkaran?

1. Jari-jari OS tegak lurus garis singgung TS, jadi segitiga OST siku-siku di S dengan sisi miring $OT = 10$.

2. $TS = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm.

Panjang garis singgung 8 cm. Segitiga 6–8–10 adalah tripel 3–4–5 yang dikali 2.

Dua lingkaran juga bisa punya garis singgung bersama, yang disebut **garis singgung persekutuan**. Sabuk karet pada dua roda puli mesin penggiling padi mengikuti garis singgung persekutuan **luar**. Untuk jari-jari R dan r dengan jarak pusat p:



Geser garis singgung AB sejajar sampai melewati pusat N: terbentuk segitiga siku-siku MQN dengan sisi miring p, kaki $R - r$, dan kaki l.

$$l_{\text{luar}} = \sqrt{p^2 - (R - r)^2} \qquad l_{\text{dalam}} = \sqrt{p^2 - (R +$$

COBA SENDIRI **Sabuk mesin penggiling padi**

Dua roda puli berjari-jari 9 cm dan 4 cm dihubungkan sabuk karet. Jarak kedua pusatnya 13 cm. Berapa panjang bagian sabuk yang lurus di antara kedua roda (satu sisi)?

1. Bagian lurus sabuk mengikuti garis singgung persekutuan luar: $l = \sqrt{p^2 - (R-r)^2}$.
2. $l = \sqrt{13^2 - (9-4)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Setiap bagian lurus sabuk panjangnya 12 cm. Untuk garis singgung persekutuan dalam (sabuk menyilang membentuk huruf X), ganti $R - r$ dengan $R + r$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

KUASA TITIK

Tarik garis apa saja dari titik T di luar lingkaran yang memotong lingkaran di A dan B. Ajaibnya, hasil kali $TA \cdot TB$ selalu sama, berapa pun kemiringan garisnya, dan sama dengan kuadrat garis singgungnya:

$$TA \cdot TB = TS^2 = OT^2 - r^2.$$

Bilangan tetap ini disebut **kuasa titik** T. Untuk titik P di dalam lingkaran, dua tali busur AB dan CD yang melalui P memenuhi $PA \cdot PB = PC \cdot PD = r^2 - OP^2$. Contoh: $OT = 10$, $r = 6$, jadi $TS^2 = 64$. Jika sebuah garis dari T memotong lingkaran pertama kali pada jarak $TA = 4$, titik potong keduanya pasti di $TB = 64 : 4 = 16$. Buktinya memakai segitiga sebangun dan teorema sudut keliling (coba di Tangga Latihan Lv 6!).

20.7 Radian: mengukur sudut dengan jari-jari

Mengapa satu putaran 360°? Angka itu warisan bangsa Babilonia yang gemar bilangan 60. Ada cara yang lebih "alami": ukur sudut dengan **berapa jari-jari** panjang busur yang dihadapinya.

DEFINISI

Sudut **satu radian** adalah sudut pusat yang menghadap busur sepanjang jari-jari. Satu putaran penuh menghadap busur sepanjang keliling $2\pi r$, yaitu 2π kali jari-jari, jadi

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \qquad 180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \frac{18}{}$$

Dalam radian, rumus busur dan juring menjadi sangat ringkas, tanpa "$\frac{\theta}{360^\circ}$":

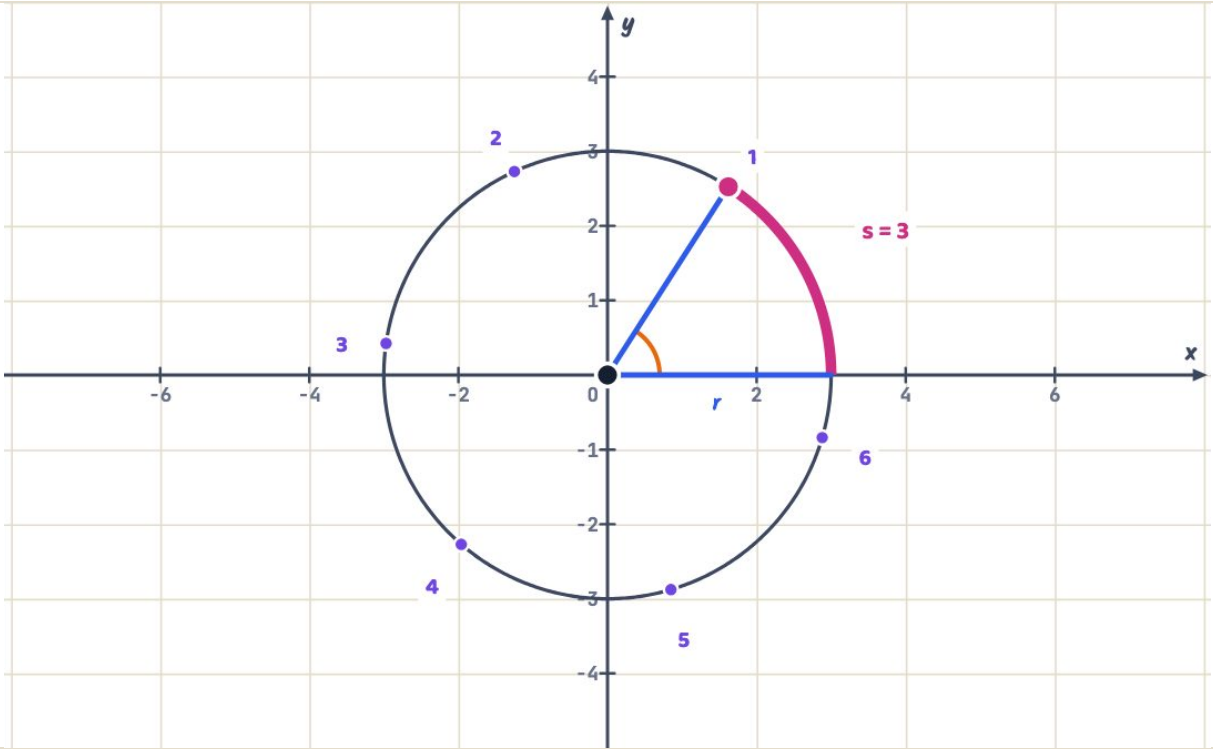
$$s = r\theta \qquad L_{\text{juring}} = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad (\theta \text{ dalam radian})$$

GRAFIK HIDUP **Satu radian: busur sepanjang jari-jari**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

$$s = r\,\theta \quad (\theta \text{ dalam radian})$$

$$s = r\,\theta = 3 \times 1 = 3 \qquad \theta = 1 \text{ rad} \approx 57{,}3^\circ$$



θ = 1 rad: busur tepat sepanjang jari-jari (≈ 57,3°)

θ (radian)	θ (derajat)	busur s = rθ	s ÷ r
1	57,3 °	3	1

Tekan ▶ **Jalankan**. Titik ungu menandai 1, 2, 3, ..., 6 radian. Berapa jari-jari yang muat di sekeliling lingkaran? Sedikit lebih dari 6, tepatnya $2\pi \approx 6{,}28$. Ubah r: apakah letak titik-titik ungu (sebagai sudut) ikut berubah?

TRIK KAK LINTANG

Ingat satu pasangan saja: **180° = π rad**. Dari derajat ke radian, kalikan $\frac{\pi}{180^\circ}$; dari radian ke derajat, kalikan $\frac{180^\circ}{\pi}$. Contoh: $60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad, dan $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ$.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Kalkulator punya mode DEG (derajat) dan RAD (radian), dan hasil $\sin 30$ di kedua mode sangat berbeda. Rumus $s = r\theta$ dan $L = \frac{1}{2}r^2\theta$ hanya berlaku jika θ dalam radian; kalau sudutnya dalam derajat, ubah dulu.

RUMUS HIDUP

Kelajuan roda dari putaran per menit

$$v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$$

Satu putaran sama dengan 2π radian. Kalikan banyak putaran per detik dengan 2π untuk mendapat kecepatan sudut ω, lalu kalikan jari-jari untuk mendapat kelajuan tepi roda.

- n Putaran per menit `rpm`
- r Jari-jari roda `m`
- v Kelajuan `km/jam`

KELAJUAN

56,5

km/jam

🛵 **kelajuan wajar motor di jalan kota**

500 putaran per menit berarti kecepatan sudut ω ≈ **52,36** rad/s. Kelajuan titik di tepi roda v = ωr ≈ **15,708** m/s ≈ **56,5** km/jam. Itulah juga kelajuan motor di jalan (kalau rodanya tidak selip).

Cek satuan: rpm ÷ 60 = putaran per detik; 1 putaran = 2π rad; 1 m/s = 3,6 km/jam.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RODA-RPM

COBA SENDIRI **Seberapa cepat roda motor berputar?**

Motor melaju 60 km/jam. Jari-jari rodanya 0,3 m. Berapa kecepatan sudut roda (rad/s) dan berapa putaran per menit?

1. 60 km/jam $= \frac{60.000\ \text{m}}{3.600\ \text{s}} \approx 16{,}67$ m/s.
2. $\omega = \frac{v}{r} = \frac{16{,}67}{0{,}3} \approx 55{,}6$ rad/s.
3. Satu putaran $= 2\pi$ rad, jadi putaran per detik $= \frac{55{,}6}{2\pi} \approx 8{,}84$, dan per menit $\approx 8{,}84 \times 60 \approx 530$ rpm.

Roda berputar ±55,6 rad/s atau sekitar 530 putaran per menit. Cek dengan Rumus Hidup di atas: $n = 530$, $r = 0{,}3$ memberi ±59,9 km/jam.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA MATEMATIKAWAN CINTA RADIAN?

Untuk sudut kecil, busur dan tali busurnya hampir sama panjang, sehingga $\sin\theta \approx \theta$ **asalkan θ dalam radian**. Contoh: $\sin(0{,}01) = 0{,}0099998\ldots$. Dalam derajat, hubungan itu berantakan: $\sin 1^\circ \approx 0{,}01745$, bukan 1. Karena itu, di kalkulus (Bab 28) turunan $\sin x$ adalah $\cos x$ hanya jika x dalam radian. Radian bukan satuan aneh, melainkan cara sudut "berbicara" dengan panjang.

Speedometer motor

Alat ini menghitung putaran roda, lalu mengalikannya dengan keliling roda. Ganti ban dengan ukuran berbeda, angkanya bisa meleset.

Bedug masjid

Kulit bedug dipotong melingkar sedikit lebih lebar daripada mulut bedug agar tepinya bisa dipasak di sekeliling badan bedug.

Jam Gadang

Setiap 5 menit, jarum menit jam mana pun, termasuk Jam Gadang di Bukittinggi, menyapu juring 30°.

Bundaran lalu lintas

Kendaraan di bundaran menempuh busur, bukan keliling penuh. Jalur luar lebih panjang daripada jalur dalam untuk sudut yang sama.

Satelit cuaca

Satelit geostasioner menempuh 2π radian dalam ±24 jam, sama dengan putaran Bumi, sehingga tampak diam di atas Indonesia.

Membagi martabak

Membagi martabak menjadi 8 sama besar berarti setiap potong punya sudut pusat 45°, sedangkan 6 potong berarti 60°.

Cek Cepat

Keliling lingkaran yang diameternya 14 cm adalah... ($\pi = \frac{22}{7}$)

- 22 cm
- 154 cm
- 44 cm
- 88 cm

Sudut pusat $\angle AOB = 140°$. Besar sudut keliling $\angle ACB$ dengan C pada busur besar AB adalah...

- 70°
- 140°
- 280°
- 110°

Satu radian kira-kira sama dengan...

- 1°
- 3,14°
- 180°
- 57,3°

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: berburu π di dapur

Bahan: benang atau tali rafia, penggaris atau meteran jahit, spidol, dan 5 benda bulat (tutup toples, piring, gelas, tutup panci, uang logam).

1. Lilitkan benang satu kali tepat di tepi benda pertama. Tandai titik pertemuan ujungnya dengan spidol.
2. Bentangkan benang dan ukur panjangnya sampai tanda: itulah keliling K.
3. Ukur diameter d: jarak terlebar dari tepi ke tepi yang melewati tengah benda.
4. Hitung $K \div d$ dengan kalkulator HP dan catat dalam tabel.
5. Ulangi untuk semua benda, lalu hitung rata-ratanya.

Pertanyaan: Berapa rata-rata $K \div d$ milikmu? Benda mana yang hasilnya paling dekat dengan 3,14, dan mengapa benda kecil (seperti uang logam) biasanya memberi hasil yang paling meleset?

RINGKASAN KILAT Bab 20 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menyebutkan **unsur-unsur lingkaran**: pusat, jari-jari, diameter, tali busur, apotema, busur, juring, dan tembereng
- menjelaskan dari mana **bilangan π** berasal, lalu menghitung **keliling** dan **luas** lingkaran
- menghitung **panjang busur**, **luas juring**, dan **luas tembereng**
- memakai hubungan **sudut pusat dan sudut keliling** serta sifat **garis singgung**
- mengubah derajat ke **radian** dan memakai rumus $s = r\theta$

Istilah kunci

lingkaran · Lingkaran · pusat · jari-jari · diameter · Tali busur · Busur · Apotema · Juring · Tembereng · π · irasional · sudut pusat · sudut keliling · segi empat tali busur

garis singgung

Rumus penting

$$L = \pi r^2$$

Keliling & luas lingkaran. Luas lingkaran adalah π kali jari-jari kuadrat, sedangkan kelilingnya 2π kali jari-jari.

$$n = \frac{s}{\pi d}$$

Penghitung putaran roda. Satu putaran berarti maju sejauh satu keliling. Jadi banyak putaran sama dengan jarak tempuh dibagi keliling roda.

$$L_{\text{juring}} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

Busur, juring, dan tembereng. Juring adalah pecahan lingkaran. Pecahannya θ/360°, jadi luas juring = pecahan itu dikali luas lingkaran.

$$v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$$

Kelajuan roda dari putaran per menit. Satu putaran sama dengan 2π radian. Kalikan banyak putaran per detik dengan 2π untuk mendapat kecepatan sudut ω, lalu kalikan jari-jari untuk mendapat kelajuan tepi roda.

Jangan sampai terjebak

- Juring selalu punya "ujung lancip" di pusat lingkaran, sedangkan tembereng tidak menyentuh pusat sama sekali.
- Rumus luas memakai jari-jari, padahal soal sering memberi diameter.
- Pastikan sudut keliling dan sudut pusat menghadap busur yang sama.

Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=20

Teka-teki untuk Bab 21

Tandon air di atap rumah Ayu berbentuk tabung. Alasnya lingkaran bergaris tengah 1 m dan tingginya 1,2 m. Kalau terisi penuh, berapa liter air yang ditampungnya? Cukupkah untuk 4 orang yang masing-masing memakai ±100 liter sehari?

▼ Intip petunjuk

Hitung dulu luas alasnya dengan rumus luas lingkaran (jari-jarinya 0,5 m!), lalu kalikan dengan tinggi tandon. Ingat, 1 m^3 = 1.000 liter. Bab 21 akan membahas volume tabung, kerucut, bola, dan bangun ruang lainnya.

BAB 21 · GEOMETRI & PENGUKURAN

21 Bangun Ruang: Berapa Isinya, Seberapa Luas Kulitnya?

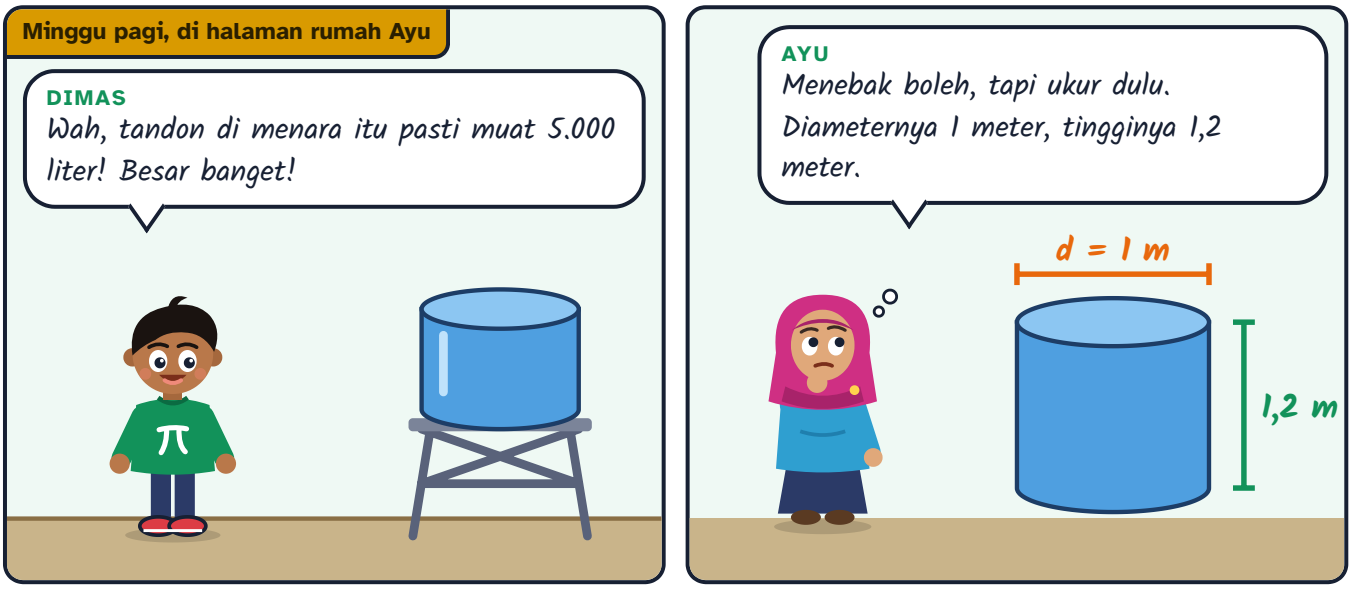
Berapa liter air di tandon di atas rumahmu? Mengapa tumpeng hanya sepertiga dari "tabung" nasi yang sama tinggi? Di bab ini kamu akan membungkus, menuang, memotong, dan memperbesar bangun ruang.

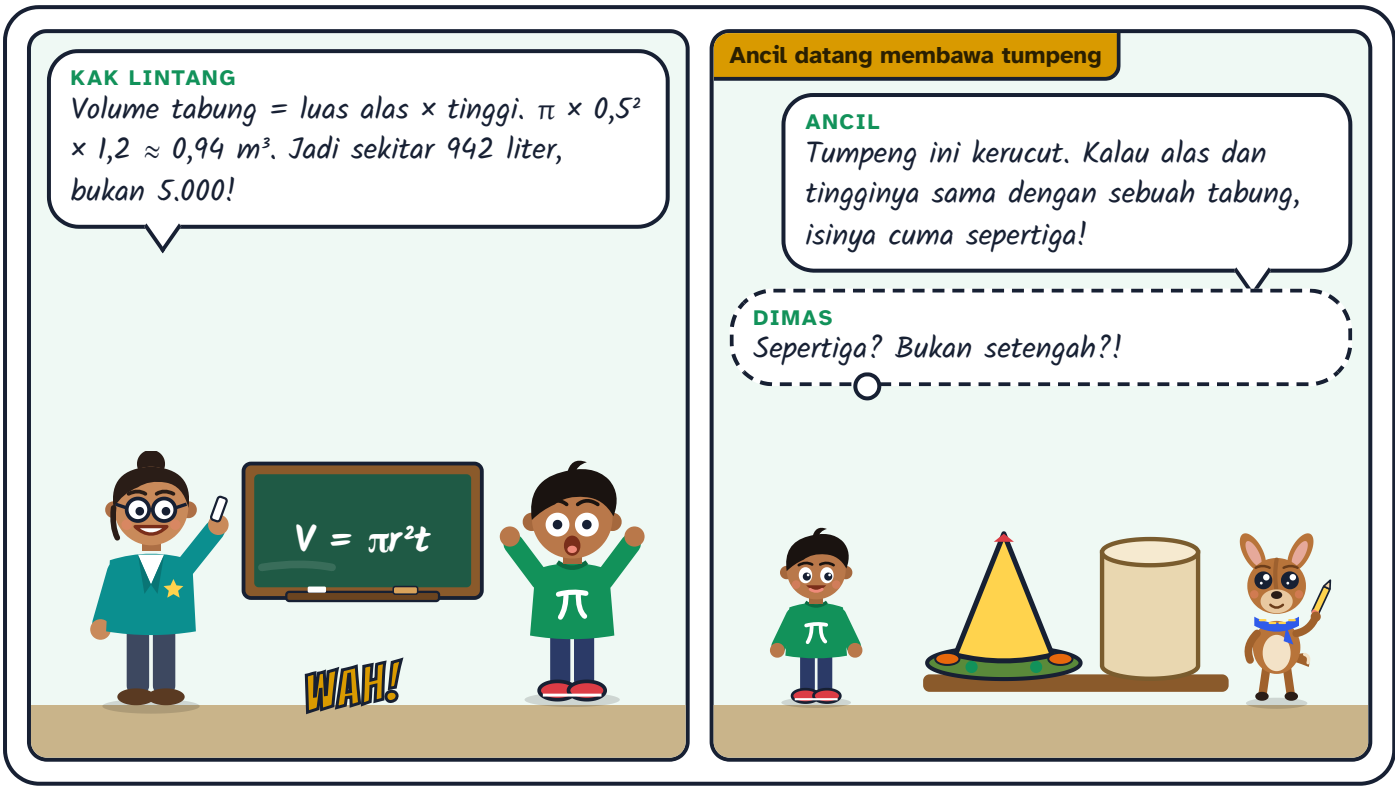
Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **jaring-jaring** kubus, balok, prisma, tabung, dan kerucut;
- menghitung **luas permukaan** dan **volume** kubus, balok, prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola, lengkap dengan satuan liter;
- menjelaskan mengapa volume limas dan kerucut tepat **sepertiga** dari prisma dan tabung pasangannya;
- memakai **faktor skala** k: luas menjadi k^2 kali, volume menjadi k^3 kali, juga pada bangun gabungan;
- memeriksa **rumus Euler** $T - R + S = 2$ pada berbagai polihedron.

MISTERI TANDON DI MENARA AIR

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Sebuah bak mandi berbentuk kubus berukuran 1 m × 1 m × 1 m. Berapa liter air yang dapat ditampungnya jika penuh?

100 liter, karena 1 m = 100 cm.

1.000 liter.

10.000 liter.

1.000.000 liter.

Jawabannya: 1.000 liter. Satu liter adalah isi kubus bersisi 10 cm (1 dm). Kubus bersisi 1 m memuat $10 \times 10 \times 10 = 1.000$ kubus seperti itu. Jebakannya: mengubah satuan panjang cukup dikali 100, tetapi satuan **volume** berubah tiga kali lipat lebih cepat: $1\ \text{m}^3 = 100^3\ \text{cm}^3 = 1.000.000\ \text{cm}^3$.

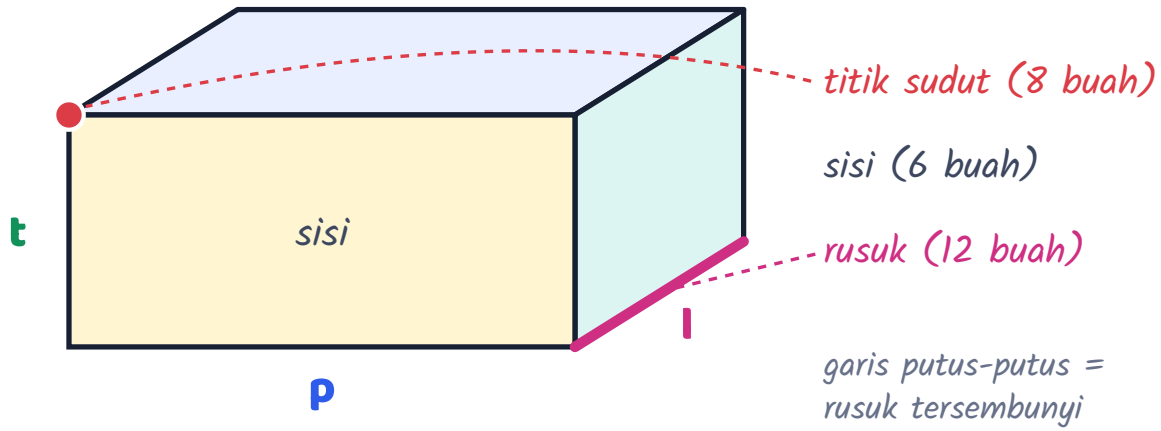
21.1 Kubus dan balok: membungkus dan mengisi

Kardus mi instan, kotak susu, dadu, dan lemari: semuanya **bangun ruang**, benda tiga dimensi yang punya panjang, lebar, dan tinggi. Untuk setiap bangun ruang ada dua pertanyaan besar. Berapa banyak karton yang dibutuhkan untuk **membungkusnya**? Berapa banyak isi yang **muat di dalamnya**?

DEFINISI

Bangun ruang dibatasi oleh **sisi** (bidang), **rusuk** (garis pertemuan dua sisi), dan **titik sudut** (pojok tempat rusuk-rusuk bertemu).

- **Luas permukaan** adalah jumlah luas semua sisinya, yaitu luas "kulit" atau luas **jaring-jaring**nya. Satuannya cm^2, m^2, dan seterusnya.
- **Volume** adalah banyaknya kubus satuan yang tepat mengisi bangun itu. Satuannya cm^3, m^3, atau liter.



Balok $p \times l \times t$: 6 sisi berbentuk persegi panjang yang berpasangan, 12 rusuk, dan 8 titik sudut.

Bahasa sederhana · Bayangkan kamu membungkus kado berbentuk kotak. Kertas kado yang kamu pakai mengukur **luas permukaan**. Kalau kotaknya kamu isi kelereng atau air, banyaknya isi itu mengukur **volume**. Bungkus = luas, isi = volume.

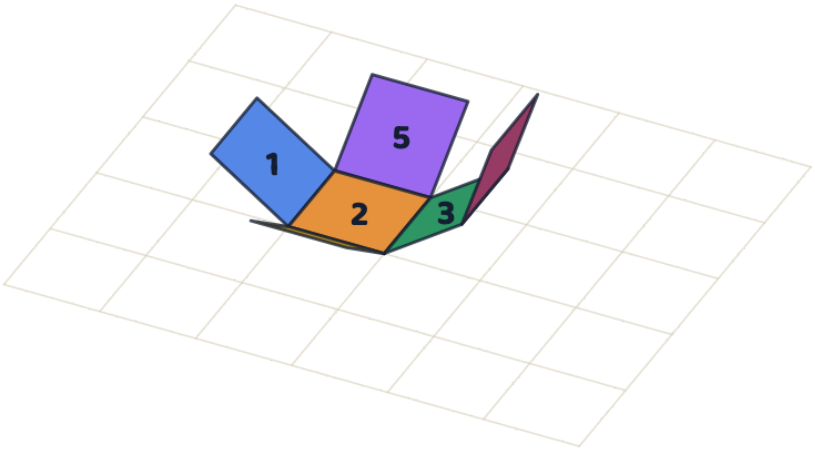
Gunting rusuk-rusuk sebuah kardus lalu bentangkan: kamu mendapat **jaring-jaring**. Kubus punya tepat **11** jaring-jaring yang berbeda. Tetapi tidak setiap susunan enam persegi bisa dilipat menjadi kubus. Coba sendiri!

LAB MINI **Lipat jaring-jaring kubus**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

Pola 1 dari 15

Melipat… 36°



✋ *seret untuk memutar*

Sudut lipat
36 °

Hasil
sedang melipat

Pilih sebuah pola. **Tebak dulu** apakah pola itu akan menutup menjadi kubus, lalu tekan ▶ **Jalankan** atau geser slider sudut lipat. Seret gambar untuk memutar. Ada 15 pola: 11 jaring-jaring kubus dan 4 jebakan. Bisakah kamu menemukan keempat jebakannya, dan apa kesamaan mereka?

☆ **RUMUS KUBUS DAN BALOK**

Bangun	Luas permukaan	Volume
Kubus bersisi s	$L = 6s^2$	$V = s^3$
Balok $p \times l \times t$	$L = 2(pl + pt + lt)$	$V = p \times l \times t$

Volume balok bercerita: ada $p \times l$ kubus satuan di lapisan dasar, dan ada t lapisan.

RUMUS HIDUP

Volume dan luas permukaan balok

$$V = p \times l \times t$$

Isi balok = banyaknya kubus satuan = panjang × lebar × tinggi. Kulitnya terdiri atas enam persegi panjang yang berpasangan.

p Panjang cm | l Lebar cm | t Tinggi cm | V Volume cm³

VOLUME
9.000
cm³

Kardus **30** × **20** × **15** cm memuat **9.000** cm³ = **9** liter. Kartonnya (tanpa lidah lem) seluas 2(pl + pt + lt) = **2.700** cm².

Cek satuan: cm × cm × cm = cm³, dan 1.000 cm³ = 1 liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BALOK-KARDUS

CONTOH

Kotak nasi untuk syukuran

Kotak nasi berbentuk balok berukuran 20 cm × 15 cm × 6 cm. Berapa volumenya, dan berapa luas karton untuk membuatnya (abaikan lidah lem)?

1. Volume: $V = 20 \times 15 \times 6 = 1.800$ cm³, kira-kira 1,8 liter.
2. Tiga pasang sisi: $pl = 300$, $pt = 120$, $lt = 90$ cm².
3. Luas permukaan: $L = 2(300 + 120 + 90) = 2 \times 510 = 1.020$ cm².

Volume 1.800 cm³ dan luas karton 1.020 cm². Perhatikan satuannya: volume memakai cm³, luas memakai cm².

TRIK KAK LINTANG

Ingat satu kubus ajaib: **kubus bersisi 10 cm memuat tepat 1 liter.** Dari situ semuanya mengalir: 1 cm^3 = 1 mL, 1 dm^3 = 1 L, dan 1 m^3 = 1.000 L. Setiap naik satu "anak tangga" satuan panjang (×10), volumenya naik ×1.000.

ADU CEPAT **Kubus kilat: dari volume ke luas**

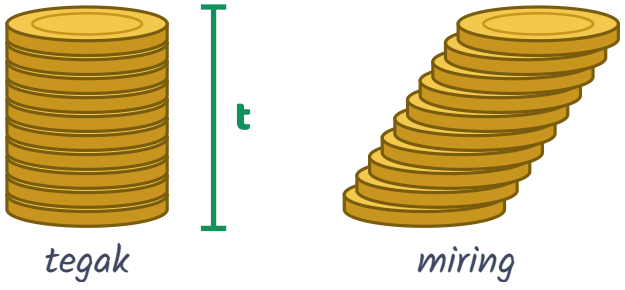
ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari dulu rusuknya: bilangan yang dipangkatkan tiga menghasilkan V (mis. 64 = 4^3). Lalu luas permukaan = 6 × $rusuk^2$.

21.2 Prisma dan tabung: luas alas kali tinggi

Ambil satu koin dan tumpuk sepuluh koin yang sama di atasnya. Isi tumpukan itu = isi satu koin × banyaknya lapisan. Begitulah cara kerja semua **prisma**: bangun ruang yang alas dan tutupnya kongruen dan sejajar, dengan "lapisan" yang sama di setiap ketinggian. Balok adalah prisma beralas persegi panjang. **Tabung** adalah "prisma" beralas lingkaran.



Sepuluh koin yang sama.

Didorong miring pun,
isinya tidak berubah.

V = luas alas × t

Prinsip Cavalieri: dua bangun yang luas irisannya sama di setiap ketinggian punya volume yang sama, walaupun yang satu miring.

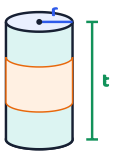
VOLUME PRISMA DAN TABUNG

Untuk setiap prisma (tegak maupun miring) dengan luas alas L_a dan tinggi t:

$$V = L_a \times t, \qquad V_{\text{tabung}} = \pi r^2 t$$

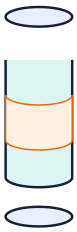
Luas permukaan tabung: $L = 2\pi r^2 + 2\pi rt$ (dua tutup lingkaran + selimut).

Dari mana rumus luas tabung? Buka saja kalengnya seperti di animasi ini.



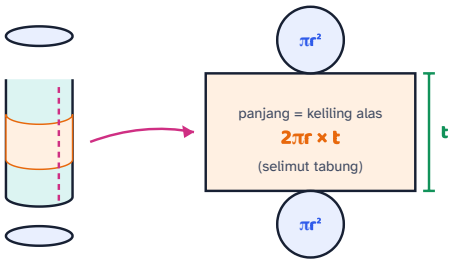
Kaleng berbentuk tabung:
jari-jari alas r, tinggi t.
Kulitnya terdiri atas tiga bagian.

Langkah 1. Sebuah kaleng berbentuk tabung dengan jari-jari alas r dan tinggi t.

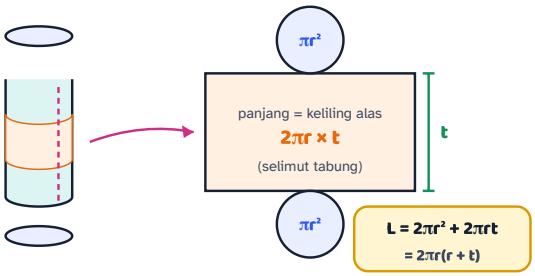


Lepaskan tutup atas dan bawah:
dua lingkaran berjari-jari r,
masing-masing luasnya πr^2.

Langkah 2. Lepaskan tutup atas dan tutup bawah. Keduanya lingkaran berjari-jari r, luas masing-masing πr^2.



Langkah 3. Gunting selimutnya lurus ke bawah, lalu bentangkan. Hasilnya persegi panjang setinggi t yang panjangnya sama dengan keliling alas, $2\pi r$.



Langkah 4. Jumlahkan ketiga bagian: $L = 2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r(r + t)$. Tanpa tutup (seperti gelas), cukup $\pi r^2 + 2\pi rt$.

RUMUS HIDUP

Volume tabung (tandon air)

$$V = \pi r^2 t$$

Luas lingkaran alas dikali tinggi. Bagi dengan 1.000 untuk mengubah cm³ menjadi liter.

r Jari-jari alas cm

t Tinggi cm

V Volume liter

VOLUME

942,5

liter

Luas alas π × **50**² ≈ **7.853,982** cm². Dikali tinggi **120** cm lalu dibagi 1.000, volumenya ≈ **942,5** liter: cukup untuk mengisi **49** galon air 19 liter sampai penuh.

Cek satuan: cm² × cm = cm³; 1.000 cm³ = 1 liter dan 1 m³ = 1.000 liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TABUNG-TANDON

CONTOH

Jawaban teka-teki tandon

Tandon di komik berbentuk tabung dengan diameter 1 m dan tinggi 1,2 m. Berapa liter isinya bila penuh? Berapa galon air 19 liter yang dibutuhkan untuk mengisinya?

1. Jari-jari $r = 0{,}5$ m. Luas alas $\pi r^2 = 0{,}25\pi \approx 0{,}785$ m².
2. $V = 0{,}25\pi \times 1{,}2 = 0{,}3\pi \approx 0{,}942$ m³.
3. 1 m³ = 1.000 L, jadi $V \approx 942$ liter. Banyak galon: $942 : 19 \approx 49{,}6$.

Tandon memuat ±942 liter, setara hampir 50 galon. Tebakan Dimas (5.000 liter) lebih dari lima kali terlalu besar!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Samakan dulu satuannya sebelum mengalikan. Jari-jari 50 cm dan tinggi 1,2 m tidak boleh langsung dikalikan menjadi $\pi \times 50^2 \times 1{,}2$. Ubah semuanya ke cm (atau semuanya ke m), baru hitung. Ingat juga: $1\ \text{m}^3 = 1.000$ liter, bukan 100 liter.

ADU CEPAT **Tabung kilat: isi kotaknya**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tulis angka di depan π saja, yaitu r × r × t. Contoh: r = 3 dan t = 5 memberi V = 45π, jadi ketik 45.

21.3 Limas dan kerucut: misteri sepertiga

Jika semua titik pada tepi alas dihubungkan ke satu titik puncak, kita mendapat **limas** (alas segi banyak) atau **kerucut** (alas lingkaran). Tumpeng adalah kerucut, piramida Mesir adalah limas segi empat.

Tebak Dulu!

Sebuah kerucut dan sebuah tabung punya jari-jari alas dan tinggi yang sama. Kerucut diisi air sampai penuh lalu dituang ke tabung. Berapa kali menuang agar tabung penuh?

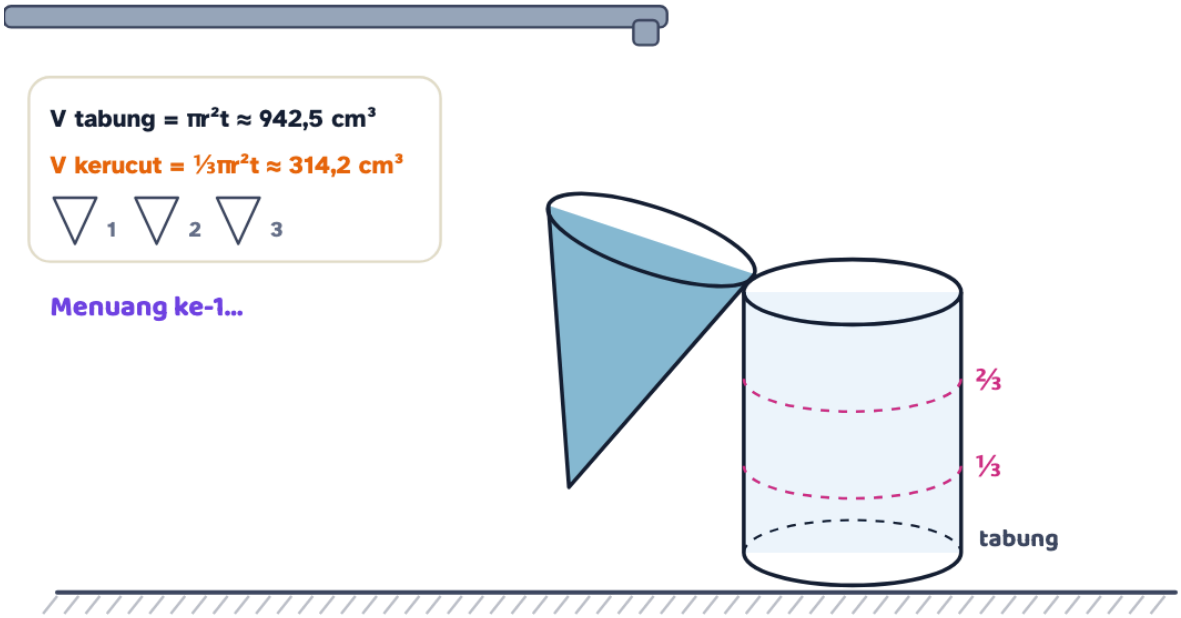
- 2 kali, karena kerucut itu "setengah tabung".
- 3 kali.
- 4 kali.
- π kali, karena alasnya lingkaran.

Jawabannya: tepat 3 kali. Kerucut tampak seperti setengah tabung, tetapi bagian dekat puncaknya sangat ramping. Irisan di tengah tinggi kerucut jari-jarinya hanya setengah, jadi luasnya cuma seperempat alas. Akibatnya isi kerucut tepat $\frac{1}{3}$ isi tabung. Lihat sendiri di Lab Mini berikut.

LAB MINI

Tuang kerucut ke tabung

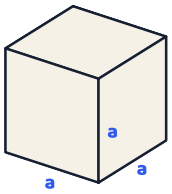
LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21



V kerucut	V tabung	Tuangan selesai	Tabung terisi
314,2 cm³	942,5 cm³	0	0 %

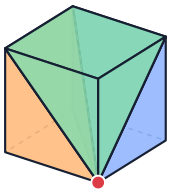
Tekan ▶ **Jalankan**: kerucut diisi dari keran lalu dituang ke tabung. Hitung berapa kali menuang sampai penuh. Ubah jari-jari dan tinggi sesukamu. Apakah jawabannya pernah berubah?

Untuk limas ada bukti tanpa kata yang indah: **sebuah kubus bisa dibelah menjadi tiga limas yang sama persis.**



Kubus bersisi a.
Volumenya a × a × a = a^3.

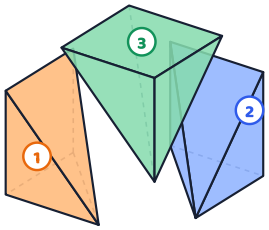
Langkah 1. Mulai dari kubus bersisi a. Volumenya a^3.



Pilih satu pojok (titik merah).
Hubungkan ke semua pojok lain: kubus terbelah menjadi 3 limas.

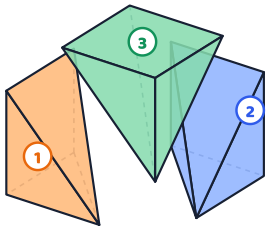
titik puncak bersama

Langkah 2. Pilih satu pojok sebagai puncak bersama. Tarik garis dari pojok itu ke semua pojok lain: kubus terbelah menjadi tiga limas (biru, oranye, hijau).



Uraikan ketiganya!
Setiap limas beralas persegi a × a dan tingginya a. Ketiganya kembar.

Langkah 3. Uraikan ketiganya. Setiap limas beralas salah satu sisi kubus ($a \times a$) dan puncaknya tepat di atas salah satu pojok alas, setinggi a. Ketiganya kongruen.



3 limas kembar = 1 kubus
V limas = ⅓ × a² × a
= ⅓ × luas alas × tinggi

Langkah 4. Tiga limas kembar mengisi satu kubus, jadi satu limas bervolume $\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3} \times a^2 \times a$, yaitu sepertiga luas alas kali tinggi.

VOLUME DAN LUAS LIMAS SERTA KERUCUT

Untuk limas dan kerucut dengan luas alas L_a dan tinggi t:

$$V = \frac{1}{3} L_a \times t, \qquad V_{\text{kerucut}} = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

Luas permukaan kerucut: $L = \pi r^2 + \pi r s$, dengan **garis pelukis** $s = \sqrt{r^2 + t^2}$ (Pythagoras dari Bab 18). Luas limas = luas alas + jumlah luas segitiga sisi tegaknya.

Bukti dengan irisan tipis (untuk yang sudah kenal jumlah kuadrat)

Potong limas setinggi t menjadi n lempeng setebal t/n. Lempeng ke-k dari puncak berukuran k/n kali alas, jadi luasnya $(k/n)^2 L_a$. Jumlah volume lempeng:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 L_a \cdot \frac{t}{n} = L_a\, t \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = L_a\, t \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Untuk n yang makin besar, pecahan terakhir mendekati $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Jadi $V = \frac{1}{3} L_a t$ untuk **alas apa pun**, termasuk lingkaran. Inilah ide awal kalkulus integral (Bab 30).

RUMUS HIDUP

Volume kerucut (tumpeng)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

Sepertiga dari tabung yang alas dan tingginya sama.

r Jari-jari alas cm

t Tinggi cm

V Volume tumpeng cm³

VOLUME TUMPENG

4.712

cm³

✨ **garis pelukis bulat: ada tripel Pythagoras!**

Tabung yang alas dan tingginya sama berisi **14.137,167** cm³. Tumpengnya sepertiganya: **4.712** cm³ ≈ **4,712** liter nasi. Garis pelukis s = √(r² + t²) = **25** cm, jadi selimut yang dihias lauk seluas πrs ≈ **1.178,097** cm².

Cek satuan: cm² × cm = cm³; bagi 1.000 untuk liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KERUCUT-TUMPENG

KERJAKAN BERSAMA

Tumpeng syukuran

Tumpeng berbentuk kerucut dengan jari-jari alas 15 cm dan tinggi 20 cm. Berapa liter nasinya? Berapa luas selimut yang ditutup daun pisang?

1. Volume: $V = \frac{1}{3}\pi \times 15^2 \times 20 = \frac{1}{3}\pi \times 4.500 = 1.500\pi \approx 4.712$ cm³ ≈ 4,7 liter.
2. Garis pelukis: $s = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ cm (tripel 3–4–5 dikali 5).
3. Luas selimut: $\pi r s = \pi \times 15 \times 25 = 375\pi \approx 1.178$ cm².

Nasinya ±4,7 liter dan daun pisangnya ±1.178 cm². Perhatikan: luas selimut memakai garis pelukis 25 cm, bukan tinggi 20 cm.

AWAS JEBAKAN

Luas selimut kerucut memakai **garis pelukis** s, bukan tinggi t. Tinggi berdiri tegak di dalam kerucut, sedangkan garis pelukis menempel di kulitnya. Hitung dulu $s = \sqrt{r^2 + t^2}$.

MATEMATIKA NUSANTARA

Tumpeng hadir dalam syukuran di banyak daerah di Indonesia. Bentuk kerucutnya sering dimaknai sebagai gunung yang menjulang. Bagi juru masak, bentuk ini juga hemat: kerucut setinggi 20 cm hanya butuh sepertiga nasi dari "tabung nasi" seukuran, tetapi tetap tampak megah karena tingginya. Cetakan tumpeng dari anyaman bambu (kukusan) pun berbentuk kerucut.

21.4 Bola: kulit jeruk dan makam Archimedes

Bola adalah kumpulan semua titik di ruang yang jaraknya tepat r dari satu titik pusat. Kelereng, bola sepak, dan buah jeruk berbentuk (hampir) bola. Bola tidak punya rusuk dan tidak punya titik sudut, hanya satu sisi lengkung.

LUAS DAN VOLUME BOLA

Untuk bola berjari-jari r:

$$L = 4\pi r^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Kulit bola tepat sama dengan **empat** lingkaran terbesarnya. Coba kupas jeruk dan susun kulitnya: potongan kulit itu cukup untuk menutup sekitar empat lingkaran seukuran jeruk!

Bahasa sederhana · Cara mudah mengingat: **kulit** diukur dengan pangkat dua (r^2), **isi** diukur dengan pangkat tiga (r^3). Angka di depannya: kulit "4", isi "4 per 3".

TAMU DARI MASA LALU

Archimedes dari Syrakusa (±287–212 SM) membuktikan bahwa bola yang pas di dalam tabung (tinggi tabung = diameter bola) punya volume **dan** luas permukaan tepat $\frac{2}{3}$ dari tabung itu. Ia begitu bangga sehingga meminta gambar bola di dalam tabung dipahat di makamnya. Menurut Cicero, negarawan Romawi, makam itu ia temukan kembali sekitar tahun 75 SM, tertutup semak, dan ia mengenalinya dari gambar tersebut.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BOLA = TABUNG − KERUCUT (IDE ARCHIMEDES)

Letakkan setengah bola berjari-jari r di samping sebuah tabung (jari-jari r, tinggi r) yang di dalamnya dilubangi kerucut terbalik (puncak di dasar). Iris keduanya pada ketinggian h. Irisan setengah bola adalah lingkaran berjari-jari $\sqrt{r^2 - h^2}$, luasnya $\pi(r^2 - h^2)$. Irisan tabung berlubang adalah cincin dengan jari-jari luar r dan jari-jari dalam h, luasnya $\pi r^2 - \pi h^2$. **Sama di setiap ketinggian!** Menurut prinsip Cavalieri volumenya sama:

$$V_{\frac{1}{2}\text{bola}} = \pi r^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \tfrac{2}{3}\pi r^3 \quad \Longrightarrow \quad V_{\text{bola}} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

RUMUS HIDUP

Volume dan luas bola

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pangkat tiga untuk isi, pangkat dua untuk kulit: L = 4πr², empat kali luas lingkaran terbesarnya.

r Jari-jari cm

V Volume cm³

VOLUME

5.575,3

cm³

seukuran bola sepak

Kulit bola **1.520,531** cm², tepat 4 × luas lingkaran terbesarnya (**380,133** cm²). Tabung pembungkusnya (jari-jari **11** cm, tinggi **22** cm) bervolume **8.362,92** cm³, dan bola mengisi tepat **66,667**% tabung itu.

Cek satuan: cm³ untuk isi, cm² untuk kulit.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BOLA-VOLUME

KERJAKAN BERSAMA **Bola sepak**

Bola sepak berjari-jari ±11 cm. Berapa luas kulitnya dan berapa liter udara di dalamnya?

1. Luas: $L = 4\pi \times 11^2 = 484\pi \approx 1.520{,}5$ cm².
2. Volume: $V = \frac{4}{3}\pi \times 11^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1.331 \approx 5.575$ cm³.
3. Dalam liter: $5.575 : 1.000 \approx 5{,}6$ liter.

Kulitnya ±1.520 cm² dan isinya ±5,6 liter udara, hampir sama dengan isi empat botol air mineral 1,5 liter.

ID **MATEMATIKA NUSANTARA**

Di tiga teras melingkar paling atas Candi Borobudur berdiri **72 stupa berterawang** (32, 24, dan 16 buah), mengelilingi satu stupa induk yang besar. Bentuk stupa mirip lonceng: kira-kira setengah bola di atas alas, dengan puncak meruncing. Arsitek modern memakai rumus bangun gabungan (setengah bola + tabung + kerucut) untuk memperkirakan volume batu dalam bangunan seperti ini. Bedug di masjid juga contoh tabung: kulit penutupnya berupa lingkaran dengan luas πr^2.

Bangun	Luas permukaan	Volume
Kubus (rusuk s)	$6s^2$	s^3
Balok	$2(pl + pt + lt)$	plt
Prisma	$2L_a + K_a \times t$	$L_a \times t$
Tabung	$2\pi r^2 + 2\pi rt$	$\pi r^2 t$
Limas	L_a + luas sisi-sisi tegak	$\frac{1}{3}L_a \times t$
Kerucut	$\pi r^2 + \pi rs$	$\frac{1}{3}\pi r^2 t$
Bola	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

(L_a = luas alas, K_a = keliling alas, s = garis pelukis.)

21.5 Bangun gabungan dan perbesaran: k, k², k³

Benda nyata jarang berbentuk satu bangun saja. Es krim kerucut adalah kerucut + setengah bola. Kapsul obat adalah tabung + dua setengah bola. Kuncinya: **pecah menjadi bangun-bangun dasar, hitung masing-masing,**

lalu jumlahkan (atau kurangkan untuk bagian yang berlubang).

COBA SENDIRI

Es krim kerucut

Cone es krim berbentuk kerucut dengan jari-jari 3 cm dan tinggi 10 cm, terisi penuh, lalu di atasnya ada satu sendok es krim berbentuk setengah bola berjari-jari 3 cm. Berapa volume es krim seluruhnya?

1. Bagian kerucut: $\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi$ cm³.
2. Bagian setengah bola: $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi$ cm³.
3. Jumlah: $30\pi + 18\pi = 48\pi \approx 150{,}8$ cm³.

Volume es krim $48\pi \approx 150{,}8$ cm³ (±151 mL). Menyimpan π sampai akhir membuat hitungan rapi dan tepat.

Tebak Dulu!

Semua rusuk sebuah kubus diperpanjang menjadi 2 kali semula. Volumenya menjadi berapa kali semula?

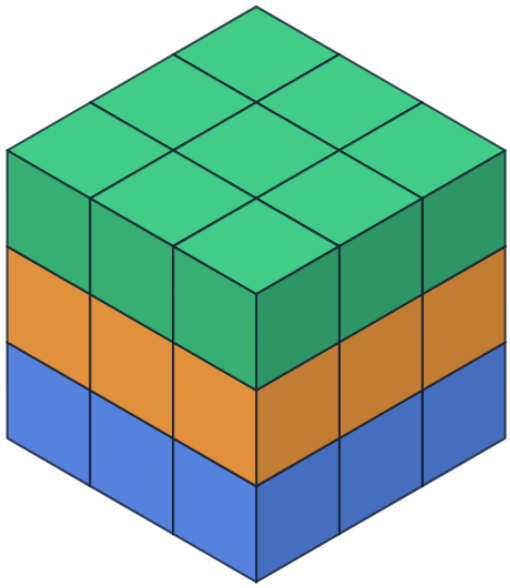
- 2 kali.
- 4 kali.
- 6 kali.
- 8 kali.

Jawabannya: 8 kali. Kubus bersisi 2 tersusun atas $2 \times 2 \times 2 = 8$ kubus bersisi 1. Panjang dikali 2 di tiga arah sekaligus, jadi volume dikali $2^3 = 8$. Luas permukaannya hanya dikali $2^2 = 4$.

LAB MINI **Pabrik kubus: perbesar k kali, lalu cat dan potong**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21





Luas permukaan = $6k^2$	Volume = k^3	Luas ÷ volume = $6/k$
54 persegi	27 kubus	2

Geser k dan bandingkan tiga batang di kiri: panjang tumbuh ×k, luas ×k², volume ×k³. Lalu tekan **Cat lalu potong**: kubus besar dicat di semua sisi, kemudian dipotong menjadi kubus satuan. Pakai slider **Urai** dan pilihan **Tampilkan** untuk menghitung kubus yang 3, 2, 1, dan 0 sisinya bercat.

SIFAT PERBESARAN (BANGUN SEBANGUN)

Jika semua ukuran panjang sebuah bangun dikali faktor skala k, maka

$$\text{panjang} \times k, \qquad \text{luas} \times k^2, \qquad \text{volume} \times k^3.$$

Sifat ini berlaku untuk bangun apa pun (tumpeng, galon, patung), selama bentuknya sebangun.

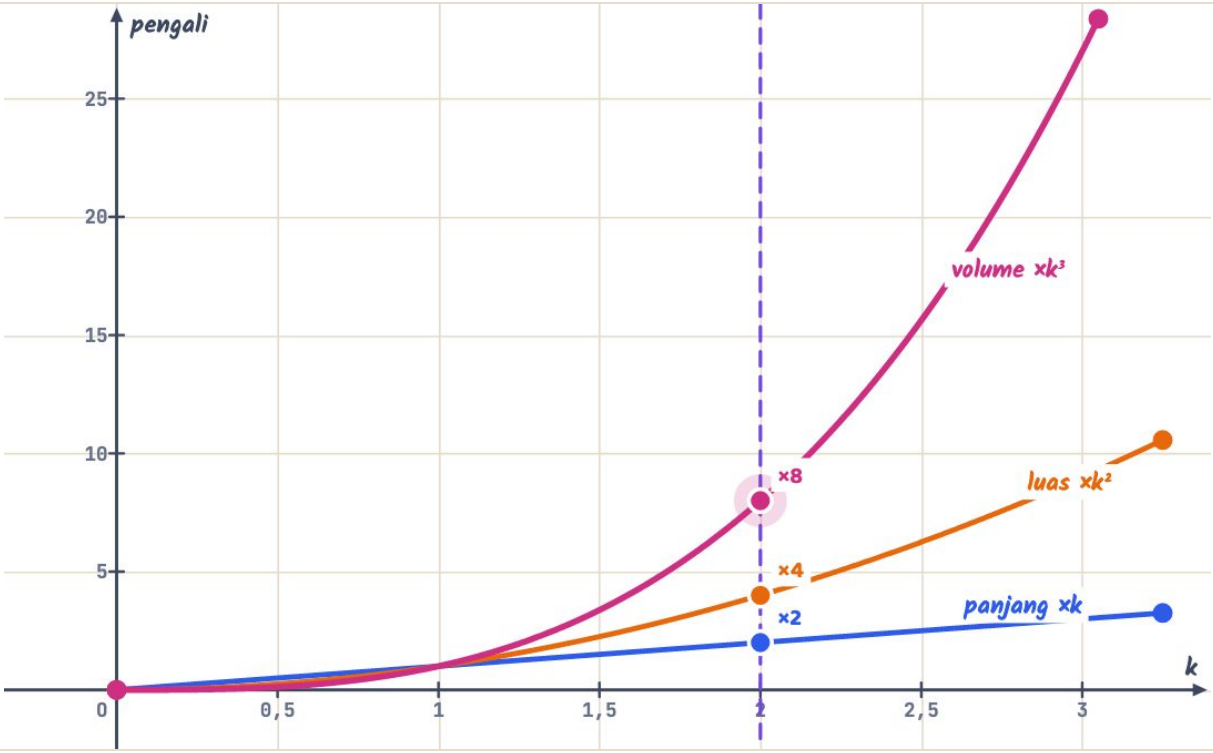
GRAFIK HIDUP

Panjang, luas, dan volume saat diperbesar

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

$$y = k, \quad y = k^2, \quad y = k^3$$

$$k = 2: \quad \times 2, \quad \times 4, \quad \times 8$$



k > 1: diperbesar, volume melesat paling cepat

Panjang ×	Luas ×	Volume ×
2	4	8

Seret titik magenta di sepanjang kurva volume. Cari nilai k yang membuat volume tepat 8 kali, lalu 27 kali. Apa yang terjadi pada ketiga kurva saat $k < 1$?

RUMUS HIDUP

Perbesaran: luas ×k², volume ×k³

$$V' = k^3 \times V$$

Jika semua panjang dikali k, luas dikali k² dan volume dikali k³.

k Faktor skala `kali` | V Volume awal `liter` | V' Volume baru `liter`

VOLUME BARU

12

`liter`

×2 panjang ⇒ ×8 isi

Tumpeng **1,5** liter dibuat ulang dengan bentuk sama: tingginya ×**2**, daun pisang pembungkusnya ×**4**, dan nasinya ×**8**. Butuh **12** liter nasi!

Cek satuan: Faktor skala tidak bersatuan, jadi satuan volume baru sama dengan satuan volume awal.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SKALA-K3

KERJAKAN BERSAMA

Tumpeng mini dan tumpeng raksasa

Tumpeng mini setinggi 10 cm butuh 0,5 liter nasi dan 300 cm² daun pisang. Untuk acara desa dibuat tumpeng sebangun setinggi 30 cm. Berapa nasi dan daun pisang yang dibutuhkan?

1. Faktor skala $k = 30 : 10 = 3$.
2. Daun pisang (luas): $300 \times 3^2 = 2.700$ cm².
3. Nasi (volume): $0{,}5 \times 3^3 = 13{,}5$ liter.

Tingginya hanya 3 kali, tetapi nasinya 27 kali: 13,5 liter! Daun pisangnya 9 kali: 2.700 cm².

MITOS

"Kalau semua rusuk dijadikan 2 kali, volumenya juga 2 kali."

FAKTA

Volume menjadi $2^3 = 8$ kali, karena panjang, lebar, dan tinggi masing-masing dikali 2. Luas permukaannya menjadi $2^2 = 4$ kali.

MITOS

"Bangun yang kulitnya lebih luas pasti isinya lebih banyak."

FAKTA

Balok 1 × 1 × 20 cm luasnya 82 cm² tetapi isinya 20 cm³. Kubus bersisi 3 cm luasnya hanya 54 cm², tetapi isinya 27 cm³.

MITOS

"Volume kerucut itu setengah volume tabung."

FAKTA

Sepertiga! Kerucut sangat ramping di dekat puncak. Tiga kerucut penuh tepat mengisi satu tabung yang alas dan tingginya sama.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

KALENG PALING HEMAT BAHAN

Pabrik ingin membuat kaleng tertutup bervolume V dengan bahan seminimal mungkin. Dari $V = \pi r^2 t$ diperoleh $t = V/(\pi r^2)$, sehingga luas bahannya

$$L(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r t = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

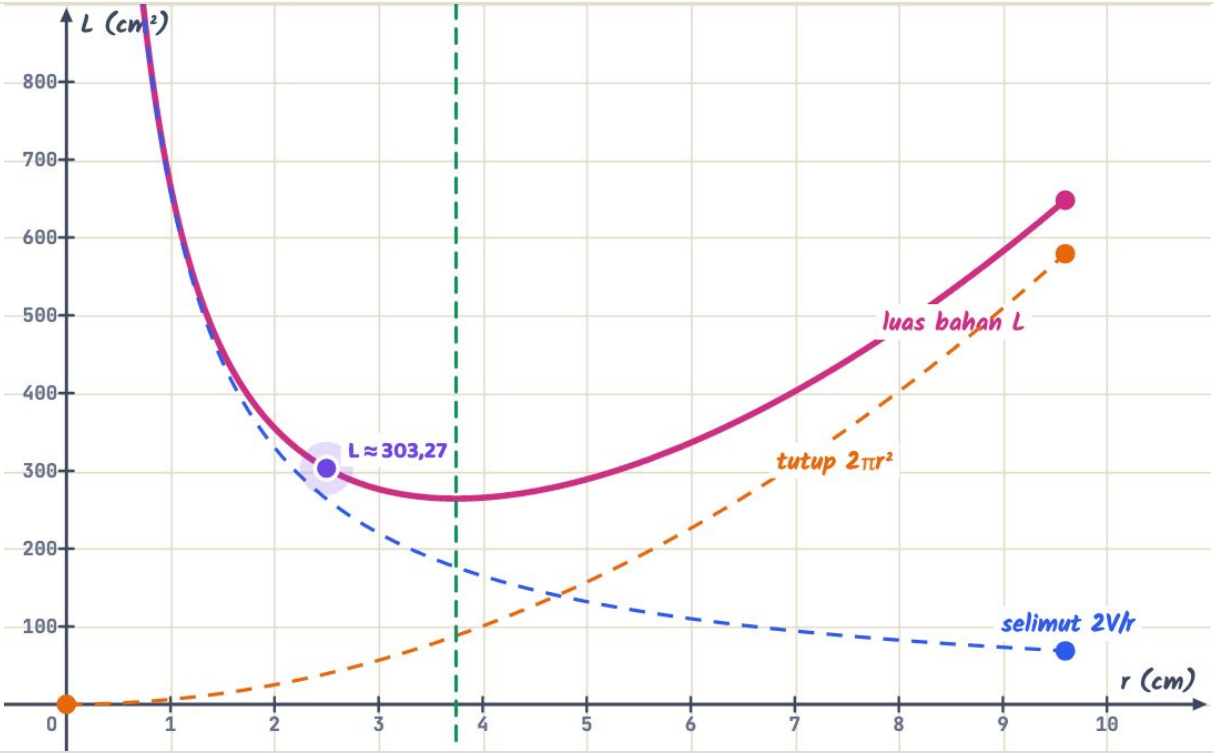
Jari-jari kecil membuat kaleng tinggi dengan selimut luas; jari-jari besar membuat tutup yang lebar. Dengan turunan, $L'(r) = 4\pi r - 2V/r^2 = 0$ memberi $r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$. Akibatnya $t = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$: **kaleng paling hemat tingginya sama dengan diameternya.** Kaleng minuman di toko lebih langsing karena alasan lain, misalnya tutup yang lebih tebal dan mudah digenggam.

GRAFIK HIDUP **Kaleng paling hemat bahan**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

$$L(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$V = 330\ \text{mL},\ r = 2{,}5\ \text{cm} \Rightarrow t = 16{,}81\ \text{cm},\ L = 303{,}27\ \text{cm}^2$$



Tinggi t	Luas L	t : r	r paling hemat
16,81 cm	303,3 cm²	6,72	3,74 cm

Seret titik ungu menuruni lembah kurva magenta. Di titik terendah, berapa perbandingan $t : r$? Ubah V: apakah perbandingannya ikut berubah?

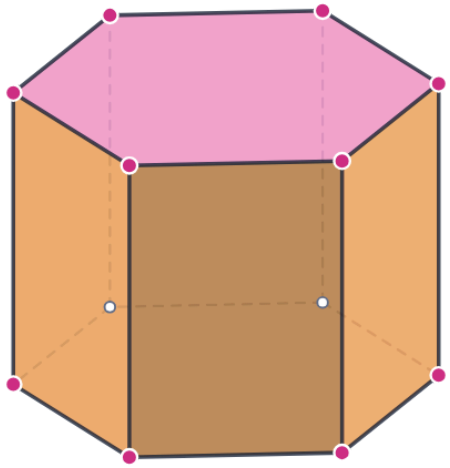
21.6 Rumus Euler: T − R + S = 2

Bangun ruang yang semua sisinya datar (segi banyak) disebut **polihedron**. Kubus, prisma, dan limas adalah polihedron; tabung, kerucut, dan bola bukan, karena punya sisi lengkung. Hitunglah titik sudut (T), rusuk (R), dan sisi (S) sebuah kubus: $8 - 12 + 6 = 2$. Prisma segitiga: $6 - 9 + 5 = 2$. Kebetulan?

LAB MINI

Mesin polihedron: hitung T, R, dan S

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21



Prisma segi-6

6 segi empat + 2 segi enam

T = 12 titik sudut

R = 18 rusuk

S = 8 sisi

12 - 18 + 8 = 2

selalu 2!

✋ *seret untuk memutar*

Titik sudut T	Rusuk R	Sisi S	T – R + S
12	18	8	2

Pilih bangun dan ubah n. Seret untuk memutar, nyalakan nomor titik sudut, lalu hitung sendiri sebelum membaca angka di panel. Bisakah kamu menemukan bangun yang membuat $T - R + S$ bukan 2?

RUMUS EULER UNTUK POLIHEDRON

Untuk setiap polihedron konveks (tidak berlubang dan tidak cekung) dengan T titik sudut, R rusuk, dan S sisi berlaku

$$T - R + S = 2$$

Di buku berbahasa Inggris rumus ini ditulis $V - E + F = 2$ (*vertices, edges, faces*).

Polihedron	T	R	S	T – R + S
Kubus / balok	8	12	6	2
Prisma segitiga	6	9	5	2
Limas segi empat	5	8	5	2

Tetrahedron (limas segitiga)	4	6	4	2
Oktahedron	6	12	8	2
Dodekahedron	20	30	12	2
Ikosahedron	12	30	20	2
Prisma segi-n	$2n$	$3n$	$n+2$	2
Limas segi-n	$n+1$	$2n$	$n+1$	2

COBA SENDIRI **Bola sepak klasik**

Bola sepak klasik dijahit dari 12 segi lima dan 20 segi enam. Berapa banyak rusuk (jahitan) dan titik sudutnya? Apakah rumus Euler berlaku?

1. Banyak sisi: $S = 12 + 20 = 32$.
2. Setiap jahitan dipakai bersama oleh dua potongan: $R = \dfrac{12 \times 5 + 20 \times 6}{2} = \dfrac{180}{2} = 90$.
3. Di setiap titik sudut bertemu tiga potongan: $T = \dfrac{180}{3} = 60$.
4. Cek Euler: $T - R + S = 60 - 90 + 32 = 2$. ✓

Ada 90 jahitan dan 60 titik sudut. Lebih hebat lagi: dari rumus Euler bisa dibuktikan bahwa bola yang dijahit hanya dari segi lima dan segi enam (tiga potongan di tiap titik) selalu memakai tepat 12 segi lima!

TAMU DARI MASA LALU

Leonhard Euler (1707–1783), matematikawan Swiss yang tetap produktif bahkan setelah kehilangan penglihatannya, menulis hubungan $T - R + S = 2$ dalam suratnya kepada Christian Goldbach sekitar tahun 1750. Rumus sederhana ini menjadi salah satu benih *topologi*, cabang matematika yang mempelajari sifat bangun yang tidak berubah walaupun bangunnya ditekuk atau diregangkan.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA BANGUN PLATON HANYA ADA LIMA?

Bangun Platon adalah polihedron yang semua sisinya segi-p beraturan yang sama, dengan q sisi bertemu di setiap titik sudut ($p, q \geq 3$). Setiap rusuk dimiliki dua sisi dan menghubungkan dua titik sudut, jadi $pS = 2R$ dan $qT = 2R$. Masukkan ke rumus Euler:

$$\frac{2R}{q} - R + \frac{2R}{p} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{R} > \frac{1}{2}.$$

Pasangan (p, q) yang memenuhi hanya $(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)$: tetrahedron, oktahedron, kubus, ikosahedron, dan dodekahedron. Tidak mungkin ada yang keenam!



Tumpeng

Kerucut nasi: volumenya menentukan banyak beras yang dimasak, luas selimutnya menentukan banyak daun dan lauk penghias.



Tandon air

Tandon tabung 1.000 liter di atap rumah dipilih dari hitungan $\pi r^2 t$ dan kebutuhan air harian keluarga.



Kemasan susu kotak

Pabrik memilih ukuran balok yang memuat 200 mL dengan karton sesedikit mungkin, karena luas permukaan berarti biaya.



Bedug masjid

Badan bedug berbentuk tabung; luas kulit penutupnya πr^2, dan isinya ikut menentukan dalamnya dentuman.



Stupa Borobudur

Stupa berbentuk lonceng dapat didekati sebagai bangun gabungan setengah bola, tabung, dan kerucut.



Es serut vs balok es

Es serut cepat mencair karena perbandingan luas terhadap volume sangat besar (ingat $6/k$ pada kubus).

Cek Cepat

Volume kubus yang rusuknya 4 cm adalah...

- 16 cm^3
- 48 cm^3
- 64 cm^3
- 96 cm^3

Kerucut dan tabung memiliki jari-jari alas dan tinggi yang sama. Volume tabung 90 cm^3. Volume kerucut adalah...

- 30 cm^3
- 45 cm^3
- 90 cm^3
- 270 cm^3

Jari-jari sebuah bola dijadikan 3 kali semula. Volumenya menjadi...

- 3 kali
- 6 kali
- 9 kali
- 27 kali

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: buktikan sendiri misteri sepertiga

Bahan: karton bekas (kotak sereal), gunting, selotip, penggaris, jangka atau tutup gelas, beras atau pasir, busur derajat.

1. Buat tabung tanpa tutup atas: alas lingkaran berjari-jari 4 cm, selimut persegi panjang 25,1 cm × 10 cm (karena $2\pi \times 4 \approx 25{,}1$), plus sedikit lebihan untuk selotip.
2. Buat kerucut tanpa alas dengan jari-jari 4 cm dan tinggi 10 cm. Garis pelukisnya $\sqrt{4^2 + 10^2} \approx 10{,}8$ cm, jadi gambar juring lingkaran berjari-jari 10,8 cm dengan sudut pusat sekitar 134° (lihat Bab 20), gulung, dan rekatkan.
3. Isi kerucut dengan beras sampai rata dengan bibirnya, lalu tuang ke tabung. Ulangi sambil menghitung.
4. Catat berapa kali menuang sampai tabung penuh rata.

Pertanyaan: Berapa kali kamu menuang? Jika hasilnya tidak tepat 3, sebutkan dua penyebab yang mungkin (petunjuk: tebal karton, beras yang memadat, bibir kerucut yang kurang rata). Mengapa sudut juringnya kira-kira 134°?

RINGKASAN KILAT

Bab 21 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- mengenali **jaring-jaring** kubus, balok, prisma, tabung, dan kerucut
- menghitung **luas permukaan** dan **volume** kubus, balok, prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola, lengkap dengan satuan liter
- menjelaskan mengapa volume limas dan kerucut tepat **sepertiga** dari prisma dan tabung pasangannya
- memakai **faktor skala** k: luas menjadi k^2 kali, volume menjadi k^3 kali, juga pada bangun gabungan
- memeriksa **rumus Euler** $T - R + S = 2$ pada berbagai polihedron

Istilah kunci

bangun ruang · sisi · rusuk · titik sudut · Luas permukaan · jaring-jaring · Volume · prisma · Tabung · limas · kerucut · garis pelukis · Bola · polihedron

Rumus penting

$$V = p \times l \times t$$

Volume dan luas permukaan balok. Isi balok = banyaknya kubus satuan = panjang × lebar × tinggi. Kulitnya terdiri atas enam persegi panjang yang berpasangan.

$$V = \pi r^2 t$$

Volume tabung (tandon air). Luas lingkaran alas dikali tinggi. Bagi dengan 1.000 untuk mengubah cm^3 menjadi liter.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

Volume kerucut (tumpeng). Sepertiga dari tabung yang alas dan tingginya sama.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Volume dan luas bola. Pangkat tiga untuk isi, pangkat dua untuk kulit: L = 4πr², empat kali luas lingkaran terbesarnya.

$$V' = k^3 \times V$$

Perbesaran: luas ×k², volume ×k³. Jika semua panjang dikali k, luas dikali k^2 dan volume dikali k^3.

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- Samakan dulu satuannya sebelum mengalikan.
- Luas selimut kerucut memakai garis pelukis s, bukan tinggi t.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=21

🧩 Teka-teki untuk Bab 22

Pohon kelapa di pantai terlalu tinggi untuk diukur dengan meteran. Pukul tiga sore, tongkat pramuka setinggi 1,5 m yang ditancapkan tegak membentuk bayangan sepanjang 2 m. Pada saat yang sama, bayangan pohon kelapa panjangnya 16 m. Bisakah kamu menghitung tinggi pohon itu tanpa memanjatnya?

▼ **Intip petunjuk**

Sinar matahari datang sejajar, jadi tongkat dan bayangannya membentuk segitiga yang **sebangun** dengan segitiga pohon dan bayangannya. Faktor skalanya $k = 16 : 2 = 8$, sama seperti k di bab ini, tetapi sekarang untuk bangun datar. Bab 22 membahas kesebangunan dan transformasi geometri!

BAB 22 · GEOMETRI & PENGUKURAN

22 Sebangun & Bertransformasi: dari Bayangan Pohon sampai Motif Batik

Bagaimana mengukur tinggi pohon kelapa tanpa memanjatnya? Mengapa motif kawung tetap tampak sama setelah diputar? Dua rahasia ini ternyata bersaudara: bangun yang digeser, dicerminkan, diputar, atau diperbesar.

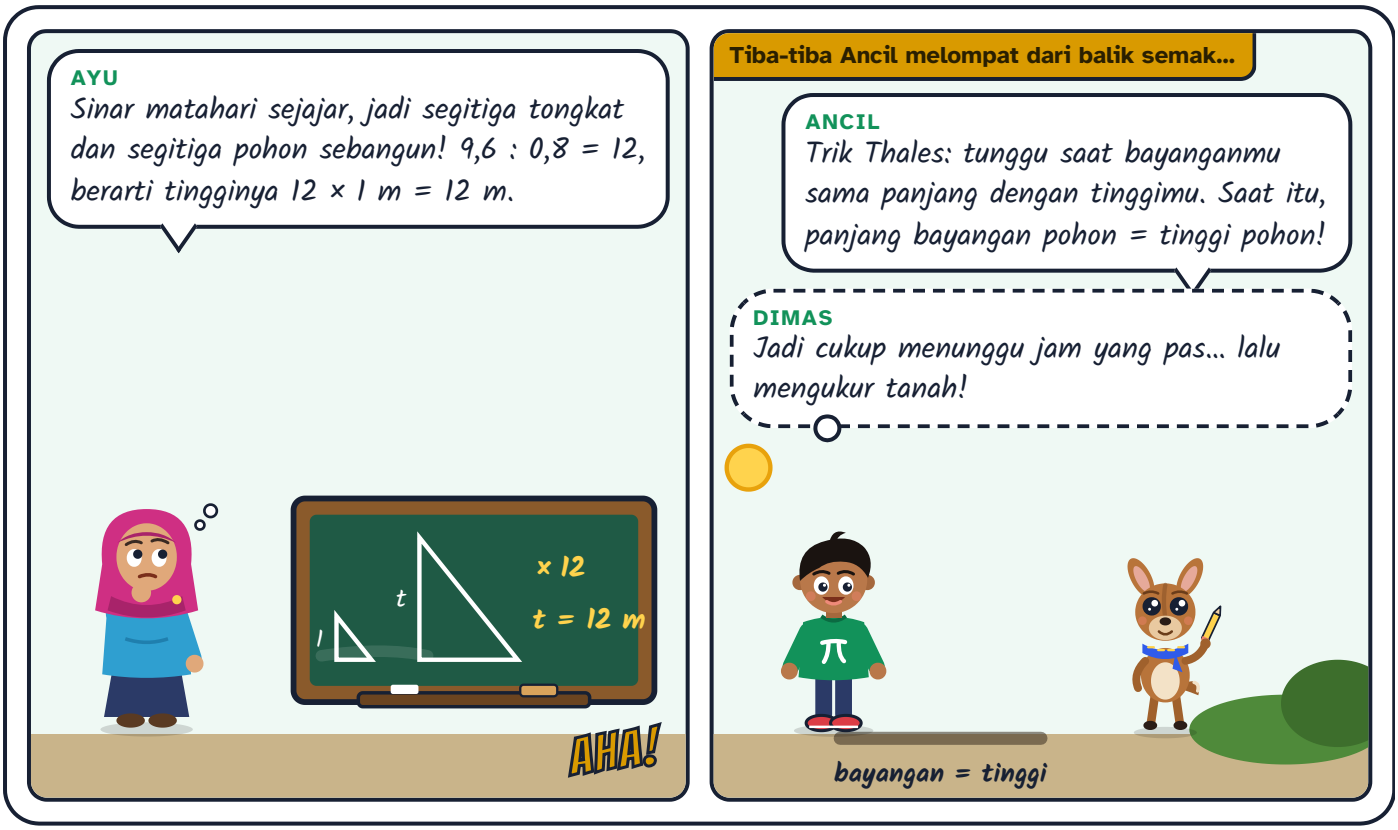
Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan bangun **kongruen** dan **sebangun**, lalu menghitung **faktor skala** beserta pengaruhnya pada luas dan volume;
- memakai **syarat kesebangunan segitiga** untuk mencari panjang yang belum diketahui, termasuk tinggi benda dari bayangannya;
- menentukan bayangan titik dan bangun oleh **translasi**, **refleksi**, **rotasi**, dan **dilatasi**;
- menyusun **komposisi transformasi** dan mengenali **simetri** pada motif batik dan tenun.

POHON KELAPA YANG TAK PERLU DIPANJAT

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Dimas memfotokopi gambar peta berukuran 10 cm × 15 cm dengan perbesaran 200%. Luas gambar hasil fotokopinya menjadi berapa kali luas semula?

- 2 kali, sesuai angka 200%.
- 4 kali.
- 200 kali.
- Tetap sama, hanya tampak lebih besar.

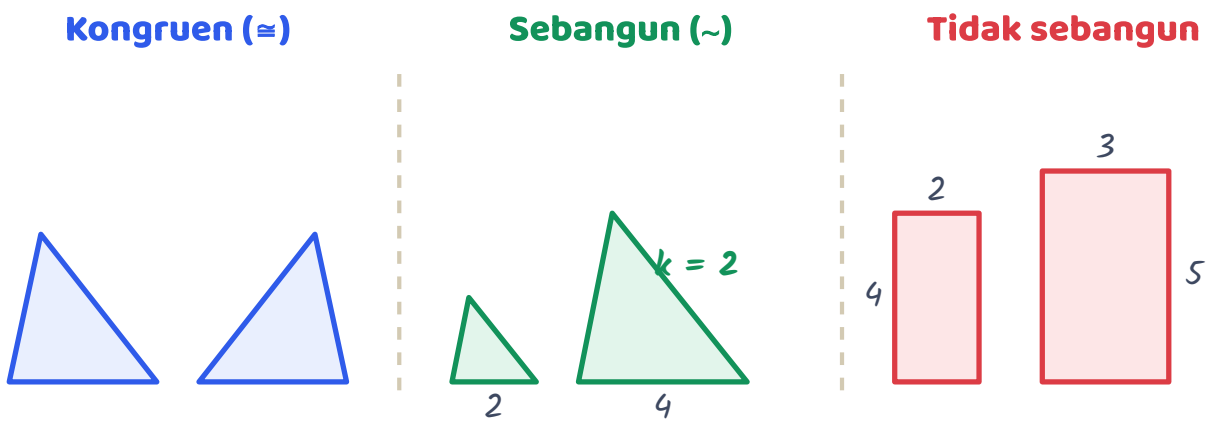
Jawabannya: 4 kali. Perbesaran 200% artinya setiap *panjang* dikali 2, jadi gambar menjadi 20 cm × 30 cm. Luasnya 600 cm², padahal semula 150 cm²: empat kali lipat! Panjang dikali k, luas dikali k^2. Itulah sebabnya tombol mesin fotokopi untuk A4 ke A3 (kertas yang luasnya dua kali) bertuliskan 141%, bukan 200%.

22.1 Kongruen dan sebangun

Ambil dua keping ubin dari dus yang sama, lalu tumpuk keduanya: pas sekali, tidak ada yang menonjol. Sekarang bandingkan pas foto 3 × 4 milikmu dengan foto yang sama yang dicetak 6 × 8. Wajahnya sama, senyumnya sama, hanya ukurannya berbeda. Dua pengalaman sehari-hari ini punya nama dalam matematika.

DEFINISI

Dua bangun disebut **kongruen** (lambang $\cong$) jika bentuk **dan** ukurannya sama persis, sehingga yang satu dapat menutupi yang lain setelah digeser, diputar, atau dibalik.
Dua bangun disebut **sebangun** (lambang $\sim$) jika bentuknya sama, sedangkan ukurannya boleh berbeda: **sudut-sudut yang bersesuaian sama besar** dan **sisi-sisi yang bersesuaian sebanding**. Perbandingan sisi bayangan terhadap sisi asli disebut **faktor skala** k.



Segitiga kiri yang satu adalah cerminan yang lain, tetapi tetap kongruen. Segitiga tengah sebangun karena semua sisinya dikali 2. Dua persegi panjang kanan sama-sama bersudut 90°, tetapi tidak sebangun.

Bahasa sederhana · Gampangnya: **sebangun itu seperti foto yang diperbesar atau diperkecil**. Kalau hasilnya tampak gepeng atau melar, berarti tidak sebangun. Kongruen itu seperti dua kue dari cetakan yang sama: kembar persis.

SIFAT FAKTOR SKALA

Jika dua bangun sebangun dengan faktor skala k, maka

- setiap **panjang** (sisi, keliling, tinggi) dikali k;
- setiap **luas** dikali k^2;
- setiap **volume** (untuk bangun ruang) dikali k^3.

Alasannya sederhana: persegi satuan 1×1 menjadi $k \times k$, dan kubus satuan menjadi $k \times k \times k$. Bangun sebangun dengan $k = 1$ adalah bangun kongruen.

RUMUS HIDUP

Faktor skala bangun sebangun

$$k = \frac{p'}{p}$$

Bagi panjang pada bayangan dengan panjang yang bersesuaian pada bangun asli. Semua pasangan sisi memberi k yang sama.

p Panjang asli cm

p' Panjang bayangan cm

k Faktor skala

FAKTOR SKALA

2,5

Sisi **4** cm menjadi **10** cm, jadi setiap panjang dikali k = **2,5**. Luasnya ikut dikali k^2 = **6,25**, dan volume (untuk bangun ruang) dikali k^3 = **15,625**. **Ini perbesaran.**

Cek satuan: k tidak bersatuan karena cm dibagi cm. Itu sebabnya k tetap sama walaupun kamu mengukur dalam mm atau m.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-FAKTOR-SKALA

CONTOH

Mencetak ulang foto

Foto berukuran 4 cm × 6 cm dicetak ulang sehingga lebarnya menjadi 10 cm, tanpa ada bagian yang terpotong atau melar. Berapa tinggi foto barunya?

1. Agar tidak melar, foto baru harus sebangun dengan foto lama. Faktor skalanya $k = \frac{10}{4} = 2{,}5$.
2. Tinggi juga dikali k: $6 \times 2{,}5 = 15$ cm.

Foto baru berukuran 10 cm × 15 cm. Luasnya 150 cm², yaitu $2{,}5^2 = 6{,}25$ kali luas foto lama (24 cm²).

AWAS JEBAKAN

Untuk segi empat, sudut yang sama besar belum menjamin sebangun. Persegi 3 × 3 dan persegi panjang 3 × 6 sama-sama bersudut 90°, tetapi bentuknya jelas berbeda. Sebaliknya, belah ketupat bersisi 5 dan persegi bersisi 5 punya sisi sebanding, tetapi sudutnya berbeda. Pada segi empat, **kedua syarat** (sudut sama dan sisi sebanding) harus dicek. Segitiga lebih istimewa, seperti yang akan kamu lihat berikutnya.

22.2 Syarat dua segitiga sebangun

Tebak Dulu!

Ayu menggambar segitiga bersudut 40°, 60°, dan 80° dengan sisi terpendek 3 cm. Dimas menggambar segitiga dengan sudut yang sama, tetapi sisi terpendeknya 30 cm. Apa hubungan kedua segitiga itu?

- Kongruen, karena ketiga sudutnya sama.
- Sebangun dengan faktor skala 10, tetapi tidak kongruen.
- Tidak sebangun, karena ukurannya jauh berbeda.
- Belum bisa ditentukan sebelum semua sisinya diukur.

Jawabannya: sebangun, tidak kongruen. Pada segitiga, cukup dua pasang sudut yang sama (sudut ketiga pasti ikut sama karena jumlahnya 180°) untuk menjamin kedua segitiga sebangun. Sudut menentukan *bentuk*, bukan *ukuran*. Jadi sisi-sisi segitiga Dimas otomatis 10 kali sisi segitiga Ayu.

SYARAT KESEBANGUNAN DAN KEKONGRUENAN SEGITIGA

Dua segitiga **sebangun** jika memenuhi salah satu syarat berikut.

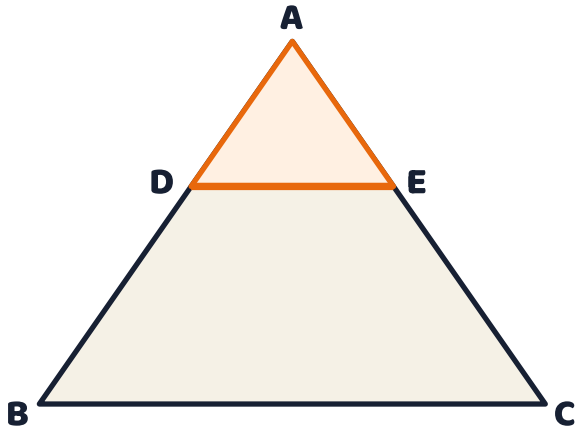
- **Sd-Sd** (sudut-sudut): dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar.
- **S-S-S** sebanding: ketiga pasang sisi yang bersesuaian sebanding, $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$.
- **S-Sd-S**: dua pasang sisi sebanding dan sudut yang diapitnya sama besar.

Dua segitiga **kongruen** jika memenuhi S-S-S, S-Sd-S, Sd-S-Sd, atau Sd-Sd-S dengan sisi yang *sama panjang* (faktor skala 1).

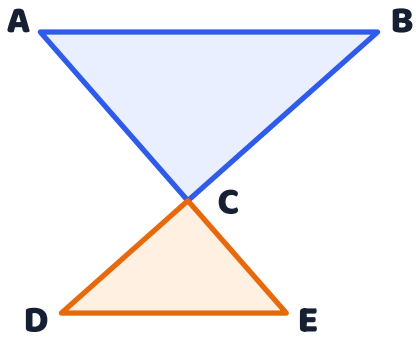
Yang diketahui sama/sebanding	Cukup untuk sebangun?	Cukup untuk kongruen?

Dua pasang sudut	✔ ya (Sd-Sd)	✘ belum, ukuran bisa beda
Tiga pasang sisi	✔ jika sebanding	✔ jika sama panjang (S-S-S)
Dua sisi + sudut apitnya	✔ jika sisinya sebanding	✔ jika sisinya sama (S-Sd-S)
Dua sisi + sudut yang *tidak* diapit	✘ tidak selalu	✘ tidak selalu (bisa ada dua segitiga berbeda)

Ada dua "pola" yang sangat sering muncul. Pada **pola A**, garis yang sejajar alas memotong segitiga besar menjadi segitiga kecil di puncaknya. Pada **pola X**, dua garis berpotongan di antara dua ruas yang sejajar, seperti jam pasir.



Pola A: DE ∥ BC ⇒ △ADE ~ △ABC



Pola X: AB ∥ DE ⇒ △ABC ~ △EDC

Pada pola A, sudut A dimiliki bersama dan sudut-sudut sehadap sama besar. Pada pola X, sudut di C bertolak belakang dan sudut-sudut dalam berseberangan sama besar. Keduanya memenuhi Sd-Sd.

TEOREMA GARIS SEJAJAR (PROPORSI)

Jika $DE \parallel BC$ dengan D pada AB dan E pada AC, maka

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \qquad \text{dan juga} \qquad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Bukti dengan luas (gaya Euclid)

Tulis $[XYZ]$ untuk luas segitiga XYZ. Segitiga ADE dan BDE punya puncak yang sama, yaitu E, dengan alas AD dan DB pada satu garis, jadi tingginya sama: $\dfrac{[ADE]}{[BDE]} = \dfrac{AD}{DB}$. Dengan cara yang sama (puncak D): $\dfrac{[ADE]}{[CDE]} = \dfrac{AE}{EC}$.

Segitiga BDE dan CDE beralas sama, yaitu DE, dan puncaknya B serta C terletak pada garis yang sejajar DE, sehingga tingginya sama: $[BDE] = [CDE]$. Akibatnya $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$. ∎

TRIK KAK LINTANG

Tulisan $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ itu peta harta karun! Urutan hurufnya menunjukkan pasangan: $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$. Jadi sisi AB berpasangan dengan PQ, dan BC dengan QR. Untuk menyusun perbandingan, tutup saja huruf yang sama posisinya: $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC}$.

AWAS JEBAKAN

Pasangan sisi ditentukan oleh sudut, bukan oleh posisi pada gambar. Pada pola X, segitiga kecil sering tampak terbalik, sehingga sisi yang di atas berpasangan dengan sisi yang di bawah. Pada pola A, bandingkan AD dengan AB (sisi utuh), bukan dengan DB (potongannya).

KERJAKAN BERSAMA

Kuda-kuda atap rumah

Rangka atap berbentuk segitiga ABC dengan alas $BC = 8$ m. Sebuah balok mendatar DE dipasang sejajar BC, dengan D pada AB, E pada AC, $AD = 2$ m, dan $AB = 5$ m. Berapa panjang balok DE?

1. $DE \parallel BC$, jadi $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (pola A).
2. Faktor skala dari segitiga besar ke kecil: $k = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.
3. $DE = 0{,}4 \times BC = 0{,}4 \times 8 = 3{,}2$ m.

Balok DE panjangnya 3,2 m. Tukang kayu memakai perbandingan ini untuk memotong kayu sebelum naik ke atap.

ADU CEPAT

Sisi bersesuaian kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari dulu faktor skalanya dari pasangan yang lengkap. Contoh: 4 ↔ 6 berarti k = 1,5, jadi 10 ↔ 15.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TIGA SEGITIGA SEBANGUN DALAM SATU SEGITIGA SIKU-SIKU

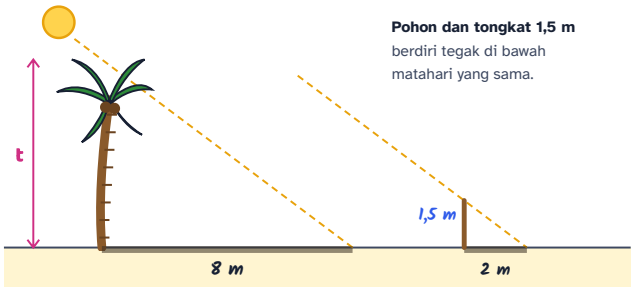
Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, tarik garis tinggi CD ke sisi miring AB. Terbentuk tiga segitiga yang saling sebangun: $\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$ (semuanya siku-siku dan berbagi satu sudut lancip). Dari kesebangunan itu diperoleh

$$CD^2 = AD \cdot DB, \qquad AC^2 = AD \cdot AB, \qquad BC^2 = BD \cdot BA.$$

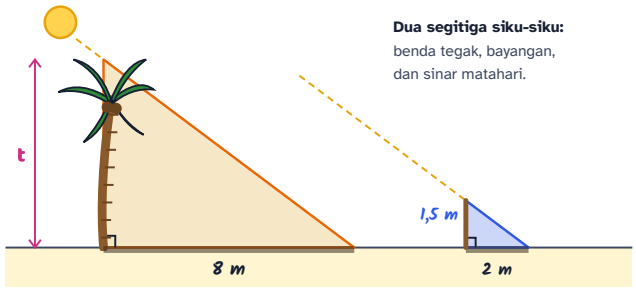
Jumlahkan dua rumus terakhir: $AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + DB) = AB^2$. Inilah bukti Teorema Pythagoras (Bab 18) yang hanya memakai kesebangunan! Rumus pertama mengatakan bahwa garis tinggi adalah *rataan geometrik* kedua potongan sisi miring.

22.3 Mengukur tinggi dengan bayangan

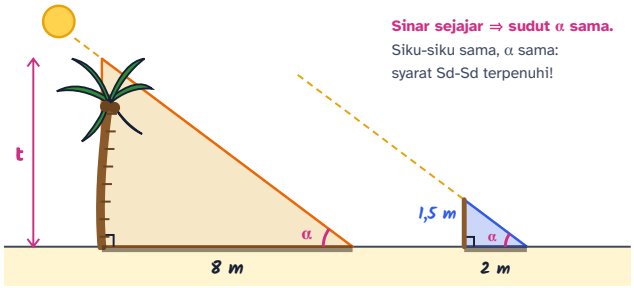
Kembali ke kebun Pak RT. Matahari sangat jauh, sehingga sinar-sinarnya yang sampai ke Bumi praktis **sejajar**. Akibatnya, pada saat yang sama, setiap benda tegak membentuk segitiga dengan bayangannya, dan semua segitiga itu sebangun. Lihat langkah demi langkah:



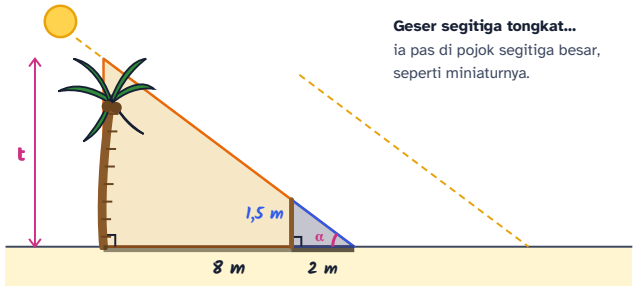
Langkah 1. Pohon dan tongkat setinggi 1,5 m berdiri tegak. Bayangan pohon 8 m, bayangan tongkat 2 m. Berapa tinggi pohon t?



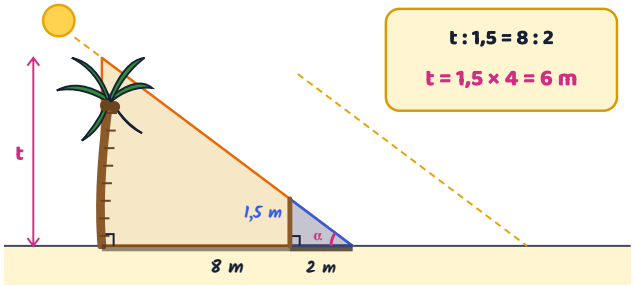
Langkah 2. Benda tegak, bayangannya, dan sinar matahari membentuk segitiga siku-siku, baik untuk pohon maupun untuk tongkat.



Langkah 3. Sinar matahari datang sejajar, jadi sudut elevasi α di ujung kedua bayangan sama besar. Siku-siku sama, α sama: kedua segitiga **sebangun** (Sd-Sd).



Langkah 4. Geser segitiga tongkat ke ujung bayangan pohon. Ia pas berada di pojok segitiga besar, seperti miniaturnya.



Langkah 5. Sisi-sisi yang bersesuaian sebanding: $\dfrac{t}{1{,}5} = \dfrac{8}{2}$, jadi $t = 1{,}5 \times 4 = 6$ m. Tanpa memanjat!

RUMUS HIDUP

Tinggi benda dari bayangannya

$$T = t \times \frac{B}{b}$$

Tinggi benda sama dengan tinggi tongkat dikali berapa kali bayangan benda lebih panjang daripada bayangan tongkat.

- t Tinggi tongkat m
- b Bayangan tongkat m
- B Bayangan benda m
- T Tinggi benda m

TINGGI BENDA

132

m

setinggi Monas (±132 m)!

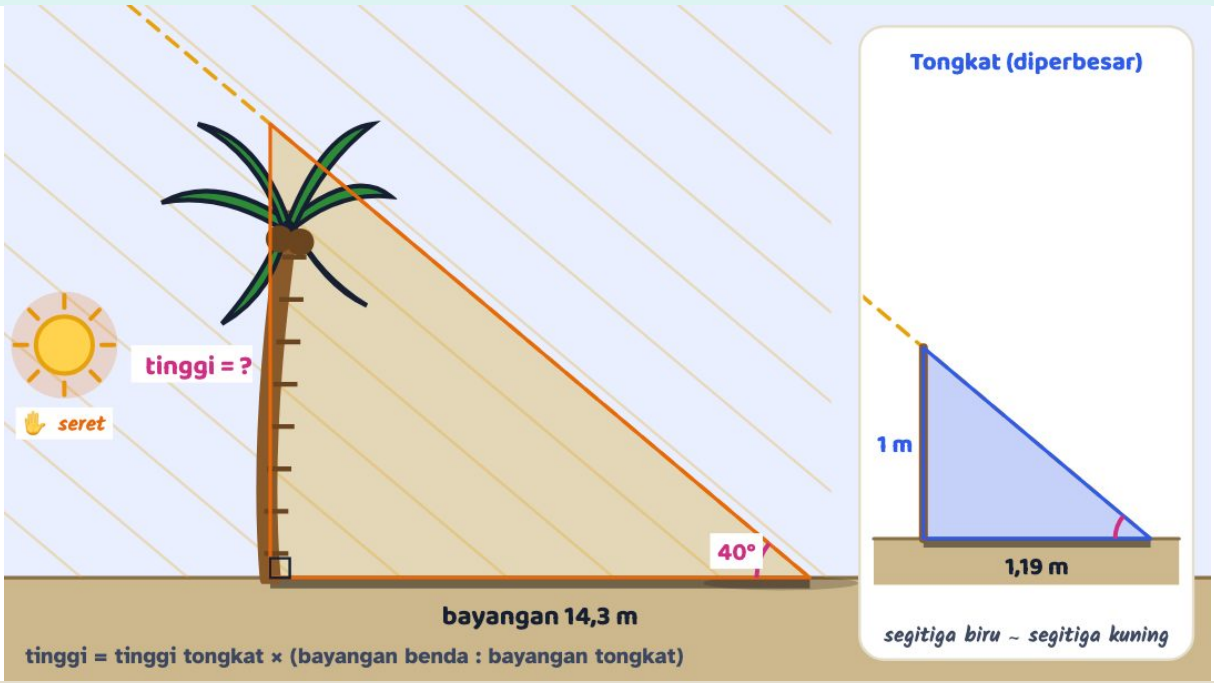
Bayangan benda **88** kali bayangan tongkat, jadi tinggi benda juga **88** kali tinggi tongkat: **1,5** × **88** = **132** m.

Cek satuan: Semua panjang harus memakai satuan yang sama (semuanya m atau semuanya cm).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TINGGI-BAYANGAN

LAB MINI Pengukur tinggi tanpa memanjat

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22



Bayangan tongkat	Bayangan benda	Bayangan benda : bayangan tongkat
1,19 m	14,3 m	12

Tinggi benda
??? (hitung dulu!)

Seret matahari naik-turun (atau geser slider). Bayangan memanjang saat matahari rendah, tetapi **perbandingan** bayangan benda : bayangan tongkat tidak pernah berubah. Pakai angka di bawah kanvas untuk menghitung tinggi benda, lalu matikan "Rahasiakan" untuk mengecek. Coba juga tombol **Jam Thales**!

KERJAKAN BERSAMA Bayangan Monas

Pada suatu sore di Lapangan Monas, bayangan Ayu (tinggi 1,5 m) sepanjang 2 m, sedangkan bayangan Monas sepanjang 176 m. Berapa tinggi Monas?

1. Pada saat yang sama, segitiga Ayu–bayangan dan segitiga Monas–bayangan sebangun.
2. Faktor skala $k = \dfrac{176}{2} = 88$.
3. Tinggi Monas $= 88 \times 1{,}5 = 132$ m.

Monas setinggi ±132 m, termasuk lidah apinya. Cukup dengan meteran dan sedikit matematika!

COBA SENDIRI **Cara cermin di tanah**

Hari mendung, tidak ada bayangan. Dimas meletakkan cermin kecil mendatar di tanah, 15 m dari pangkal tiang bendera. Ia mundur sampai melihat puncak tiang tepat di tengah cermin; saat itu kakinya 2,4 m dari cermin. Mata Dimas 1,6 m di atas tanah. Berapa tinggi tiang?

1. Cahaya dari puncak tiang memantul di cermin ke mata Dimas. Sudut datang sama dengan sudut pantul, sehingga dua segitiga siku-siku di kiri dan kanan cermin sebangun (Sd-Sd).
2. $\dfrac{T}{15} = \dfrac{1{,}6}{2{,}4}$.
3. $T = 15 \times \dfrac{1{,}6}{2{,}4} = 10$ m.

Tiang bendera setinggi 10 m. Cobalah sendiri di halaman sekolah: cara ini bekerja walaupun matahari bersembunyi.

TAMU DARI MASA LALU

Thales dari Miletus (±624–546 SM) konon mengukur tinggi Piramida Agung Mesir dengan bayangan. Menurut kisah yang dicatat penulis Yunani berabad-abad kemudian, ia menunggu saat panjang bayangan tubuhnya sama dengan tinggi badannya, lalu mengukur bayangan piramida. Versi lain menyebut ia memakai tongkat dan perbandingan, persis seperti cara di bab ini. Beberapa abad kemudian, Eratosthenes memakai bayangan untuk memperkirakan keliling Bumi!

22.4 Translasi dan refleksi

Sekarang kita membuat bangun **bergerak**. Aturan yang memindahkan setiap titik bidang ke titik lain disebut **transformasi geometri**. Titik asal disebut *benda* (atau prapeta), titik hasilnya disebut **bayangan** dan diberi tanda aksen: $A \mapsto A'$.

DEFINISI: TRANSLASI

Translasi (pergeseran) oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memindahkan **setiap** titik sejauh a satuan mendatar dan b satuan tegak:

$$(x, y) \;\mapsto\; (x + a,\; y + b).$$

$a > 0$ berarti ke kanan, $a < 0$ ke kiri, $b > 0$ ke atas, $b < 0$ ke bawah.

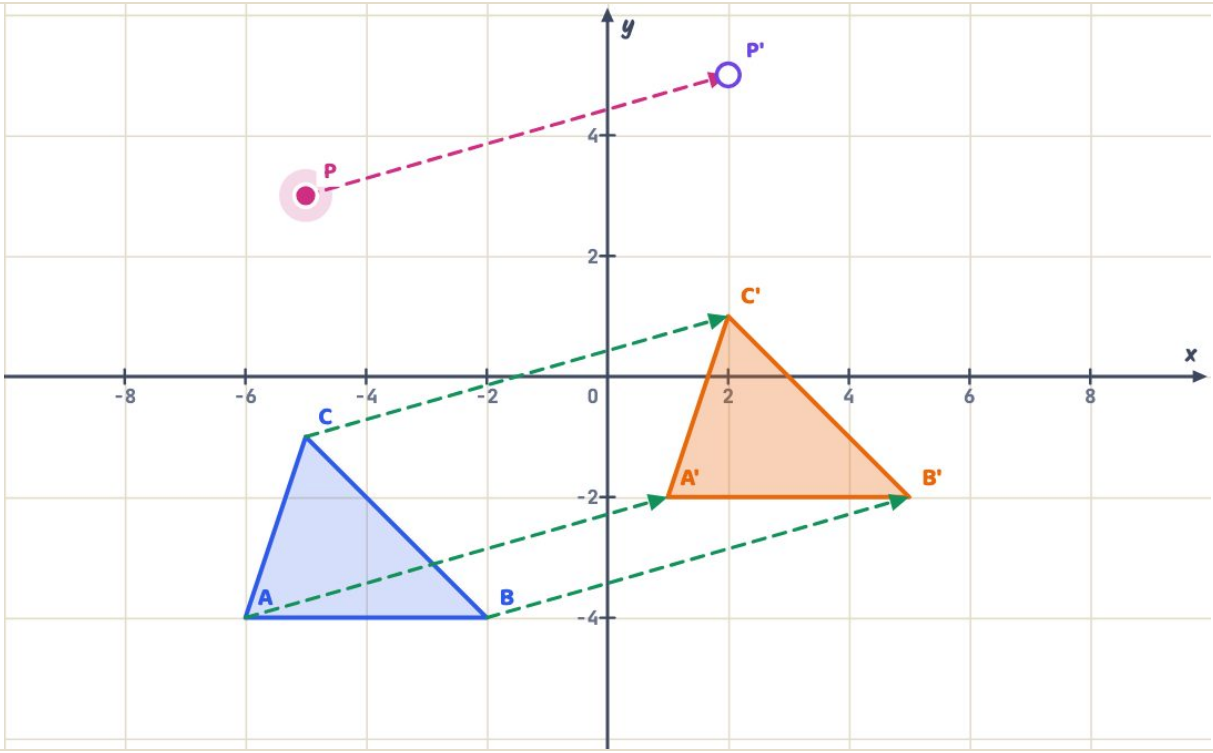
GRAFIK HIDUP

Translasi: semua titik bergeser searah dan sama jauh

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22

$$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \quad (x, y) \mapsto (x + a,\ y + b)$$

$$A(-6, -4) \mapsto A'(1, -2) \qquad P(-5, 3) \mapsto P'(2, 5)$$



Vektor translasi	Jarak geser AA′ = BB′ = PP′
(7, 2)	7,28

Geser slider a dan b, lalu seret titik P ke mana saja. Semua panah selalu sejajar dan sama panjang. Bentuk dan ukuran segitiga tidak berubah sedikit pun: hasil translasi selalu **kongruen** dengan bendanya.

CONTOH **Menggeser segitiga**

Segitiga ABC dengan $A(1,2)$, $B(4,2)$, dan $C(2,5)$ ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tentukan koordinat bayangannya.

1. Tambahkan -3 pada setiap koordinat-x dan 1 pada setiap koordinat-y.
2. $A'(1-3,\ 2+1) = (-2,3)$, $B'(4-3,\ 2+1) = (1,3)$, $C'(2-3,\ 5+1) = (-1,6)$.

$A'(-2,3)$, $B'(1,3)$, $C'(-1,6)$**: segitiga bergeser 3 satuan ke kiri dan 1 satuan ke atas.**

Refleksi (pencerminan) bekerja seperti cermin datar. Bayangan setiap titik berada di seberang cermin dengan jarak yang sama: garis yang menghubungkan titik dan bayangannya **tegak lurus** cermin dan **dibagi dua sama panjang** oleh cermin. Titik yang terletak tepat pada cermin tidak berpindah.

Cermin	**Bayangan** (x, y)	**Contoh:** $(3, 1)$
sumbu-x	$(x, -y)$	$(3, -1)$
sumbu-y	$(-x, y)$	$(-3, 1)$
garis $y = x$	(y, x)	$(1, 3)$
garis $y = -x$	$(-y, -x)$	$(-1, -3)$
garis $x = h$	$(2h - x, y)$	$h = 5$: $(7, 1)$
garis $y = k$	$(x, 2k - y)$	$k = 2$: $(3, 3)$
titik asal O	$(-x, -y)$	$(-3, -1)$

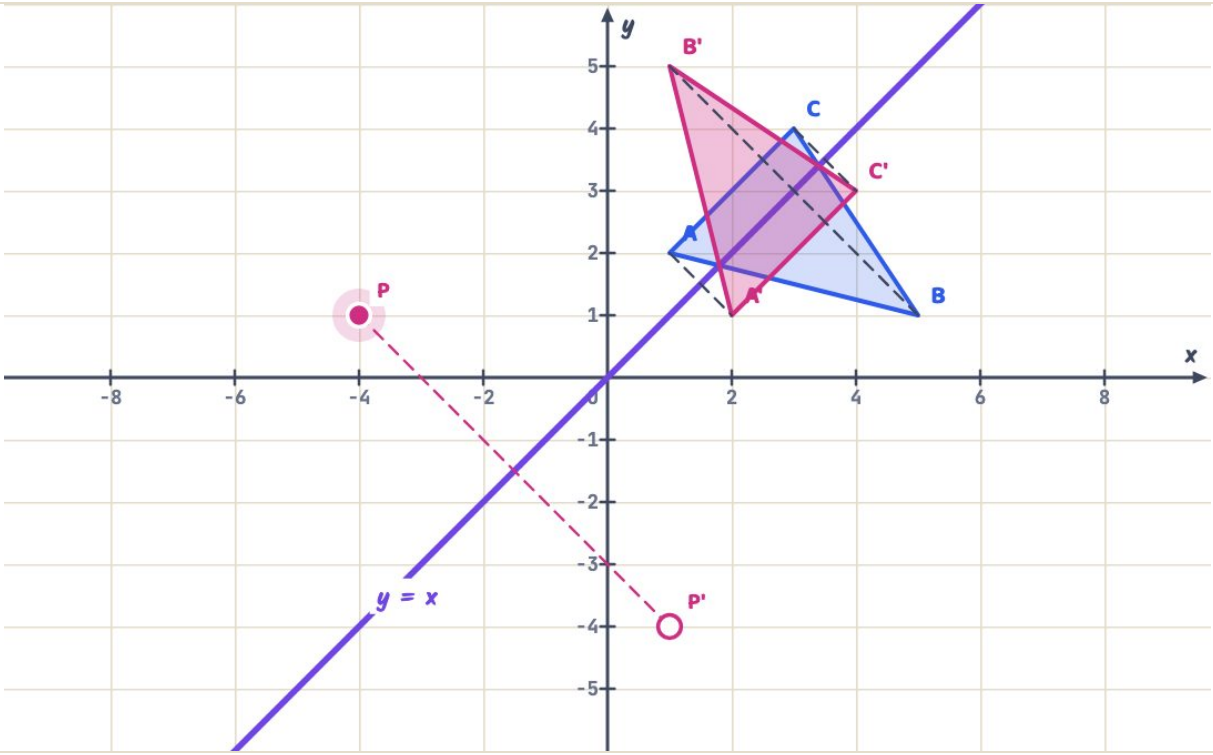
GRAFIK HIDUP **Tujuh cermin, satu segitiga**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22

$$PP' \perp \text{cermin}$$

$$P(-4, 1) \mapsto P'(1, -4)$$

Garis penghubung titik dan bayangannya tegak lurus cermin dan dibagi dua sama panjang oleh cermin.



cermin y = x: (x, y) → (y, x)

Bayangan P′	Panjang PP′
(1, -4)	7,07

Ganti nomor cermin 1–7 dan baca aturannya di label. Seret titik P sampai tepat berada di cermin: apa yang terjadi pada P'? Perhatikan juga urutan $A \to B \to C$ pada cermin garis (nomor 1–6): pada benda berlawanan arah jarum jam, pada bayangan searah jarum jam. Cermin garis **membalik arah hadap**; cermin titik O (nomor 7) tidak, karena sama dengan rotasi 180°.

Tebak Dulu!

Sebuah segitiga dicerminkan terhadap garis $x = 1$, lalu hasilnya dicerminkan lagi terhadap garis $x = 4$. Hasil akhirnya sama dengan...

translasi 3 satuan ke kanan.

translasi 6 satuan ke kanan.

kembali ke posisi semula.

rotasi 180°.

Jawabannya: translasi 6 satuan ke kanan. Cermin pertama: $x \mapsto 2 - x$. Cermin kedua: $2 - x \mapsto 8 - (2 - x) = x + 6$. Setiap titik bergeser $6 = 2 \times 3$ satuan, yaitu **dua kali** jarak antarcermin. Dua kali membalik arah hadap berarti kembali menghadap semula, jadi hasilnya pergeseran biasa.

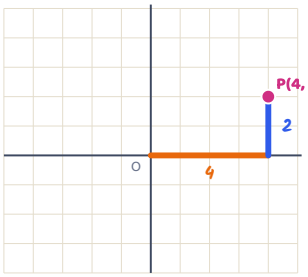
Mengapa dua cermin sejajar selalu menghasilkan translasi?

Letakkan cermin pada garis $x = h_1$ dan $x = h_2$. Cermin pertama: $x \mapsto 2h_1 - x$. Cermin kedua: $2h_1 - x \mapsto 2h_2 - (2h_1 - x) = x + 2(h_2 - h_1)$. Koordinat-$y$ tidak berubah. Jadi hasilnya translasi sejauh $2(h_2 - h_1)$, dua kali jarak antarcermin, dengan arah dari cermin pertama ke cermin kedua. ∎

∎

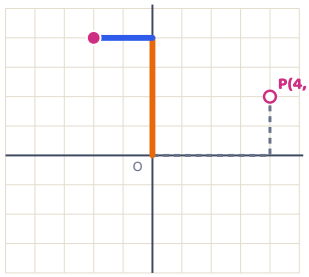
22.5 Rotasi

Jarum jam, kincir angin, dan roda motor melakukan **rotasi** (perputaran). Rotasi ditentukan oleh tiga hal: **pusat** P, **besar sudut** α, dan **arah**. Dalam matematika, sudut **positif berarti berlawanan arah jarum jam**. Setiap titik berputar mengelilingi pusat dan jaraknya ke pusat tidak berubah.



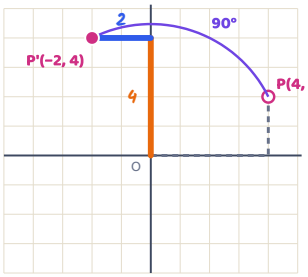
Jalur menuju P(4, 2):
4 ke kanan (oranye),
lalu 2 ke atas (biru).

Langkah 1. Titik $P(4, 2)$: dari O, jalan 4 satuan ke kanan (oranye), lalu 2 satuan ke atas (biru).



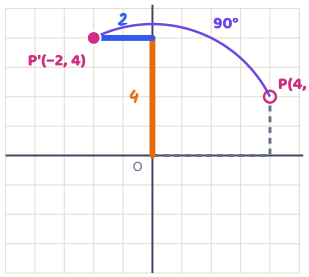
Putar seluruh jalur 90°
berlawanan arah jarum jam
dengan pusat O.

Langkah 2. Putar seluruh jalur itu 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O. Panjang setiap ruas tidak berubah.



Oranye kini ke atas (4),
biru kini ke kiri (2).
P menempuh busur 90°.

Langkah 3. Ruas oranye kini menunjuk ke atas (4 satuan) dan ruas biru menunjuk ke kiri (2 satuan). Titik P bergerak sepanjang busur lingkaran.



(x, y) → (−y, x)
(4, 2) → (−2, 4)

Langkah 4. Jadi $P'(-2, 4)$. Aturannya: $(x, y) \mapsto (-y, x)$. Tukar koordinatnya, lalu beri tanda negatif pada yang baru di depan.

ATURAN ROTASI DENGAN PUSAT $O(0, 0)$

- 90° (berlawanan arah jarum jam): $(x, y) \mapsto (-y, x)$
- 180° (setengah putaran, arah mana pun): $(x, y) \mapsto (-x, -y)$
- -90° atau 270° (searah jarum jam): $(x, y) \mapsto (y, -x)$

Untuk pusat $P(a, b)$: geser dulu sehingga P menjadi titik asal, putar, lalu geser kembali. Contohnya untuk 90°: $(x, y) \mapsto \big(a - (y - b),\ b + (x - a)\big)$.

TRIK KAK LINTANG

Lupa aturan rotasi? Gambar titiknya di kertas berpetak, tusuk pusatnya dengan pensil, lalu putar kertasnya seperempat putaran. Atau hafalkan mantra "**tukar, lalu negatifkan yang di depan**" untuk 90°. Cek cepat: rotasi 90° dua kali harus sama dengan 180°. Benar: $(x, y) \mapsto (-y, x) \mapsto (-x, -y)$. ✓

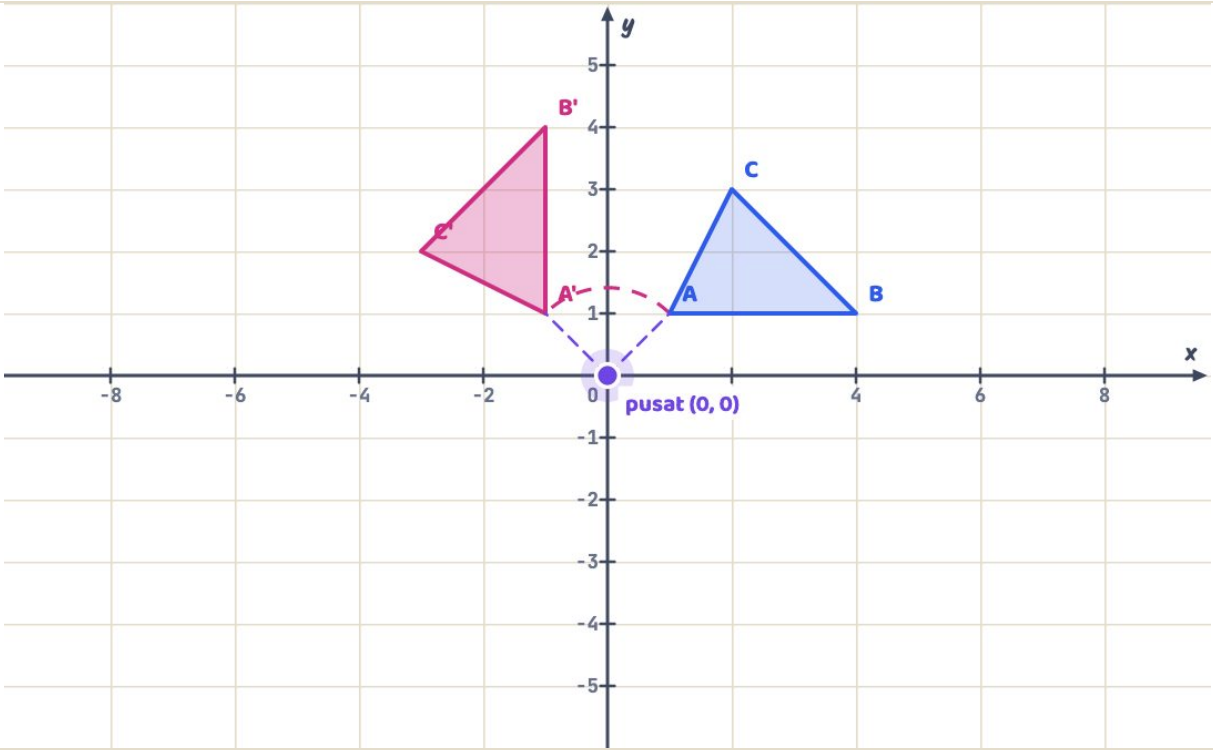
GRAFIK HIDUP

Rotasi: putar segitiga terhadap pusat mana saja

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22

$$R[P,\,\alpha]: \quad PA' = PA, \quad \angle APA' = \alpha$$

$$A(1,1) \xrightarrow{R[(0,0),\,90^\circ]} A'(-1;\ 1)$$



90° terhadap O: (x, y) → (–y, x)

A′	B′	C′	Jarak pusat–A = pusat–A′
(-1; 1)	(-1; 4)	(-3; 2)	1,41

Tekan ▶ **Jalankan** untuk memutar segitiga terus-menerus, lalu seret pusat putar ke tempat lain. Busur putus-putus adalah lintasan titik A: selalu bagian dari lingkaran yang berpusat di pusat putar. Coba cari sudut yang membuat A' tepat di sumbu-y!

KERJAKAN BERSAMA **Baling-baling dengan pusat di luar O**

Ujung baling-baling berada di $P(5,3)$. Baling-baling berputar 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $C(2,1)$. Di mana posisi ujungnya sekarang?

1. Geser agar pusat menjadi titik asal: $P - C = (5-2,\ 3-1) = (3,2)$.
2. Putar 90°: $(3,2) \mapsto (-2,3)$.
3. Geser kembali: $P' = (2+(-2),\ 1+3) = (0,4)$.

Ujung baling-baling berada di $P'(0,4)$. Cek: $CP = CP' = \sqrt{13}$, jaraknya ke pusat tetap.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Rotasi bersudut positif berarti berlawanan arah jarum jam, bukan searah. Ini kebalikan dari gerak jarum jam yang biasa kita lihat. Jadi $R[O, 90^\circ]$ memindahkan $(1,0)$ ke $(0,1)$, naik ke atas, bukan turun ke $(0,-1)$.

22.6 Dilatasi dan komposisi transformasi

Translasi, refleksi, dan rotasi tidak mengubah ukuran. Untuk memperbesar atau memperkecil, kita butuh **dilatasi**. Bayangkan proyektor di kelas: cahaya memancar dari lampu (pusat), dan gambar di layar adalah perbesaran gambar pada slide.

DEFINISI: DILATASI

Dilatasi dengan pusat $P(a,b)$ dan faktor skala k, ditulis $D[P,k]$, memetakan setiap titik X ke X' pada garis PX sehingga $\overrightarrow{PX'} = k\,\overrightarrow{PX}$:

$$x' = a + k(x-a), \qquad y' = b + k(y-b).$$

Jika pusatnya O, cukup $(x,y) \mapsto (kx, ky)$. Untuk $k > 1$ bangun diperbesar, untuk $0 < k < 1$ diperkecil, dan untuk $k < 0$ bayangan berada di seberang pusat dalam posisi terbalik.

RUMUS HIDUP

Dilatasi sebuah titik

$$x' = a + k\,(x - a)$$

Ukur jarak titik dari pusat, kalikan dengan k, lalu hitung lagi dari pusat. Koordinat y dihitung dengan cara yang sama.

- x x titik asal
- y y titik asal
- a x pusat
- b y pusat
- k Faktor skala
- x' x bayangan



Titik (**4**, **3**) didilatasi dengan pusat (**1**, **1**) dan faktor **2**: x' = **7** dan y' = **5**, jadi bayangannya (**7**; **5**). Jaraknya ke pusat menjadi **2** kali semula.

Cek satuan: Koordinat tidak bersatuan; faktor skala juga tidak.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DILATASI-TITIK

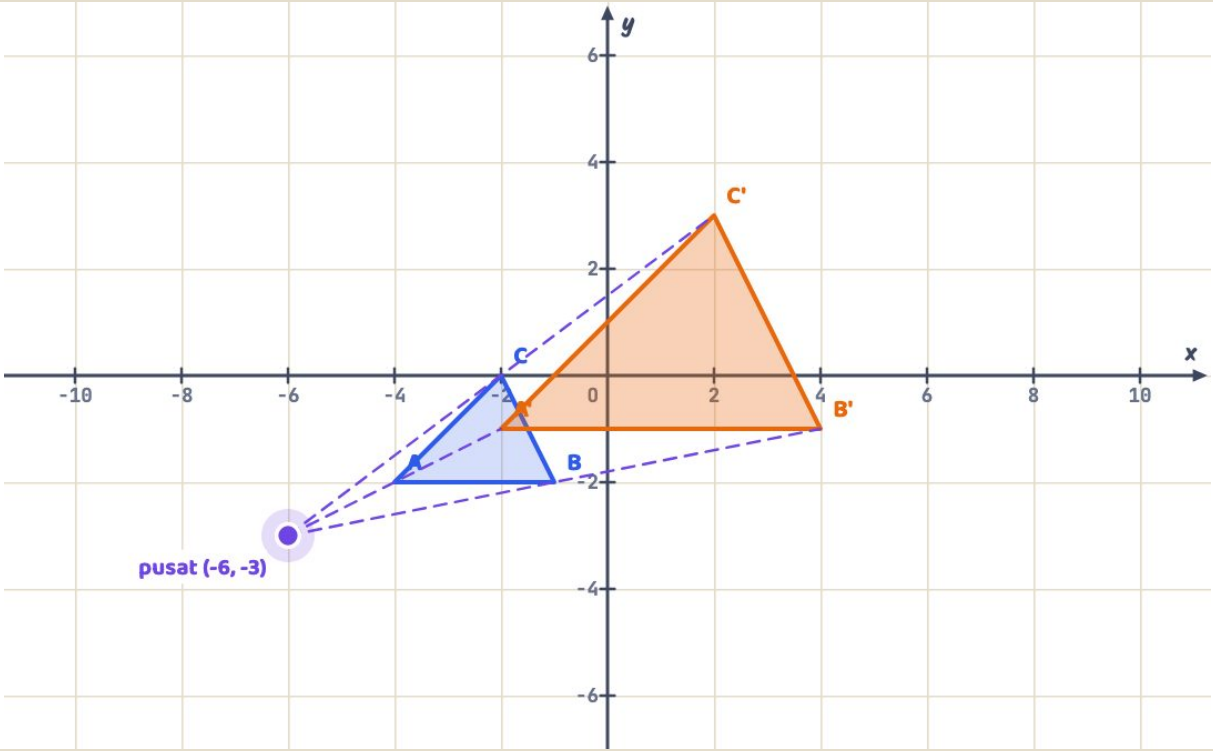
GRAFIK HIDUP **Dilatasi: perbesar, perkecil, atau balik lewat pusat**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22

$$D[P,\ k]: \quad \overrightarrow{PA'} = k\,\overrightarrow{PA}$$

$$A(-4, -2) \xrightarrow{D[(-6,-3),\,2]} A'(-2;\ -1)$$

Untuk pusat P(p, q): x' = p + k(x − p) dan y' = q + k(y − q).



k > 1: diperbesar

Faktor panjang |k|	Luas ΔABC	Luas ΔA′B′C′ = k² × 3
2	3	12

Ubah k dari 3 turun sampai -3. Garis putus-putus dari pusat selalu melewati titik dan bayangannya. Perhatikan luas: saat $k = 2$, luas bayangan 4 kali; saat $k = -1$, bayangan terbalik, tetapi ukurannya sama. Seret pusatnya ke dalam segitiga juga!

Transformasi dapat dikerjakan berturut-turut. Hasilnya disebut **komposisi transformasi**, ditulis $T_2 \circ T_1$ untuk "kerjakan T_1 dulu, lalu T_2". Komposisi yang paling mengejutkan adalah dua pencerminan.

DUA PENCERMINAN

- Dua cermin **sejajar** berjarak d: hasilnya **translasi** sejauh $2d$ tegak lurus cermin.
- Dua cermin **berpotongan** di O dengan sudut θ: hasilnya **rotasi** berpusat O sebesar 2θ.

Translasi, refleksi, rotasi, dan komposisinya disebut **isometri**: jarak tidak berubah, jadi bayangannya selalu **kongruen** dengan bendanya. Jika dilatasi ikut dilibatkan, bayangannya **sebangun** dengan bendanya.

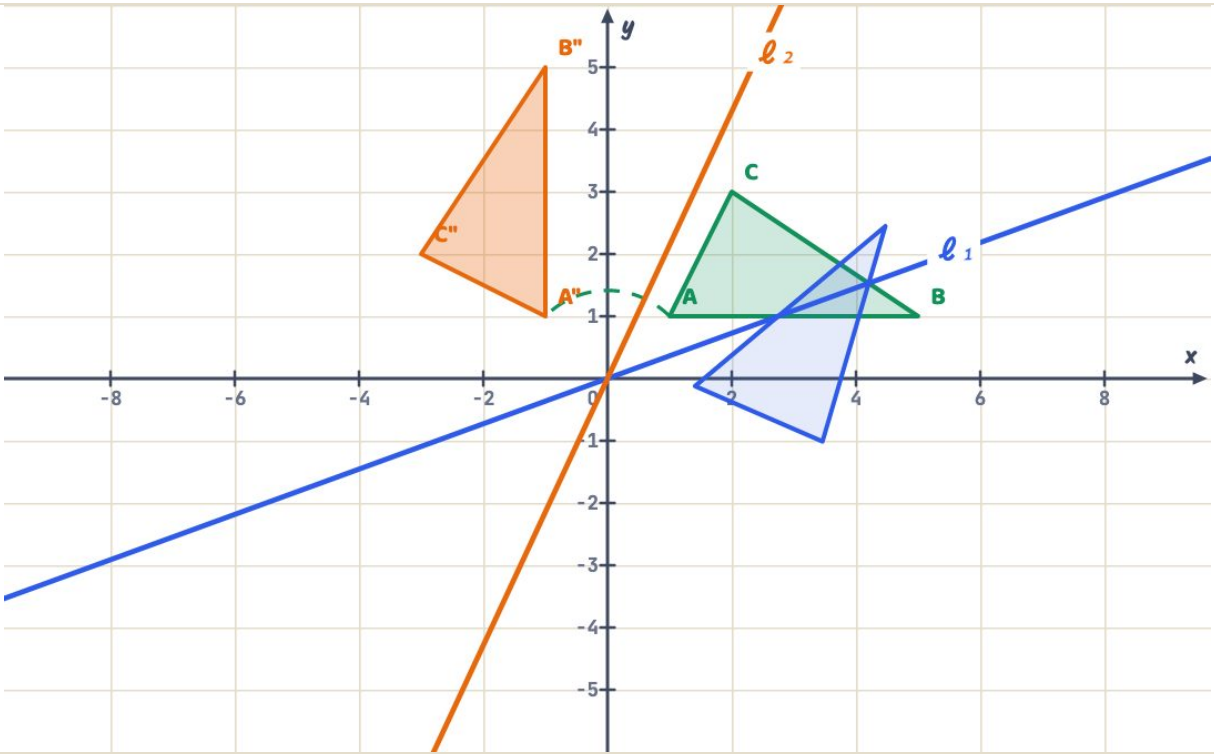
GRAFIK HIDUP **Dua cermin berpotongan = satu rotasi**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22

$$M_{\ell_2} \circ M_{\ell_1} = R[O,\, 2\theta]$$

$$2 \times (65^\circ - 20^\circ) = 90^\circ$$

Cermin ℓ_1 lalu cermin ℓ_2 sama dengan rotasi berpusat O sebesar dua kali sudut antarcermin θ.



sudut 45°: rotasi 90°

Sudut antarcermin	Hasil: rotasi sebesar
45 °	90 °

Segitiga hijau dicerminkan terhadap ℓ_1 (bayangan pucat), lalu terhadap ℓ_2 (oranye). Putar kedua cermin bersama-sama dengan sudut antarcermin tetap: hasil akhirnya tidak berubah! Yang menentukan hanyalah sudut antarcermin.

Transformasi	Bayangan (x, y)	Ukuran	Bentuk	Arah hadap
Translasi $T(a, b)$	$(x + a, y + b)$	tetap	tetap	tetap
Refleksi (contoh: sumbu-y)	$(-x, y)$	tetap	tetap	terbalik

Rotasi $R[O, 90^\circ]$	$(-y, x)$	tetap	tetap	tetap
Dilatasi $D[O, k]$	(kx, ky)	dikali $\lvert k \rvert$	tetap	tetap

COBA SENDIRI **Apakah urutan penting?**

Titik $A(3, -1)$. (a) Cerminkan terhadap sumbu-y, lalu dilatasi $D[O, 2]$. Bandingkan dengan urutan terbalik. (b) Lakukan hal yang sama untuk pencerminan terhadap sumbu-y dan translasi $T(2, 0)$.

1. (a) Cermin lalu dilatasi: $(3, -1) \mapsto (-3, -1) \mapsto (-6, -2)$. Dilatasi lalu cermin: $(3, -1) \mapsto (6, -2) \mapsto (-6, -2)$. Hasilnya sama.
2. (b) Cermin lalu translasi: $(3, -1) \mapsto (-3, -1) \mapsto (-1, -1)$. Translasi lalu cermin: $(3, -1) \mapsto (5, -1) \mapsto (-5, -1)$. Hasilnya berbeda!
3. Pada (a), keduanya "berpusat" di O sehingga dapat bertukar urutan. Pada (b), translasi memindahkan titik ke sisi cermin yang lain sebelum dicerminkan.

Urutan komposisi umumnya penting. Ada pasangan yang dapat ditukar (komutatif), tetapi jangan mengandalkannya tanpa mengecek.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Urutan komposisi transformasi itu penting. Notasi $T_2 \circ T_1$ dibaca dari kanan: T_1 dikerjakan lebih dulu. Selalu kerjakan langkah demi langkah dan tulis bayangan antaranya.

🚀 **LANJUT · IB & OLIMPIADE**

TRANSFORMASI SEBAGAI MATRIKS

Rotasi, refleksi terhadap garis melalui O, dan dilatasi berpusat O dapat ditulis sebagai perkalian matriks $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Komposisi "M_1 lalu M_2" adalah hasil kali $M_2 M_1$, dan urutan perkalian matriks memang tidak boleh ditukar sembarangan. Bonus: determinan matriks adalah faktor pengali **luas**. $\det D_k = k^2$ (luas dikali k^2), $\det R_\alpha = 1$ (luas tetap), dan $\det C_{y=x} = -1$ (luas tetap, tetapi arah hadap terbalik).

TAMU DARI MASA LALU

Pada 1872, matematikawan Jerman Felix Klein mengusulkan cara pandang baru yang dikenal sebagai Program Erlangen: sebuah geometri ditentukan oleh **kelompok transformasi** yang dianggap "tidak mengubah apa-apa". Geometri kekongruenan adalah ilmu tentang sifat yang tidak berubah oleh isometri (panjang, sudut, luas). Geometri kesebangunan mengizinkan dilatasi juga, sehingga yang tetap hanyalah sudut dan perbandingan panjang.

22.7 Simetri dan pola batik

Sebuah bangun memiliki **simetri** jika ada transformasi (selain "diam saja") yang memetakan bangun itu tepat ke dirinya sendiri. Jika transformasinya refleksi, kita sebut **simetri lipat** (cermin); jika rotasi, **simetri putar**. Banyaknya posisi berbeda dalam satu putaran penuh yang tampak sama disebut **orde** simetri putar.

Bahasa sederhana · Coba lipat selembar kertas, gunting sebuah bentuk, lalu buka lipatannya. Bentuk yang muncul pasti punya **simetri lipat**: sisi kiri adalah cerminan sisi kanan. Sekarang perhatikan kipas angin berbaling-baling tiga: diputar sepertiga putaran, ia tampak sama. Itulah **simetri putar** berorde 3.

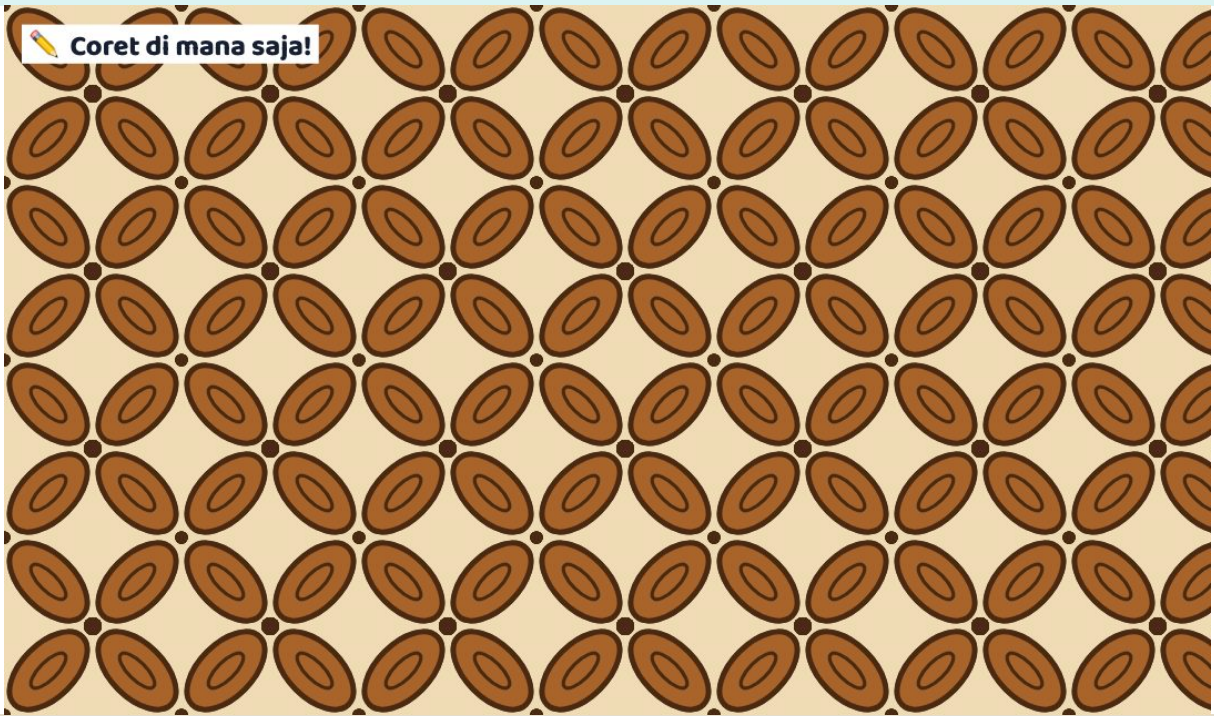
MATEMATIKA NUSANTARA

Batik adalah galeri transformasi geometri. Motif **kawung** dari Yogyakarta dan Surakarta menyusun empat bentuk lonjong, mirip irisan buah aren, mengelilingi satu titik: simetri putar orde 4 sekaligus simetri cermin. Motif **parang** mengulang pita miring berbentuk huruf S secara diagonal: translasi. Motif **ceplok** memenuhi kain dengan "bunga" yang disusun dalam kisi persegi. Tukang batik cap menekan stempel tembaga berulang-ulang, persis seperti translasi. Pola serupa muncul pada tenun ikat Sumba, songket Palembang, dan ornamen kayu masjid. Sejak 2 Oktober 2009, UNESCO mengakui batik Indonesia sebagai Warisan Budaya Takbenda Kemanusiaan, dan tanggal itu kita peringati sebagai Hari Batik Nasional.

LAB MINI

Mesin batik simetri

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22



Grup simetri	Salinan per ubin	Simetri putar	Garis cermin
p4m	8	orde 4 (90°)	4 arah

Pilih motif awal, atau pilih "Kosong" lalu **coret di mana saja** dengan mouse atau jari. Setiap coretan langsung disalin oleh aturan simetri ke seluruh kain. Ganti jenis simetri untuk motif yang sama: kapan pola terlihat seperti kawung, kapan seperti parang? Nyalakan "Tampilkan cermin & pusat putar" untuk melihat garis cermin dan pusat putarnya.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

HANYA ADA 17 JENIS POLA UBIN

Pola yang berulang ke dua arah di bidang (seperti kain batik yang tak berujung) disebut *pola wallpaper*. Pada 1891, Evgraf Fedorov membuktikan bahwa jenis simetrinya hanya ada **17**, tidak lebih dan tidak kurang. Mesin batik di atas memuat tujuh di antaranya (p1, pm, pg, p2, pmm, p4, p4m). Fakta indah lainnya: pola berulang hanya boleh memiliki simetri putar orde 2, 3, 4, atau 6, tidak pernah orde 5! Alasannya: ambil dua pusat putar orde n, yaitu A dan B, yang jaraknya d paling kecil. Putar B terhadap A sebesar $\theta = \frac{360^\circ}{n}$, dan putar A terhadap B sebesar $-\theta$. Dua titik hasilnya juga pusat putar, dan jaraknya $d\,|1 - 2\cos\theta|$. Jarak ini harus 0 atau paling sedikit d. Untuk $n = 5$ hasilnya $\approx 0{,}38\,d$, lebih dekat daripada d: mustahil! Hanya $n = 2, 3, 4, 6$ yang lolos.

MITOS

"Semua persegi panjang sebangun, karena sudutnya sama-sama 90°."

FAKTA

Sudut yang sama hanya cukup untuk **segitiga**. Persegi panjang 2×3 dan 2×6 sama-sama siku-siku, tetapi perbandingan sisinya $2:3 \neq 2:6$, jadi tidak sebangun.

MITOS

"Fotokopi 200% membuat gambar dua kali lebih besar."

FAKTA

Panjangnya memang dua kali, tetapi luasnya **empat** kali. Untuk menggandakan luas (misalnya A4 ke A3), perbesarannya cukup $\sqrt{2} \approx 141\%$.

MITOS

"Cermin menukar kiri dan kanan."

FAKTA

Cermin datar sebenarnya membalik arah **depan–belakang**, yaitu arah yang tegak lurus cermin. Tangan kananmu tetap di sisi kanan cermin; kita menyebutnya "kiri" karena membayangkan diri berbalik badan.



Fotokopi & cetak foto

Tombol 141% mengubah A4 menjadi A3, dan 71% sebaliknya. Semuanya dilatasi dengan faktor 2 atau $\frac{1}{2}$.



Peta & denah

Peta skala $1:50.000$ sebangun dengan wilayah aslinya. Luas di peta harus dikali 50.000^2.



Batik cap

Stempel tembaga ditekan berulang dengan jarak tetap (translasi), kadang dibalik (refleksi) agar motifnya menyambung.

Gim & animasi

Karakter yang berbalik arah dicerminkan, roda diputar, dan kamera yang mendekat sebenarnya melakukan dilatasi.

Ornamen masjid

Bintang segi delapan pada kaligrafi dan ukiran memiliki simetri putar orde 8 dan delapan garis cermin.

Proyektor & kamera lubang jarum

Bayangan terbentuk oleh dilatasi berfaktor negatif, sehingga pada kamera lubang jarum gambarnya terbalik.

Cek Cepat

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ dengan faktor skala 3. Jika luas $\triangle ABC = 5$ cm², luas $\triangle PQR$ adalah...

- 15 cm²
- 45 cm²
- 8 cm²
- 125 cm²

Bayangan titik $(2, 7)$ oleh pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah...

- $(7, 2)$
- $(-2, 7)$
- $(2, -7)$
- $(-7, -2)$

Transformasi manakah yang dapat mengubah ukuran bangun?

- translasi
- refleksi
- rotasi
- dilatasi

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: detektif tinggi tiang bendera

Bahan: meteran, tongkat atau gagang sapu, cermin kecil, buku catatan, teman.

1. **Cara bayangan.** Pada hari cerah, berdirikan tongkat tegak di dekat tiang bendera sekolah atau pohon. Ukur tinggi tongkat, panjang bayangannya, dan panjang bayangan tiang pada waktu yang hampir bersamaan.
2. Hitung tinggi tiang dengan $T = t \times \dfrac{B}{b}$.
3. **Cara cermin.** Letakkan cermin mendatar di tanah. Mundurlah sampai puncak tiang tampak di tengah cermin. Ukur tinggi matamu, jarak kakimu ke cermin, dan jarak cermin ke tiang.
4. Hitung lagi tinggi tiang dan bandingkan dengan hasil cara bayangan.
5. Ulangi cara bayangan pada jam yang berbeda (pagi dan siang).

Pertanyaan: Apakah kedua cara memberi hasil yang mirip? Mana yang menurutmu lebih teliti, dan mengapa? Mengapa pengukuran bayangan sebaiknya tidak dilakukan tepat tengah hari di Indonesia?

RINGKASAN KILAT

Bab 22 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- membedakan bangun **kongruen** dan **sebangun**, lalu menghitung **faktor skala** beserta pengaruhnya pada luas dan volume
- memakai **syarat kesebangunan segitiga** untuk mencari panjang yang belum diketahui, termasuk tinggi benda dari bayangannya
- menentukan bayangan titik dan bangun oleh **translasi**, **refleksi**, **rotasi**, dan **dilatasi**
- menyusun **komposisi transformasi** dan mengenali **simetri** pada motif batik dan tenun

Istilah kunci

kongruen · sebangun · faktor skala · transformasi geometri · bayangan · Translasi · Refleksi · rotasi · dilatasi · komposisi transformasi · isometri · simetri

Rumus penting

$$k = \frac{p'}{p}$$

Faktor skala bangun sebangun. Bagi panjang pada bayangan dengan panjang yang bersesuaian pada bangun asli. Semua pasangan sisi memberi k yang sama.

$$T = t \times \frac{B}{b}$$

Tinggi benda dari bayangannya. Tinggi benda sama dengan tinggi tongkat dikali berapa kali bayangan benda lebih panjang daripada bayangan tongkat.

$$x' = a + k\,(x - a)$$

Dilatasi sebuah titik. Ukur jarak titik dari pusat, kalikan dengan k, lalu hitung lagi dari pusat. Koordinat y dihitung dengan cara yang sama.

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- Untuk segi empat, sudut yang sama besar belum menjamin sebangun.
- Pasangan sisi ditentukan oleh sudut, bukan oleh posisi pada gambar.
- Rotasi bersudut positif berarti berlawanan arah jarum jam, bukan searah.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=22

🧩 Teka-teki untuk Bab 23

Di peta kota bergrid, sarang Ancil berada di $A(1, 3)$ dan rumah neneknya di $B(7, 5)$. Sungai mengalir sepanjang sumbu-x. Ancil ingin mampir minum di sungai lalu ke rumah nenek. Di titik mana ia harus minum agar perjalanannya sependek mungkin, dan berapa panjang perjalanan itu?

▼ **Intip petunjuk**

Pakai trik bab ini: cerminkan B terhadap sungai menjadi $B'(7, -5)$. Jalan $A \to$ sungai $\to B$ sama panjang dengan jalan $A \to$ sungai $\to B'$, dan jalan terpendek ke B' adalah garis lurus! Untuk menghitung panjangnya kamu perlu **rumus jarak dua titik**, salah satu bintang Bab 23 tentang geometri koordinat dan vektor.

BAB 23 · GEOMETRI & PENGUKURAN

23 Koordinat & Vektor: Bahasa Panah Penunjuk Arah

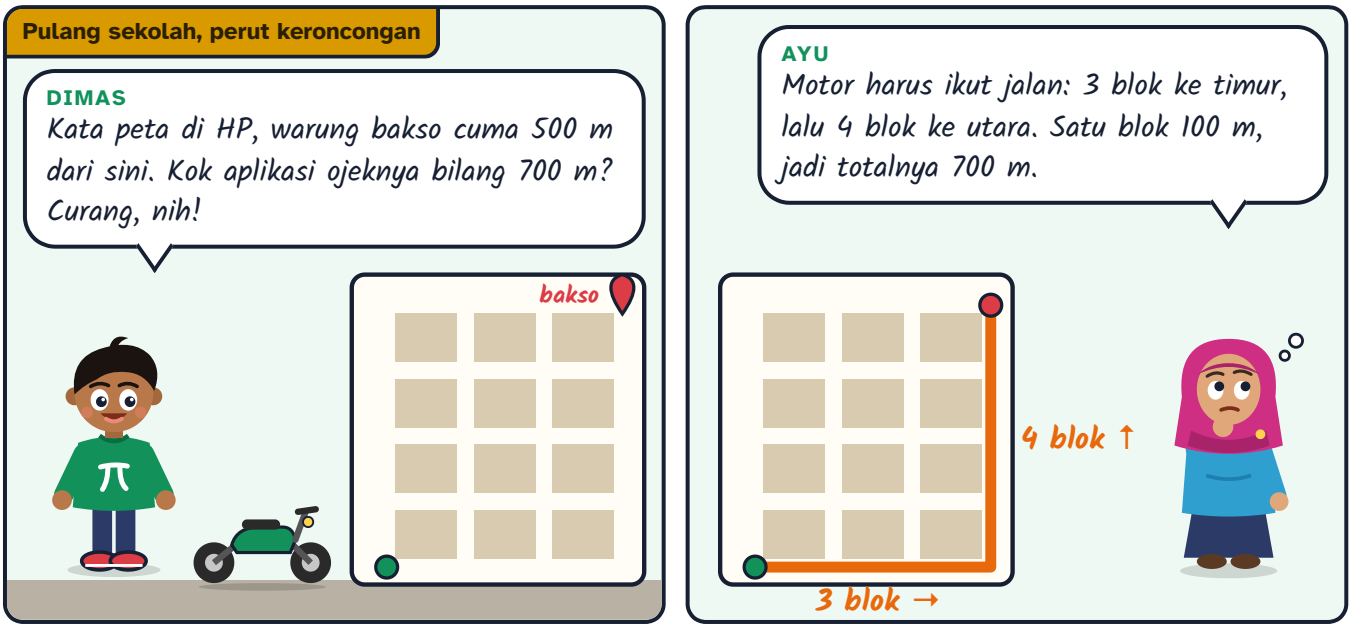
Mengapa ojek menempuh 700 m padahal peta bilang warung bakso hanya 500 m? Bagaimana feri di Selat Sunda tiba tepat di dermaga walau arus terus mendorongnya ke samping? Jawabannya ada pada panah-panah kecil bernama vektor.

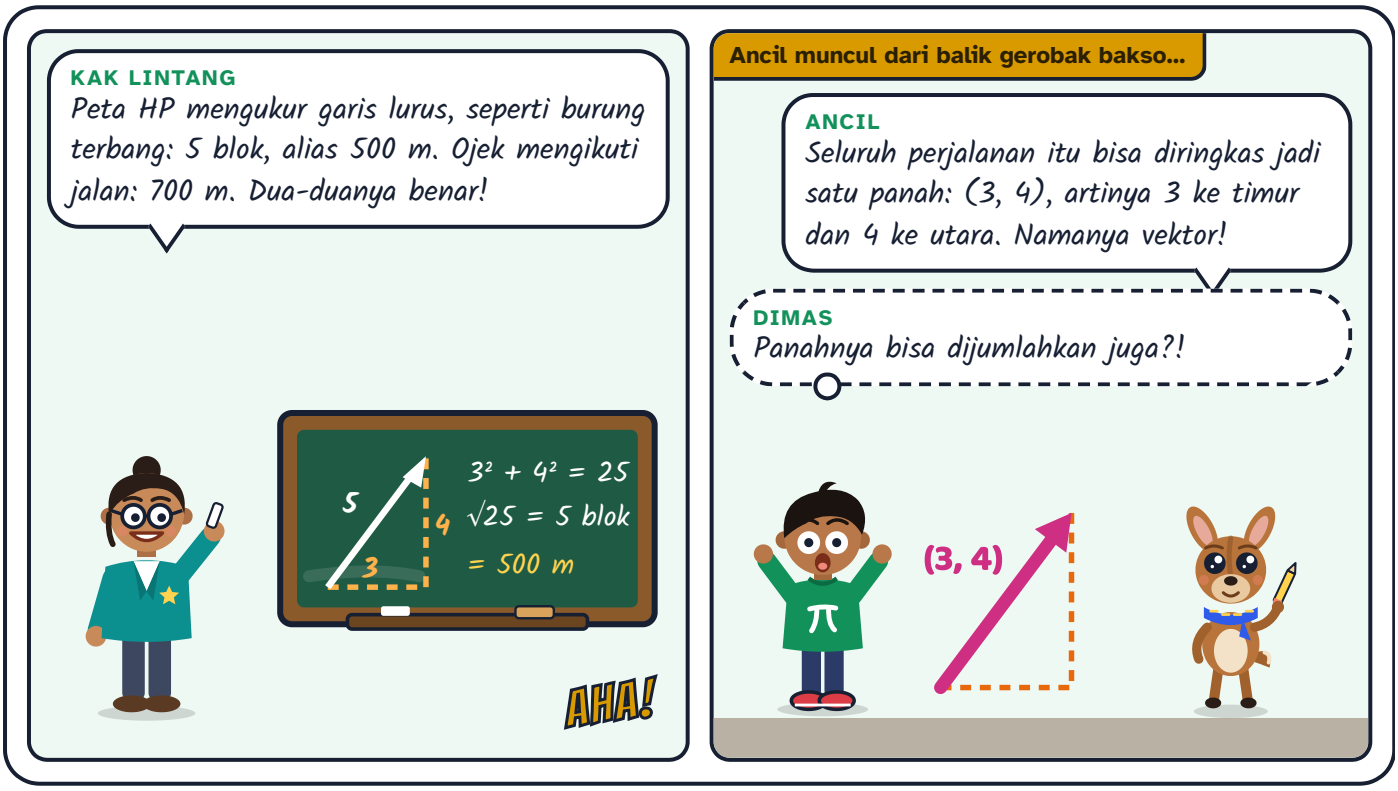
Setelah bab ini, kamu bisa

- menghitung **jarak** dan **titik tengah** dua titik, serta membedakan jarak lurus dengan jarak taksi;
- menulis dan membaca **persamaan lingkaran** $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, termasuk dari bentuk umumnya;
- menyatakan perpindahan sebagai **vektor**, menuliskannya sebagai vektor kolom, dan menghitung panjangnya;
- menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan vektor dengan skalar, termasuk menghitung **resultan** kecepatan kapal dan arus;
- memakai **vektor posisi** untuk membagi ruas garis, serta memakai **hasil kali titik** untuk menghitung sudut dan menguji ketegaklurusan.

JALAN PINTAS KE WARUNG BAKSO

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Ojek berangkat dari titik start menuju warung yang letaknya 3 blok ke timur dan 4 blok ke utara. Ojek hanya boleh lewat jalan dan hanya bergerak ke timur atau ke utara. Rute mana yang paling pendek?

- Rute zig-zag (timur, utara, timur, utara, ...), karena paling mirip garis lurus.
- Lurus ke timur dulu 3 blok, baru ke utara 4 blok.
- Semua rute seperti itu sama panjang: 7 blok.
- Ke utara dulu 4 blok, baru ke timur 3 blok.

Jawabannya: semuanya sama, 7 blok. Setiap rute yang hanya bergerak ke timur dan ke utara pasti memuat tepat 3 langkah ke timur dan 4 langkah ke utara. Yang berbeda hanya urutannya. Rute zig-zag tampak "lebih lurus", tetapi panjangnya tetap 7 blok. Ternyata ada 35 rute terpendek seperti itu (cara menghitungnya ada di Bab 32). Jarak "versi jalan" ini disebut **jarak taksi**. (Teka-teki sungai Ancil dari Bab 22 justru memakai jarak lurus: $AB' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ satuan, dengan titik minum $\left(\frac{13}{4}, 0\right)$.)

23.1 Jarak, jarak taksi, dan titik tengah

Di Bab 18 kamu sudah memakai Teorema Pythagoras untuk menghitung jarak lurus antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$. Kaki-kakinya adalah selisih mendatar $\Delta x = x_2 - x_1$ dan selisih tegak $\Delta y = y_2 - y_1$. Komik di atas

menunjukkan bahwa di kota bergrid ada *dua* cara mengukur jarak yang sama-sama masuk akal.

RUMUS JARAK DAN TITIK TENGAH

Untuk dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$:

- **Jarak lurus** (jarak Euclid): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- **Jarak taksi** (lewat jalan bergrid): $d_T = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.
- **Titik tengah** ruas garis AB: $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

Mengapa titik tengah adalah "rata-rata"?

Untuk pergi dari A ke B, koordinat x bertambah $x_2 - x_1$. Titik tengah dicapai setelah menempuh **setengah** perjalanan, jadi

$$x_M = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Hal yang sama berlaku untuk y. Dengan rumus jarak, $AM = MB = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \tfrac{1}{2}d$. Jadi M memang tepat di tengah.

Bahasa sederhana · Titik tengah itu seperti tempat janjian yang adil: kamu dan temanmu sama-sama berjalan setengah jalan. Caranya gampang: jumlahkan kedua koordinat x lalu bagi dua, kemudian jumlahkan kedua koordinat y lalu bagi dua.

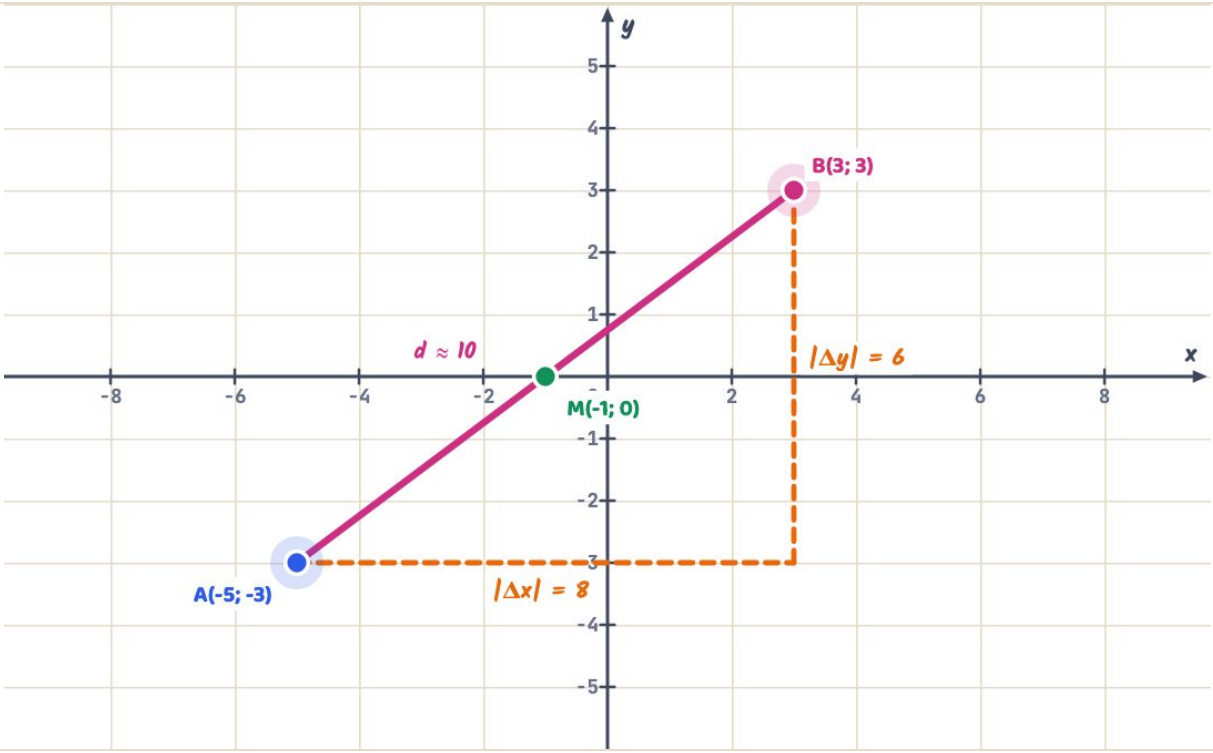
GRAFIK HIDUP

Titik tengah, jarak lurus, dan jarak ojek

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{-5 + 3}{2};\ \frac{-3 + 3}{2} \right) = (-1;\ 0)$$



✨ **jarak lurusnya bulat: ada tripel Pythagoras tersembunyi!**

Jarak lurus d	Jarak ojek |Δx| + |Δy|	Titik tengah M	Ojek ÷ lurus
10	14	(-1; 0)	1,4

Seret titik A dan B. Garis oranye putus-putus adalah rute ojek di jalan bergrid; garis magenta adalah jarak lurus; titik hijau adalah titik tengah. Kapan jarak ojek sama dengan jarak lurus? Kapan perbandingan "ojek ÷ lurus" paling besar?

RUMUS HIDUP

Jarak dua titik (bonus: titik tengah)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jarak lurus adalah sisi miring segitiga siku-siku yang kakinya selisih x dan selisih y. Titik tengahnya cukup rata-rata koordinat.

x_1 x titik A | y_1 y titik A | x_2 x titik B | y_2 y titik B | d Jarak AB satuan

JARAK AB
10
satuan

✨ **jaraknya bulat**

Selisih x = **8**, selisih y = **-6**. Kuadratnya **64** dan **36**, jumlahnya **100**, jadi d = **10**. Titik tengahnya M(**2**; **0**), dan jarak taksinya **14**.

Cek satuan: Satuan jarak sama dengan satuan sumbu: km di peta berskala km, satuan petak di kertas berpetak.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOORDINAT-JARAK-TENGAH

CONTOH

Warung di tengah jalan

Pada peta bersatuan km, rumah Dimas berada di $A(-2, 3)$ dan sekolahnya di $B(6, -3)$. Ibu ingin membuka warung tepat di tengah-tengah ruas AB. Di mana warung itu, dan berapa jarak lurus rumah ke sekolah?

1. Titik tengah: $M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right) = (2, 0)$.
2. Selisih: $\Delta x = 6 - (-2) = 8$ dan $\Delta y = -3 - 3 = -6$.
3. Jarak: $d = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Warung berada di $(2, 0)$, dan jarak lurus rumah–sekolah 10 km. Cek kewajaran: jarak A ke M adalah $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ km, tepat setengahnya.

TRIK KAK LINTANG

Titik tengah = **rata-rata**. Kalau yang diketahui titik tengah M dan satu ujung A, ujung lainnya cukup dicari dengan "loncat dua kali": $B = 2M - A$. Contoh: $M(1, 4)$ dan $A(-3, 2)$ memberi $B = (2 - (-3),\ 8 - 2) = (5, 6)$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

SEBERAPA "RUGI" OJEK DIBANDING DRONE?

Tulis $p = |\Delta x|$ dan $q = |\Delta y|$. Maka $d_T^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \geq p^2 + q^2 = d^2$, jadi $d_T \geq d$. Di sisi lain, $(p-q)^2 \geq 0$ memberi $2pq \leq p^2 + q^2$, sehingga $d_T^2 \leq 2(p^2+q^2) = 2d^2$. Kesimpulannya

$$d \ \leq \ d_T \ \leq \ \sqrt{2}\, d.$$

Ojek paling "rugi" (sekitar 1,41 kali) ketika $|\Delta x| = |\Delta y|$, yaitu saat tujuannya tepat di arah serong 45°. Coba buktikan sendiri di Grafik Hidup di atas!

23.2 Persamaan lingkaran

Sebuah menara BTS memancarkan sinyal sampai jarak 5 km ke segala arah. Daerah tepi jangkauannya berbentuk lingkaran. Di Bab 18 kamu melihat lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$: $x^2 + y^2 = r^2$. Tetapi menara jarang berdiri tepat di titik asal peta. Bagaimana kalau pusatnya pindah ke (a, b)?

DEFINISI

Lingkaran adalah himpunan semua titik yang jaraknya **sama** terhadap satu titik tetap. Titik tetap itu disebut **pusat**, dan jarak yang sama itu disebut **jari-jari** r.

PERSAMAAN LINGKARAN

Lingkaran yang berpusat di $C(a, b)$ dengan jari-jari r mempunyai persamaan

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jika pusatnya $O(0,0)$, persamaannya menjadi $x^2 + y^2 = r^2$.

Bukti: persamaan lingkaran = rumus jarak

Titik $P(x, y)$ terletak pada lingkaran jika dan hanya jika jaraknya ke pusat sama dengan r:

$$CP = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Langkah terakhir sah karena kedua ruas tidak negatif, sehingga boleh dikuadratkan tanpa menambah jawaban palsu.

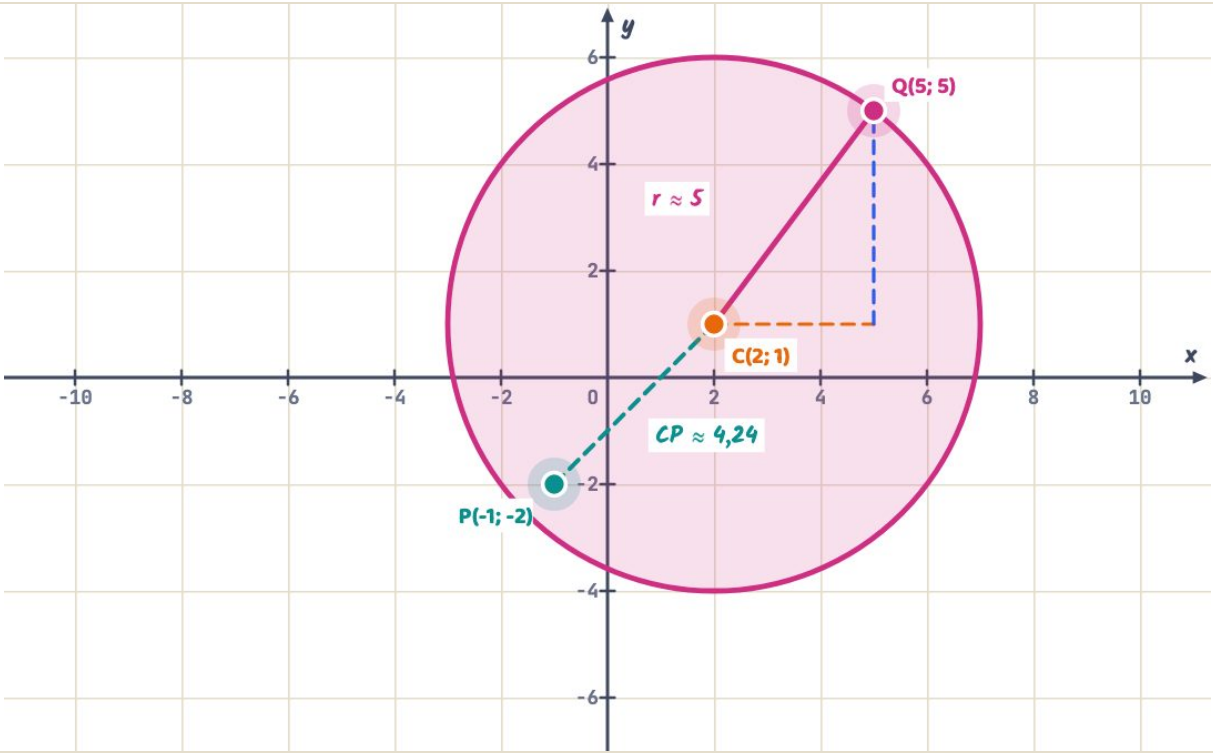
GRAFIK HIDUP **Lingkaran dengan pusat yang bisa diseret**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25$$

Lingkaran ini selalu melewati titik Q. Jari-jarinya dihitung dengan rumus jarak dari pusat C ke Q.



P di dalam lingkaran: 18 < r² = 25

r²	Jari-jari r	(x_P − a)² + (y_P − b)²	Bentuk umum
25	5	18	x² + y² - 4x - 2y - 20 = 0

Seret pusat C (oranye), titik Q (magenta) yang dilalui lingkaran, dan titik uji P (hijau toska). Perhatikan rumus di atas berubah. Bisakah kamu menaruh P tepat *pada* lingkaran tanpa menebak, hanya dengan menghitung?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pada $(x+3)^2+(y-2)^2=16$, pusatnya $(-3,2)$, bukan $(3,-2)$, dan jari-jarinya 4, bukan 16. Ingat bentuknya "x **dikurangi** a": $x+3=x-(-3)$, jadi $a=-3$. Ruas kanan adalah r^2, jadi tarik akarnya dulu.

Kalau persamaan lingkaran dijabarkan, tanda kurungnya hilang dan muncul **bentuk umum**:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \iff x^2+y^2\underbrace{-2a}_{D}x\underbrace{-2b}_{E}y+$$

Untuk kembali dari bentuk umum ke pusat dan jari-jari, pakai teknik **melengkapkan kuadrat** yang kamu pelajari di Bab 11. Hasilnya: pusat $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ dan $r=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F}$.

RUMUS HIDUP

Pusat & jari-jari dari bentuk umum lingkaran

$$r=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F}$$

Dari $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$: pusatnya $(-D/2,-E/2)$, dan jari-jarinya akar dari $(D/2)^2+(E/2)^2-F$.

- D Koefisien x
- E Koefisien y
- F Konstanta
- r Jari-jari satuan

JARI-JARI
6
satuan

✨ jari-jarinya bulat

Lingkaran $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ berpusat di (**3**; **-4**). Nilai $r^2=(D/2)^2+(E/2)^2-F=$ **36**, jadi r = **6**. Tanda '—' muncul jika $r^2\le 0$: tidak ada lingkaran nyata (paling banter hanya sebuah titik).

Cek satuan: Jari-jari memakai satuan yang sama dengan sumbu koordinat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOORDINAT-LINGKARAN-UMUM

KERJAKAN BERSAMA

Menara BTS dan rumah-rumah di sekitarnya

Sebuah menara BTS berada di $(3, -2)$ pada peta bersatuan km, dengan jangkauan sinyal 5 km. (a) Tuliskan persamaan lingkaran tepi jangkauannya. (b) Rumah Ayu di $(0, 1)$ dan rumah Dimas di $(7, 2)$. Siapa yang mendapat sinyal?

1. (a) Pusat $(3, -2)$, $r = 5$: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
2. (b) Rumah Ayu: $(0 - 3)^2 + (1 + 2)^2 = 9 + 9 = 18 < 25$. Di dalam lingkaran.
3. Rumah Dimas: $(7 - 3)^2 + (2 + 2)^2 = 16 + 16 = 32 > 25$. Di luar lingkaran.

Ayu mendapat sinyal (jaraknya $\sqrt{18} \approx 4{,}24$ km dari menara); Dimas tidak (jaraknya $\sqrt{32} \approx 5{,}66$ km).

KERJAKAN BERSAMA

Melengkapkan kuadrat

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.

1. Kelompokkan: $(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 11$.
2. Lengkapkan kuadrat: tambahkan $\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$ dan $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$ di **kedua** ruas: $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 11 + 9 + 16$.
3. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$.

Pusat $(3, -4)$ dan jari-jari $\sqrt{36} = 6$. Cek dengan Rumus Hidup di atas: $D = -6$, $E = 8$, $F = -11$.



TRIK KAK LINTANG

Untuk menguji apakah sebuah titik di dalam, pada, atau di luar lingkaran, **tidak perlu menarik akar**. Cukup bandingkan $(x - a)^2 + (y - b)^2$ dengan r^2: lebih kecil berarti di dalam, sama berarti pada lingkaran, lebih besar berarti di luar.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

PANJANG GARIS SINGGUNG DARI TITIK DI LUAR

Garis singgung lingkaran selalu tegak lurus jari-jari di titik singgungnya (Bab 20). Jadi pusat C, titik singgung T, dan titik luar $P(x_0, y_0)$ membentuk segitiga siku-siku di T, dan

$$PT = \sqrt{CP^2 - r^2} = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2}.$$

Besaran di bawah tanda akar disebut **kuasa titik** P terhadap lingkaran: positif di luar, nol pada lingkaran, negatif di dalam. Contoh: dari $P(5, 8)$ ke lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, panjang garis singgungnya $\sqrt{25 + 64 - 25} = \sqrt{64} = 8$.

23.3 Vektor: panah perpindahan

Kalau temanmu berkata, "Harta karunnya 5 langkah dari pohon mangga," kamu tetap bingung: 5 langkah *ke mana*? Ada besaran yang cukup dinyatakan dengan satu bilangan, misalnya massa atau suhu. Ada juga besaran yang butuh **arah**, misalnya perpindahan, kecepatan, dan gaya.

DEFINISI

Vektor adalah besaran yang mempunyai **besar** (panjang) dan **arah**. Vektor digambar sebagai panah: pangkalnya titik awal, ujungnya titik akhir. Besaran yang hanya mempunyai besar disebut **skalar**. Vektor dari A ke B ditulis $\vec{AB}$; vektor juga boleh diberi nama satu huruf, $\vec{a}$ atau **a**. Di bidang koordinat, vektor ditulis sebagai **vektor kolom**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},$$

dengan x = perpindahan mendatar (positif ke kanan/timur) dan y = perpindahan tegak (positif ke atas/utara). Supaya hemat tempat, bab ini kadang menulisnya mendatar: $\vec{v} = (x, y)$.

Skalar (cukup satu bilangan)	Vektor (butuh besar dan arah)
massa beras 5 kg	gaya berat 50 N ke bawah
jarak tempuh 10 km	perpindahan 10 km ke utara
kelajuan 60 km/jam	kecepatan 60 km/jam ke timur
suhu 30 °C, waktu 2 jam	angin 20 km/jam dari barat

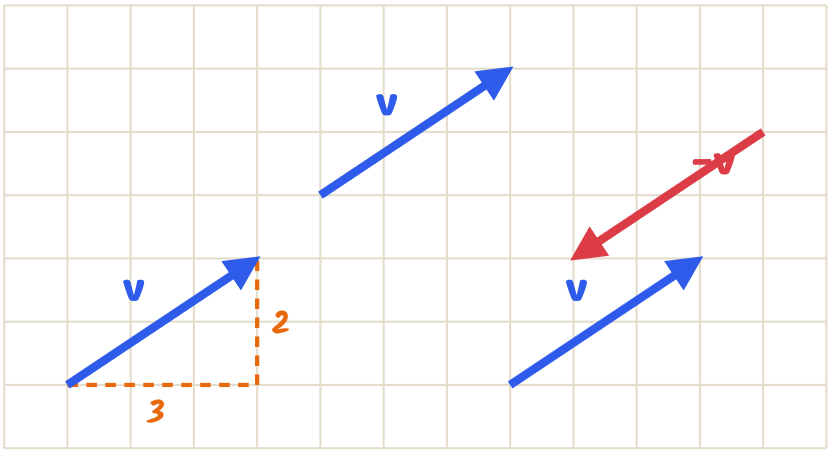
Dua hal paling penting tentang sebuah vektor adalah komponennya dan panjangnya.

KOMPONEN DAN PANJANG VEKTOR

Untuk $A(x_A, y_A)$ dan $B(x_B, y_B)$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{(ujung dikurangi pangkal)}, \qquad |\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Panjang vektor tidak lain adalah rumus jarak dari Bab 18.



Tiga panah biru: arah sama, panjang sama. Jadi ketiganya vektor yang sama: v = (3, 2).

Panah merah: –v = (–3, –2), panjang sama, arah berlawanan.

|v| = √13 ≈ 3,61

Vektor tidak terikat pada tempat: yang menentukan hanyalah arah dan panjangnya. Panah yang sama boleh digeser ke mana saja tanpa diputar, persis seperti translasi di Bab 22.

Beberapa vektor istimewa: **vektor nol** $\vec{0} = (0, 0)$ (tidak berpindah, tanpa arah), **vektor negatif** $-\vec{v}$ (panjang sama, arah berlawanan), dan **vektor satuan** yang panjangnya 1, misalnya $\mathbf{i} = (1, 0)$ ke timur dan $\mathbf{j} = (0, 1)$ ke utara. Setiap vektor bukan nol bisa "disatuankan": $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Bahasa sederhana · Vektor itu seperti petunjuk harta karun: "3 langkah ke timur, 2 langkah ke utara." Petunjuk ini tidak peduli kamu mulai dari mana; ia hanya memberi tahu **arah** dan **seberapa jauh**. Angka atas = ke kanan (minus berarti ke kiri), angka bawah = ke atas (minus berarti ke bawah).

CONTOH **Dari A ke B**

Diketahui $A(1,2)$ dan $B(4,6)$. Tentukan $\vec{AB}$, $|\vec{AB}|$, dan $\vec{BA}$.

1. Ujung dikurangi pangkal: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Panjangnya: $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
3. Arah sebaliknya: $\vec{BA} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{AB}$.

$\vec{AB} = (3,4)$ dengan panjang 5, sedangkan $\vec{BA} = (-3,-4)$: panjangnya sama, arahnya berlawanan.

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Ingat semboyan **"UKP: Ujung Kurang Pangkal"**. Vektor $\vec{AB}$ berpangkal di A dan berujung di B, jadi komponennya $B - A$. Tukar urutannya, maka tandanya ikut berbalik.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Hati-hati dengan nama arah angin. "Angin barat" adalah angin yang bertiup **dari** barat **ke** timur, jadi vektor kecepatannya menunjuk ke *timur*, misalnya $(20, 0)$ km/jam. Peta cuaca BMKG menggambar panah ke arah angin bertiup, sedangkan namanya menyebut asal angin.

ADU CEPAT **Panjang vektor kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tanda minus hilang saat dikuadratkan. Cari tripel Pythagoras yang tersembunyi: (−6, 8) adalah (3, 4) dikali 2, jadi panjangnya 10.

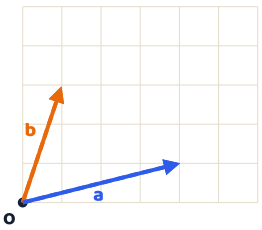


TAMU DARI MASA LALU

Pada 1637, René Descartes menerbitkan *La Géométrie* yang menyatukan aljabar dan geometri: setiap titik menjadi pasangan bilangan, dan setiap kurva menjadi persamaan. Pierre de Fermat menemukan gagasan serupa pada masa yang hampir bersamaan. Konon, Descartes mendapat ilham saat berbaring sambil mengamati seekor lalat yang merayap di langit-langit kamarnya. Gagasan vektor matang lebih lambat. Simon Stevin dari Belanda (sekitar 1586) sudah menyusun gaya-gaya dengan segitiga. William Rowan Hamilton dan Hermann Grassmann mengembangkannya pada 1840-an, lalu Josiah Willard Gibbs dan Oliver Heaviside (sekitar 1880-an) merapikannya menjadi notasi vektor dan hasil kali titik yang kita pakai sekarang.

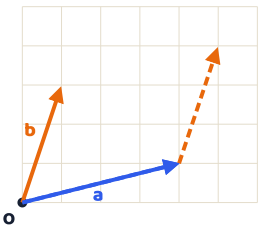
23.4 Operasi vektor: menjumlah, mengurangi, mengalikan

Ojek berjalan $\vec{a} = (4, 1)$, lalu $\vec{b} = (1, 3)$. Di mana ia berakhir? Cukup sambung panahnya: **pangkal panah kedua ditempelkan ke ujung panah pertama**. Panah dari titik awal ke titik akhir disebut **resultan**.



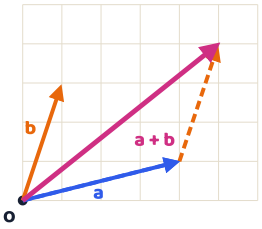
Dua perpindahan:
a = (4, 1): 4 kanan, 1 atas
b = (1, 3): 1 kanan, 3 atas

Langkah 1. Dua perpindahan dari titik O: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.



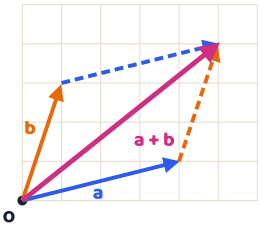
Geser b tanpa memutarnya
sampai pangkalnya menempel di ujung a (ujung ke pangkal).

Langkah 2. Geser $\vec{b}$ (tanpa diputar) sehingga pangkalnya menempel di ujung $\vec{a}$. Inilah aturan **ujung ke pangkal** (aturan segitiga).



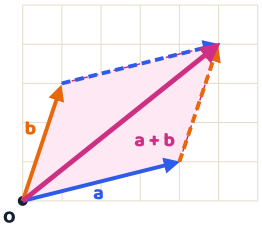
Panah dari O ke ujung terakhir:
a + b = (4 + 1, 1 + 3)
a + b = (5, 4)

Langkah 3. Resultan adalah panah dari O ke ujung terakhir: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Komponennya cukup dijumlahkan!



Balik urutannya: b dulu, baru a.
Panah biru pindah ke ujung b...
ujungnya sama: b + a = a + b

Langkah 4. Kalau $\vec{b}$ dijalani lebih dulu, lalu $\vec{a}$, ujungnya tepat sama. Jadi $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$ (komutatif).



Resultan = diagonal jajargenjang
|a + b| = √41 ≈ 6,40
|a| + |b| = √17 + √10 ≈ 7,29
jalan pintas selalu lebih pendek!

Langkah 5. Kedua jalur membentuk **jajargenjang**, dan resultan adalah diagonalnya. Perhatikan: $|\vec{a} + \vec{b}| \approx 6{,}40$ lebih kecil daripada $|\vec{a}| + |\vec{b}| \approx 7{,}29$.

SIFAT-SIFAT OPERASI VEKTOR

Untuk $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, dan bilangan real k:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}, \qquad k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}.$$

Berlaku $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, dan $|k\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|$. Dua vektor bukan nol **sejajar** jika salah satunya kelipatan yang lain: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Operasi	Komponen	Arti gambarnya

$\vec{a}+\vec{b}$	jumlahkan komponen	ujung ke pangkal, atau diagonal jajargenjang
$\vec{a}-\vec{b}$	kurangkan komponen	$\vec{a}+(-\vec{b})$; panah dari ujung $\vec{b}$ ke ujung $\vec{a}$
$k\vec{a}$, $k>0$	kalikan tiap komponen	arah tetap, panjang dikali k
$k\vec{a}$, $k<0$	kalikan tiap komponen	arah berbalik, panjang dikali $\lvert k\rvert$
$\lvert\vec{a}\rvert$	$\sqrt{a_1^2+a_2^2}$	panjang panah (Pythagoras)

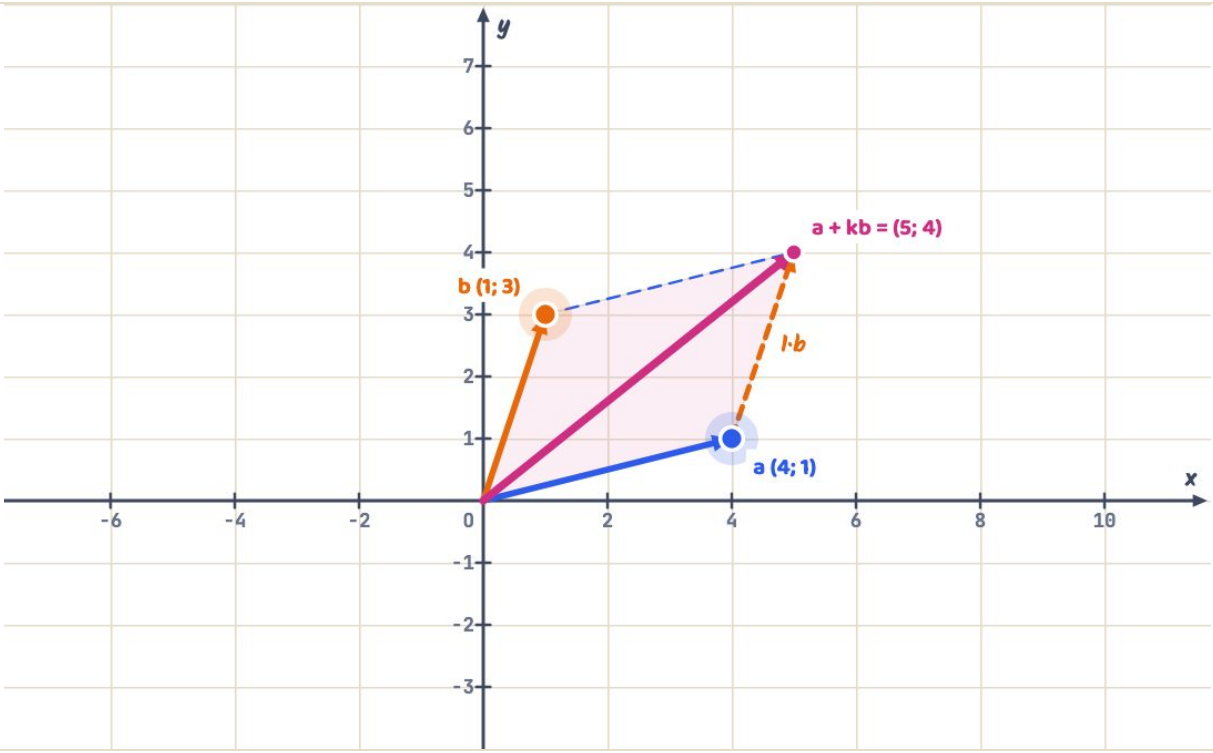
GRAFIK HIDUP

Resultan dua vektor: a + k·b

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23

$$\vec{r} = \vec{a} + k\,\vec{b}$$

$$\vec{a} + 1\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



k = 1: jumlah biasa a + b, diagonal jajargenjang

|a|	|b|	|a + k·b|	|a| + |k|·|b|
4,123	3,162	6,403	7,285

Seret ujung panah $\vec{a}$ (biru) dan $\vec{b}$ (oranye), lalu geser k. Coba $k = -1$: panah magenta berubah menjadi $\vec{a} - \vec{b}$. Kapan $|\vec{a} + \vec{b}|$ tepat sama dengan $|\vec{a}| + |\vec{b}|$?

KERJAKAN BERSAMA

Perahu motor dan arus sungai

Perahu motor di Sungai Kapuas bergerak 12 km/jam ke utara terhadap air, sedangkan arus sungai mengalir 5 km/jam ke timur. Berapa kelajuan perahu terhadap tepi sungai? Di mana perahu setelah 2 jam?

1. Kecepatan terhadap tanah = kecepatan terhadap air + kecepatan arus: $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ km/jam.
2. Kelajuannya: $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ km/jam.
3. Setelah 2 jam: perpindahan $2\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$ km, berjarak $2 \times 13 = 26$ km dari titik awal.

Perahu melaju 13 km/jam, sedikit serong ke timur dari arah utara (sekitar 22,6°; cara menghitung sudutnya ada di Bab 24). Setelah 2 jam ia berada 10 km ke timur dan 24 km ke utara dari titik awal.

Tebak Dulu!

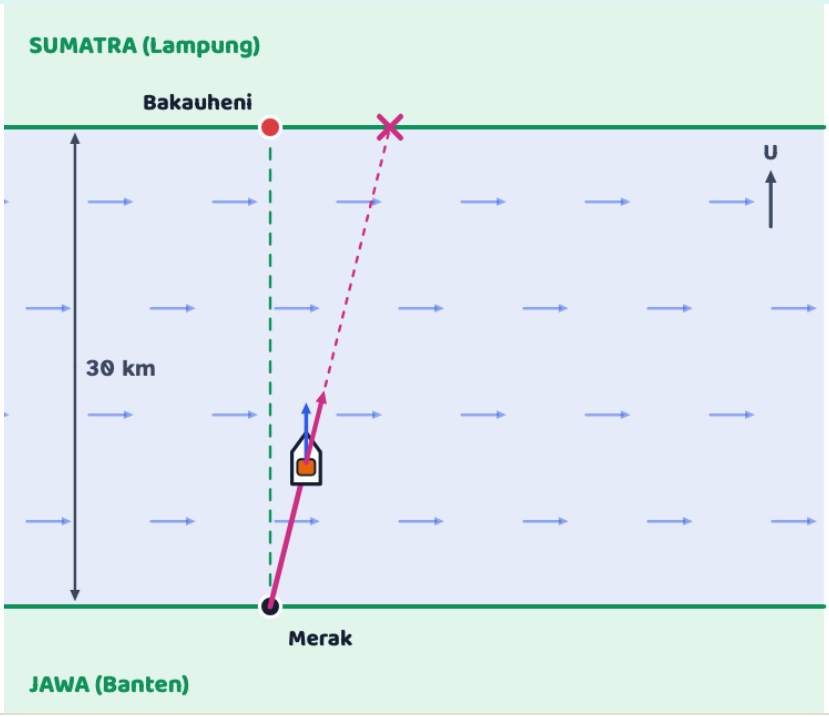
Feri dari Merak ingin tiba di dermaga yang tepat berseberangan, padahal arus laut mengalir ke timur. Ke mana nakhoda harus mengarahkan haluan (moncong) kapal?

- Lurus tegak ke seberang; arus tidak berpengaruh pada kapal sebesar itu.
- Sedikit ke timur, searah arus, supaya lebih cepat.
- Sedikit ke barat, melawan arus.
- Tidak mungkin; feri pasti meleset.

Jawabannya: sedikit melawan arus. Kecepatan feri terhadap air dan kecepatan arus dijumlahkan sebagai vektor. Agar resultannya tepat menunjuk ke seberang, komponen ke barat dari kecepatan feri harus menghapus arus ke timur. Hasilnya, moncong kapal menghadap agak serong, padahal kapalnya bergerak lurus. Coba sendiri di Lab Mini berikut!

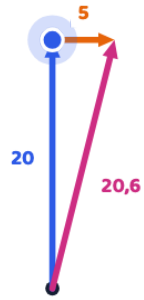
LAB MINI **Feri menyeberangi Selat Sunda**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23



Segitiga kecepatan

biru: feri terhadap air
oranye: arus
magenta: resultan (gerak nyata)



ke timur: 5 km/jam
ke utara: 20 km/jam

✋ *seret ujung panah biru*

Kelajuan resultan	Arah lintasan (dari utara)	Waktu menyeberang	Meleset dari dermaga
20,62 km/jam	14 °	90 menit	7,5 km

Status
berlayar… 27 menit

Atur kelajuan feri, sudut haluan, dan kuat arus, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Kamu juga bisa menyeret ujung panah biru pada segitiga kecepatan. Tantangan: (1) tiba tepat di Bakauheni; (2) menyeberang secepat mungkin. Apakah kedua tujuan itu dicapai dengan haluan yang sama? (Model ini menyederhanakan selat menjadi jalur lurus selebar 30 km dengan arus seragam ke timur.)

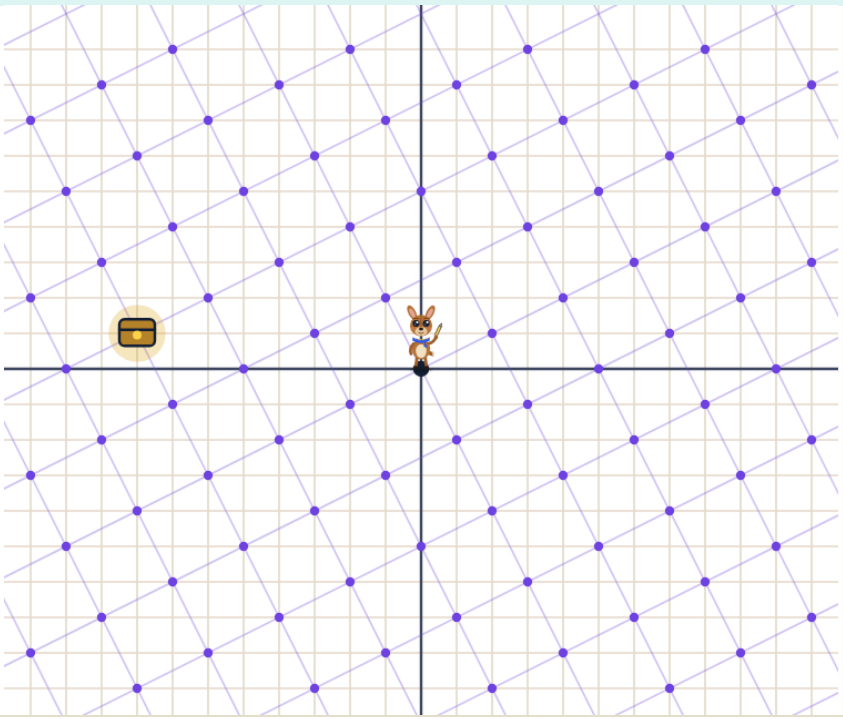
✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Kecepatan selalu "menumpang": **kecepatan terhadap tanah = kecepatan terhadap air (atau udara) + kecepatan arus (atau angin)**. Pilot pesawat, nakhoda feri, sampai pelari di atas eskalator berjalan memakai rumus vektor yang sama.

Penjumlahan dan perkalian skalar bisa digabung. Dengan dua "jurus" saja, misalnya $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, kamu bisa mencapai banyak titik dengan bentuk $m\vec{a} + n\vec{b}$, yang disebut **kombinasi linear**. Ancil menantangmu di permainan berikut.

LAB MINI Harta karun Ancil: hanya dua jurus

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23



Resep perjalanan

posisi = m·a + n·b

a = (2, 1)

b = (-1, 2)

m = 0, n = 0

posisi = (0, 0)

harta = (-8, 1)

jarak ≈ 8,06

titik ungu = semua tempat yang bisa dicapai dengan m dan n bilangan bulat

bisikan = SPL (Bab 10)

Posisi Ancil	Harta di	Jarak ke harta	Harta ditemukan
(0, 0)	(-8, 1)	8,06	0

Kamu hanya boleh melangkah dengan jurus $\vec{a}$ dan jurus $\vec{b}$ (boleh mundur dengan bilangan negatif). Atur m dan n sampai Ancil menginjak harta karun. Titik-titik ungu adalah semua tempat yang bisa dicapai. Bingung? Tekan **Bisikan Ancil**: menemukan m dan n sama dengan menyelesaikan sistem persamaan linear dari Bab 10!

MITOS

"Panah (3, 4) di pojok kiri dan panah (3, 4) di pojok kanan adalah dua vektor yang berbeda."

FAKTA

Keduanya vektor yang **sama**. Vektor hanya ditentukan oleh panjang dan arah, bukan letaknya. Yang punya letak tetap adalah *vektor posisi* (subbab 23.5), yang selalu berpangkal di O.

MITOS

"Panjang $\vec{a} + \vec{b}$ selalu sama dengan $|\vec{a}| + |\vec{b}|$."

FAKTA

Hanya jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ searah. Contoh: $(3,0) + (0,4) = (3,4)$ panjangnya 5, bukan $3 + 4 = 7$. Secara umum $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (ketaksamaan segitiga).

MITOS

"Kapal yang moncongnya menghadap ke utara pasti bergerak ke utara."

FAKTA

Belum tentu! Arah haluan adalah arah kecepatan *terhadap air*. Jika ada arus, gerak sebenarnya adalah resultan kecepatan kapal dan kecepatan arus, sehingga kapal bisa bergerak serong.

23.5 Vektor posisi dan pembagian ruas garis

Vektor bebas boleh digeser ke mana saja. Tetapi untuk "menandai" letak sebuah titik, kita pakai panah yang **selalu berpangkal di titik asal** O.

DEFINISI

Vektor posisi titik A adalah $\vec{a} = \vec{OA}$. Jika $A(x, y)$, maka $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: komponennya sama dengan koordinat titiknya. Untuk dua titik A dan B berlaku

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Dengan vektor posisi, titik tengah menjadi sangat ringkas: $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Bagaimana jika titik P tidak tepat di tengah, misalnya $AP : PB = 2 : 1$?

RUMUS PEMBAGIAN RUAS GARIS

Jika titik P terletak pada ruas garis AB dengan $AP : PB = m : n$, maka

$$\vec{p} = \frac{n\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m + n}$$

Dalam koordinat: $x_P = \dfrac{nx_A + mx_B}{m+n}$ dan $y_P = \dfrac{ny_A + my_B}{m+n}$. Untuk $m = n$, rumus ini menjadi rumus titik tengah.

Bukti dengan vektor

Karena $AP : PB = m : n$, titik P berada $\frac{m}{m+n}$ bagian dari perjalanan A ke B: $\vec{AP} = \frac{m}{m+n}\vec{AB} = \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$. Maka

$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{(m+n)\vec{a} + m\vec{b} - m\vec{a}}{m+n} = \frac{n\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m+n}.$$

TRIK KAK LINTANG

Ingat **pikulan** tukang bakso! Bahu harus berada di titik seimbang, lebih dekat ke keranjang yang *lebih berat*. Rumus pembagian bekerja sama: bobot n dipasang di A dan bobot m di B (**bersilang**!). Kalau $AP : PB = 2 : 1$, titik P lebih dekat ke B, jadi B mendapat bobot yang lebih besar, yaitu 2.

RUMUS HIDUP

Titik pembagi ruas garis

$$x_P = \frac{n\,x_A + m\,x_B}{m + n}$$

Jika AP : PB = m : n, koordinat A diberi bobot n dan koordinat B diberi bobot m (bersilang), lalu dibagi m + n.

x_A x titik A | x_B x titik B | m Bagian AP | n Bagian PB | x_P Koordinat x titik P

KOORDINAT X TITIK P

5

koordinatnya bulat

AP : PB = **2** : **1**, jadi P berada **2/3** bagian dari perjalanan A ke B. x_P = (**1** × (**-1**) + **2** × (**8**)) ÷ **3** = **5**. Rumus yang sama berlaku untuk koordinat y.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VEKTOR-TITIK-PEMBAGI

COBA SENDIRI

Membagi ruas garis 2 : 1

Diketahui $A(-1, 2)$ dan $B(8, -4)$. Titik P pada ruas AB memenuhi $AP : PB = 2 : 1$. Tentukan koordinat P, lalu periksa jawabanmu.

1. $m = 2, n = 1$: $\vec{p} = \dfrac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3}$.
2. $x_P = \dfrac{-1 + 16}{3} = 5$ dan $y_P = \dfrac{2 + (-8)}{3} = -2$. Jadi $P(5, -2)$.
3. Periksa: $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ dan $\vec{PB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ternyata $\vec{AP} = 2\,\vec{PB}$: searah dan dua kali lebih panjang.

$P(5, -2)$. Pemeriksaan dengan vektor membuktikan bahwa P terletak pada AB dan $AP : PB = 2 : 1$.

Pemeriksaan di contoh tadi memakai ide penting: **tiga titik A, B, C segaris (kolinear)** jika dan hanya jika $\vec{AC} = k\,\vec{AB}$ untuk suatu bilangan k. Dengan cara yang sama, titik berat segitiga ABC mempunyai vektor posisi $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$: rata-rata ketiga titik sudutnya.

Bahasa sederhana · Gampangnya begini: kalau kamu berjalan dari A ke B dan berhenti setelah dua pertiga jalan, kamu berada di titik P dengan $AP : PB = 2 : 1$. Hitung saja "dua pertiga dari perpindahan", lalu tambahkan ke titik awal A.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TIGA GARIS BERAT SELALU BERTEMU DI SATU TITIK

Garis berat dari A menuju titik tengah BC, yaitu $\vec{m}_a = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Titik yang membagi garis berat itu dengan perbandingan $2 : 1$ dari A adalah

$$\frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

Hasilnya **simetris** terhadap $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, jadi garis berat dari B dan dari C juga melewati titik yang sama. Tanpa satu gambar pun, kita membuktikan bahwa ketiga garis berat berpotongan di titik berat G, dan G membagi setiap garis berat dengan perbandingan $2 : 1$. Inilah kekuatan vektor di soal olimpiade geometri.

23.6 Hasil kali titik dan sudut antarvektor

Tebak Dulu!

Vektor $\vec{a} = (3, 4)$ dan $\vec{b} = (-4, 3)$ digambar dari titik pangkal yang sama. Berapa sudut di antara keduanya?

- Kira-kira 45°.
- Tepat 90°.
- 180°, karena ada tanda negatif.
- Tidak bisa ditentukan tanpa busur derajat.

Jawabannya: tepat 90°. Hitung $3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = 0$. Di subbab ini kamu akan tahu mengapa hasil nol itu berarti tegak lurus, tanpa busur sama sekali.

Ada satu cara "mengalikan" dua vektor yang hasilnya **bilangan biasa**. Hasil itu ternyata menyimpan informasi tentang sudut di antara kedua vektor.

DEFINISI

Hasil kali titik (*dot product*, disebut juga hasil kali skalar) dari $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ adalah bilangan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Kalikan komponen yang "sepasang", lalu jumlahkan. Hasilnya skalar, bukan vektor.

KENALAN SINGKAT DENGAN COS Θ

Pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip θ, **cos θ** adalah perbandingan sisi di samping sudut itu terhadap sisi miring. Nilainya tidak bergantung pada ukuran segitiga, hanya pada sudutnya, dan bisa dicari dengan tombol **cos** di kalkulator (sudut dari nilai cos: tombol **cos⁻¹**). Beberapa nilai penting: $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 60^\circ = 0{,}5$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 120^\circ = -0{,}5$, $\cos 180^\circ = -1$. Untuk sudut tumpul, cos bernilai negatif. Perkenalan resminya ada di Bab 24 dan Bab 26.

HASIL KALI TITIK DAN SUDUT

Jika θ adalah sudut di antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ (keduanya bukan nol, berpangkal di titik yang sama, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$), maka

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

Akibatnya: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; sudutnya lancip jika $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ dan tumpul jika $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; serta $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Bukti dengan Pythagoras dua kali

Misalkan $\vec{a} = \vec{OA}$ dan $\vec{b} = \vec{OB}$ dengan sudut θ di O. Jatuhkan garis tegak lurus dari B ke garis OA, dengan kaki F. Pada segitiga siku-siku OFB: $OF = |\vec{b}|\cos\theta$ dan $FB^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2\cos^2\theta$. Pada segitiga siku-siku AFB:

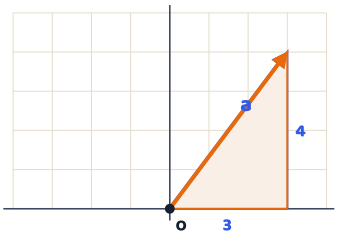
$$AB^2 = AF^2 + FB^2 = \left(|\vec{a}| - |\vec{b}|\cos\theta\right)^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2\cos^2\theta = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

Di sisi lain, $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, sehingga dengan komponen

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2).$$

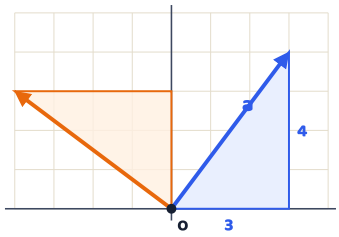
Bandingkan kedua hasil: $a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. Untuk θ tumpul, F jatuh pada perpanjangan OA ke belakang O dan $\cos\theta$ negatif; perhitungannya tetap sama. ∎

∎



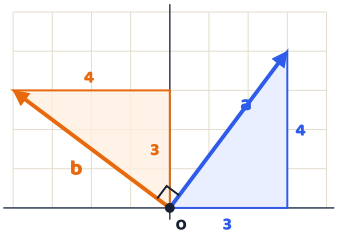
Vektor a = (3, 4):
3 ke kanan, 4 ke atas.
Segitiga tangganya berkaki 3 dan 4.

Langkah 1. Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bersama "segitiga tangganya": 3 satuan ke kanan, 4 satuan ke atas.



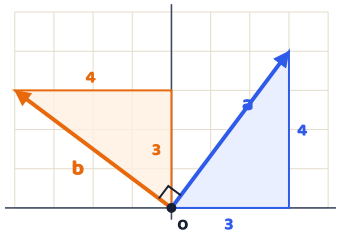
Putar segitiga itu 90°
berlawanan arah jarum jam, dengan poros di O.

Langkah 2. Putar seluruh segitiga 90° berlawanan arah jarum jam, dengan poros di O.



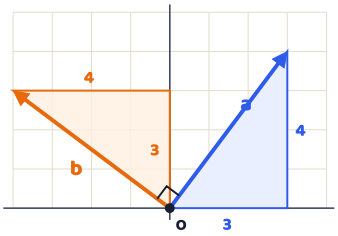
Kaki 3 kini tegak,
kaki 4 kini mendatar ke kiri:
b = (−4, 3)

Langkah 3. Kaki mendatar 3 kini tegak ke atas, kaki tegak 4 kini mendatar ke kiri. Panah barunya $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, dan sudut di O tepat 90°.



Hitung hasil kali titiknya:
a · b = 3·(−4) + 4·3
= −12 + 12 = 0

Langkah 4. Hasil kali titiknya: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3(-4) + 4(3) = -12 + 12 = 0$.



putar 90°: (x, y) → (−y, x)
x·(−y) + y·x = 0, selalu!
tegak lurus ⇔ a · b = 0

Langkah 5. Ini bukan kebetulan. Memutar (x, y) sebesar 90° selalu menghasilkan $(-y, x)$, dan $x(-y) + y(x) = 0$. Tegak lurus $\iff$ hasil kali titik nol.

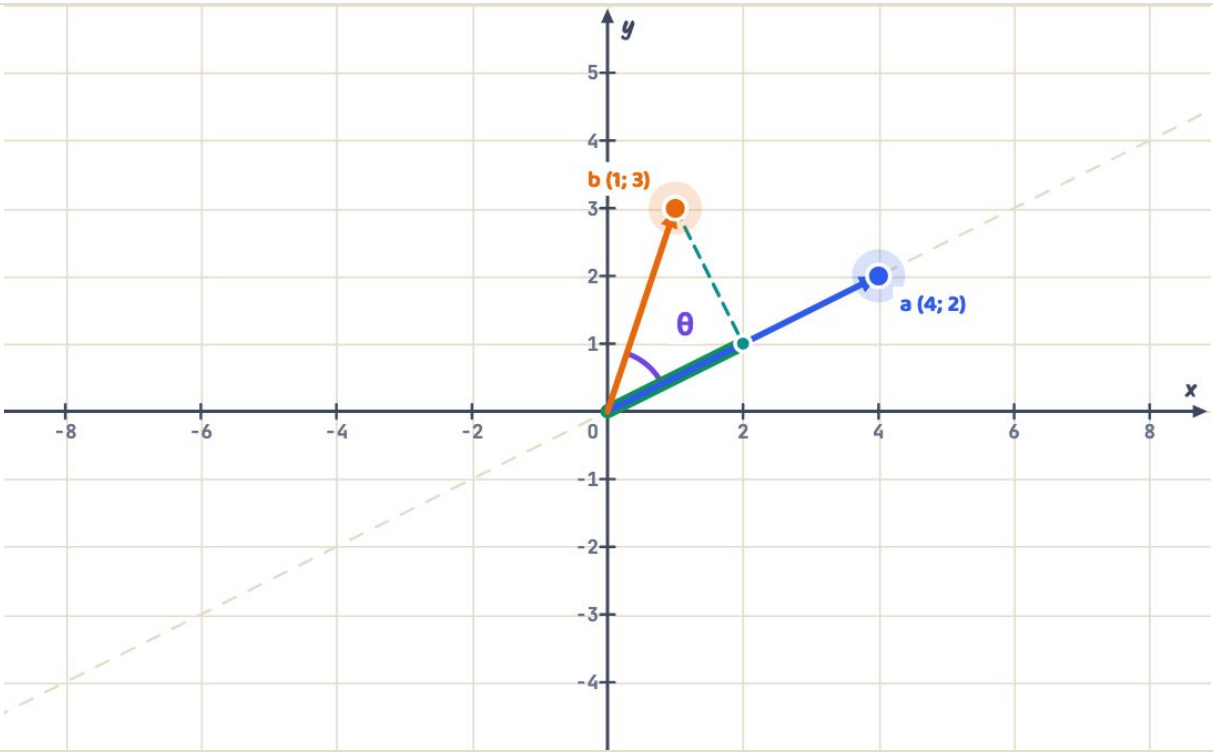
GRAFIK HIDUP

Hasil kali titik & sudut antarvektor

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (4)(1)+(2)(3) = 10, \qquad \cos\theta = \frac{10}{4{,}47\cdot 3{,}16} \approx 0{,}71$$



a · b positif ⇒ sudut lancip

a · b = a₁b₁ + a₂b₂	|a| · |b|	cos θ	Sudut θ	Proyeksi b pada a (hijau)
10	14,142	0,707	45 °	2,236

Seret ujung kedua panah. Ruas hijau tebal adalah **proyeksi** (bayangan) $\vec{b}$ pada garis $\vec{a}$: hasil kali titik sama dengan $|\vec{a}|$ dikali panjang bayangan itu (bertanda negatif jika bayangannya jatuh ke belakang). Buat sudut tepat 90° dengan komponen bulat. Jika salah satu vektor nol, sudutnya tidak terdefinisi dan tampil "—".

RUMUS HIDUP

Hasil kali titik dari panjang & sudut

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

Kalikan kedua panjang, lalu kalikan dengan cos sudut di antaranya. Sudut lancip memberi hasil positif, siku-siku memberi nol, tumpul memberi negatif.

$|\vec{a}|$ Panjang a | $|\vec{b}|$ Panjang b | θ Sudut di antaranya ° | $\vec{a} \cdot \vec{b}$ Hasil kali titik

HASIL KALI TITIK

10

Dengan |a| = **4**, |b| = **5**, dan θ = **60°**: cos θ ≈ **0,5**, jadi a · b = **4** × **5** × cos θ = **10**. Nilai terbesarnya **20** (saat θ = 0°) dan terkecilnya **-20** (saat θ = 180°). **Sudut lancip: hasilnya positif.**

Cek satuan: Jika vektornya gaya (N) dan perpindahan (m), hasil kali titiknya adalah usaha dalam joule (N·m).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VEKTOR-HASIL-KALI-TITIK

COBA SENDIRI

Menghitung sudut antara dua vektor

Tentukan sudut antara $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Hasil kali titik: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$.
2. Panjang: $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ dan $|\vec{b}| = \sqrt{10}$.
3. $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$.

$\theta = 45°$ **(kalkulator:** $\cos^{-1} 0{,}707 \approx 45°$**). Cek kewajaran:** $\vec{a}$ **agak landai,** $\vec{b}$ **agak curam, dan sudut 45° di antaranya memang masuk akal.**

KERJAKAN BERSAMA

Mencari nilai k agar tegak lurus

Tentukan k agar $\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ tegak lurus $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1. Tegak lurus berarti hasil kali titiknya nol: $3k + 2(-6) = 0$.
2. $3k - 12 = 0$, jadi $k = 4$.

$k = 4$. **Cek:** $(4, 2) \cdot (3, -6) = 12 - 12 = 0$. ✓

TRIK KAK LINTANG

Butuh vektor yang tegak lurus (a, b) dengan cepat? **Tukar kedua komponen, lalu ubah satu tandanya**: $(-b, a)$ atau $(b, -a)$. Contoh: tegak lurus $(5, 2)$ adalah $(-2, 5)$, karena $5(-2) + 2(5) = 0$.

AWAS JEBAKAN

Sudut antara dua vektor diukur ketika **keduanya berpangkal di titik yang sama**. Pada segitiga ABC, sudut di B dihitung dari $\vec{BA}$ dan $\vec{BC}$, bukan dari $\vec{AB}$ dan $\vec{BC}$. Memakai $\vec{AB}$ memberi sudut pelurusnya ($180^\circ - \angle B$), dan tanda hasil kali titiknya terbalik.

ADU CEPAT

Hasil kali titik kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan yang atas dengan yang atas, yang bawah dengan yang bawah, lalu jumlahkan. Hati-hati dengan tanda: negatif kali negatif positif.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

VEKTOR TIGA DIMENSI DAN PERSAMAAN GARIS

Semua rumus bab ini bekerja di ruang tiga dimensi dengan menambah komponen ketiga: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dan $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Garis yang melewati titik berposisi $\vec{a}$ dengan arah $\vec{d}$ ditulis $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{d}$, dengan λ bilangan real (gaya IB). Sudut antara dua garis adalah sudut antara vektor-vektor arahnya. Contoh: arah $(1, 2, 2)$ dan $(2, -1, 2)$ memberi $\cos\theta = \dfrac{2 - 2 + 4}{3 \cdot 3} = \dfrac{4}{9}$, jadi $\theta \approx 63{,}6^\circ$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

HUKUM JAJARGENJANG

Dari $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ dan sifat distributif,

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2.$$

Artinya: jumlah kuadrat kedua diagonal jajargenjang sama dengan jumlah kuadrat keempat sisinya. Terapkan pada segitiga dengan sisi 13, 14, 15: garis berat ke sisi 14 adalah setengah diagonal jajargenjang bersisi 13 dan 15, sehingga $(2m)^2 + 14^2 = 2\cdot 13^2 + 2\cdot 15^2$, memberi $m^2 = 148$ dan $m = 2\sqrt{37} \approx 12{,}17$.

MATEMATIKA NUSANTARA

Pelaut Bugis, Makassar, dan Mandar sejak berabad-abad lalu mengarungi Nusantara dengan perahu layar seperti pinisi dan sandeq. Mereka memanfaatkan **angin muson**: angin barat (sekitar Desember–Maret) dan angin timur (sekitar Juni–September). Saat harus melawan angin, perahu berlayar zig-zag. Setiap lintasan miring adalah sebuah vektor, dan jumlah vektor-vektor itu tetap membawa perahu maju ke tujuan. Kini wilayah Indonesia pun dinyatakan dengan koordinat bola Bumi: kira-kira dari 6° LU sampai 11° LS dan dari 95° BT sampai 141° BT.



Ojek daring & GPS

Aplikasi menghitung jarak lurus dengan rumus jarak untuk perkiraan cepat, sedangkan tarif dihitung dari rute jalan yang lebih panjang, mirip jarak taksi.



Feri Merak–Bakauheni

Nakhoda mengarahkan haluan sedikit melawan arus agar resultan kecepatan kapal tepat menuju dermaga tujuan.



Peta angin BMKG

Ribuan panah kecil di peta cuaca adalah vektor: arah panah menunjukkan arah angin, panjang atau warnanya menunjukkan kecepatannya.



Angin samping di bandara

Pilot menguraikan vektor angin menjadi komponen searah landasan dan komponen tegak lurus landasan (*crosswind*) sebelum mendarat.



Gim & animasi

Setiap bingkai, posisi tokoh diperbarui: posisi baru = posisi lama + kecepatan × waktu. Itu penjumlahan vektor puluhan kali per detik.



Tarik tambang 17-an

Gaya kedua regu adalah vektor yang berlawanan arah. Tali bergerak ke arah resultannya, yaitu ke regu yang total gayanya lebih besar.

Cek Cepat

Titik tengah ruas garis yang menghubungkan $(2, 5)$ dan $(8, -1)$ adalah...

- $(3, 3)$
- $(10, 4)$
- $(6, -6)$
- $(5, 2)$

Pusat dan jari-jari lingkaran $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ adalah...

- $(2, -1)$ dan 3
- $(-2, 1)$ dan 9
- $(-2, 1)$ dan 3
- $(2, -1)$ dan 9

Vektor $(1, 2)$ dan $(4, -2)$ membentuk sudut...

- 0° (searah)
- 90° (tegak lurus)
- lancip, tetapi bukan 0°
- 180° (berlawanan arah)

Kunci Cek Cepat: 1. D · 2. C · 3. B

Tantangan Rumah: peta harta karun vektor

Bahan: koin atau benda kecil sebagai "harta", kapur atau selotip kertas, meteran (atau langkah kakimu), kompas di HP (opsional), buku catatan, seorang teman.

1. Tandai titik awal O di halaman atau lantai rumah. Tentukan arah "timur" $(+x)$ dan "utara" $(+y)$; pakai kompas HP atau pilih saja sebuah dinding sebagai utara.
2. Sembunyikan harta, lalu tulis petunjuk berupa tiga vektor langkah, misalnya $(4, 1)$, $(-2, 3)$, lalu $(1, 2)$.
3. Minta temanmu mengikuti petunjuk itu dari O. Apakah ia menemukan harta?
4. Jumlahkan ketiga vektor: $(4 - 2 + 1,\ 1 + 3 + 2) = (3, 6)$. Minta temanmu kembali ke O dan berjalan memakai resultan itu saja. Apakah ia tiba di tempat yang sama?
5. Ukur jarak lurus dari O ke harta dengan meteran, lalu bandingkan dengan $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7$ kali panjang satu langkah.

Pertanyaan: Apakah urutan ketiga vektor memengaruhi tempat akhir? Mengapa panjang total lintasan berliku selalu lebih dari atau sama dengan jarak lurus O ke harta? Kaitkan dengan ketaksamaan segitiga.

RINGKASAN KILAT

Bab 23 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menghitung **jarak** dan **titik tengah** dua titik, serta membedakan jarak lurus dengan jarak taksi
- menulis dan membaca **persamaan lingkaran** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, termasuk dari bentuk umumnya
- menyatakan perpindahan sebagai **vektor**, menuliskannya sebagai vektor kolom, dan menghitung panjangnya
- menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan vektor dengan skalar, termasuk menghitung **resultan** kecepatan kapal dan arus
- memakai **vektor posisi** untuk membagi ruas garis, serta memakai **hasil kali titik** untuk menghitung sudut dan menguji ketegaklurusan

Istilah kunci

Jarak lurus · Jarak taksi · Titik tengah · Lingkaran · bentuk umum · Vektor · skalar · vektor kolom · vektor nol · vektor negatif · vektor satuan · resultan · kombinasi linear · Vektor posisi · Hasil kali titik

Rumus penting

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jarak dua titik (bonus: titik tengah). Jarak lurus adalah sisi miring segitiga siku-siku yang kakinya selisih x dan selisih y. Titik tengahnya cukup rata-rata koordinat.

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{D}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{E}{2}\right)^2 - F}$$

Pusat & jari-jari dari bentuk umum lingkaran. Dari $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$: pusatnya $(-D/2, -E/2)$, dan jari-jarinya akar dari $(D/2)^2 + (E/2)^2 - F$.

$$x_P = \frac{n\,x_A + m\,x_B}{m+n}$$

Titik pembagi ruas garis. Jika AP : PB = m : n, koordinat A diberi bobot n dan koordinat B diberi bobot m (bersilang), lalu dibagi m + n.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

Hasil kali titik dari panjang & sudut. Kalikan kedua panjang, lalu kalikan dengan cos sudut di antaranya. Sudut lancip memberi hasil positif, siku-siku memberi nol, tumpul memberi negatif.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Pada $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$, pusatnya $(-3, 2)$, bukan $(3, -2)$, dan jari-jarinya 4, bukan 16.
- Hati-hati dengan nama arah angin.
- Sudut antara dua vektor diukur ketika keduanya berpangkal di titik yang sama.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=23

🧩 Teka-teki untuk Bab 24

Ayu berdiri 100 m dari kaki Monas. Dari matanya (1,5 m di atas tanah), garis pandang ke puncak tugu adalah vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ x \end{pmatrix}$ meter, dengan x tinggi puncak di atas mata. Ayu tidak bisa memanjat, tetapi dengan busur derajat dan sedotan ia bisa mengukur sudut garis pandang itu terhadap tanah: 52,5°. Bisakah kamu menghitung tinggi Monas hanya dari jarak dan sudut?

▼ Intip petunjuk

Semua segitiga siku-siku dengan sudut 52,5° saling sebangun (Bab 22), jadi perbandingan x : 100 selalu sama, berapa pun ukuran segitiganya. Perbandingan "sisi tegak : sisi datar" itu diberi nama **tangen**, dan tan 52,5° ≈ 1,30. Hitung x, jangan lupa tambahkan tinggi mata Ayu. Bab 24 membahas sinus, kosinus, dan tangen secara tuntas!

BAB 24 · TRIGONOMETRI

24 Trigonometri: Mengukur Monas Tanpa Memanjat

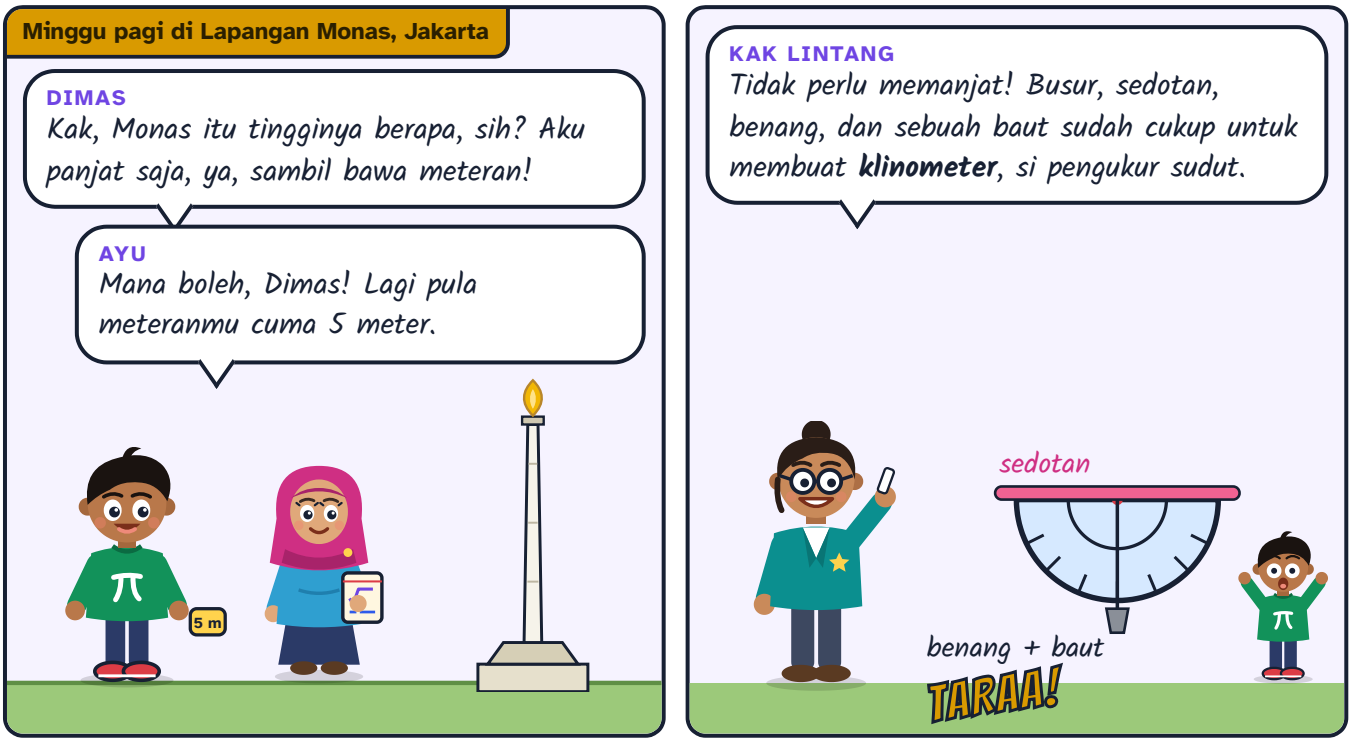
Bagaimana cara mengetahui tinggi Monas, menara masjid, atau pohon kelapa tanpa memanjatnya? Cukup sebuah jarak, sebuah sudut, dan tiga perbandingan ajaib bernama sinus, kosinus, dan tangen.

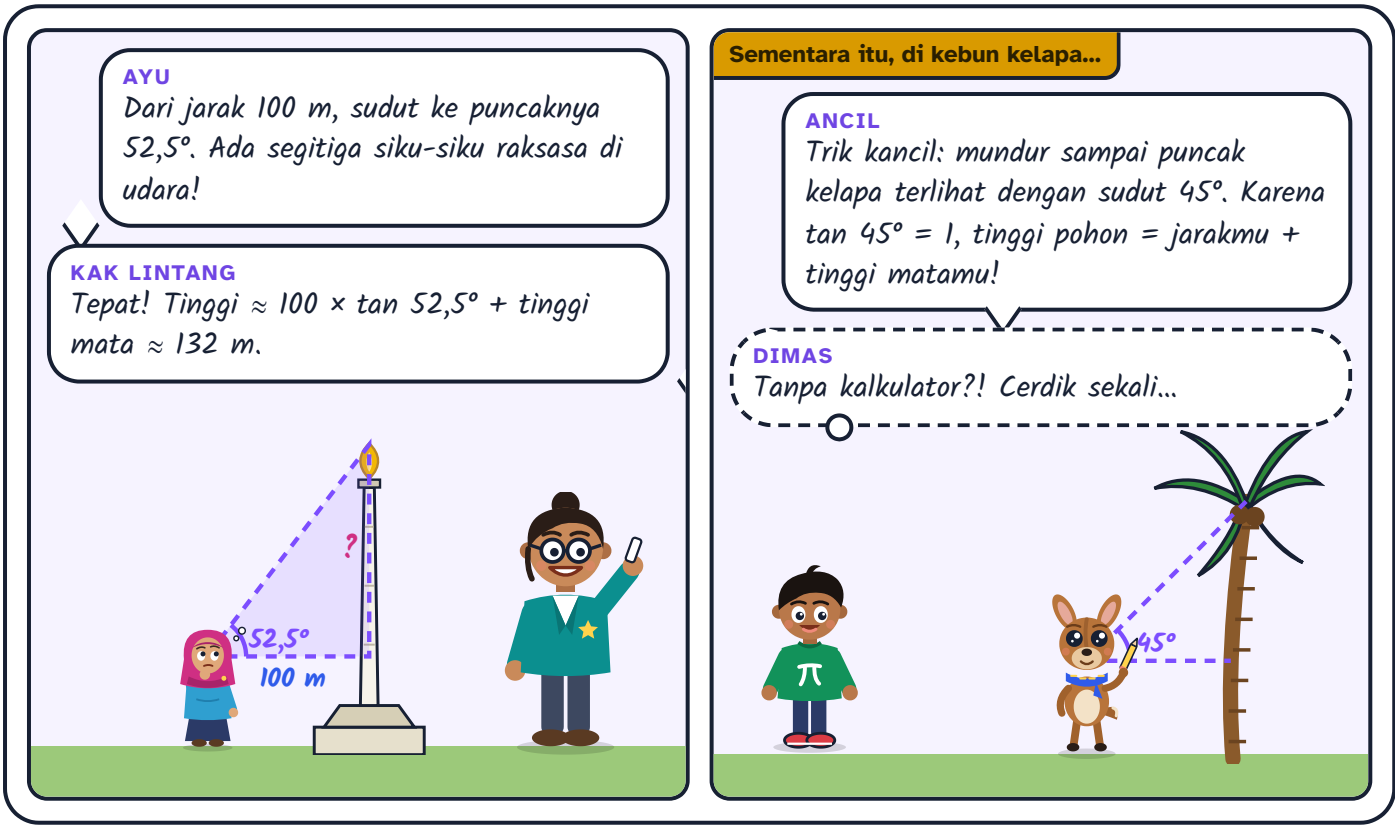
Setelah bab ini, kamu bisa

- menunjuk **sisi depan, sisi samping, dan sisi miring** terhadap sebuah sudut, lalu menghitung **sin, cos, dan tan**;
- menurunkan nilai eksak **sudut istimewa** 30°, 45°, dan 60° dari setengah persegi dan setengah segitiga sama sisi;
- mencari **sisi atau sudut** yang belum diketahui pada segitiga siku-siku, termasuk memakai $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, dan $\tan^{-1}$;
- menyelesaikan soal **sudut elevasi dan depresi**, misalnya mengukur tinggi Monas dengan klinometer buatan sendiri;
- membuktikan dan memakai **identitas** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

MENGUKUR MONAS TANPA MEMANJAT

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Dimas menggambar segitiga siku-siku kecil dengan sudut 30°. Ayu menggambar segitiga siku-siku yang sepuluh kali lebih besar, juga dengan sudut 30°. Bagaimana perbandingan sisi di depan sudut 30° terhadap sisi miring pada kedua segitiga?

- Milik Ayu sepuluh kali lebih besar.
- Milik Dimas lebih besar karena segitiganya kecil.
- Sama persis, yaitu 1 : 2.
- Tidak bisa ditentukan tanpa mengukurnya.

Jawabannya: sama persis, 1 : 2. Kedua segitiga itu *sebangun* (Bab 22): semua sisinya membesar dengan faktor yang sama, sehingga perbandingannya tidak berubah. Perbandingan itu hanya bergantung pada **sudutnya**. Inilah rahasia yang membuat trigonometri bekerja!

24.1 Tiga perbandingan ajaib: sin, cos, tan

Ambil segitiga siku-siku apa pun yang punya sudut lancip θ (dibaca "teta"). Besar atau kecil, perbandingan sisi-sisinya hanya ditentukan oleh θ. Karena itu, para matematikawan memberi nama khusus pada tiga perbandingan terpenting. Namun, sebelumnya kita harus memberi nama pada sisi-sisinya **dilihat dari sudut** θ.

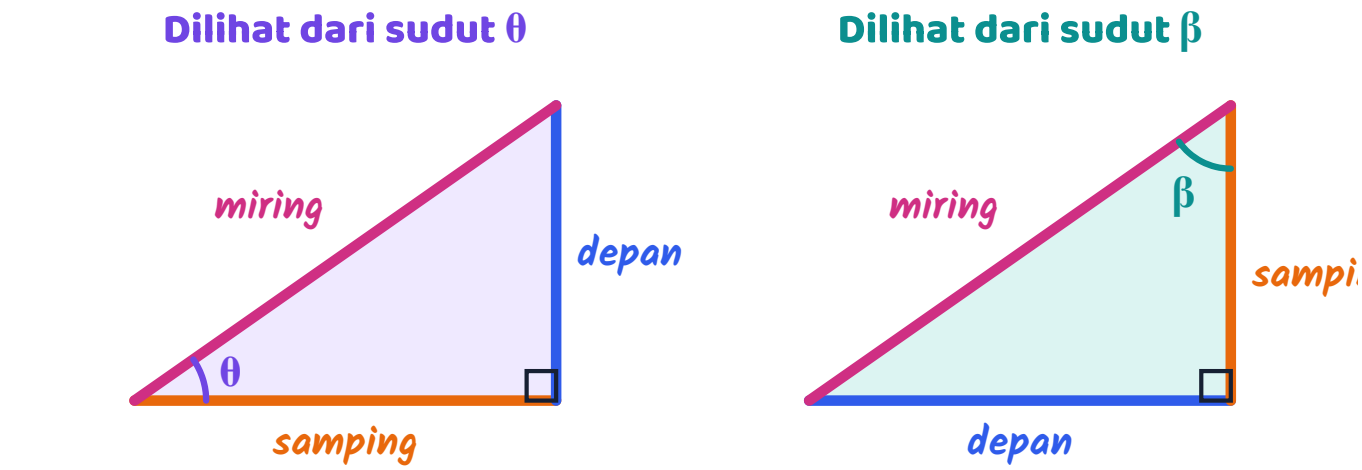
DEFINISI

Pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip θ:

- **sisi miring** (hipotenusa) adalah sisi di depan sudut siku-siku, sisi terpanjang;
- **sisi depan** adalah sisi yang **berhadapan** dengan sudut θ;
- **sisi samping** adalah sisi yang **mengapit** sudut θ dan bukan sisi miring.

Ketiga perbandingannya disebut **sinus**, **kosinus**, dan **tangen**:

$$\sin\theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}, \qquad \tan$$



Segitiga yang sama, dua sudut pandang. Sisi miring tidak pernah berubah, tetapi sisi depan dan sisi samping **bertukar tempat** ketika sudutnya berganti.

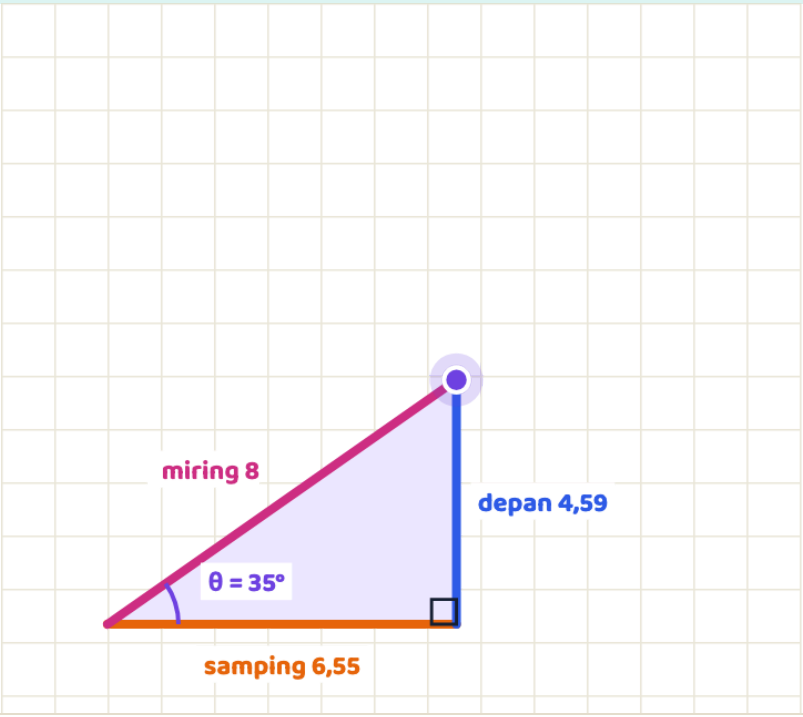
Bahasa sederhana · Gampangnya begini: berdirilah di pojok sudut θ. Sisi yang jauh di seberangmu adalah **sisi depan**. Sisi yang menempel di sebelahmu (dan bukan sisi terpanjang) adalah **sisi samping**. Sisi terpanjang di seberang kotak siku-siku adalah **sisi miring**.

TRIK KAK LINTANG

Hafalkan mantra **SINDEMI – KOSAMI – TANDESA**: **sin** = **de**pan/**mi**ring, **kos** = **sa**mping/**mi**ring, **tan** = **de**pan/**sa**mping. Teman-temanmu di sekolah internasional memakai versi Inggrisnya, **SOH–CAH–TOA** (*Sine* = *Opposite/Hypotenuse*, dan seterusnya). Isinya persis sama!

LAB MINI Segitiga ajaib: seret sudutnya!

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24



sin θ = depan / miring
4,59 / 8 = 0,574

cos θ = samping / miring
6,55 / 8 = 0,819

tan θ = depan / samping
4,59 / 6,55 = 0,7
1

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

✋ *seret titik ungu*

depan	samping	sin θ	cos θ	tan θ
4,59 cm	6,55 cm	0,574	0,819	0,7

Seret titik ungu ke mana saja. Ubah **sudutnya**, lalu ubah **ukurannya** saja dengan tombol 🔍. Ketika hanya ukurannya yang berubah, apakah nilai sin, cos, dan tan ikut berubah? Coba juga cari sudut yang membuat $\tan\theta = 1$.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Sisi depan dan sisi samping selalu ditentukan dari sudut yang sedang kamu pakai. Pada gambar di atas, sisi yang menjadi "depan" bagi θ justru menjadi "samping" bagi β. Selain itu, $\sin\theta$ adalah **satu bilangan** (sebuah perbandingan), bukan "sin dikali θ". Jadi $\sin 2\theta$ tidak sama dengan $2\sin\theta$.

CONTOH Membaca sin, cos, tan dari segitiga 6–8–10

Sebuah segitiga siku-siku memiliki sisi 6 cm, 8 cm, dan 10 cm. Sudut θ berhadapan dengan sisi 6 cm. Tentukan $\sin\theta$, $\cos\theta$, dan $\tan\theta$.

1. Sisi terpanjang (10 cm) adalah sisi miring. Sisi depan θ adalah 6 cm, jadi sisi samping 8 cm.
2. $\sin\theta = \frac{6}{10} = 0{,}6, \quad \cos\theta = \frac{8}{10} = 0{,}8, \quad \tan\theta = \frac{6}{8} = 0{,}75.$

$\sin\theta = 0{,}6$, $\cos\theta = 0{,}8$, $\tan\theta = 0{,}75$. **Dengan kalkulator,** $\sin^{-1}(0{,}6) \approx 36{,}9°$**: itulah besar sudut** θ.

TAMU DARI MASA LALU

Astronom Yunani **Hipparkhos** (±190–120 SM) menyusun tabel panjang "tali busur" lingkaran untuk menghitung posisi bintang. Ia sering disebut bapak trigonometri. Di India, **Aryabhata** (476–550 M) memakai setengah tali busur yang disebut *jya*, cikal bakal sinus modern. Menurut kisah yang populer, penerjemah Arab menuliskannya *jiba*, yang kemudian terbaca *jaib* (lipatan). Penerjemah Latin abad ke-12 mengartikannya sebagai *sinus*, yang juga berarti "lekukan". Ilmuwan Muslim seperti **al-Battani** (±858–929) juga menyusun tabel "bayangan" yang menjadi cikal bakal tangen.

24.2 Sudut istimewa: 30°, 45°, dan 60°

Kebanyakan nilai sinus adalah bilangan desimal tak berujung yang perlu kalkulator. Namun, ada tiga sudut yang nilainya bisa ditemukan hanya dengan Pythagoras dan sedikit akal: 30°, 45°, dan 60°. Itulah **sudut istimewa**.

Tebak Dulu!

Karena 60° = 2 × 30°, apakah $\sin 60^\circ = 2 \times \sin 30^\circ$**?**

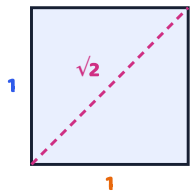
Ya. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, jadi $\sin 60^\circ = 1$.

Tidak. $\sin 60^\circ \approx 0{,}87$, kurang dari 1.

Tidak. $\sin 60^\circ$ juga sama dengan $\frac{1}{2}$.

Ya, karena sinus selalu sebanding dengan sudutnya.

Jawabannya: tidak. Kalau $\sin 60^\circ = 1$, sisi depan sama panjang dengan sisi miring, dan itu mustahil pada segitiga. Sinus **tidak** sebanding dengan sudut: ia naik cepat di awal, lalu melambat mendekati 1. Animasi di bawah menunjukkan nilai tepatnya, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$.

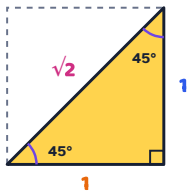


Mulai dari persegi bersisi 1

Diagonalnya, menurut Pythagoras:

$\sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$

Langkah 1. Mulai dari persegi bersisi 1. Diagonalnya adalah sisi miring segitiga siku-siku dengan kaki 1 dan 1, jadi panjangnya $1^2 + 1^2 = 2$.



Segitiga 45°–45°–90°

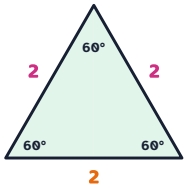
dengan sisi 1, 1, dan $\sqrt{2}$

$\sin 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}707$

$\cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

$\tan 45° = 1/1 = 1$

Langkah 2. Potong persegi lewat diagonal. Kita mendapat segitiga siku-siku sama kaki dengan sudut 45°, 45°, 90° dan sisi 1, 1, $\sqrt{2}$. Bacalah: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dan $\tan 45^\circ = 1$.

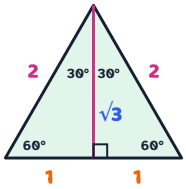


Segitiga sama sisi bersisi 2

Ketiga sudutnya sama besar:

$180° : 3 = 60°$

Langkah 3. Sekarang ambil segitiga sama sisi bersisi 2. Ketiga sudutnya sama besar, masing-masing $180^\circ : 3 = 60^\circ$.



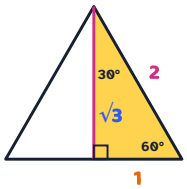
Tarik garis tinggi

Alas terbelah menjadi 1 dan 1.

Sudut puncak menjadi 30° + 30°.

Tinggi = $\sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$

Langkah 4. Tarik garis tinggi dari puncak. Garis ini membelah alas menjadi 1 dan 1, serta membelah sudut puncak menjadi 30° dan 30°. Tingginya $2^2 - 1^2 = 3$.



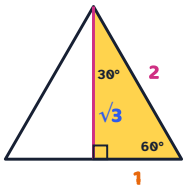
Segitiga 30°–60°–90°:

sisi 1, √3, dan 2

sin 30° = 1/2	sin 60° = √3/2
cos 30° = √3/2	cos 60° = 1/2
tan 30° = 1/√3	tan 60° = √3

Lihat: sin 30° = cos 60°!

Langkah 5. Ambil separuhnya: segitiga 30°–60°–90° dengan sisi 1, $\sqrt{3}$, dan 2. Dari sudut 30°, sisi depannya 1. Dari sudut 60°, sisi depannya $\sqrt{3}$.



Pola cantik nilai sinus

$\sin 0° = \sqrt{0}/2 = 0$

$\sin 30° = \sqrt{1}/2 = 1/2$

$\sin 45° = \sqrt{2}/2$

$\sin 60° = \sqrt{3}/2$

$\sin 90° = \sqrt{4}/2 = 1$

Kosinus: pola sama, urutan dibalik!

Langkah 6. Kumpulkan hasilnya. Sinus 0°, 30°, 45°, 60°, 90° membentuk pola $\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$. Pola sekecil ini menyimpan seluruh tabel sudut istimewa!

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tidak terdefinisi

Sudut 0° dan 90° adalah kasus batas: segitiganya "gepeng" menjadi sebuah garis. Pada 90°, sisi samping menyusut menjadi 0, sehingga $\tan 90^\circ = \frac{\text{depan}}{0}$ tidak terdefinisi.

TRIK KAK LINTANG

Tulis angka **0, 1, 2, 3, 4** di bawah sudut 0°, 30°, 45°, 60°, 90°. Tarik akarnya, lalu bagi 2: itulah nilai **sinus**. Untuk **kosinus**, baca barisan yang sama dari kanan ke kiri. Untuk **tangen**, bagi sinus dengan kosinus. Satu baris angka, lima belas nilai!

SIFAT SUDUT BERPENYIKU

Dua sudut lancip pada segitiga siku-siku selalu berjumlah 90° (saling *berpenyiku*). Untuk setiap sudut lancip θ,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta, \qquad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta,$$

Itulah sebabnya $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ dan $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$. Nama "kosinus" pun berasal dari "sinus sudut **ko**mplemen (penyiku)".

Bukti singkat

Pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip θ dan β, berlaku $\theta + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, jadi $\beta = 90^\circ - \theta$. Sisi depan β adalah sisi samping θ, dan sebaliknya, sedangkan sisi miringnya sama. Maka $\sin\beta = \frac{\text{samping } \theta}{\text{miring}} = \cos\theta$, $\cos\beta = \sin\theta$, dan $\tan\beta = \frac{\text{samping } \theta}{\text{depan } \theta} = \frac{1}{\tan\theta}$.

ADU CEPAT **Kartu sudut istimewa**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Jawab dalam bentuk eksak, misalnya 1/2, √3/2, √2/2, atau 1/√3 (desimal 2 angka juga diterima). Ingat pola sinus √0/2, √1/2, √2/2, √3/2, √4/2.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENEMUKAN TAN 15° DENGAN SEBATANG PENGGARIS

Ambil segitiga 30°–60°–90° dengan sudut 30° di A, sisi depan $BC = 1$, sisi samping $AC = \sqrt{3}$, dan sisi miring $AB = 2$. Perpanjang CA melewati A sejauh $AD = AB = 2$. Segitiga ABD sama kaki, sehingga dua sudut alasnya sama besar dan jumlahnya sama dengan sudut luar $\angle BAC = 30^\circ$. Jadi $\angle BDC = 15^\circ$, dan

$$\tan 15^\circ = \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}268.$$

Dari segitiga yang sama, $\tan 75^\circ = \frac{DC}{BC} = 2+\sqrt{3}$. Trik "perpanjang sisi sejauh sisi miring" selalu **membelah sudut** menjadi dua dan sering muncul di soal olimpiade.

24.3 Mencari sisi dan sudut yang hilang

Trigonometri seperti pisau lipat dengan tiga mata pisau. Untuk memilih yang tepat, tanyakan dua hal: **sisi apa yang sudah aku tahu**, dan **sisi apa yang aku cari**? Pilih perbandingan yang memuat keduanya.

Diketahui (terhadap θ)	Dicari	Pakai
sisi miring	sisi depan	depan = miring × $\sin\theta$
sisi miring	sisi samping	samping = miring × $\cos\theta$
sisi samping	sisi depan	depan = samping × $\tan\theta$
sisi depan	sisi miring	miring = depan : $\sin\theta$
dua sisi	sudut θ	$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, atau $\tan^{-1}$

RUMUS HIDUP

Tinggi layangan dari panjang tali

$$t = L \sin \alpha$$

Tali yang terentang lurus adalah sisi miring dan tinggi layangan adalah sisi depan sudut. Jadi tinggi = panjang tali × sinus sudutnya.

- L Panjang tali m
- α Sudut tali dengan tanah °
- t Tinggi layangan m

TINGGI LAYANGAN

50

m

30°: tinggi tepat setengah panjang tali (sin 30° = 1/2)

Tali **100** m dengan sudut **30°**: sin **30°** ≈ **0,5**, jadi layangan berada **50** m di atas tangan. Jarak mendatarnya **86,603** m (yang ini memakai cos!).

Cek satuan: Panjang tali dalam meter, jadi tingginya juga dalam meter. Sinus tidak punya satuan karena ia perbandingan dua panjang.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LAYANGAN-SIN

Bagaimana kalau yang dicari justru **sudutnya**? Kita perlu kebalikan sinus, kosinus, dan tangen, yang disebut **invers trigonometri**. Di kalkulator tombolnya tertulis $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, dan $\tan^{-1}$ (sering lewat tombol SHIFT).

$$\tan\theta = x \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \tan^{-1} x \qquad (\text{untuk } 0^\circ < \theta <$$

RUMUS HIDUP

Sudut kemiringan ram kursi roda

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{t}{p}\right)$$

Bagi tinggi ram dengan panjang mendatarnya untuk mendapat tan θ, lalu tekan tan⁻¹ untuk mendapat sudutnya.

- t Tinggi ram m
- p Panjang mendatar m
- θ Sudut kemiringan °

SUDUT KEMIRINGAN

4,76

°

♿ **landai: nyaman untuk kursi roda**

tan θ = **0,5** : **6** ≈ **0,083**, jadi θ = tan⁻¹(**0,083**) ≈ **4,76°**. Panjang permukaan ramnya √(**0,5**² + **6**²) ≈ **6,021** m.

Cek satuan: Tinggi dan panjang harus satuannya sama (keduanya meter) karena yang dipakai adalah perbandingannya.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-RAM

KERJAKAN BERSAMA

Ram kursi roda di depan sekolah

Pintu masuk sebuah sekolah 0,6 m lebih tinggi daripada halaman. Pengelola ingin membuat ram dengan sudut kemiringan 5°. Berapa panjang permukaan ram dan jarak mendatar yang dibutuhkan?

1. Tinggi 0,6 m adalah sisi depan sudut 5°. Panjang permukaan ram adalah sisi miring, jadi pakai sin: $\sin 5^\circ = \dfrac{0{,}6}{L}$.

2. $L = \dfrac{0{,}6}{\sin 5^\circ} \approx \dfrac{0{,}6}{0{,}0872} \approx 6{,}88$ m.

3. Jarak mendatar adalah sisi samping, jadi pakai tan: $p = \dfrac{0{,}6}{\tan 5^\circ} \approx \dfrac{0{,}6}{0{,}0875} \approx 6{,}86$ m.

Ramnya sekitar 6,9 m dan membutuhkan halaman sepanjang ±6,9 m. Untuk naik 60 cm saja, ram yang ramah kursi roda harus sepanjang itu!

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD). Dalam mode RAD, kalkulator menganggap "30" sebagai 30 radian, sehingga $\sin 30$ menghasilkan $-0{,}988$, bukan $0{,}5$. Biasakan mengecek dengan $\sin 30 = 0{,}5$ sebelum ujian.

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Sebelum menekan tombol, **perkirakan** dulu. Sudut kecil berarti sisi depan pendek. Sudut di atas 45° berarti sisi depan lebih panjang daripada sisi samping (tan > 1). Kalau kalkulator memberi jawaban yang bertentangan dengan perkiraanmu, periksa lagi pilihan sin/cos/tan atau mode kalkulatornya.

MITOS

"Segitiga yang lebih besar punya nilai sinus yang lebih besar."

FAKTA

Nilai sinus hanya bergantung pada **sudut**. Segitiga yang diperbesar tetap sebangun, jadi semua perbandingan sisinya sama. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ di buku tulis maupun di Monas.

MITOS

"Nilai sinus bisa lebih dari 1 kalau segitiganya tinggi."

FAKTA

Sisi depan tidak pernah lebih panjang daripada sisi miring, jadi untuk sudut lancip $0 < \sin\theta < 1$ dan $0 < \cos\theta < 1$. Yang boleh lebih dari 1 hanyalah $\tan\theta$, yaitu saat $\theta > 45^\circ$.

MITOS

"Kalau sudutnya dua kali lipat, sinusnya juga dua kali lipat."

FAKTA

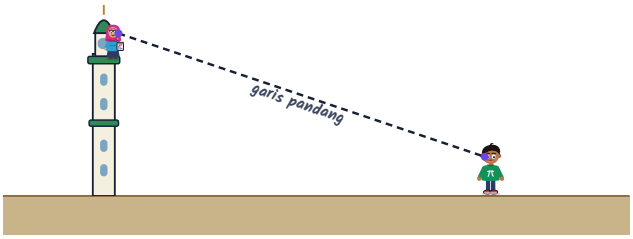
$\sin 30^\circ = 0{,}5$, tetapi $\sin 60^\circ \approx 0{,}87$, bukan 1. Sinus tidak sebanding dengan sudut. Hubungan sebenarnya untuk sudut ganda akan kamu temui di Bab 26.

24.4 Sudut elevasi dan sudut depresi

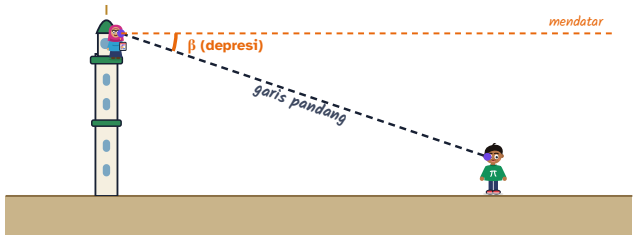
Saat kamu mendongak ke puncak menara, matamu membentuk sudut dengan garis mendatar. Saat pilot menatap landasan di bawahnya, matanya juga membentuk sudut. Kedua sudut ini punya nama.

DEFINISI

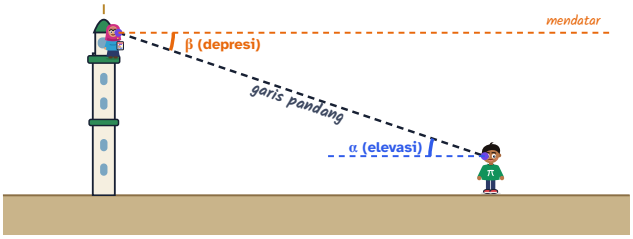
Sudut elevasi adalah sudut antara garis mendatar dan garis pandang ke **atas**. **Sudut depresi** adalah sudut antara garis mendatar dan garis pandang ke **bawah**. Keduanya selalu diukur dari garis **mendatar**, bukan dari garis tegak.



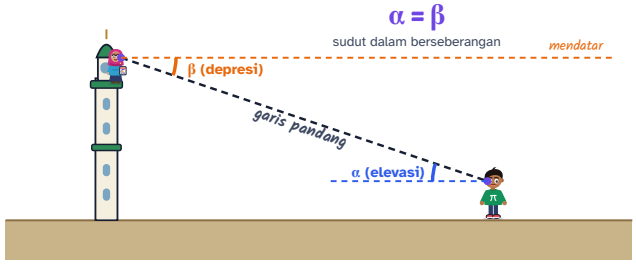
Langkah 1. Ayu berdiri di balkon menara masjid, Dimas berdiri di tanah. Mereka saling memandang lewat garis pandang yang sama.



Langkah 2. Ayu melihat ke bawah. Sudut antara garis mendatar di matanya dan garis pandang disebut **sudut depresi** β.



Langkah 3. Dimas melihat ke atas. Sudut antara garis mendatar di matanya dan garis pandang disebut **sudut elevasi** α.



Langkah 4. Dua garis mendatar itu sejajar, dan garis pandang memotong keduanya seperti huruf Z. Jadi α dan β adalah sudut dalam berseberangan: $\alpha = \beta$. Sudut depresi selalu sama dengan sudut elevasi pasangannya!

Inilah cara mengukur tinggi tanpa memanjat. Berdirilah pada jarak d dari kaki benda, ukur sudut elevasi α ke puncaknya, lalu pakai tangen. Jangan lupa: sudut diukur dari mata, jadi tambahkan tinggi mata h.

RUMUS HIDUP

Tinggi benda dari sudut elevasi

$$H = d \tan \alpha + h$$

Tinggi benda sama dengan jarak mendatar dikali tangen sudut elevasi, lalu ditambah tinggi mata pengamat.

- d Jarak ke kaki benda m
- α Sudut elevasi °
- h Tinggi mata m
- H Tinggi benda m

TINGGI BENDA

131,8

m

hampir sama dengan tinggi Monas (±132 m)!

Dari jarak **100** m dengan sudut **52,5°**: tan **52,5°** ≈ **1,303**, jadi bagian di atas mata **130,323** m. Ditambah tinggi mata **1,5** m, tinggi bendanya **131,8** m.

Cek satuan: Jarak dan tinggi mata dalam meter, jadi tingginya juga dalam meter. Sudut ditulis dalam derajat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TINGGI-ELEVASI

CONTOH

Tinggi Monas tanpa memanjat

Ayu berdiri 100 m dari kaki Monas. Dengan klinometer, ia mengukur sudut elevasi puncak Monas sebesar 52,5°. Mata Ayu berada 1,5 m di atas tanah. Berapa tinggi Monas?

1. Garis mendatar dari mata Ayu, sumbu tegak Monas, dan garis pandang membentuk segitiga siku-siku. Jarak 100 m adalah sisi samping sudut 52,5°, dan bagian Monas di atas mata adalah sisi depannya.

2. $\tan 52{,}5^\circ = \dfrac{x}{100} \Rightarrow x = 100 \times \tan 52{,}5^\circ \approx 100 \times 1{,}303 = 130{,}3$ m.

3. Tambahkan tinggi mata: $130{,}3 + 1{,}5 = 131{,}8$ m.

Tinggi Monas ±132 m, cocok dengan data resminya. Teka-teki Bab 23 terpecahkan tanpa memanjat satu anak tangga pun!

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Hasil $d \tan \alpha$ hanyalah tinggi benda **di atas mata** pengamat. Banyak orang lupa menambahkan tinggi mata. Untuk Monas selisihnya kecil, tetapi untuk tiang bendera sekolah setinggi 8 m, lupa 1,5 m berarti salah hampir 20%!

KERJAKAN BERSAMA

Dari balkon menara masjid

Mata Ayu berada 40 m di atas tanah, di balkon menara masjid. Ia melihat Dimas di halaman dengan sudut depresi 25°. Berapa jarak Dimas dari kaki menara?

1. Sudut depresi 25° sama dengan sudut elevasi dari Dimas ke Ayu (sudut dalam berseberangan).
2. Dari posisi Dimas, tinggi 40 m adalah sisi depan dan jarak x adalah sisi samping: $\tan 25^\circ = \dfrac{40}{x}$.
3. $x = \dfrac{40}{\tan 25^\circ} \approx \dfrac{40}{0{,}4663} \approx 85{,}8$ m.

Dimas berdiri sekitar 85,8 m dari kaki menara. (Untuk menyederhanakan, tinggi mata Dimas diabaikan.)

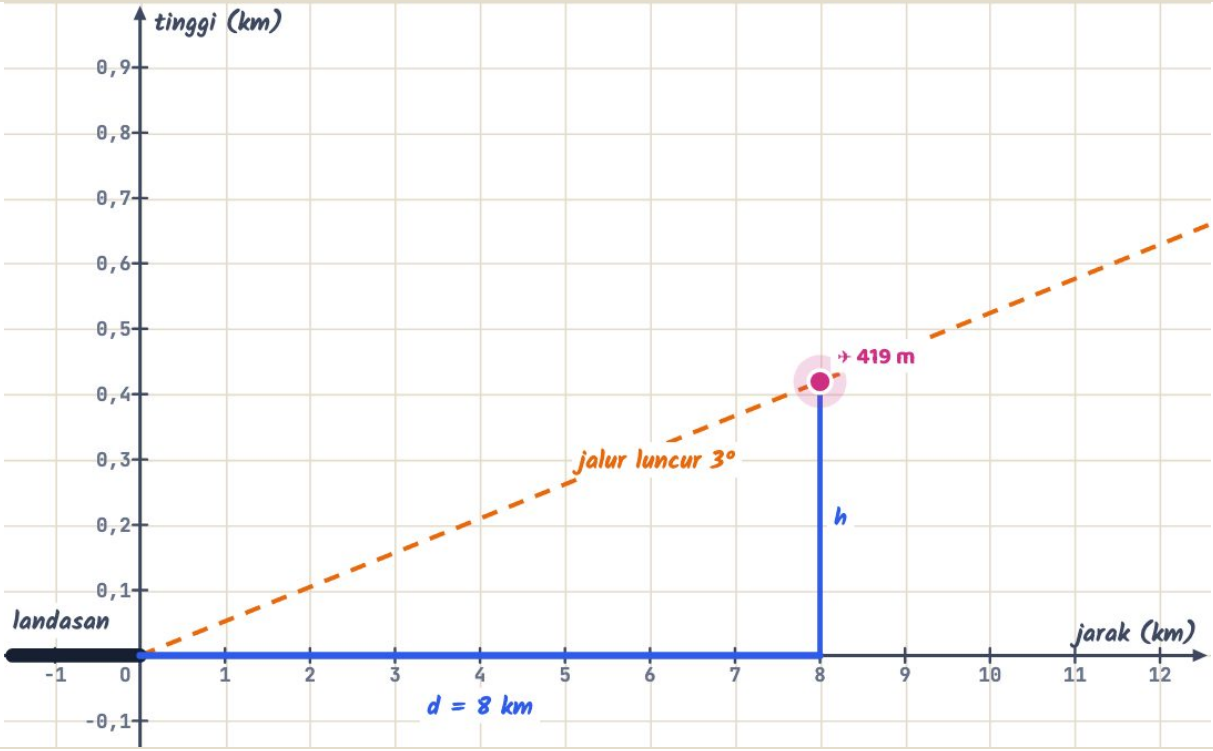
GRAFIK HIDUP

Jalur luncur pesawat menuju landasan

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24

$$h = d \tan \alpha$$

$$h = 8\,\text{km} \times \tan 3^\circ \approx 0{,}42\,\text{km} \approx 419\,\text{m}$$



✈️ **3°: sudut luncur yang lazim di banyak bandara**

Tinggi pesawat	dalam kaki	Sudut depresi pilot ke titik sentuh
419 m	1.376 ft	3 °

Seret pesawat di sepanjang jalur luncur, atau ubah sudutnya. Sudut luncur sama dengan sudut depresi pilot ke titik sentuh (ingat huruf Z!). **Catatan:** skala tegak sengaja diperbesar beberapa kali agar jalurnya terlihat; sudut sebenarnya jauh lebih landai. Pada sudut 3°, berapa meter pesawat turun untuk setiap 1 km mendatar?

COBA SENDIRI **Dua sudut, satu menara**

Dari titik A, puncak sebuah menara terlihat dengan sudut elevasi 30°. Setelah berjalan 40 m lurus mendekati menara sampai titik B, sudut elevasinya menjadi 60°. Tinggi mata diabaikan. Berapa tinggi menara?

1. Misalkan tinggi menara t dan jarak B ke kaki menara x. Dari B: $t = x\tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.
2. Dari A: $t = (x+40)\tan 30^\circ = \dfrac{x+40}{\sqrt{3}}$.
3. Samakan: $x\sqrt{3} = \dfrac{x+40}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3x = x+40 \Rightarrow x = 20$ m.
4. $t = 20\sqrt{3} \approx 34{,}6$ m.

Tinggi menara $20\sqrt{3} \approx 34{,}6$ m. Bonus: sudut di puncak pada segitiga A–B–puncak adalah $60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, jadi segitiga itu sama kaki dan jarak B ke puncak juga 40 m. Cek: $40\sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$. ✓

24.5 Identitas Pythagoras: sin²θ + cos²θ = 1

Ingat Bab 18? Pada segitiga siku-siku, $\text{depan}^2 + \text{samping}^2 = \text{miring}^2$. Kalau kita membagi semuanya dengan miring^2, Teorema Pythagoras menjelma menjadi hubungan antara sinus dan kosinus.

IDENTITAS TRIGONOMETRI DASAR

Untuk setiap sudut lancip θ,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{dan} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Penulisan $\sin^2\theta$ berarti $(\sin\theta)^2$. Persamaan yang benar untuk *semua* sudut seperti ini disebut **identitas trigonometri**.

Bukti dengan Pythagoras

Misalkan sisi depan a, sisi samping b, dan sisi miring c. Menurut Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Bagi kedua ruas dengan c^2:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Untuk identitas kedua: $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{a}{b} = \tan\theta$. ∎

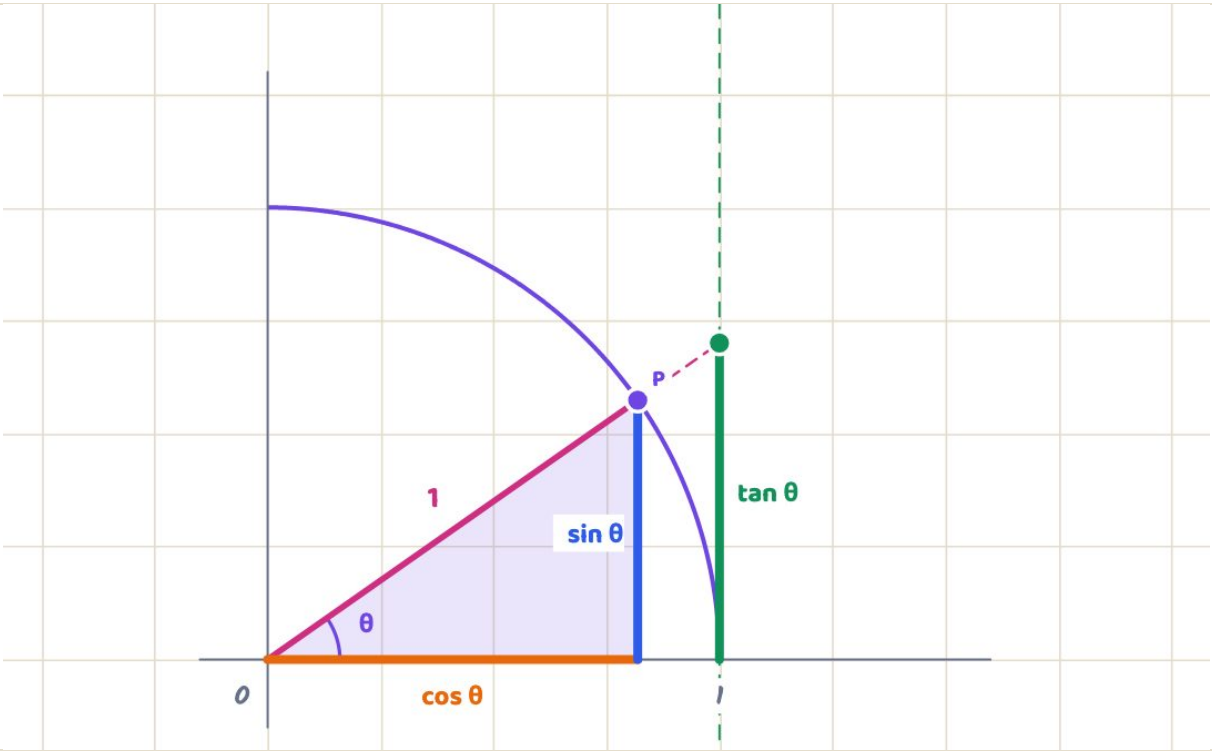
∎

GRAFIK HIDUP **Lingkaran satuan: sin, cos, dan tan menjadi panjang garis**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\theta = 35^\circ : \quad (0{,}82)^2 + (0{,}57)^2 = 1$$



sin θ	cos θ	tan θ	sin²θ + cos²θ
0,574	0,819	0,7	1

Jika sisi miringnya 1, maka sisi depan *sama dengan* $\sin\theta$ dan sisi samping *sama dengan* $\cos\theta$. Tekan ▶ **Jalankan**: segitiga berubah bentuk, tetapi $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ tetap 1. Garis hijau di $x = 1$ panjangnya tepat $\tan\theta$. Kapan garis hijau lebih panjang daripada jari-jari?

KERJAKAN BERSAMA **Dari sinus ke kosinus tanpa sudut**

Diketahui θ sudut lancip dan $\sin\theta = \frac{3}{5}$. Tentukan $\cos\theta$ dan $\tan\theta$ tanpa mencari besar sudutnya.

1. $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Karena θ lancip, $\cos\theta$ positif: $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

2. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$.

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ dan $\tan\theta = \frac{3}{4}$. Diam-diam, ini segitiga 3–4–5 dari Bab 18!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TIGA SAUDARA KEBALIKAN

Selain sin, cos, dan tan, ada tiga perbandingan kebalikan: **sekan** $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, **kosekan** $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, dan **kotangen** $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$. Membagi $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ dengan $\cos^2\theta$ dan dengan $\sin^2\theta$ menghasilkan dua identitas baru:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

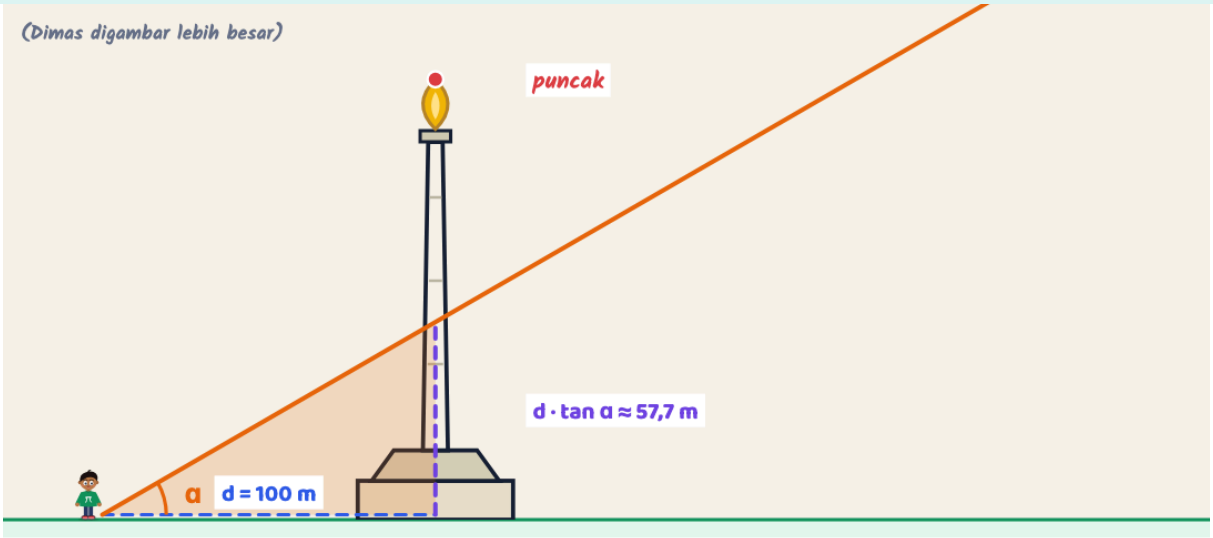
Di IB dan di Bab 26, definisi sin dan cos diperluas ke sudut berapa pun lewat **lingkaran satuan** seperti grafik di atas: $\cos\theta$ dan $\sin\theta$ adalah koordinat titik P.

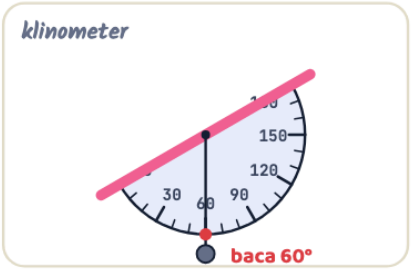
24.6 Klinometer buatan sendiri dan trigonometri di sekitarmu

Klinometer Kak Lintang hanyalah busur derajat yang dibalik. Sedotan ditempel di sisi lurusnya sebagai pembidik, dan benang berbandul baut digantung dari titik pusat busur. Saat sedotan diarahkan ke puncak benda, benang tetap tegak lurus ke bawah karena gravitasi, dan busur ikut miring. Dari situlah sudut elevasi terbaca.

LAB MINI Klinometer: ukur tinggi Monas, menara, dan pohon kelapa

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24






```
bacaan 60°  ⇒  α = 90° - 60° = 30°
tan 30° ≈ 0,577
tinggi ≈ 100 × 0,577 + 1,5 ≈ 59,2 m
```

bidikan terlalu rendah

✋ *seret di langit untuk membidik*

Bacaan busur	Tinggi menurut bidikan	Status
60 °	59,2 m	bidikan terlalu rendah

Pilih benda, atur jarakmu, lalu **seret di langit** (atau geser slider) sampai garis bidik tepat mengenai titik merah di puncak. Perhatikan bacaan busur di kotak kiri bawah. Hitung tingginya, lalu nyalakan "Ungkap tinggi sebenarnya" untuk mengecek. Apa yang terjadi kalau kamu berdiri terlalu dekat dengan Monas?

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Klinometer busur tidak langsung menunjukkan sudut elevasi. Saat sedotan mendatar, benang menunjuk angka 90° pada busur. Saat sedotan mendongak sebesar α, benang menunjuk $90^\circ - \alpha$. Jadi sudut elevasinya adalah $\alpha = 90^\circ - \text{bacaan}$ (atau bacaan – 90° jika skala busurmu terbalik).

Bahasa sederhana · Ringkasnya: **ukur jarak** ke kaki benda, **bidik puncaknya** lewat sedotan, **baca sudutnya**, lalu kalikan jarak dengan tangen sudut itu dan tambahkan tinggi matamu. Empat langkah, tanpa memanjat!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA 45° ADALAH SUDUT TERBAIK?

Misalkan klinometermu meleset $\Delta\alpha$ (dalam radian). Bagian tinggi di atas mata $y = d\tan\alpha$ akan meleset kira-kira $\Delta y \approx d\,\sec^2\alpha\,\Delta\alpha$. Galat relatifnya

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\sec^2\alpha}{\tan\alpha}\,\Delta\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\,\Delta\alpha}{\sin 2\alpha},$$

yang paling kecil ketika $\sin 2\alpha = 1$, yaitu $\alpha = 45^\circ$. Salah baca 1° pada sudut 45° menghasilkan galat sekitar 3,5%, tetapi pada sudut 15° atau 75° galatnya membengkak menjadi sekitar 7%. Jadi, ambil posisi yang membuat sudut elevasinya mendekati 45°. Trik kancil di komik ternyata juga yang paling teliti!

MATEMATIKA NUSANTARA

Di banyak pesantren, trigonometri dipelajari lewat **ilmu falak** untuk menentukan arah kiblat dan waktu salat. Alat tradisionalnya antara lain **tongkat istiwa** (tongkat tegak untuk mengamati bayangan) dan **bencet**, jam matahari sederhana yang masih dapat dijumpai di halaman beberapa pesantren dan masjid tua di Jawa. Panjang bayangan tongkat setinggi t saat matahari pada sudut elevasi α adalah $\frac{t}{\tan\alpha}$. Menurut salah satu pendapat fikih, awal waktu Asar ditandai saat bayangan benda sama dengan tinggi bendanya ditambah panjang bayangan tengah hari. Dua kali setahun, sekitar 27–28 Mei dan 15–16 Juli, matahari tepat berada di atas Kakbah, sehingga bayangan tongkat tegak di Indonesia menunjuk tepat ke arah kiblat. Peristiwa itu disebut *rashdul kiblat*.

Landasan pesawat

Pesawat mendarat mengikuti jalur luncur sekitar 3°. Lampu pemandu di tepi landasan berubah warna bila sudut pesawat terlalu tinggi atau terlalu rendah.

Ram kursi roda

Pedoman aksesibilitas bangunan di Indonesia membatasi kemiringan ram sekitar 7° di dalam gedung dan 6° di luar gedung, supaya pengguna kursi roda bisa naik sendiri dengan aman.

Atap genteng

Atap genteng dibuat miring ±30°–40° agar air hujan cepat turun. Panjang kaso dihitung dari setengah lebar rumah dibagi $\cos$ sudut atap.



Rambu tanjakan

Rambu "tanjakan 10%" di jalan pegunungan berarti naik 10 m tiap 100 m mendatar: $\tan\theta = 0{,}1$, sehingga $\theta \approx 5{,}7^\circ$.



Pos pengamatan gunung api

Petugas memperkirakan tinggi kolom abu letusan dari jarak pos ke kawah dan sudut pandang ke ujung kolom, persis seperti mengukur tinggi Monas.

Cek Cepat

Segitiga siku-siku bersisi 5, 12, dan 13. Sudut θ berhadapan dengan sisi 5. Nilai $\cos\theta$ adalah...

- $\frac{5}{13}$
- $\frac{12}{13}$
- $\frac{5}{12}$
- $\frac{13}{12}$

Nilai $\tan 60^\circ$ adalah...

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 1
- $\sqrt{3}$

Dari jarak 20 m, puncak tiang bendera terlihat dengan sudut elevasi 45°. Tinggi mata pengamat 1,5 m. Tinggi tiang bendera adalah...

21,5 m

20 m

18,5 m

28,3 m

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: klinometer sedotan

Bahan: busur derajat plastik, sedotan, selotip, benang ±25 cm, sebuah baut atau mur sebagai bandul, meteran (atau langkah kakimu), buku catatan.

1. Tempelkan sedotan di sepanjang sisi lurus busur. Ikat benang di lubang pusat busur dan gantungkan baut di ujungnya.
2. Uji alatmu: bidik sesuatu yang setinggi matamu. Benang harus menunjuk angka 90°.
3. Berdirilah pada jarak tertentu dari tiang bendera sekolah atau pohon kelapa. Ukur jaraknya (kalau memakai langkah kaki, ukur dulu panjang satu langkahmu).
4. Bidik puncaknya lewat sedotan. Minta temanmu membaca angka yang ditunjuk benang, lalu hitung $\alpha = 90^\circ - \text{bacaan}$.
5. Hitung tinggi = jarak × $\tan\alpha$ + tinggi matamu. Ulangi dari dua jarak lain, termasuk jarak saat α mendekati 45°.

Pertanyaan: Apakah ketiga hasilmu sama? Hasil dari jarak mana yang paling kamu percaya, dan mengapa? Bandingkan juga dengan trik Ancil: mundur sampai sudutnya tepat 45°.

RINGKASAN KILAT

Bab 24 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menunjuk **sisi depan, sisi samping, dan sisi miring** terhadap sebuah sudut, lalu menghitung **sin, cos, dan tan**
- menurunkan nilai eksak **sudut istimewa** 30°, 45°, dan 60° dari setengah persegi dan setengah segitiga sama sisi
- mencari **sisi atau sudut** yang belum diketahui pada segitiga siku-siku, termasuk memakai $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, dan $\tan^{-1}$

- menyelesaikan soal **sudut elevasi dan depresi**, misalnya mengukur tinggi Monas dengan klinometer buatan sendiri
- membuktikan dan memakai **identitas** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

🔑 Istilah kunci

sisi miring · sisi depan · sisi samping · sinus · kosinus · tangen · sudut istimewa · invers trigonometri · Sudut elevasi · Sudut depresi · identitas trigonometri

🧮 Rumus penting

$$t = L \sin\alpha$$

Tinggi layangan dari panjang tali. Tali yang terentang lurus adalah sisi miring dan tinggi layangan adalah sisi depan sudut. Jadi tinggi = panjang tali × sinus sudutnya.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{t}{p}\right)$$

Sudut kemiringan ram kursi roda. Bagi tinggi ram dengan panjang mendatarnya untuk mendapat tan θ, lalu tekan $\tan^{-1}$ untuk mendapat sudutnya.

$$H = d\tan\alpha + h$$

Tinggi benda dari sudut elevasi. Tinggi benda sama dengan jarak mendatar dikali tangen sudut elevasi, lalu ditambah tinggi mata pengamat.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Sisi depan dan sisi samping selalu ditentukan dari sudut yang sedang kamu pakai.
- Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD).
- Hasil $d\tan\alpha$ hanyalah tinggi benda di atas mata pengamat.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=24

🧩 Teka-teki untuk Bab 25

Pak Made punya kebun berbentuk segitiga. Dua sisinya 50 m dan 80 m, dan sudut di antara kedua sisi itu 60°. Ia ingin memagari sisi ketiga, tetapi sungai di tengah kebun membuatnya tidak bisa mengukur langsung. Tidak ada sudut siku-siku di segitiga itu, jadi SINDEMI-KOSAMI-TANDESA tidak bisa langsung dipakai. Berapa panjang sisi ketiga?

▼ **Intip petunjuk**

Ciptakan sendiri sudut siku-sikunya! Tarik garis tinggi dari ujung sisi 50 m ke sisi 80 m. Garis tinggi itu panjangnya $50\sin 60°$, dan kakinya berjarak $50\cos 60° = 25$ m dari titik sudut. Lalu pakai Pythagoras pada segitiga siku-siku yang tersisa. (Jawabannya bilangan bulat yang cantik.) Di Bab 25, trik ini menjadi rumus serbaguna bernama **aturan kosinus**.

BAB 25 · TRIGONOMETRI

25 Aturan Sinus & Kosinus: Mengukur Segitiga Apa Saja

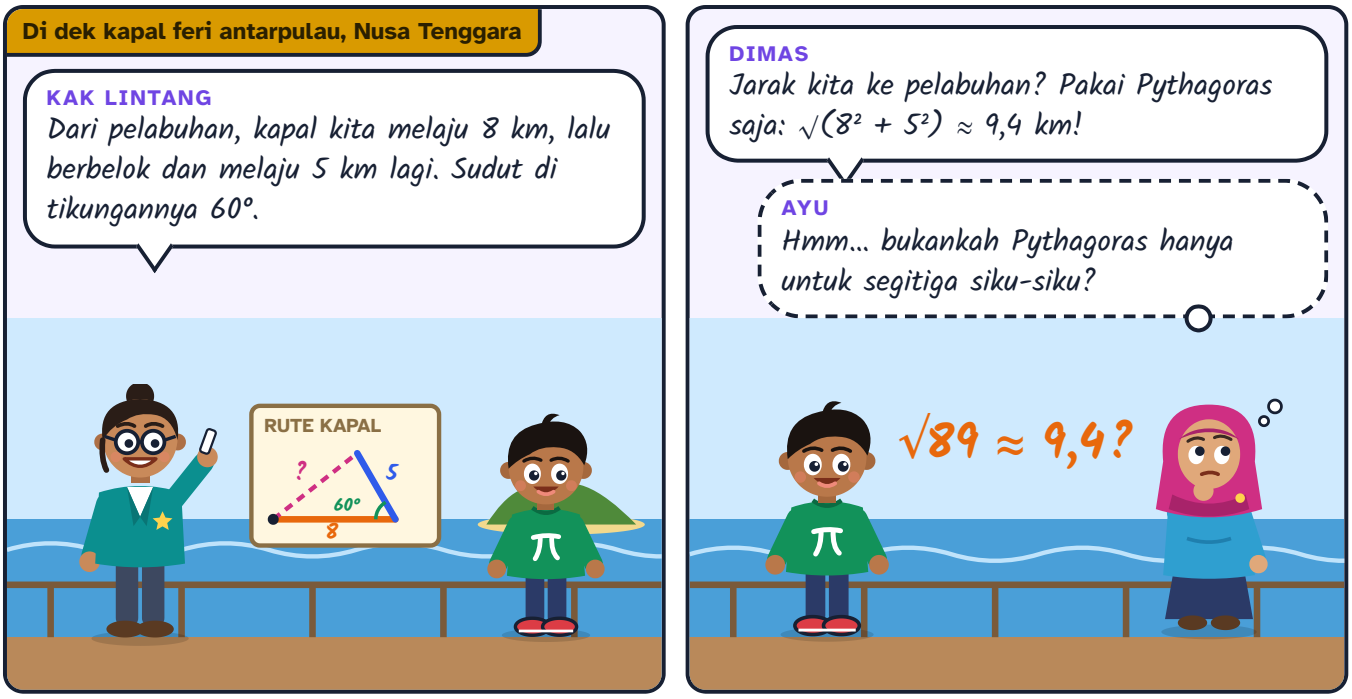
SOHCAHTOA hanya bekerja pada segitiga siku-siku. Lalu bagaimana nakhoda menghitung jarak pulang ke pelabuhan, atau juru ukur menghitung luas lahan yang miring-miring? Dua aturan sederhana membuka semua segitiga, dan salah satunya ternyata Pythagoras yang sedang menyamar.

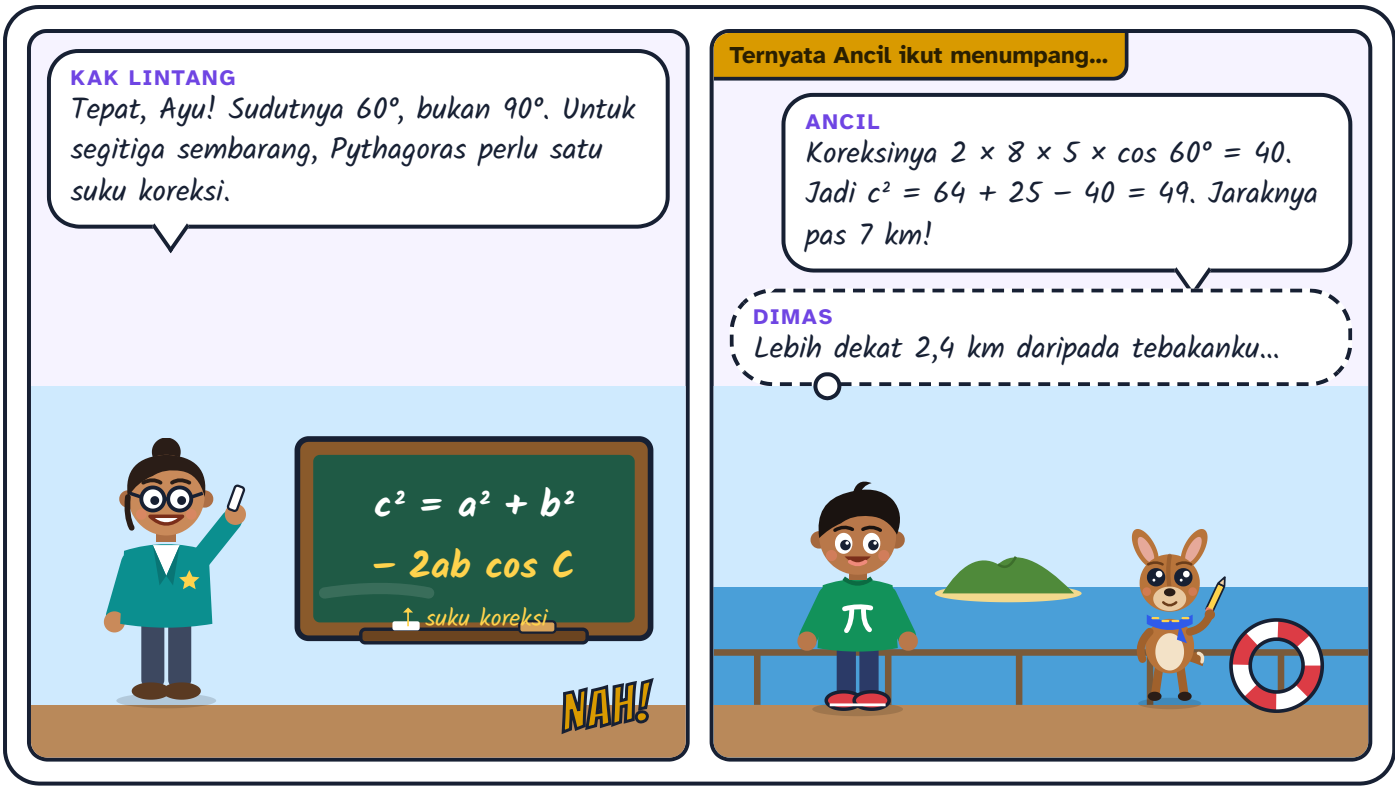
Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **aturan sinus** untuk mencari sisi atau sudut bila diketahui pasangan sisi dan sudut yang berhadapan;
- mengenali **kasus ambigu** (dua sisi dan satu sudut yang tidak diapit) dan menemukan semua segitiga yang mungkin;
- memakai **aturan kosinus** dan menjelaskan mengapa Teorema Pythagoras adalah kasus khususnya;
- menghitung **luas segitiga** dengan rumus $\frac{1}{2}ab\sin C$;
- menyelesaikan soal **bearing** (navigasi) dan soal tiga dimensi dengan memilih aturan yang tepat.

JALAN PULANG KAPAL FERI

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Kapal yang sama melaju 8 km, berbelok, lalu melaju 5 km. Kali ini sudut di tikungannya 120°, bukan 60°. Berapa jarak kapal dari pelabuhan sekarang?

Tetap 7 km, karena panjang kedua lintasannya sama.

Dua kali lipat, yaitu 14 km, karena sudutnya dua kali lipat.

Sekitar 11,4 km: lebih jauh, tetapi tidak sampai dua kali lipat.

Lebih dekat daripada 7 km, karena kapal berbelok lebih tajam.

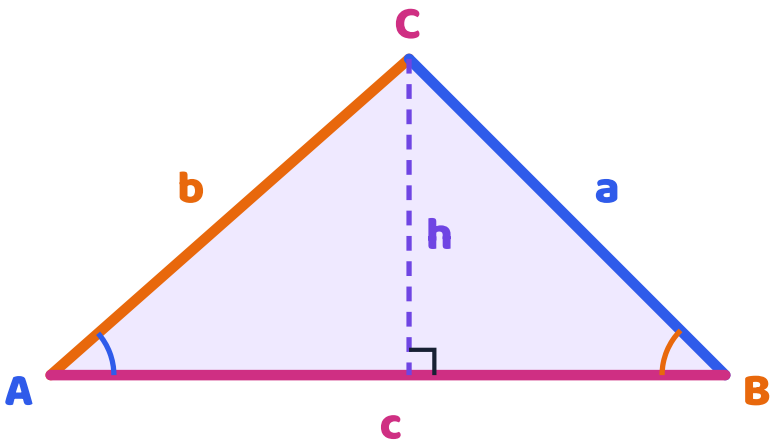
Jawabannya: sekitar 11,4 km. Sudut tikungan 120° berarti kapal hanya berbelok sedikit, sehingga rutenya lebih "lurus" dan ujungnya makin jauh dari pelabuhan. Namun jaraknya tidak sebanding dengan sudut: untuk 60° jaraknya 7 km, untuk 120° jaraknya $\sqrt{129} \approx 11{,}4$ km, dan untuk 180° (tidak berbelok sama sekali) paling jauh $8 + 5 = 13$ km. Aturan kosinus di subbab 25.3 menghitung semuanya dengan satu rumus.

25.1 Aturan sinus: satu garis tinggi, dua cerita

Di Bab 24 kamu menaklukkan segitiga siku-siku dengan SOHCAHTOA. Namun segitiga di dunia nyata jarang punya pojok 90°: rute kapal, lahan warisan, rangka jembatan. Kabar baiknya, setiap segitiga bisa **dibuat** punya sudut siku-siku. Caranya cukup dengan menarik satu garis tinggi. Dari trik kecil itu lahir dua aturan besar.

DEFINISI · NAMA SISI DAN SUDUT

Pada segitiga ABC, besar sudut di titik A, B, C ditulis A, B, C. Sisi di **depan** setiap sudut diberi huruf kecil yang sama: $a = BC$ berhadapan dengan sudut A, $b = CA$ berhadapan dengan sudut B, dan $c = AB$ berhadapan dengan sudut C. Sisi dan sudut yang saling berhadapan, misalnya a dan A, disebut **pasangan sisi–sudut**.



Satu tinggi, dua cara:

kiri: h = b sin A

kanan: h = a sin B

⇒ a sin B = b sin A

Sisi dan sudut yang berhadapan diberi warna sama. Garis tinggi h membelah segitiga menjadi dua segitiga siku-siku yang berbagi tinggi yang sama.

Tarik garis tinggi h dari titik C. Dari segitiga siku-siku di sebelah kiri, $h = b\sin A$. Dari segitiga siku-siku di sebelah kanan, $h = a\sin B$. Karena tingginya satu dan sama, $a\sin B = b\sin A$. Bagi kedua ruas dengan $\sin A \sin B$, dan lahirlah aturan pertama.

ATURAN SINUS

Pada setiap segitiga ABC berlaku

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Dalam kata-kata: *perbandingan setiap sisi dengan sinus sudut di depannya selalu sama.* Untuk mencari sudut, bentuk kebalikannya lebih praktis: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

Bukti lengkap, termasuk segitiga tumpul

Garis tinggi dari C memberi $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, seperti di atas. Garis tinggi dari A memberi $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ dengan cara yang sama, jadi ketiga perbandingan itu sama.

Bagaimana jika sudut B tumpul? Kaki garis tinggi dari C jatuh di *perpanjangan* sisi AB. Pada segitiga siku-siku yang terbentuk di luar, sudut di B adalah $180^\circ - B$, sehingga $h = a\sin(180^\circ - B) = a\sin B$. Hasilnya tetap sama!

Bahasa sederhana · Versi sederhananya: **sisi paling panjang selalu berhadapan dengan sudut paling besar**, dan sisi paling pendek berhadapan dengan sudut paling kecil. Aturan sinus mengatakan hal itu dengan angka: bagi setiap sisi dengan sinus sudut di depannya, hasilnya selalu sama.

SINUS DAN KOSINUS SUDUT TUMPUL

Segitiga sembarang bisa punya sudut tumpul, misalnya 120°. Kalkulator (mode derajat) tetap memberi nilainya: $\sin 120^\circ \approx 0{,}866$ dan $\cos 120^\circ = -0{,}5$. Pola yang perlu kamu ingat:

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x, \qquad \cos(180^\circ - x) = -\cos x.$$

Jadi $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ dan $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Mengapa kosinus sudut tumpul bernilai negatif? Bab 26 akan membuka rahasianya lewat lingkaran satuan.

RUMUS HIDUP

Aturan sinus: cari sisi dari dua sudut

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Pasangan lengkap (a, A) memberi 'nilai tukar' a : sin A. Kalikan nilai tukar itu dengan sin B, dan kamu mendapat sisi b.

a Sisi a km | A Sudut A ° | B Sudut B ° | b Sisi b km

SISI B

12,847

km

B > A ⇒ b > a: sudut lebih besar, sisi di depannya lebih panjang

Sudut ketiga C = **52°**. Nilai tukar a : sin A = **13,856**, jadi b = **13,856** × sin **68°** = **12,847**. Jika muncul '—', berarti A + B sudah mencapai 180° atau lebih, sehingga segitiganya tidak ada.

Cek satuan: Sisi a dan b memakai satuan yang sama (km tetap km). Sudut diukur dalam derajat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ATURAN-SINUS

CONTOH **Pulau dilihat dari dua pos pantai**

Pos pengamat A dan B berada di garis pantai yang lurus dan berjarak 12 km. Sebuah pulau kecil P terlihat dari A dengan $\angle PAB = 52^\circ$ dan dari B dengan $\angle PBA = 68^\circ$. Berapa jarak pos A ke pulau?

1. Sudut ketiga: $\angle APB = 180^\circ - 52^\circ - 68^\circ = 60^\circ$.

2. Sisi $AB = 12$ berhadapan dengan $\angle P = 60^\circ$: itu **pasangan lengkap**. Sisi yang dicari, AP, berhadapan dengan $\angle B = 68^\circ$.

3. $$\frac{AP}{\sin 68^\circ} = \frac{12}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AP = \frac{12 \sin 68^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{12 \times 0{,}9272}{0{,}8660} \approx 12{,}85 \text{ km}.$$

Pulau berjarak sekitar 12,85 km dari pos A. Cek kewajaran: $\angle B = 68^\circ$ sedikit lebih besar daripada $\angle P = 60^\circ$, jadi AP memang sedikit lebih panjang daripada $AB = 12$ km. (Dengan cara yang sama, jarak dari pos B sekitar 10,92 km.)

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD). Dalam mode radian, kalkulator membaca $\sin 30$ sebagai sinus dari 30 radian dan memberi $-0{,}988$, bukan $0{,}5$. Satu tombol yang salah bisa membuat kapalmu tersesat puluhan kilometer!

25.2 Kasus ambigu: lengan yang berayun

Tebak Dulu!

Ayu diminta menggambar segitiga dengan $\angle A = 30^\circ$, sisi $b = AC = 10$ cm, dan sisi $a = BC = 6$ cm. Ada berapa segitiga berbeda yang bisa ia gambar?

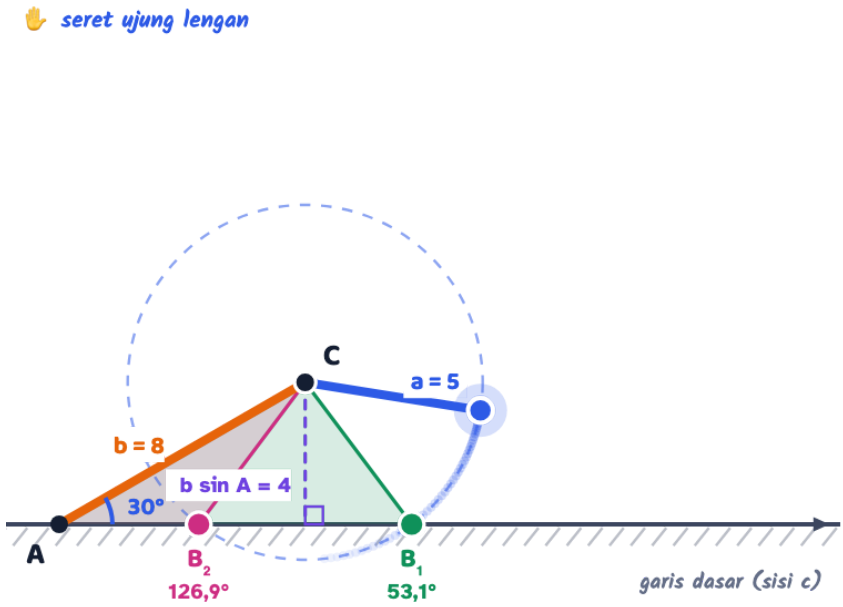
- Tepat satu, karena dua sisi dan satu sudut sudah ditentukan.
- Tidak ada, karena sisi 6 cm terlalu pendek.
- Dua segitiga yang berbeda bentuk.
- Tak hingga banyaknya.

Jawabannya: dua. Bayangkan sisi $a = 6$ cm sebagai lengan yang berengsel di titik C. Jarak terpendek dari C ke garis dasar adalah $b \sin A = 10 \times 0{,}5 = 5$ cm. Lengan 6 cm lebih panjang daripada 5 cm, jadi ujungnya bisa menyentuh garis dasar. Karena lengan itu juga lebih pendek daripada $b = 10$ cm, ia menyentuh garis dasar di **dua** tempat. Coba sendiri di Lab Mini di bawah!

Data "dua sisi dan satu sudut yang **tidak** diapit kedua sisi itu" sering disingkat **SSA** (sisi–sisi–sudut), dan data ini licik. Bayangkan sisi a sebagai daun pintu yang berengsel di titik C. Daun pintu itu boleh berayun; di mana pun ujungnya menyentuh garis dasar, di situlah titik B. Ujungnya bisa tidak sampai, menyentuh tepat sekali, atau memotong dua kali. Inilah **kasus ambigu** (ambigu = bermakna ganda).

LAB MINI **Lengan yang berayun: nol, satu, atau dua segitiga?**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-25



DUA segitiga!

b sin A

8 × sin 30° = 4

a = 5 b = 8

b sin A < a < b: lengan memotong garis dasar dua kali. $B_2 = 180° - B_1$.

sin B = b sin A / a

= 0,8

B_1 = 53,13°

B_2 = 126,87°

tinggi b·sin A	banyak segitiga	∠B_1 (°)	∠B_2 (°)
4	2	53,13	126,87

Atur $\angle A$, sisi b, dan panjang lengan a. Tekan ▶ **Jalankan** agar lengan berayun, atau seret sendiri ujung lengan (titik biru). Kapan lengan memotong garis dasar dua kali? Kapan hanya sekali? Kapan tidak sampai sama sekali?

SIFAT · BANYAKNYA SEGITIGA PADA KASUS SSA

Diketahui a, b, dan sudut A yang **lancip**. Bandingkan lengan a dengan tinggi $b \sin A$:

- $a < b \sin A$: **tidak ada** segitiga (lengan terlalu pendek);
- $a = b \sin A$: **tepat satu** segitiga, siku-siku di B;
- $b \sin A < a < b$: **dua** segitiga, dengan $B_2 = 180° - B_1$;
- $a \geq b$: **tepat satu** segitiga.

Jika A siku-siku atau tumpul, segitiga ada (tepat satu) hanya bila $a > b$.

KERJAKAN BERSAMA **Dua jawaban sekaligus**

Pada segitiga ABC, $\angle A = 40^\circ$, $a = 7$ cm, dan $b = 10$ cm. Tentukan semua kemungkinan besar $\angle B$ dan panjang c.

1. Cek dulu banyaknya segitiga: $b \sin A = 10 \sin 40^\circ \approx 6{,}43$. Karena $6{,}43 < 7 < 10$, ada **dua** segitiga.
2. Aturan sinus: $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a} = \dfrac{10 \sin 40^\circ}{7} \approx 0{,}9183$. Jadi $B_1 \approx 66{,}67^\circ$ atau $B_2 = 180^\circ - 66{,}67^\circ = 113{,}33^\circ$.
3. Segitiga pertama: $C_1 = 180^\circ - 40^\circ - 66{,}67^\circ = 73{,}33^\circ$, sehingga $c_1 = \dfrac{7 \sin 73{,}33^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 10{,}43$ cm.
4. Segitiga kedua: $C_2 = 180^\circ - 40^\circ - 113{,}33^\circ = 26{,}67^\circ$, sehingga $c_2 = \dfrac{7 \sin 26{,}67^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 4{,}89$ cm.

$B \approx 66{,}67^\circ$ **dengan** $c \approx 10{,}43$ **cm, atau** $B \approx 113{,}33^\circ$ **dengan** $c \approx 4{,}89$ **cm. Kedua segitiga sah!**

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Tombol $\sin^{-1}$ di kalkulator hanya memberi sudut lancip. Jika $\sin B = 0{,}8$, sudut B bisa $53{,}13^\circ$ **atau** $180^\circ - 53{,}13^\circ = 126{,}87^\circ$. Selalu periksa jawaban kedua itu: ia sah jika jumlahnya dengan sudut yang sudah diketahui masih kurang dari 180°.

25.3 Aturan kosinus: Pythagoras dengan koreksi

Aturan sinus butuh pasangan sisi–sudut yang lengkap. Bagaimana jika yang diketahui hanya dua sisi dan sudut di antara keduanya, seperti rute kapal di komik? Atau malah hanya tiga sisi? Di sinilah Pythagoras dari Bab 18 kembali, kali ini dengan sedikit "tambalan".

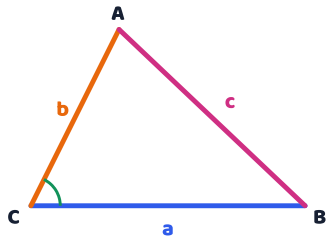
☆ **ATURAN KOSINUS**

Pada setiap segitiga ABC berlaku

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Dengan cara yang sama, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ dan $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$. Untuk mencari sudut dari tiga sisi, susun ulang rumusnya:

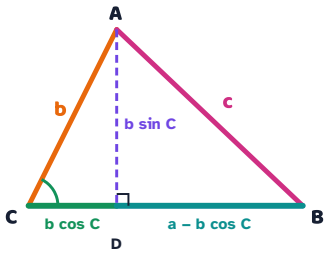
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Segitiga sembarang ABC

Tidak ada sudut siku-siku, jadi Pythagoras belum bisa dipakai langsung... atau bisa?

Langkah 1. Segitiga ABC sembarang dengan sisi $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, dan sudut C (hijau) di antara sisi a dan b.

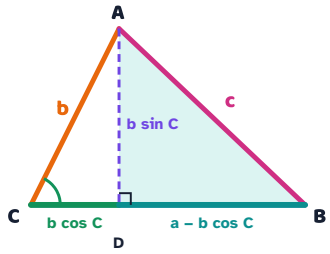


Tarik garis tinggi AD.

Muncul dua segitiga siku-siku. SOHCAHTOA (Bab 24) memberi:

```
AD = b sin C
CD = b cos C
```

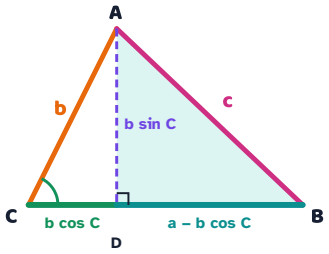
Langkah 2. Tarik garis tinggi dari A yang tegak lurus BC di titik D. Pada segitiga siku-siku ADC: $AD = b\sin C$ dan $CD = b\cos C$.



Pythagoras di segitiga ADB

```
c² = AD² + DB²
c² = (b sin C)²
   + (a - b cos C)²
```

Langkah 3. Sisa alasnya $DB = a - b\cos C$. Segitiga ADB siku-siku di D, jadi Pythagoras berlaku: $c^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2$.



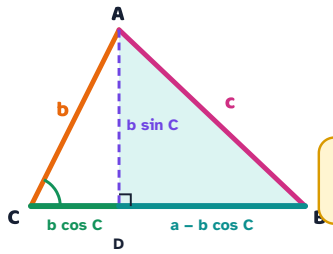
Jabarkan kuadratnya:

```
c² = b²sin²C + b²cos²C
   + a² - 2ab cos C
```

Kelompokkan suku b^2:

```
c² = b²(sin²C + cos²C)
   + a² - 2ab cos C
```

Langkah 4. Jabarkan: $c^2 = b^2\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C$, lalu kelompokkan suku-suku yang memuat b^2.



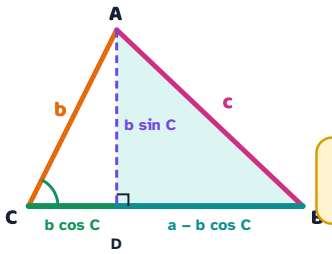
Ingat: sin²C + cos²C = 1

(identitas dari Bab 24), jadi kurung itu bernilai 1.

aturan kosinus

c² = a² + b² – 2ab cos C

Langkah 5. Karena $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, diperoleh **aturan kosinus** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.



Bonus: jika C = 90°,

cos 90° = 0, koreksinya hilang:

c² = a² + b²

Itulah Pythagoras!

aturan kosinus

c² = a² + b² – 2ab cos C

Langkah 6. Saat $C = 90°$, $\cos C = 0$ sehingga suku koreksi lenyap dan tersisa $c^2 = a^2 + b^2$. Pythagoras ternyata kasus khusus aturan kosinus!

Bagaimana jika sudut C tumpul?

Jika C tumpul, kaki garis tinggi D jatuh di luar segitiga, pada perpanjangan BC melewati C. Sekarang $CD = b\cos(180° - C) = -b\cos C$ (bilangan positif, karena $\cos C$ negatif) dan $DB = DC + CB = a - b\cos C$. Rumus untuk DB ternyata sama persis, begitu pula $AD = b\sin(180° - C) = b\sin C$. Jadi seluruh perhitungan berlaku tanpa perubahan.

Bahasa sederhana · Cara mudah mengingatnya: aturan kosinus adalah **Pythagoras ditambah koreksi**. Kalau sudutnya 90°, koreksinya nol. Kalau sudutnya lebih sempit daripada 90°, sisi di depannya lebih pendek daripada hasil Pythagoras. Kalau sudutnya lebih lebar, sisi itu lebih panjang.

Ingat kebalikan Teorema Pythagoras di Bab 18? Segitiga lancip jika $a^2 + b^2 > c^2$ dan tumpul jika $a^2 + b^2 < c^2$. Aturan kosinus menjelaskan alasannya: jika C lancip, $\cos C > 0$, sehingga ada yang dikurangkan dan $c^2 < a^2 + b^2$

. Jika C tumpul, $\cos C < 0$, sehingga "dikurangi bilangan negatif" berarti ditambah, dan $c^2 > a^2 + b^2$.

RUMUS HIDUP **Aturan kosinus: Pythagoras plus koreksi**

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Hitung dulu versi Pythagoras a² + b², lalu kurangi dengan koreksi 2ab cos C. Tarik akarnya, dan itulah sisi di depan sudut C.

a Sisi a km | b Sisi b km | C Sudut apit C ° | c Sisi c km

SISI C
7
km

C lancip: koreksi positif dikurangkan, c lebih pendek daripada versi Pythagoras

ketiga sisi bulat!

Versi Pythagoras: $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{89} \approx$ **9,434**. Koreksinya 2ab cos C = **40**, jadi c^2 = **89** – (**40**) = **49** dan c ≈ **7**.

Cek satuan: Sisi a, b, dan c memakai satuan yang sama. Koreksi 2ab cos C bersatuan km², sama seperti a² dan b².

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ATURAN-KOSINUS

GRAFIK HIDUP

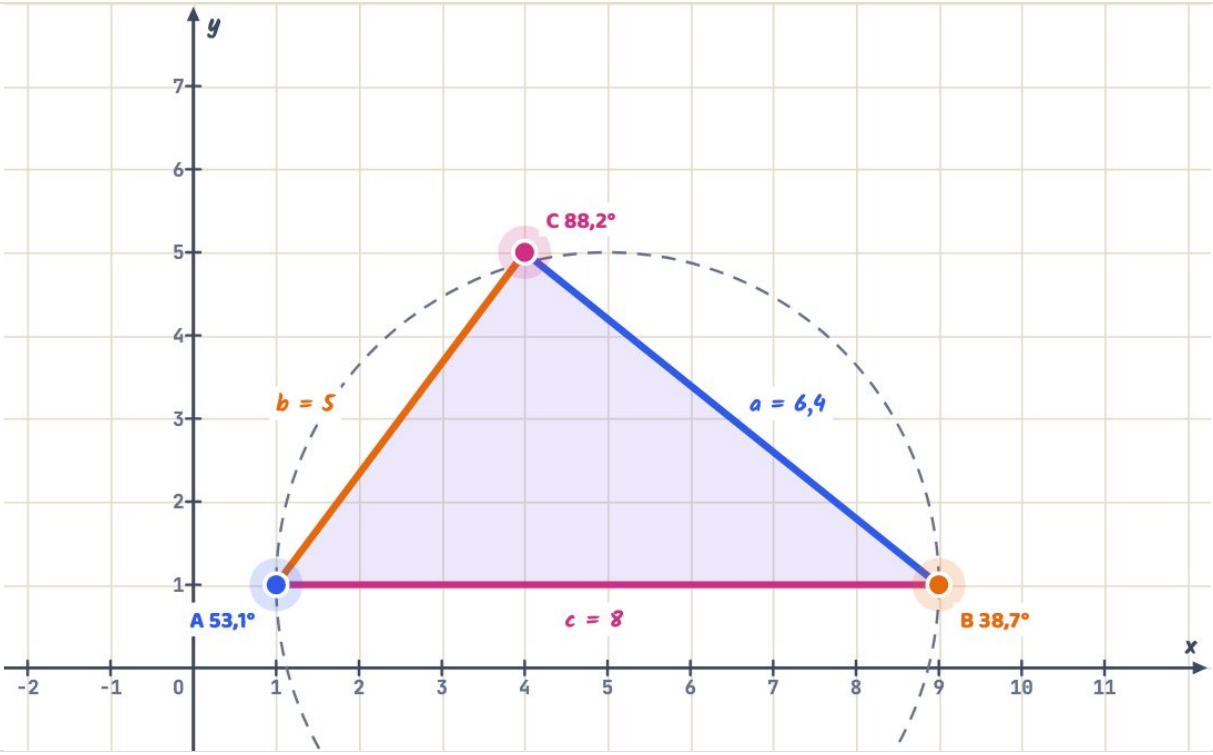
Segitiga bebas: seret ketiga titik sudutnya

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-25

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\frac{a}{\sin A} \approx 8, \quad \frac{b}{\sin B} \approx 8, \quad \frac{c}{\sin C} \approx 8$$

Baris di atas adalah aturan sinus yang dihitung langsung dari gambar: ketiga perbandingannya selalu sama.



∠C lancip: cos C > 0, jadi $c^2 < a^2 + b^2$

a = BC	b = CA	c = AB	∠A (°)	∠B (°)	∠C (°)	∠A + ∠B + ∠C	Luas = ½ab sin C
6,4	5	8	53,1	38,7	88,2	180	16

Seret titik A, B, dan C (atau geser slider). Semua sisi, sudut, dan luas berubah langsung, dan setiap sisi sewarna dengan sudut di depannya. Lingkaran putus-putus berdiameter AB: jika C tepat di atasnya, $\angle C = 90°$; di dalamnya tumpul; di luarnya lancip. Coba cari posisi yang membuat $c^2 = a^2 + b^2$!

CONTOH **Sudut lahan dari tiga sisi**

Kebun Bu Ratna berbentuk segitiga dengan sisi 50 m, 70 m, dan 80 m. Berapa besar sudut di depan sisi 70 m? Berapa sudut terbesar kebun itu?

1. Sudut θ di depan sisi 70 m diapit sisi 50 m dan 80 m: $\cos\theta = \dfrac{50^2 + 80^2 - 70^2}{2 \cdot 50 \cdot 80} = \dfrac{2500 + 6400 - 4900}{8000} = \dfrac{4000}{8000} = 0{,}5$. Jadi $\theta = 60°$.

2. Sudut terbesar φ berhadapan dengan sisi terpanjang (80 m): $\cos\varphi = \dfrac{50^2 + 70^2 - 80^2}{2 \cdot 50 \cdot 70} = \dfrac{1000}{7000} = \dfrac{1}{7}$, jadi $\varphi \approx 81{,}79°$.

3. Sudut ketiga $= 180° - 60° - 81{,}79° = 38{,}21°$.

Sudut di depan sisi 70 m tepat 60°, dan sudut terbesarnya sekitar 81,79°. Karena kosinus sudut terbesar positif, kebun itu berbentuk segitiga lancip.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Jangan menghitung $a^2 + b^2 - 2ab$ lebih dulu lalu mengalikannya dengan $\cos C$. Suku $2ab\cos C$ adalah satu kesatuan: hitung dulu $2ab\cos C$, baru kurangkan dari $a^2 + b^2$. Untuk sudut tumpul, $\cos C$ negatif, sehingga "dikurangi bilangan negatif" berarti **ditambah**.

ADU CEPAT **Segitiga sudut 60° dan 120° kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-25

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Untuk 60°, cos C = ½, jadi $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Untuk 120°, cos C = −½, jadi $c^2 = a^2 + b^2 + ab$. Contoh: 3, 5, 120° memberi 9 + 25 + 15 = 49, jadi c = 7.

🕰 **TAMU DARI MASA LALU**

Sekitar 300 SM, Euklides menulis dua proposisi di buku *Elemen* (Buku II, proposisi 12 dan 13) yang isinya aturan kosinus dalam bahasa geometri: persegi di depan sudut tumpul *lebih luas* daripada jumlah dua persegi lainnya, dan selisihnya sama dengan dua kali luas sebuah persegi panjang tertentu. Waktu itu kata "kosinus" belum ada! Aturan sinus untuk segitiga datar dirumuskan dan dibuktikan dengan rapi oleh Nasiruddin at-Tusi di Persia pada abad ke-13. Lalu Jamsyid al-Kasyi (al-Kashi) dari Samarkand (±1380–1429) menuliskan aturan kosinus dalam bentuk yang siap dipakai untuk menghitung. Itu sebabnya di Prancis aturan kosinus disebut *teorema Al-Kashi*.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

ATURAN KOSINUS = HASIL KALI TITIK VEKTOR

Di Bab 23 kamu bertemu vektor. Letakkan pangkal di C, lalu misalkan $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ dan $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$. Maka $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$, sehingga

$$c^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Jadi rumus $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$ dan aturan kosinus adalah satu fakta yang sama, dilihat dari dua arah. Versi vektor ini langsung berlaku di ruang tiga dimensi, misalnya untuk menghitung sudut antara dua diagonal ruang sebuah kubus: $\cos\theta = \frac{1}{3}$, jadi $\theta \approx 70{,}5°$.

25.4 Luas segitiga tanpa mengukur tinggi

Di SD kamu belajar bahwa luas segitiga $= \frac{1}{2} \times$ alas $\times$ tinggi. Masalahnya, di lapangan tinggi segitiga jarang bisa diukur langsung. Coba saja ukur tinggi lahan yang ditumbuhi semak belukar! Untungnya, tinggi bisa dihitung dari sisi dan sudut. Jika alasnya $a = BC$, tinggi dari titik A ke alas itu adalah $b\sin C$ (lihat langkah 2 animasi di atas). Jadi luasnya $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\sin C$.

LUAS SEGITIGA DENGAN SINUS

Luas segitiga ABC adalah

$$L = \frac{1}{2}\,ab\sin C = \frac{1}{2}\,bc\sin A = \frac{1}{2}\,ca\sin B$$

Dalam kata-kata: *setengah kali dua sisi kali sinus **sudut apit** di antara keduanya.*

Bahasa sederhana · Ingat polanya: pilih **dua sisi** dan **sudut yang diapit** kedua sisi itu. Kalikan kedua sisi, kalikan lagi dengan sinus sudutnya, lalu bagi dua. Jika sudutnya 90°, $\sin 90° = 1$, dan rumusnya kembali menjadi ½ × alas × tinggi yang sudah kamu kenal.

RUMUS HIDUP

Luas segitiga: ½ab sin C

$$L = \frac{1}{2}\, a\, b \sin C$$

Dua sisi dan sudut yang diapitnya sudah cukup. Tinggi segitiga tersembunyi di dalam b sin C.

a Sisi a m

b Sisi b m

C Sudut apit C °

L Luas m²

LUAS

1.732,1

m²

Tinggi terhadap alas a adalah b sin C = **69,282** m, jadi L = ½ × **50** × **69,282** = **1.732,1** m², atau sekitar **0,173** hektare. Sudut **60**° dan **120**° memberi luas yang sama!

Cek satuan: Sisi dalam meter, jadi luas dalam meter persegi (m²). 1 hektare = 10.000 m².

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LUAS-SINUS

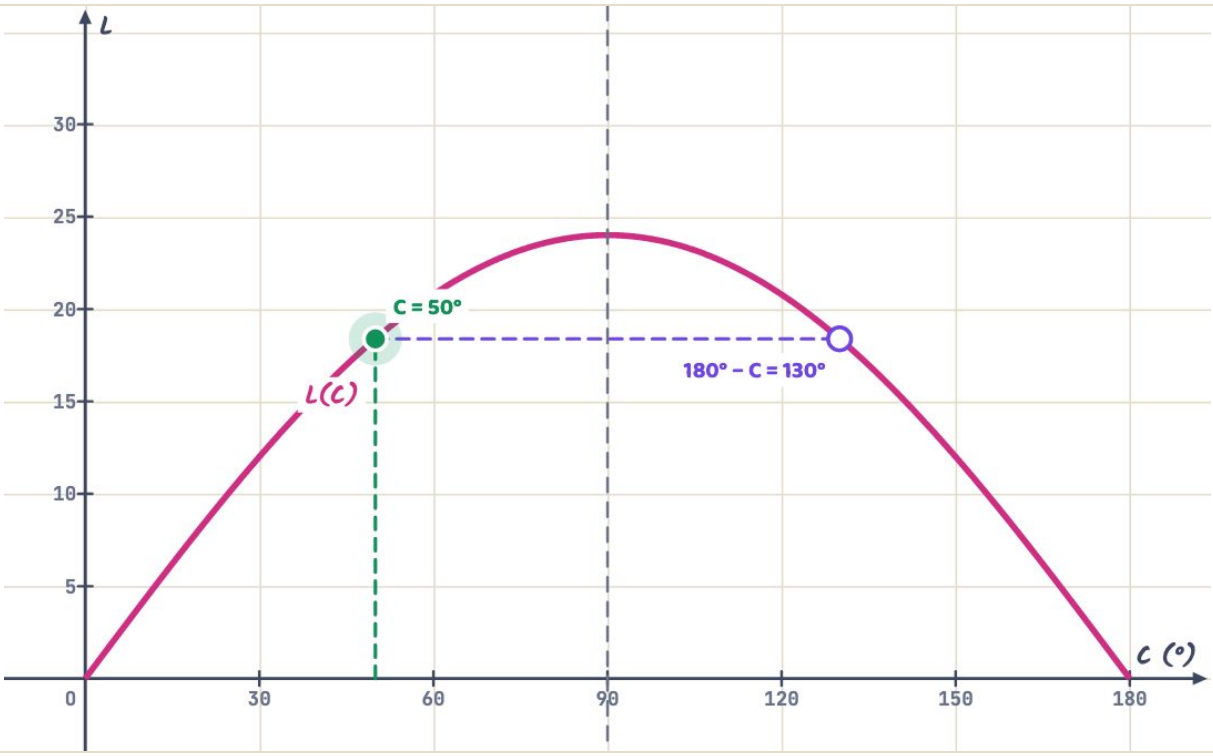
GRAFIK HIDUP **Luas sebagai fungsi sudut apit**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-25

$$L(C) = \tfrac{1}{2}\, a\, b \sin C$$

$$L(50^\circ) = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 50^\circ \approx 18{,}39$$

Sumbu mendatar: sudut apit C (derajat). Sumbu tegak: luas segitiga.



C dan 180° − C memberi luas sama: sin C = sin(180° − C)

L(C)	L(180° − C)	Luas terbesar ½ab
18,39	18,39	24

Seret titik hijau di sepanjang kurva. Titik ungu selalu berada di sudut $180^\circ - C$, dan tingginya sama persis. Inilah alasan di balik kasus ambigu: dua sudut berbeda punya sinus yang sama. Lihat juga bentuk kurvanya, karena kamu akan bertemu lagi dengannya di Bab 26.

KERJAKAN BERSAMA **Luas kebun Bu Ratna**

Hitung luas kebun Bu Ratna (sisi 50 m, 70 m, dan 80 m) dari contoh di subbab 25.3.

1. Kita sudah tahu sudut 60° diapit oleh sisi 50 m dan 80 m.
2. $L = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 80 \cdot \sin 60^\circ = 2000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1000\sqrt{3} \approx 1732$ m².
3. Cek dengan rumus Heron (lihat kotak Lanjut di bawah): $s = \frac{1}{2}(50 + 70 + 80) = 100$, $L = \sqrt{100 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 20} = \sqrt{3\,000\,000} \approx 1732$ m². Cocok!

Luas kebun sekitar 1.732 m², atau kira-kira 0,17 hektare.

ID

MATEMATIKA NUSANTARA

Peta Jawa dari jaring segitiga. Pada abad ke-19, juru ukur memetakan Pulau Jawa dengan **triangulasi**: puncak-puncak gunung dan bukit dijadikan titik sudut sebuah jaringan segitiga raksasa yang membentang dari ujung barat sampai ujung timur pulau. Mereka mengukur satu **garis dasar** dengan sangat teliti, lalu hanya mengukur **sudut** dengan teodolit. Semua jarak lainnya dihitung dengan aturan sinus, segitiga demi segitiga. Sampai hari ini, juru ukur pertanahan masih memecah bidang tanah yang bentuknya tak beraturan menjadi segitiga-segitiga, lalu menjumlahkan luasnya dengan $\frac{1}{2}ab\sin C$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RAHASIA DI BALIK ATURAN SINUS: DIAMETER 2R

Perbandingan $a/\sin A$ yang selalu sama itu ternyata punya arti geometris, yaitu **diameter** **lingkaran luar** segitiga:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

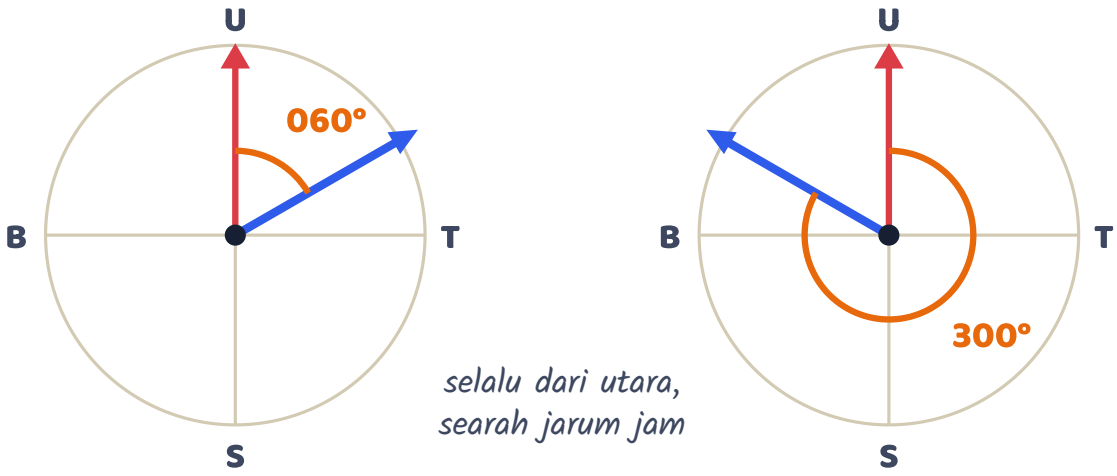
Bukti singkat (untuk A lancip): tarik diameter BA' dari B melalui pusat lingkaran luar. Sudut $BA'C$ sama dengan A karena keduanya menghadap busur BC yang sama, dan sudut BCA' siku-siku karena menghadap diameter. Jadi $\sin A = \dfrac{BC}{BA'} = \dfrac{a}{2R}$. Dari sini lahir rumus luas yang sering muncul di olimpiade: $L = \frac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{abc}{4R}$. Ada juga **rumus Heron** yang hanya memakai tiga sisi: $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Contoh terkenal: segitiga 13–14–15 punya $s = 21$ dan $L = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

25.5 Bearing: navigasi kapal antarpulau

Indonesia punya lebih dari 17.000 pulau, dan setiap hari ratusan kapal berlayar di antaranya. Nakhoda tidak memakai kata "kanan" atau "kiri", melainkan arah kompas yang tepat.

DEFINISI · BEARING

Bearing (jurusan tiga angka) adalah arah yang diukur dari arah **utara**, **searah putaran jarum jam**, dan selalu ditulis dengan tiga angka. Contoh: timur laut = 045°, timur = 090°, selatan = 180°, barat = 270°.



Kiri: bearing 060°, yaitu 60° searah jarum jam dari utara (di antara timur laut dan timur). Kanan: bearing 300°, yaitu putaran 300° searah jarum jam dari utara, berakhir di antara barat dan barat laut.

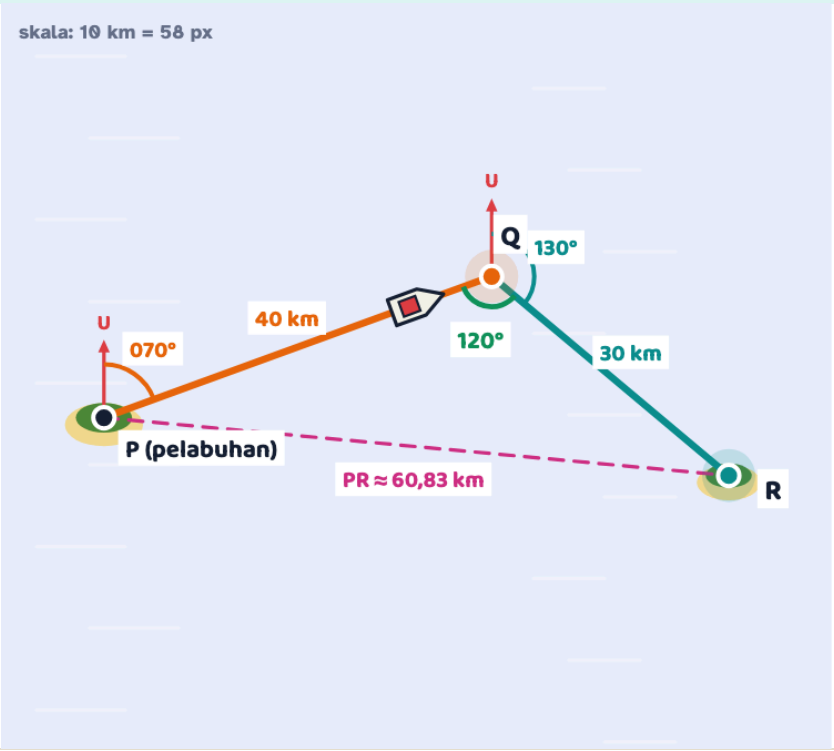
Soal bearing selalu berujung pada sebuah segitiga. Kuncinya adalah menemukan sudut **di dalam** segitiga dari dua bearing. Gambarlah panah utara di **setiap** titik belok. Semua panah utara itu sejajar, sehingga sudut-sudut sehadap dan berseberangan dari Bab 17 bisa dipakai.

TRIK KAK LINTANG

Bearing balik = bearing pergi ± 180°. Jika Q terlihat dari P pada bearing 070°, maka P terlihat dari Q pada bearing 070° + 180° = 250°. Jika hasilnya 360° atau lebih, kurangi 360°: kebalikan dari 300° adalah 300° + 180° − 360° = 120°. Lalu sudut di titik belok = selisih antara bearing balik dan bearing baru.

LAB MINI Nakhoda cilik: hitung jalan pulang

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-25



① Sudut di Q

arah balik Q→P: 250°

arah Q→R: 130°

∠PQR = 120°

② Aturan kosinus

$PR^2 = 40^2 + 30^2$

$- 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 120°$

$PR^2 \approx 3.700$

$PR \approx 60{,}83$ km

③ Arah pulang

R dari P: 095,3°

pulang: 275,3°

∠PQR (°)	jarak PR (km)	bearing R dari P	bearing pulang R → P
120	60,83	095,3°	275,3°

Atur jarak dan bearing kedua lintasan, atau seret titik Q dan R di peta. Tekan ▶ **Jalankan** untuk melayarkan kapal. Panel di samping menghitung sudut di Q, jarak pulang dengan aturan kosinus, dan bearing untuk pulang. Coba tombol **Belok siku**: rumus apa yang muncul?

KERJAKAN BERSAMA **Kapal mencari jalan pulang**

Sebuah kapal berangkat dari pelabuhan P, berlayar 40 km pada bearing 070° ke titik Q, lalu 30 km pada bearing 130° ke pulau R. Hitung jarak PR dan bearing R dari P.

1. Bearing balik dari Q ke P: 070° + 180° = 250°. Arah dari Q ke R: 130°. Jadi $\angle PQR = 250^\circ - 130^\circ = 120^\circ$.

2. Aturan kosinus: $PR^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cos 120^\circ = 1600 + 900 + 1200 = 3700$, jadi $PR = \sqrt{3700} \approx 60{,}83$ km.

3. Aturan sinus: $\sin \angle QPR = \dfrac{30 \sin 120^\circ}{60{,}83} \approx 0{,}4271$, jadi $\angle QPR \approx 25{,}28^\circ$. Sudut ini pasti lancip, karena $\angle Q$ sudah tumpul.

4. Kapal berbelok ke kanan (searah jarum jam), jadi bearing R dari P = 070° + 25,28° ≈ 095,3°.

Pulau R berjarak sekitar 60,83 km dari pelabuhan pada bearing ±095,3°. Untuk pulang lurus, kapal mengambil bearing 095,3° + 180° = 275,3°.

25.6 Memilih aturan yang tepat dan soal tiga dimensi

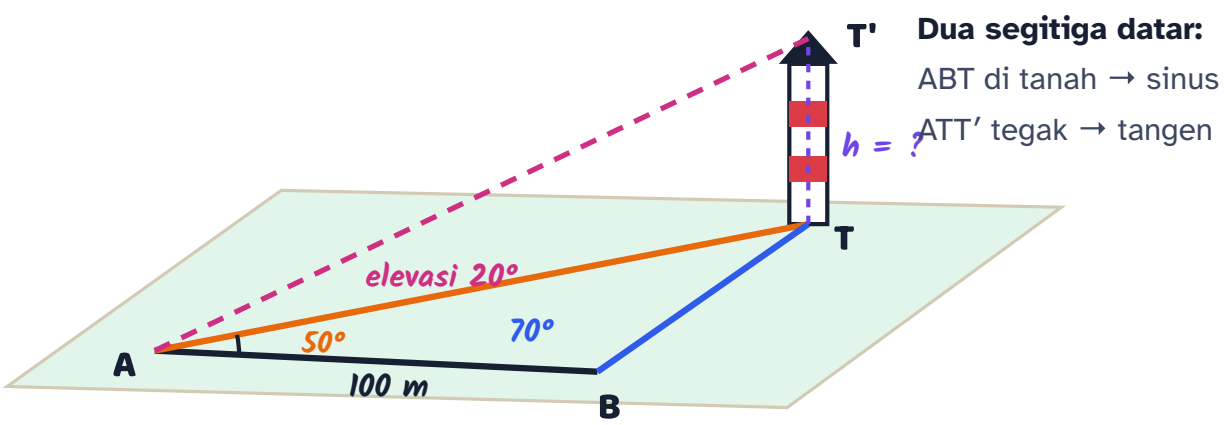
Kamu kini punya empat alat: SOHCAHTOA (khusus segitiga siku-siku), aturan sinus, aturan kosinus, dan rumus luas. Yang sering sulit bukan menghitungnya, melainkan **memilih** alat yang tepat. Tabel ini membantumu.

Yang diketahui	Alat pertama	Catatan
Tiga sisi (sisi–sisi–sisi)	Aturan kosinus, untuk sudut	Cari sudut terbesar dulu (di depan sisi terpanjang); sisanya aman dengan aturan sinus.
Dua sisi + sudut apit (sisi–sudut–sisi)	Aturan kosinus, untuk sisi ketiga	Luasnya langsung: $\frac{1}{2}ab\sin C$.
Dua sudut + satu sisi	Aturan sinus	Sudut ketiga $= 180^\circ$ dikurangi dua sudut lainnya.
Dua sisi + sudut tidak apit (SSA)	Aturan sinus	Awas kasus ambigu: bisa 0, 1, atau 2 segitiga.
Ada sudut 90°	SOHCAHTOA / Pythagoras	Paling cepat; aturan sinus dan kosinus tetap benar, hanya lebih panjang.

TRIK KAK LINTANG

Cari **pasangan lengkap**, yaitu satu sisi beserta sudut di depannya yang keduanya sudah diketahui. Ada pasangan lengkap? Pakai **aturan sinus**. Tidak ada? Pakai **aturan kosinus**. Untuk luas, cari dua sisi yang mengapit satu sudut.

Soal tiga dimensi terlihat menakutkan, padahal isinya hanya beberapa segitiga datar yang saling menempel. Strateginya: gambar ulang setiap segitiga yang kamu pakai secara terpisah dan datar, tandai yang diketahui, lalu selesaikan satu per satu.



Segitiga ABT terletak mendatar di tanah, sedangkan segitiga ATT' berdiri tegak dan siku-siku di T. Selesaikan satu per satu.

COBA SENDIRI **Tinggi mercusuar di atas karang**

Dua pengamat berdiri di titik A dan B di pantai yang datar, dengan $AB = 100$ m. Kaki mercusuar T berada di atas karang yang tidak bisa didekati, tetapi setinggi permukaan pantai. Dari A, sudut antara AB dan AT adalah 50°. Dari B, sudut antara BA dan BT adalah 70°. Dari A, puncak mercusuar T' terlihat dengan sudut elevasi 20°. Berapa tinggi mercusuar?

1. Segitiga datar ABT: $\angle ATB = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$.
2. Aturan sinus (pasangan lengkap: AB dan $\angle T$): $AT = \dfrac{AB \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \dfrac{100 \times 0{,}9397}{0{,}8660} \approx 108{,}5$ m.
3. Segitiga tegak ATT' siku-siku di T: $h = AT \tan 20^\circ \approx 108{,}5 \times 0{,}3640 \approx 39{,}5$ m.

Tinggi mercusuar sekitar 39,5 m, kira-kira setinggi gedung 13 lantai, dan dihitung tanpa menyentuh mercusuarnya sama sekali!

MITOS

"Aturan sinus hanya berlaku untuk segitiga lancip."

FAKTA

Aturan sinus berlaku untuk **semua** segitiga, termasuk yang tumpul, karena $\sin(180^\circ - x) = \sin x$. Hati-hati saja saat mencari sudut: bisa ada dua jawaban.

MITOS

"Dua sisi dan satu sudut selalu menentukan tepat satu segitiga."

FAKTA

Itu hanya benar jika sudutnya **diapit** kedua sisi tersebut. Jika sudutnya tidak diapit (SSA), bisa ada nol, satu, atau dua segitiga.

MITOS

"Aturan kosinus adalah rumus baru yang tidak ada hubungannya dengan Pythagoras."

FAKTA

Pythagoras adalah aturan kosinus untuk $C = 90^\circ$. Sebaliknya, aturan kosinus adalah Pythagoras yang diperluas ke semua segitiga dengan suku koreksi $-2ab\cos C$.

Navigasi antarpulau

Nakhoda menghitung jarak dan bearing pulang dari dua lintasan yang sudah ditempuh, persis seperti Lab Mini di atas.

Menara pengawas kebakaran hutan

Dua menara yang jaraknya diketahui sama-sama mencatat arah asap. Aturan sinus langsung memberi jarak titik api dari setiap menara.

Pengukuran tanah

Juru ukur memecah bidang tanah menjadi segitiga dan menghitung luas setiap bagian dengan ½ab sin C.



Rangka jembatan & atap

Rangka baja tersusun dari segitiga. Aturan kosinus memberi panjang batang dan sudut sambungannya.



Sudut tembak ke gawang

Dari posisi pemain, "jendela" gawang yang terlihat adalah sebuah sudut. Aturan kosinus menghitungnya dari jarak ke kedua tiang.

Cek Cepat

Pada segitiga ABC, $a = 6$, $\angle A = 30^\circ$, dan $\angle B = 90^\circ$. Panjang b adalah...

- 3
- $6\sqrt{3}$
- 12
- $6\sqrt{2}$

Dua sisi segitiga 4 cm dan 6 cm mengapit sudut 120°. Panjang sisi ketiga adalah...

- $\sqrt{28}$ cm
- $\sqrt{76}$ cm
- 10 cm
- $\sqrt{52}$ cm

Luas segitiga dengan dua sisi 8 cm dan 9 cm yang mengapit sudut 150° adalah...

- 18 cm²
- 36 cm²
- $18\sqrt{3}$ cm²
- 72 cm²

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. B · 3. A

Tantangan Rumah: mengukur lebar lapangan tanpa menyeberang

Bahan: meteran (atau tali 10 m), busur derajat dari kertas tebal (atau aplikasi kompas di HP), tiga pasak atau batu, buku catatan.

1. Pilih benda T di seberang lapangan atau halaman, misalnya sebatang pohon atau tiang.
2. Di sisimu, buat garis dasar AB sepanjang 10 m. Tandai A dan B dengan pasak.
3. Di A, ukur sudut antara arah B dan arah T. Lakukan hal yang sama di B.
4. Hitung sudut ketiga, lalu pakai aturan sinus untuk mencari AT dan BT.
5. Jika memungkinkan, ukur AT langsung dengan meteran dan bandingkan.

Pertanyaan: Seberapa besar selisih hasil hitunganmu dengan pengukuran langsung? Ulangi dengan garis dasar 5 m. Garis dasar mana yang memberi hasil lebih teliti, dan mengapa?

RINGKASAN KILAT

Bab 25 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- memakai **aturan sinus** untuk mencari sisi atau sudut bila diketahui pasangan sisi dan sudut yang berhadapan
- mengenali **kasus ambigu** (dua sisi dan satu sudut yang tidak diapit) dan menemukan semua segitiga yang mungkin
- memakai **aturan kosinus** dan menjelaskan mengapa Teorema Pythagoras adalah kasus khususnya
- menghitung **luas segitiga** dengan rumus $\frac{1}{2}ab\sin C$
- menyelesaikan soal **bearing** (navigasi) dan soal tiga dimensi dengan memilih aturan yang tepat

Istilah kunci

pasangan sisi–sudut · kasus ambigu · sudut apit · garis dasar · lingkaran luar · Bearing

Rumus penting

$$b = \frac{a\ \sin B}{\sin A}$$

Aturan sinus: cari sisi dari dua sudut. Pasangan lengkap (a, A) memberi 'nilai tukar' a : sin A. Kalikan nilai tukar itu dengan sin B, dan kamu mendapat sisi b.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Aturan kosinus: Pythagoras plus koreksi. Hitung dulu versi Pythagoras $a^2 + b^2$, lalu kurangi dengan koreksi $2ab\cos C$. Tarik akarnya, dan itulah sisi di depan sudut C.

$$L = \tfrac{1}{2}\, a\, b\, \sin C$$

Luas segitiga: ½ab sin C. Dua sisi dan sudut yang diapitnya sudah cukup. Tinggi segitiga tersembunyi di dalam b sin C.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD).
- Tombol $\sin^{-1}$ di kalkulator hanya memberi sudut lancip.
- Jangan menghitung $a^2 + b^2 - 2ab$ lebih dulu lalu mengalikannya dengan $\cos C$.

⛰ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=25

Teka-teki untuk Bab 26

Di bab ini kamu dengan tenang menulis $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ dan $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. Padahal di Bab 24, sinus didefinisikan sebagai "depan dibagi miring" pada segitiga siku-siku, dan segitiga siku-siku tidak mungkin punya sudut 150°! Lalu apa sebenarnya arti $\sin 150^\circ$? Sekarang bayangkan bianglala pasar malam berjari-jari 20 m. Kamu naik di kursi terbawah, lalu bianglala berputar pelan. Berapa tinggimu setelah berputar 150°? 270°? 400°? Bagaimana bentuk grafik tinggimu terhadap waktu?

▼ Intip petunjuk

Letakkan pusat bianglala di titik $(0, 0)$. Posisi kursimu setelah berputar sudut berapa pun bisa ditulis dengan $\cos$ dan $\sin$ sudut itu. Grafik tingginya naik-turun seperti gelombang, mirip kurva luas $L(C)$ yang kamu seret di subbab 25.4. Bab 26 akan membuat "sinus untuk semua sudut" masuk akal lewat lingkaran satuan.

BAB 26 · TRIGONOMETRI

26 Fungsi Trigonometri: Saat Lingkaran Menari Menjadi Gelombang

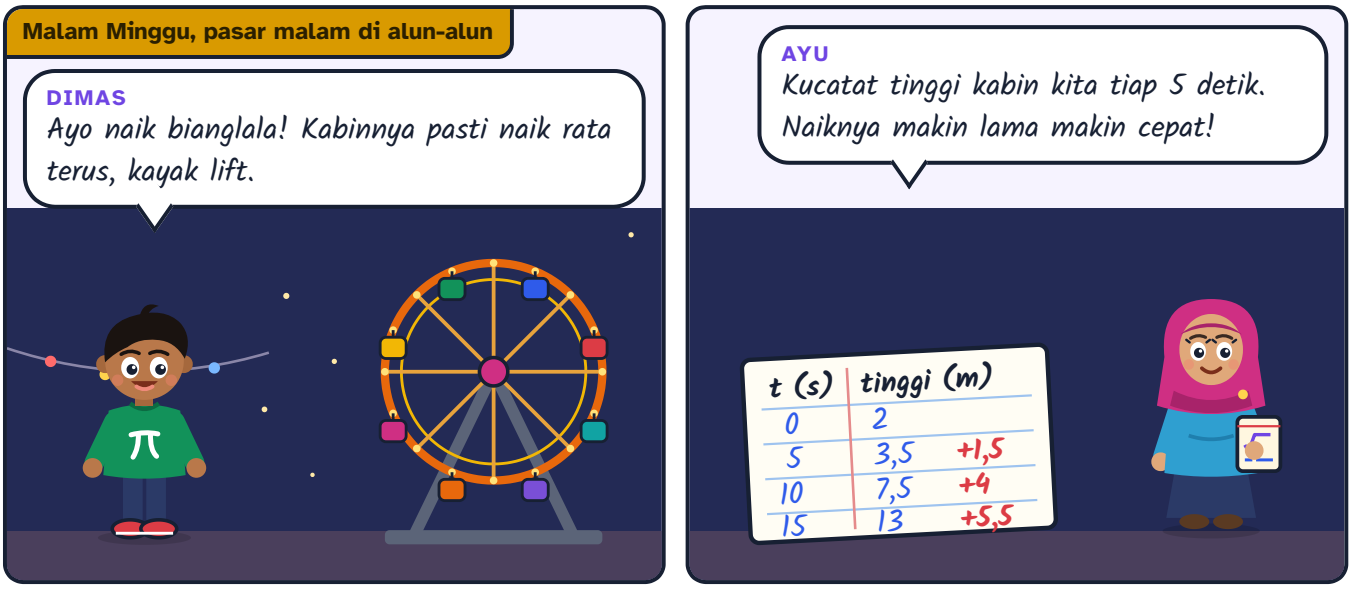
Kabin bianglala, ombak di pantai, dan dengung gong gamelan punya rahasia yang sama: semuanya berulang. Di bab ini, sin dan cos naik kelas, dari perbandingan sisi segitiga menjadi fungsi yang melukis gelombang.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memperluas sin, cos, dan tan ke **sudut berapa pun** memakai **lingkaran satuan** dan sudut acuan;
- mengubah derajat ke **radian** dan sebaliknya, serta menghitung panjang busur dan luas juring;
- menggambar grafik sin, cos, tan dan membaca **amplitudo, periode, geseran, dan sumbu tengah**;
- memodelkan peristiwa berulang (bianglala, pasang surut, bunyi gamelan) dengan $y = A\sin\big(B(x - C)\big) + D$;
- membuktikan dan memakai **identitas** (Pythagoras, jumlah sudut, sudut rangkap) untuk menyelesaikan **persamaan trigonometri**.

BIANGLALA PASAR MALAM

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Bianglala berputar dengan kecepatan tetap. Jika tinggi kabin digambar terhadap waktu, grafiknya berbentuk...

garis lurus naik lalu turun, seperti atap rumah (bentuk segitiga);

gelombang mulus: lambat di dekat puncak dan dasar, paling cepat di tengah;

tangga naik dengan anak tangga yang sama tinggi;

satu parabola terbuka ke bawah, lalu berhenti.

Jawabannya: gelombang mulus. Kabin bergerak dengan laju tetap di sepanjang lingkaran, tetapi di puncak dan di dasar arah geraknya hampir mendatar, jadi tingginya nyaris tidak berubah. Di ketinggian poros, kabin bergerak hampir tegak sehingga tingginya berubah paling cepat. Itulah sebabnya catatan Ayu bertambah 1,5 m, lalu 4 m, lalu 5,5 m. Bentuk gelombang ini bernama **sinusoid**.

26.1 Lingkaran satuan: sin dan cos untuk sudut berapa pun

Di Bab 24, sin dan cos lahir dari segitiga siku-siku, jadi sudutnya hanya boleh di antara 0° dan 90°. Padahal kabin bianglala terus berputar: 120°, 200°, bahkan 400°. Kita butuh definisi yang tidak "macet" di 90°.

Caranya: gambar lingkaran berjari-jari 1 yang berpusat di titik asal O. Lingkaran ini disebut **lingkaran satuan**. Putar ruas OP mulai dari sumbu-x positif, **berlawanan arah jarum jam**, sebesar θ.

DEFINISI

Untuk sudut θ sembarang, misalkan P titik pada lingkaran satuan sehingga OP membentuk sudut θ terhadap sumbu-x positif. Didefinisikan

$$\cos\theta = x_P, \qquad \sin\theta = y_P, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \ \ (\cos\theta \neq 0).$$

Jadi $P = (\cos\theta, \sin\theta)$. Sudut negatif berarti diputar **searah** jarum jam.

Bahasa sederhana · Gampangnya: bayangkan kamu duduk di kabin bianglala mini berjari-jari 1 meter. **sin θ** = seberapa tinggi kamu di atas poros, **cos θ** = seberapa jauh kamu ke kanan dari poros. Kalau kamu di bawah poros, tingginya negatif; kalau di kiri poros, jaraknya negatif.

Untuk $0^\circ < \theta < 90^\circ$, definisi ini cocok dengan SOHCAHTOA: segitiga di bawah OP punya sisi miring 1, sehingga sisi depannya $\sin\theta$ dan sisi sampingnya $\cos\theta$. Definisi lama tidak dibuang, hanya **diperluas**.

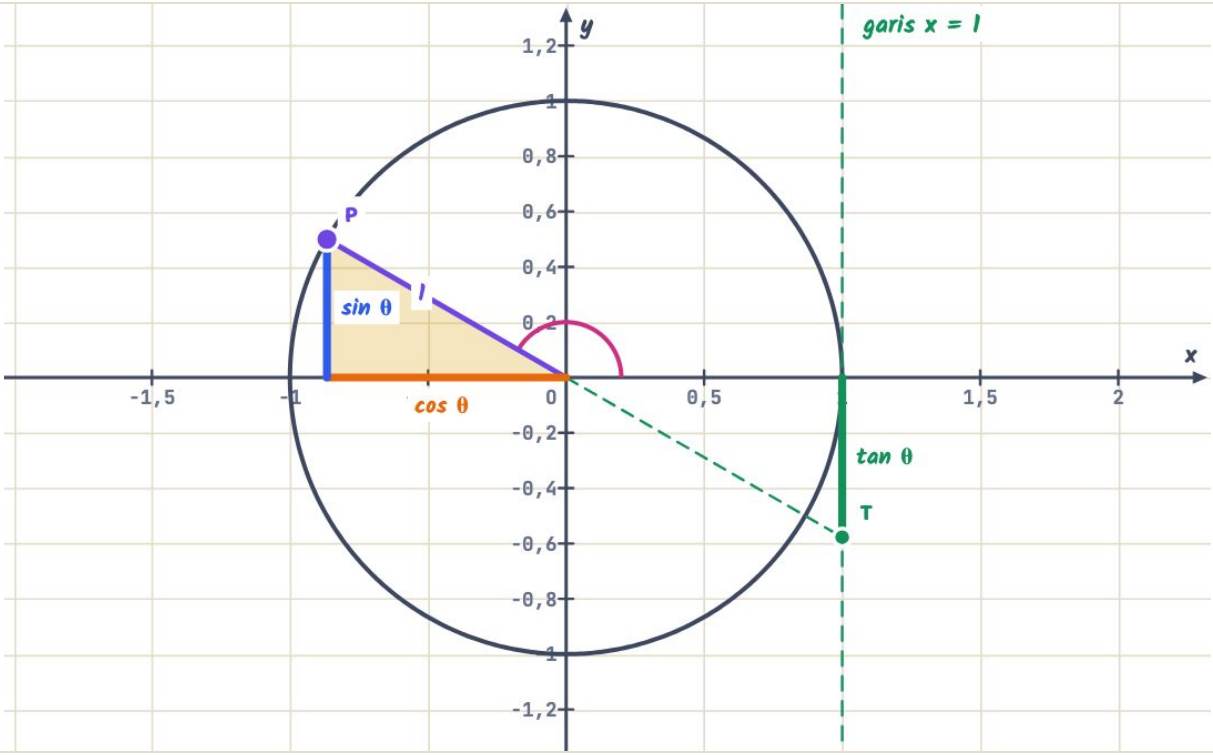
GRAFIK HIDUP

Lingkaran satuan: sin, cos, dan tan sebagai panjang ruas

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

$$P = (\cos\theta,\ \sin\theta), \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

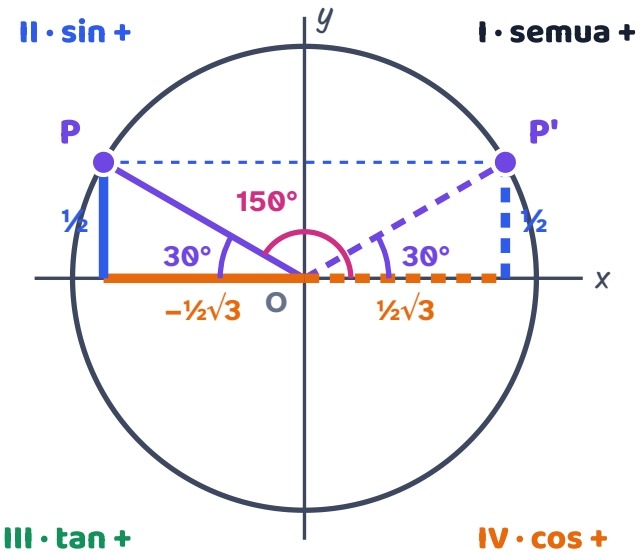
$$\theta = 150^\circ: \quad \cos\theta = -0{,}87, \quad \sin\theta = 0{,}5, \quad \tan\theta = -0{,}58$$



Kuadran II: hanya sin yang positif

θ (radian)	cos θ	sin θ	tan θ	sin²θ + cos²θ
2,618	-0,866	0,5	-0,5774	1

Tekan ▶ **Jalankan** atau geser slider. Ruas **jingga** adalah $\cos\theta$, ruas **biru** adalah $\sin\theta$, dan ruas **hijau** di garis $x = 1$ adalah $\tan\theta$ (perpanjangan OP memotong garis itu di T). Tanda "—" berarti $\tan\theta$ tak terdefinisi. Perhatikan: $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ **selalu** 1. Mengapa?



P (150°) dan P′ (30°)

saling bercermin di sumbu-y:

sin 150° = sin 30° = ½

cos 150° = −cos 30° = −½√3

tan 150° = −tan 30° = −⅓√3

Sudut acuan 150° adalah 30°: nilainya sama, tandanya ditentukan oleh kuadran.

Titik P dan P' sama tinggi, jadi sinusnya sama. Jarak mendatarnya sama panjang tetapi berlawanan arah, jadi kosinusnya berlawanan tanda.

SIFAT SUDUT BERELASI (SUDUT ACUAN)

Setiap sudut punya **sudut acuan** α antara 0° dan 90°, yaitu sudut lancip antara OP dan sumbu-x. Nilai trigonometrinya sama dengan nilai sudut acuan, hanya tandanya yang mengikuti kuadran:

- Kuadran II: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.
- Kuadran III: $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$.
- Kuadran IV: $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.
- Sudut negatif: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
- Satu putaran tidak mengubah apa pun: $\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$, $\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$.

TRIK KAK LINTANG

Urutan tanda positif dari kuadran I sampai IV: **Semua – Sin – Tan – Cos**. Jembatan keledai yang populer: "**S**emua **S**indikat **T**angannya **K**osong" (K untuk kosinus). Untuk nilainya, ingat pola akar yang rapi: $\sin 0^\circ, \sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ, \sin 90^\circ$ berturut-turut sama dengan $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$. Kosinus adalah pola yang sama, dibaca terbalik.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	−1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

CONTOH **Sudut acuan beraksi**

Tentukan nilai eksak $\sin 150^\circ$, $\cos 240^\circ$, dan $\tan 315^\circ$.

1. 150° di kuadran II, sudut acuannya $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Sinus positif di kuadran II: $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.
2. 240° di kuadran III, sudut acuannya $240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$. Kosinus negatif di kuadran III: $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.
3. 315° di kuadran IV, sudut acuannya $360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$. Tangen negatif di kuadran IV: $\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$.

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$, $\tan 315^\circ = -1$. **Resepnya selalu dua langkah: cari sudut acuan, lalu tentukan tanda dari kuadran.**

ADU CEPAT **Sinus sudut sembarang, kilat!**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari sudut acuannya (0°–90°), lalu tentukan tanda dari kuadran. Contoh: sin 240° = –sin 60° = –√3/2. Kamu boleh mengetik √3/2, -1/2, atau 0,87.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Kalkulator punya mode **DEG** (derajat) dan **RAD** (radian). Kalau kamu menekan sin 30 dalam mode RAD, hasilnya –0,988 (sinus dari 30 *radian*), bukan 0,5! Selalu periksa mode kalkulator sebelum menghitung.

26.2 Radian: mengukur sudut dengan jari-jari

Angka 360° adalah warisan bangsa Babilonia yang gemar bilangan yang mudah dibagi. Namun, alam tidak peduli pada angka 360. Ada ukuran sudut yang jauh lebih "alami": **radian**, yang mengukur sudut dengan memakai jari-jari lingkaran itu sendiri.

Tebak Dulu!

Satu radian kira-kira sama dengan berapa derajat?

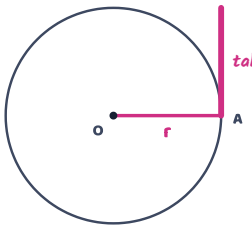
- Tepat 1°.
- Sekitar 57°.
- Tepat 180°.
- Sekitar 3,14°.

Jawabannya: sekitar 57,3°. Satu radian adalah sudut yang busurnya sepanjang jari-jari. Keliling lingkaran $2\pi r \approx 6{,}28r$, jadi satu putaran memuat sekitar 6,28 radian. Maka 1 radian $= \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57{,}3^\circ$. Angka 180° adalah π radian, bukan 1 radian.

DEFINISI

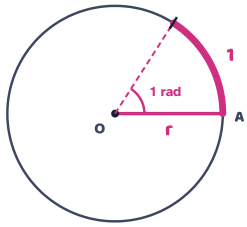
Sudut sebesar **1 radian** adalah sudut pusat lingkaran yang menghadap busur sepanjang jari-jarinya. Karena keliling lingkaran $2\pi r$, satu putaran penuh sama dengan 2π radian:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57$$



Ambil tali sepanjang r,
lalu tempelkan melengkung di tepi lingkaran mulai A.

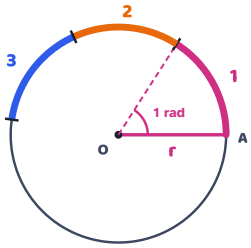
Langkah 1. Ambil seutas tali yang panjangnya sama dengan jari-jari r, lalu tempelkan melengkung di tepi lingkaran, mulai dari titik A.



Busur sepanjang r
membentuk sudut pusat sebesar 1 radian.

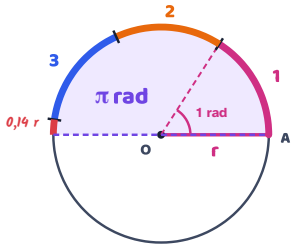
1 rad ≈ 57,3°

Langkah 2. Busur sepanjang r membentuk sudut pusat yang disebut **1 radian**. Ukurannya sekitar 57,3°, berapa pun besar lingkarannya.



Tempel tali ke-2 dan ke-3.
Tiga jari-jari hampir sampai setengah lingkaran, kurang sekitar 0,14 r lagi.

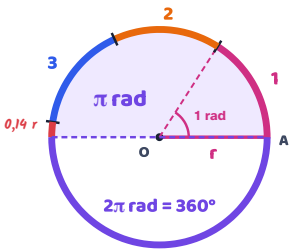
Langkah 3. Tempel tali kedua dan ketiga. Tiga tali hampir mencapai setengah lingkaran, tetapi masih kurang sekitar $0{,}14r$.



Busur setengah lingkaran
panjangnya π ≈ 3,14 kali r.
Jadi setengah putaran sama dengan π radian:

π rad = 180°

Langkah 4. Setengah lingkaran tepat memuat $\pi \approx 3{,}14$ tali. Jadi setengah putaran $=$ π radian $= 180^\circ$.



Satu putaran penuh
= 2π ≈ 6,28 jari-jari.

satu putaran = 2π rad = 360°
1 rad = 180°/π ≈ 57,3°
1° = π/180 rad ≈ 0,0175 rad

Langkah 5. Satu putaran penuh memuat $2\pi \approx 6{,}28$ tali, sehingga 2π rad $= 360^\circ$. Untuk mengubah derajat ke radian, kalikan dengan $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Bahasa sederhana · Jadi, radian menjawab pertanyaan: "Busurnya sepanjang **berapa kali jari-jari**?" Sudut 2 radian berarti busurnya sepanjang dua jari-jari. Sederhana, bukan?

PANJANG BUSUR DAN LUAS JURING

Pada lingkaran berjari-jari r dengan sudut pusat θ **dalam radian**:

$$s = r\theta \qquad \text{dan} \qquad L_{\text{juring}} = \tfrac{1}{2}r^2\theta.$$

Mengapa rumusnya sesederhana ini?

Busur dan juring sebanding dengan sudutnya. Satu putaran (2π rad) memberi busur $2\pi r$ dan luas πr^2. Jadi untuk sudut θ:

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi r = r\theta, \qquad L = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \tfrac{1}{2} r^2 \theta.$$

Dalam derajat, rumusnya membawa beban tambahan: $s = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot 2\pi r$. Radian membuat faktor π dan 360 lenyap.

RUMUS HIDUP **Radian dan panjang busur**

$$s = r\,\theta, \qquad \theta = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

Panjang busur sama dengan jari-jari dikali sudut dalam radian. Ubah dulu derajat ke radian dengan mengalikan π/180.

r Jari-jari m

θ° Sudut putar °

s Panjang busur m

PANJANG BUSUR

11,52

m

Sudut **60°** = **0,333** π rad ≈ **1,047** rad. Kabin di jari-jari **11** m menempuh busur s = **11** × **1,047** ≈ **11,52** m. Satu putaran penuh = 2πr ≈ **69,115** m.

Cek satuan: r dalam meter dan θ dalam radian (tanpa satuan), jadi s dalam meter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUSUR-RADIAN

CONTOH **Busur bianglala**

Bianglala berjari-jari 11 m berputar 120°. Berapa radian sudut itu, dan berapa meter jarak yang ditempuh kabin?

1. Ubah ke radian: $120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094$ rad.
2. Panjang busur: $s = r\theta = 11 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{22\pi}{3} \approx 23{,}04$ m.

Sudutnya $\frac{2\pi}{3}$ rad dan kabin menempuh ±23,04 m. Cek: 120° adalah sepertiga putaran, dan $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 11 \approx 23{,}04$ m. ✓

ADU CEPAT **Derajat ke radian kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan dengan π/180, lalu sederhanakan. Contoh: 150° = 150π/180 = 5π/6. Ketik saja 5π/6 atau 5pi/6.

SIAPA YANG MEMBERI NAMA "RADIAN"?

Gagasan mengukur sudut dengan jari-jari sudah dipakai matematikawan Inggris Roger Cotes sekitar tahun 1714. Namun, kata "radian" baru muncul sekitar tahun 1873 pada soal ujian yang disusun James Thomson di Belfast. Jadi, radian jauh lebih muda daripada derajat yang berumur ribuan tahun.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA KALKULUS JATUH CINTA PADA RADIAN

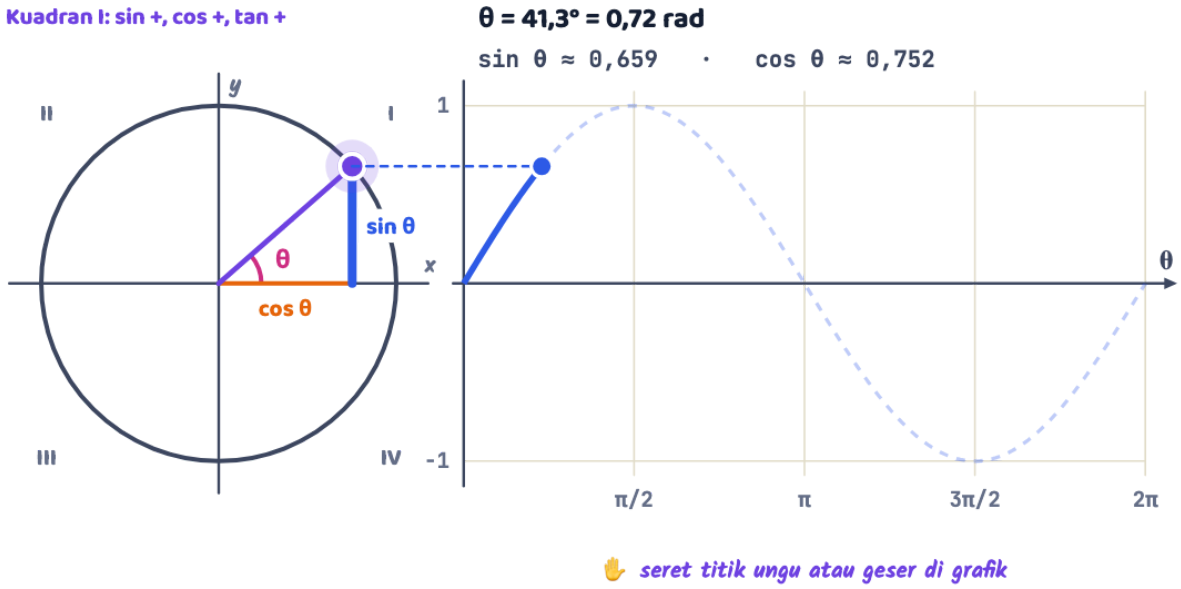
Dalam radian, untuk sudut yang kecil berlaku $\sin x \approx x$. Coba: $\sin 0{,}1 \approx 0{,}0998$ dan $\sin 0{,}01 \approx 0{,}0099998$. Dalam derajat, hubungan secantik itu hilang: $\sin 1^\circ \approx 0{,}01745$, yaitu $\frac{\pi}{180}$, bukan 1. Akibatnya, rumus kalkulus seperti "turunan $\sin x$ adalah $\cos x$" hanya berlaku bila x dalam radian; dalam derajat muncul faktor pengganggu $\frac{\pi}{180}$. Fakta $\frac{\sin x}{x} \to 1$ akan menjadi bintang di Bab 27.

26.3 Grafik sin, cos, dan tan

Sekarang kita "membuka gulungan" lingkaran. Tulis sudut θ di sumbu mendatar dan tinggi titik P di sumbu tegak. Saat P berputar, titik di grafik ikut berjalan ke kanan dan melukis **gelombang sinus**.

LAB MINI **Roda yang melukis gelombang**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26



θ (derajat)	θ (radian)	sin θ	cos θ	tan θ	Letak P
41,3	0,72	0,659	0,752	0,877	Kuadran I

Perhatikan garis putus-putus biru: tinggi titik ungu di lingkaran **sama persis** dengan tinggi titik di grafik. Seret titik ungu (atau geser di area grafik) untuk memilih sudut sendiri; sudut istimewa seperti 30° dan 45° akan "menempel" seperti magnet. Ganti pilihan ke **cos θ**: apa bedanya dengan grafik sinus?

Grafik kosinus ternyata grafik sinus yang **digeser** $\frac{\pi}{2}$ **ke kiri**: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Masuk akal, karena kosinus suatu sudut sama dengan sinus sudut **penyikunya** (pelengkap menuju 90°): $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$. Karena itulah namanya *ko*-sinus, "sinus dari sudut komplemen".

SIFAT GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi	Daerah asal	Daerah hasil	Periode	Pembuat nol	Ciri khas
$y = \sin x$	semua bilangan real	$[-1, 1]$	2π (360°)	$x = k\pi$	maks 1 di $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$y = \cos x$	semua bilangan real	$[-1, 1]$	2π (360°)	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	maks 1 di $2k\pi$
$y = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	semua bilangan real	π (180°)	$x = k\pi$	asimtot tegak $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Di sini k bilangan bulat. Fungsi yang berulang dengan pola tetap disebut **fungsi periodik**, dan panjang satu ulangan disebut **periode**.

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 499 M, matematikawan India **Aryabhata** menyusun tabel *jya*, yaitu panjang setengah tali busur lingkaran, yang tidak lain adalah sinus. Menurut kisah yang sering diceritakan, kata itu diserap ke bahasa Arab menjadi *jiba*, lalu terbaca sebagai *jaib* yang berarti "lipatan" atau "teluk". Penerjemah Latin abad ke-12 mengalihkannya menjadi *sinus*, yang artinya juga "lipatan" atau "teluk". Nama fungsi paling terkenal di dunia ternyata lahir dari salah baca berantai!

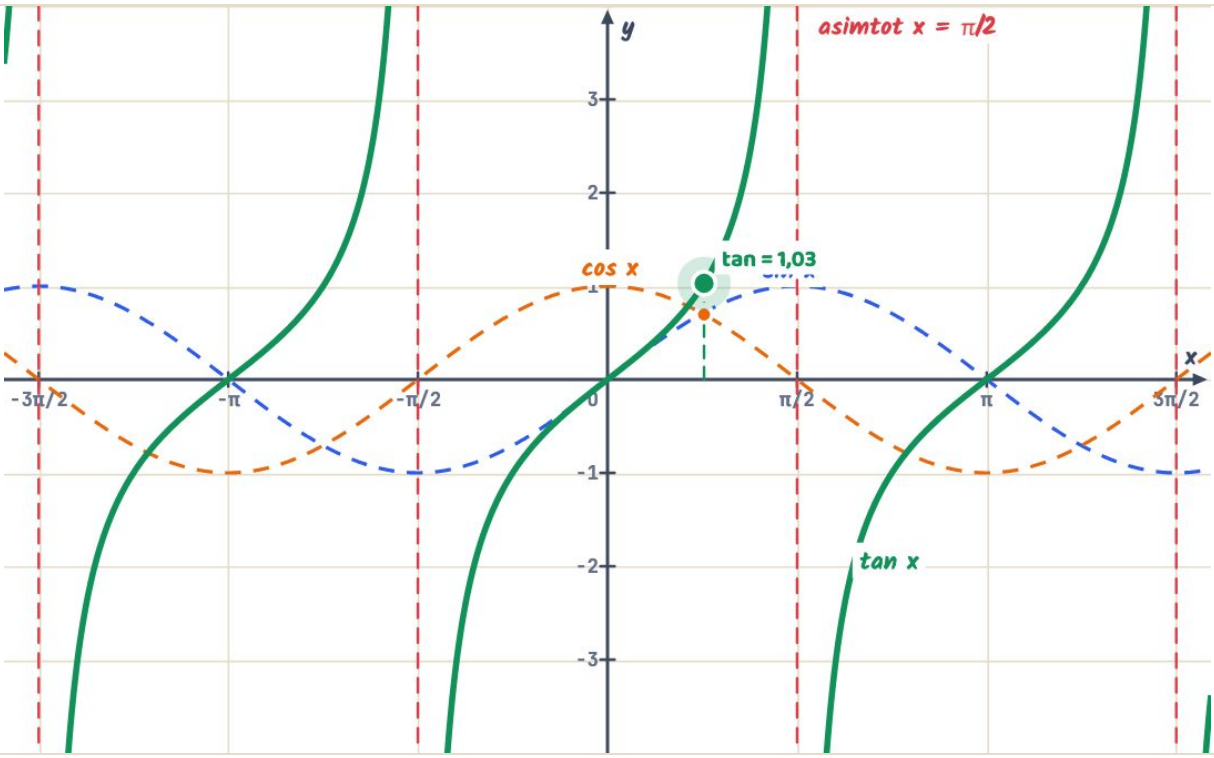
Bagaimana dengan tangen? Karena $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, nilainya meledak setiap kali $\cos x$ mendekati nol. Grafiknya berupa "tangga ke langit" yang dipisahkan garis **asimtot tegak**.

GRAFIK HIDUP **Grafik tangen: tangga ke langit**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan(45{,}84^\circ) = \frac{0{,}72}{0{,}7} \approx 1{,}03$$



x (derajat)	sin x	cos x	tan x
45,8	0,717	0,697	1,03

Seret titik hijau ke arah garis merah. Apa yang terjadi pada $\cos x$ dan $\tan x$? Perhatikan juga: grafik tangen berulang setiap π, bukan 2π.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

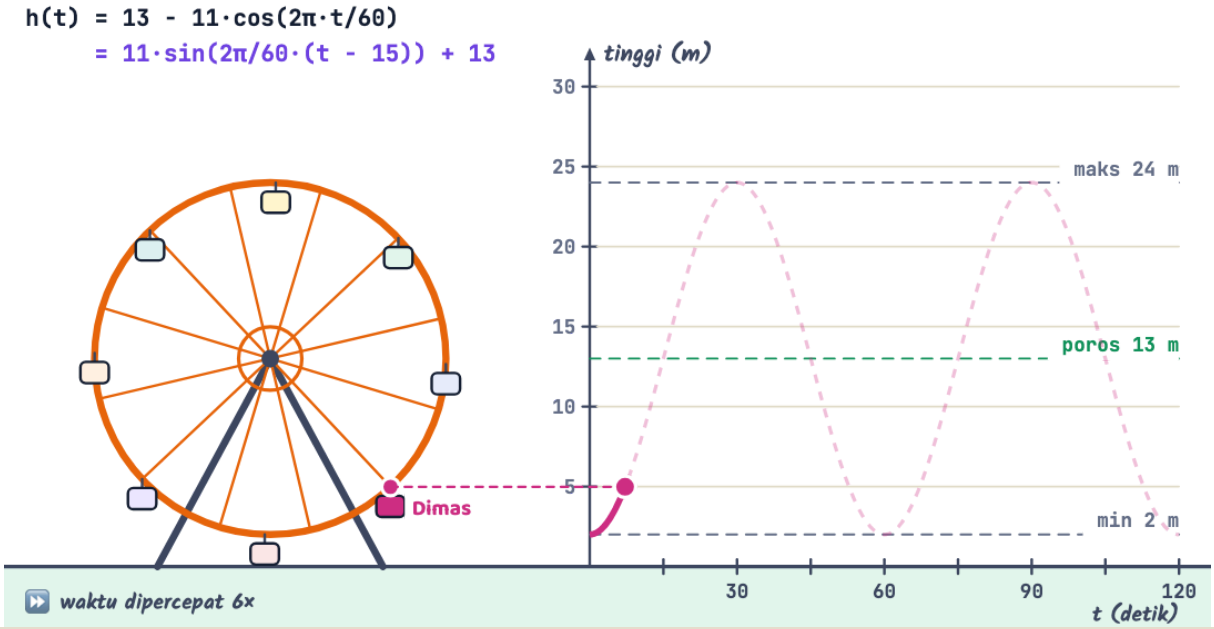
$\tan 90^\circ$ **tidak terdefinisi**, bukan 0 dan bukan "tak hingga". Pada $x = 90^\circ$, $\cos x = 0$ sehingga $\frac{\sin x}{\cos x}$ berarti membagi dengan nol. Dari kiri grafiknya melesat ke atas, dari kanan melesat ke bawah, jadi tidak ada satu nilai pun yang cocok.

26.4 Amplitudo, periode, dan geseran: merakit gelombang

Kembali ke bianglala. Tinggi kabin Dimas bergerak antara 2 m dan 24 m, dan satu putaran butuh 60 detik. Itu jelas bukan $y = \sin x$ yang hanya naik-turun antara –1 dan 1 setiap 2π. Kita perlu **meregangkan** dan **menggeser** gelombang sinus. Coba lihat dulu bianglala aslinya:

LAB MINI **Bianglala pasar malam: dari putaran ke grafik**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26



waktu	tinggi kabin Dimas	laju naik (+) / turun (–)	Keadaan
7,2 detik	4,98 m	0,79 m/detik	naik

Tekan ▶ **Jalankan**. Garis putus-putus magenta menunjukkan tinggi kabin Dimas dipindahkan ke grafik. Nyalakan **Catatan Ayu**: titik-titiknya diambil pada selang waktu yang sama, tetapi jarak tegaknya tidak sama. Ubah jari-jari, tinggi poros, dan waktu putar. Tombol mana yang mengubah tinggi gelombang? Mana yang mengubah lebarnya?

EMPAT TOMBOL GELOMBANG SINUS

Grafik $y = A\sin\big(B(x-C)\big) + D$ dengan $B > 0$ adalah grafik $y = \sin x$ yang diubah sebagai berikut.

- $|A|$ = **amplitudo**: jarak dari sumbu tengah ke puncak. Jika $A < 0$, grafik dicerminkan.
- $\dfrac{2\pi}{B}$ = **periode**: panjang satu gelombang penuh (dalam derajat: $\frac{360^\circ}{B}$).
- C = **geseran fase**: grafik bergeser C satuan ke kanan.
- D = **sumbu tengah** (garis $y = D$): seluruh gelombang naik D satuan. Nilai maksimum $D + |A|$ dan minimum $D - |A|$.

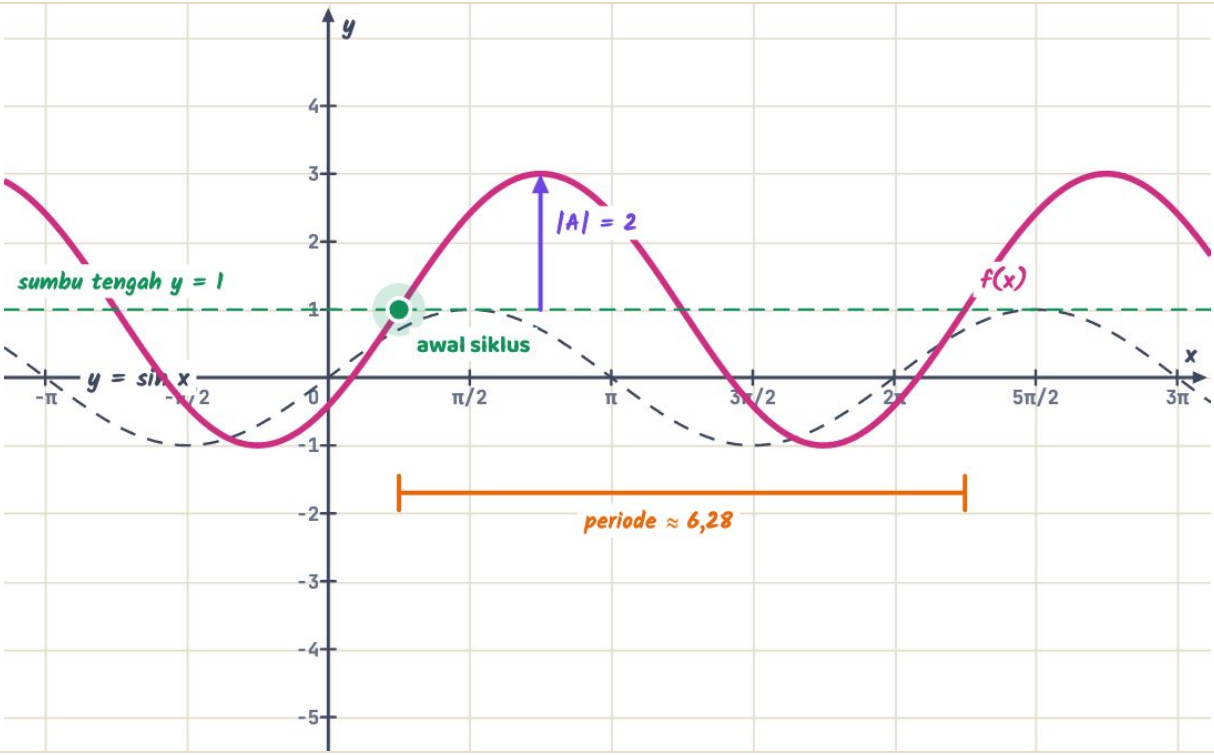
GRAFIK HIDUP **Empat tombol gelombang: A, B, C, D**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

$$y = A\sin\big(B(x - C)\big) + D$$

$$y = 2\sin\big(1(x - 0{,}25\pi)\big) + 1$$

A meregang tegak, B memampatkan mendatar, C menggeser ke kanan, D mengangkat seluruh gelombang.



Amplitudo |A|	Periode 2π/B	Geser C (kelipatan π)	Maksimum D + |A|	Minimum D − |A|
2	6,283	0,25	3	-1

Seret titik hijau "awal siklus" untuk mengubah C dan D sekaligus. Bisakah kamu membuat gelombang ungu menimpa tepat grafik $y = \cos x$? (Petunjuk: $A = 1$, $B = 1$, $D = 0$, dan C bernilai negatif.)

TRIK KAK LINTANG

Membaca gelombang dari grafik atau data itu seperti membaca bianglala: **sumbu tengah** $D = \frac{\text{maks}+\text{min}}{2}$ (tinggi poros), **amplitudo** $A = \frac{\text{maks}-\text{min}}{2}$ (jari-jari), **periode** = jarak dua puncak berurutan (waktu satu putaran), lalu $B = \frac{2\pi}{\text{periode}}$. Terakhir, C adalah saat gelombang melewati sumbu tengah sambil **naik**.

RUMUS HIDUP

Model gelombang sinus (pasang surut)

$$y = A \sin\big(B(x - C)\big) + D$$

Tinggi = sumbu tengah D ditambah A kali sinus. B mengatur seberapa cepat gelombang berulang, C mengatur kapan siklus dimulai.

- A Amplitudo `m`
- B Pemampat `rad/jam`
- C Geseran `jam`
- D Sumbu tengah `m`
- x Waktu `jam`
- y Tinggi air `m`

TINGGI AIR

3,7

m

🌊 **dekat puncak pasang**

periode ±12 jam, mirip pasang surut harian ganda

Pada jam ke-**6**, tinggi air ≈ **3,7** m. Periode 2π/B ≈ **12,083** jam; air tertinggi **3,7** m, terendah **1,3** m, jadi selisih pasang dan surut **2,4** m.

Cek satuan: A dan D dalam meter, x dan C dalam jam, B dalam radian per jam, sehingga B(x – C) adalah sudut dalam radian.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-GELOMBANG-SINUS

KERJAKAN BERSAMA

Pasang surut di dermaga nelayan

Tinggi air di dermaga sebuah desa nelayan dimodelkan dengan $h(t) = 1{,}2\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 2{,}5$ meter, t dalam jam setelah pukul 00.00. (a) Kapan air paling tinggi, dan berapa tingginya? (b) Perahu motor butuh air setinggi minimal 3,1 m untuk merapat. Antara pukul 00.00 dan 12.00, kapan saja perahu bisa merapat?

1. Baca keempat tombol: $A = 1{,}2$, $D = 2{,}5$, $C = 3$, dan $B = \frac{\pi}{6}$, sehingga periodenya $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ jam.
2. Maksimum $2{,}5 + 1{,}2 = 3{,}7$ m saat sudutnya $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{6}(t-3) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 6$, yaitu pukul 06.00 (dan 12 jam kemudian, pukul 18.00).
3. Syarat merapat: $1{,}2\sin(\ldots) + 2{,}5 \geq 3{,}1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \geq \frac{1}{2}$.
4. Dalam satu putaran, sinus $\geq \frac{1}{2}$ saat sudutnya antara $\frac{\pi}{6}$ dan $\frac{5\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}(t-3) \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 1 \leq t-3 \leq 5 \Rightarrow 4 \leq t \leq 8$.

(a) Air tertinggi 3,7 m pada pukul 06.00. (b) Perahu bisa merapat dari pukul 04.00 sampai 08.00, yaitu dua jam sebelum hingga dua jam sesudah puncak pasang. Simetris, seperti puncak gelombang!

Pasang surut

Di banyak pantai, air pasang dan surut dua kali sehari dengan periode sekitar 12 jam 25 menit. Nelayan dan petugas pelabuhan memakai tabel pasang surut yang polanya mirip gelombang sinus.

Bianglala & kincir air

Setiap titik pada roda yang berputar dengan laju tetap memiliki tinggi yang mengikuti fungsi sinus terhadap waktu.

Listrik di rumahmu

Tegangan listrik PLN berbentuk gelombang sinus berfrekuensi 50 Hz. Walaupun tertulis 220 V, puncak tegangannya sekitar $220\quad 2 \approx 311$ V.

🎶

Gamelan & pengeras suara

Bunyi adalah getaran udara. Nada murni berupa gelombang sinus; nada gong dan saron adalah gabungan beberapa gelombang sinus.

☀️

Panjang siang

Di Jakarta, panjang siang hanya berubah kurang dari satu jam sepanjang tahun, sedangkan di kota berlintang tinggi bisa berbeda belasan jam. Grafiknya terhadap tanggal mirip gelombang sinus.

📶

Sinyal radio & HP

Siaran radio dan sinyal HP menumpang pada gelombang sinus yang bergetar jutaan sampai miliaran kali per detik.

26.5 Identitas trigonometri dan sudut rangkap

Sebuah **identitas** adalah kesamaan yang benar untuk **semua** sudut, misalnya $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Bandingkan dengan *persamaan* seperti $\sin\theta = \frac{1}{2}$ yang hanya benar untuk sudut tertentu. Identitas adalah "alat tukar": kita boleh mengganti satu bentuk dengan bentuk lain kapan saja.

☆

IDENTITAS DASAR

Untuk setiap sudut θ (dengan $\cos\theta \neq 0$ untuk dua rumus terakhir):

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Yang pertama adalah **Teorema Pythagoras di lingkaran satuan**: titik $P(\cos\theta, \sin\theta)$ berjarak 1 dari O. Bagi kedua ruasnya dengan $\cos^2\theta$, dan kamu mendapat yang ketiga. Lihat lagi Grafik Hidup lingkaran satuan di 26.1: bacaan $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ tidak pernah bergeser dari 1.

Tebak Dulu!

Apakah $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$**?**

Ya, sinus boleh "dibagikan" ke dalam kurung seperti perkalian.

Tidak. Ruas kiri sama dengan 1, ruas kanan sekitar 1,37.

Ya, karena keduanya sama dengan 1.

Tidak bisa diketahui tanpa kalkulator.

Jawabannya: tidak. $\sin 90^\circ = 1$, sedangkan $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1{,}37$. Sinus bukan bilangan yang dikalikan, jadi tidak bisa dibagikan ke dalam kurung. Rumus yang benar ada di bawah, dan buktinya bisa dilihat dengan mata!

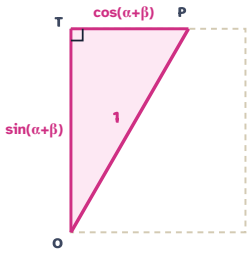
RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

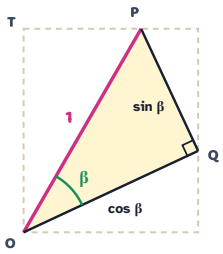
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Perhatikan tanda pada rumus kosinus: jumlah sudut memberi tanda kurang.



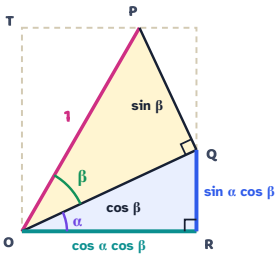
Ruas OP panjangnya 1,
sudutnya terhadap alas $\alpha + \beta$.
Tinggi bingkai = $\sin(\alpha + \beta)$
Lebar TP = $\cos(\alpha + \beta)$

Langkah 1. Mulai dari ruas OP sepanjang 1 yang membentuk sudut $\alpha + \beta$ dengan alas. Bingkai persegi panjang di sekitarnya: tingginya $OT = \sin(\alpha + \beta)$ dan lebar atasnya $TP = \cos(\alpha + \beta)$.



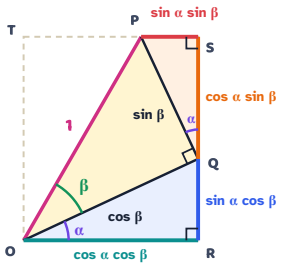
Segitiga OQP (siku di Q)
sudut β, sisi miring 1:
OQ = cos β
QP = sin β

Langkah 2. Tarik garis dari O bersudut α, lalu jatuhkan garis tegak lurus dari P ke garis itu di Q. Segitiga OQP siku-siku di Q dengan sudut β di O: $OQ = \cos\beta$ dan $QP = \sin\beta$.



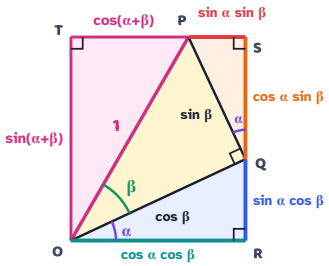
Segitiga ORQ (siku di R)
sudut α, sisi miring cos β:
RQ = sin α cos β
OR = cos α cos β

Langkah 3. Segitiga ORQ punya sudut α di O dan sisi miring $\cos\beta$. Maka $RQ = \sin\alpha\cos\beta$ dan $OR = \cos\alpha\cos\beta$.



Segitiga QSP (siku di S)
sudut α, sisi miring sin β:
QS = cos α sin β
SP = sin α sin β
(sudut di Q = α karena QS ⊥ OR dan QP ⊥ OQ)

Langkah 4. Sudut di Q antara QS dan QP juga α, sebab kedua kakinya adalah kaki sudut α di O yang diputar 90°. Dengan sisi miring $\sin\beta$: $QS = \cos\alpha\sin\beta$ dan $SP = \sin\alpha\sin\beta$.



tinggi: OT = RQ + QS
sin(α + β) =
sin α cos β + cos α sin β

lebar: TP = OR − SP
cos(α + β) =
cos α cos β − sin α sin β

Langkah 5. Bandingkan sisi bingkai. Tinggi: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Lebar: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Dua rumus sekaligus dari satu gambar!

Bukti untuk sudut berapa pun (dengan jarak dua titik)

Gambar bukti tanpa kata di atas memakai sudut lancip. Untuk sudut sembarang, ambil dua titik pada lingkaran satuan: $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ dan $Q(\cos\beta, \sin\beta)$. Kuadrat jaraknya:

$$PQ^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Sekarang putar seluruh gambar sebesar $-\beta$. Titik Q pindah ke $(1, 0)$ dan P pindah ke $\big(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)\big)$. Pemutaran tidak mengubah jarak, jadi

$$PQ^2 = \big(\cos(\alpha - \beta) - 1\big)^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Samakan kedua hasil: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Ganti β dengan $-\beta$ untuk mendapat $\cos(\alpha + \beta)$. Rumus sinus diperoleh dari $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$, dan rumus tangen dari $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ (bagi pembilang dan

penyebut dengan $\cos\alpha\cos\beta$).

■

RUMUS SUDUT RANGKAP

Ambil $\alpha = \beta = \theta$ pada rumus jumlah sudut:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta.$$

Tiga bentuk $\cos 2\theta$ itu setara karena $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

RUMUS HIDUP **Sudut rangkap**

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Sinus sudut dua kali lipat bukan dua kali sinusnya, melainkan dua kali sinus dikali kosinus.

θ Sudut θ ° sin 2θ sin 2θ

SIN 2Θ

0,866

sin θ = **0,5** dan cos θ = **0,866**, jadi 2 sin θ cos θ = **0,866**. Ruas kiri: sin **60°** = **0,866**. Sama! Bandingkan dengan tebakan keliru 2 sin θ = **1**. Bonus: cos 2θ = 1 – 2 sin²θ = **0,5**.

Cek satuan: Sinus tidak bersatuan, jadi kedua ruas adalah bilangan murni antara –1 dan 1.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-RANGKAP

KERJAKAN BERSAMA **sin 75° tanpa kalkulator**

Hitung nilai eksak $\sin 75^\circ$**.**

1. Pecah menjadi sudut istimewa: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.
2. $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$.
3. $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx \frac{2{,}449+1{,}414}{4} \approx 0{,}9659$.

$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}966$**. Cek kewajaran: 75° dekat 90°, jadi sinusnya sedikit di bawah 1. ✓**

MITOS

"sin 2x = 2 sin x."

FAKTA

Coba $x = 90^\circ$: $\sin 180^\circ = 0$, padahal $2 \sin 90^\circ = 2$. Rumus yang benar $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

MITOS

"sin(α + β) = sin α + sin β."

FAKTA

$\sin(30^\circ + 60^\circ) = 1$, sedangkan $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ \approx 1{,}37$. Sinus adalah fungsi, bukan bilangan pengali, jadi tidak bisa dibagikan ke dalam kurung.

MITOS

"$\sin^{-1} x$ artinya 1/sin x."

FAKTA

$\sin^{-1} x$ (atau arcsin x) adalah **invers**: sudut yang sinusnya x. Kebalikan $\frac{1}{\sin x}$ punya nama sendiri, kosekan. Anehnya, $\sin^2 x$ tetap berarti $(\sin x)^2$.

MITOS

"Radian cuma gaya-gayaan; derajat sudah cukup."

FAKTA

Tanpa radian, rumus busur $s = r\theta$ dan rumus kalkulus seperti turunan $\sin x$ menjadi berantakan. Ilmuwan dan kalkulator ilmiah memakai radian setiap hari.

MATEMATIKA NUSANTARA

Gamelan Bali terkenal dengan bunyinya yang **berdenyut**, seperti bergetar halus. Rahasianya, banyak instrumen dibuat **berpasangan**: *pengumbang* yang nadanya sedikit lebih rendah dan *pengisep* yang nadanya sedikit lebih tinggi. Saat dipukul bersamaan, dua gelombang itu bergantian saling menguatkan dan saling melemahkan, sehingga terdengar **ombak** beberapa kali per detik. Matematikanya adalah identitas penjumlahan sinus:

$$\sin a + \sin b = 2\cos\frac{a-b}{2}\,\sin\frac{a+b}{2}.$$

Suku $\sin\frac{a+b}{2}$ adalah nada rata-rata yang kita dengar, sedangkan $2\cos\frac{a-b}{2}$ adalah "selubung" lambat yang membuat suaranya membesar dan mengecil.

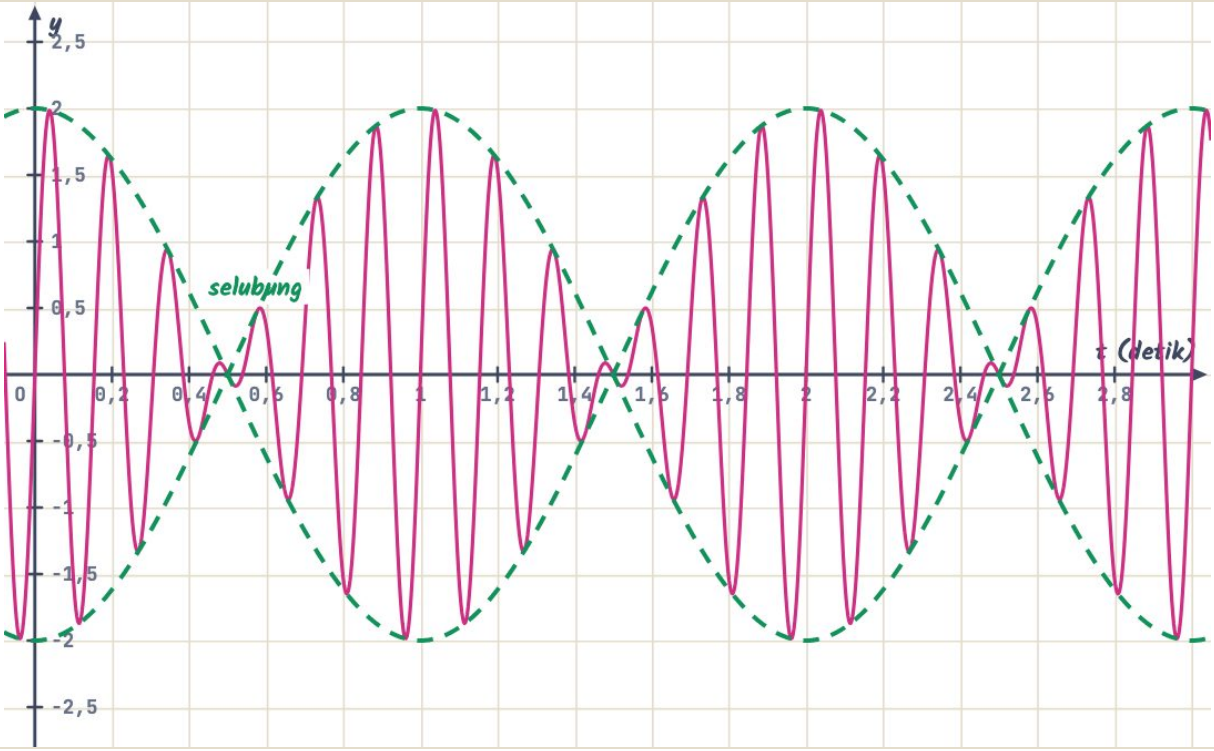
GRAFIK HIDUP

Ombak gamelan: dua nada yang hampir kembar

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

$$\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(\pi(f_1 - f_2)t\right)\ \sin\left(\pi(f_1 + f_2\right.$$

$$f_1 = 6,\ f_2 = 7 \ \Rightarrow\ |f_1 - f_2| = 1 \text{ ombak per detik}$$



🎶 **ombak berdenyut jelas, seperti gamelan Bali**

Ombak per detik $\lvert f_1 - f_2 \rvert$	Jarak antar-ombak (detik)	Nada rata-rata $(f_1 + f_2)/2$
1	1	6,5

Frekuensi di sini diperlambat ratusan kali agar terlihat. Samakan f_1 dan f_2: ombaknya hilang! Lalu buat selisihnya 0,5. Berapa detik jarak antara dua "gelembung" suara?

LANJUT · IB & OLIMPIADE

DUA GELOMBANG SEFREKUENSI = SATU GELOMBANG

Kalau frekuensinya **sama**, jumlah dua gelombang selalu menjadi satu gelombang sinus baru:

$$a\sin x + b\cos x = R\sin(x+\varphi), \qquad R = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{R},\ \sin\varphi = \frac{b}{R}.$$

Buktinya: jabarkan $R\sin(x+\varphi) = R\cos\varphi\sin x + R\sin\varphi\cos x$, cocokkan dengan a dan b, lalu kuadratkan dan jumlahkan. Contoh: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x+60^\circ)$, jadi nilai terbesarnya 2, bukan $1+\sqrt{3}$. Bentuk ini sering muncul di soal IB untuk mencari nilai maksimum.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

COS 36° DAN RASIO EMAS

Sudut 36° muncul di bintang segi lima. Misalkan $\theta = 36^\circ$. Karena $5\theta = 180^\circ$, berlaku $2\theta = 180^\circ - 3\theta$, sehingga $\sin 2\theta = \sin 3\theta$. Dari $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$:

$$2\sin\theta\cos\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \;\Rightarrow\; 2\cos\theta = 3 - 4(1-\cos^2\theta) \;\Rightarrow\; 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0.$$

Rumus kuadrat memberi $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\varphi}{2}$, dengan $\varphi \approx 1{,}618$ adalah **rasio emas** dari Bab 1. Trigonometri dan bunga matahari ternyata bersaudara!

26.6 Persamaan trigonometri

"Kapan kabin berada di atas 18,5 m?" "Pukul berapa air cukup tinggi untuk perahu?" Pertanyaan seperti ini menghasilkan **persamaan trigonometri**. Berbeda dengan persamaan linear yang biasanya punya satu jawaban, persamaan trigonometri sering punya **tak hingga banyak** jawaban, karena gelombangnya berulang.

PENYELESAIAN UMUM

Jika α satu penyelesaian yang sudah diketahui dan k bilangan bulat, maka

- $\sin x = \sin\alpha \;\Rightarrow\; x = \alpha + k\cdot 360^\circ$ atau $x = (180^\circ - \alpha) + k\cdot 360^\circ$;
- $\cos x = \cos\alpha \;\Rightarrow\; x = \alpha + k\cdot 360^\circ$ atau $x = -\alpha + k\cdot 360^\circ$;
- $\tan x = \tan\alpha \;\Rightarrow\; x = \alpha + k\cdot 180^\circ$.

Dalam radian, ganti 360° dengan 2π dan 180° dengan π. Pasangan kedua berasal dari pencerminan di lingkaran satuan: titik yang sama tinggi (untuk sinus) atau sama jauh ke kanan (untuk kosinus).

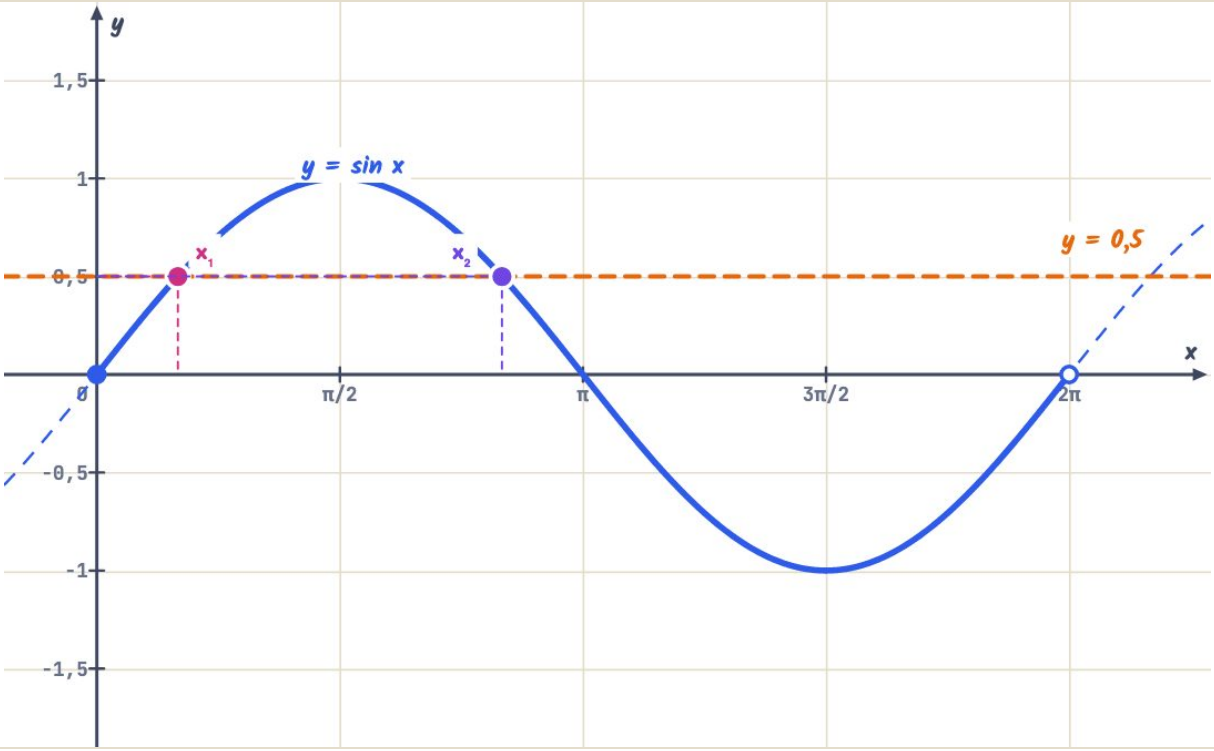
GRAFIK HIDUP

Berapa banyak penyelesaian sin x = k?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

$$\sin x = k, \qquad 0 \le x < 2\pi$$

$$x_1 \approx 30^\circ, \qquad x_2 \approx 150^\circ$$



dua penyelesaian, simetris terhadap x = π/2 atau x = 3π/2

Banyak penyelesaian	x_1 (derajat)	x_2 (derajat)
2	30	150

Naik-turunkan garis jingga. Kapan ada dua penyelesaian, satu, atau tidak ada sama sekali? Tanda "—" berarti penyelesaiannya tidak ada (karena $\sin x$ tidak pernah melebihi 1).

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Jangan membagi kedua ruas dengan $\sin x$ atau $\cos x$, karena nilainya bisa nol dan penyelesaiannya ikut hilang. Contoh: dari $\sin 2x = \sin x$, membagi dengan $\sin x$ memberi $2\cos x = 1$ dan melupakan $x = 0^\circ$ serta $x = 180^\circ$. Cara aman: pindahkan semua ke satu ruas, lalu **faktorkan**: $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$.

KERJAKAN BERSAMA

Persamaan kuadrat yang menyamar

Selesaikan $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ untuk $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

1. Misalkan $u = \sin x$: $2u^2 - u - 1 = 0 \Rightarrow (2u+1)(u-1) = 0$.
2. $u = 1$: $\sin x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ$.
3. $u = -\frac{1}{2}$: sudut acuannya 30°, dan sinus negatif di kuadran III dan IV, jadi $x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ atau $x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

$x = 90^\circ,\ 210^\circ,\ 330^\circ$. **Cek $x = 210^\circ$:** $2 \cdot \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$. ✓

COBA SENDIRI

Kapan Ayu bisa memotret?

Pada bianglala di komik, tinggi kabin $h(t) = 13 - 11\cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)$ meter, dengan t detik sejak naik dari titik terendah. Ayu ingin memotret alun-alun saat kabin lebih tinggi dari 18,5 m. Berapa detik waktu yang ia punya dalam satu putaran? Tuliskan juga model ini dalam bentuk $A\sin\big(B(t-C)\big) + D$.

1. Misalkan $\theta = \frac{\pi t}{30}$. Syaratnya $13 - 11\cos\theta > 18{,}5 \Rightarrow \cos\theta < -\frac{1}{2}$.
2. Di lingkaran satuan, $\cos\theta < -\frac{1}{2}$ berarti titik P berada di sebelah kiri garis $x = -\frac{1}{2}$, yaitu $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$.
3. $\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi t}{30} < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow 20 < t < 40$.
4. Bentuk sinus: karena $-\cos\theta = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, diperoleh $h(t) = 11\sin\left(\frac{\pi}{30}(t-15)\right) + 13$.

Ayu punya 20 detik (dari detik ke-20 sampai detik ke-40), tepat sepertiga putaran. Bentuk sinusnya: $A = 11$ (jari-jari), $B = \frac{\pi}{30}$ (periode 60 detik), $C = 15$, $D = 13$ (tinggi poros).

Cek Cepat

Nilai $\tan 135^\circ$ adalah...

1

-1

$\sqrt{3}$

tidak terdefinisi

Periode grafik $y = 2\sin(3x) + 1$ (dalam radian) adalah...

2π

6π

$\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$

Jika $\sin x = 0{,}6$ dan x sudut lancip, maka $\sin 2x =$...

0,96

1,2

0,48

0,36

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: roda sepeda melukis sinus

Bahan: sepeda (atau roda lain yang bisa diputar), selotip berwarna, meteran, kertas berpetak, pensil.

1. Balikkan sepeda (sadel dan setang di lantai) agar roda bebas berputar. Tempelkan selotip di dekat pentil ban sebagai penanda.
2. Putar roda sampai penanda berada di titik terendah. Ukur tingginya dari lantai. Inilah sudut 0°.
3. Putar roda $\frac{1}{8}$ putaran (45°) setiap kali, lalu ukur lagi tingginya. Ulangi sampai penanda kembali ke titik terendah (9 data).
4. Gambar titik-titik (sudut, tinggi) di kertas berpetak, lalu hubungkan dengan kurva mulus.
5. Ukur juga jarak penanda ke as roda (r) dan tinggi as roda dari lantai (D).

Pertanyaan: Apakah titik-titikmu cocok dengan model $h = D - r\cos\theta$? Berapa amplitudo dan sumbu tengahnya? Mengapa kenaikan dari 0° ke 45° jauh lebih kecil daripada kenaikan dari 45° ke 90°?

RINGKASAN KILAT — Bab 26 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- memperluas sin, cos, dan tan ke **sudut berapa pun** memakai **lingkaran satuan** dan sudut acuan
- mengubah derajat ke **radian** dan sebaliknya, serta menghitung panjang busur dan luas juring
- menggambar grafik sin, cos, tan dan membaca **amplitudo, periode, geseran, dan sumbu tengah**
- memodelkan peristiwa berulang (bianglala, pasang surut, bunyi gamelan) dengan $y = A\sin\big(B(x - C)\big) + D$
- membuktikan dan memakai **identitas** (Pythagoras, jumlah sudut, sudut rangkap) untuk menyelesaikan **persamaan trigonometri**

Istilah kunci

lingkaran satuan · sudut acuan · radian · gelombang sinus · fungsi periodik · periode · asimtot tegak · amplitudo · geseran fase · sumbu tengah · identitas · persamaan trigonometri

Rumus penting

$$s = r\,\theta, \qquad \theta = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

Radian dan panjang busur. Panjang busur sama dengan jari-jari dikali sudut dalam radian. Ubah dulu derajat ke radian dengan mengalikan π/180.

$$y = A\sin\big(B(x - C)\big) + D$$

Model gelombang sinus (pasang surut). Tinggi = sumbu tengah D ditambah A kali sinus. B mengatur seberapa cepat gelombang berulang, C mengatur kapan siklus dimulai.

$$\sin 2\theta = 2\,\sin\theta\,\cos\theta$$

Sudut rangkap. Sinus sudut dua kali lipat bukan dua kali sinusnya, melainkan dua kali sinus dikali kosinus.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Kalkulator punya mode DEG (derajat) dan RAD (radian).
- $\tan 90^\circ$ tidak terdefinisi, bukan 0 dan bukan "tak hingga".
- Jangan membagi kedua ruas dengan $\sin x$ atau $\cos x$, karena nilainya bisa nol dan penyelesaiannya ikut hilang.

⛰ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=26

Teka-teki untuk Bab 27

Ancil menulis di papan: $0{,}999\ldots = 1$ (angka 9-nya berlanjut tanpa henti). Dimas langsung protes, "Mustahil! Pasti kurang sedikit dari 1!" Ayu diam-diam mengetik $\sin(0{,}001) \div 0{,}001$ di kalkulator (mode radian) dan mendapat $0{,}99999983\ldots$. Makin kecil sudutnya, makin panjang deretan angka 9 yang muncul. Jadi, apakah $0{,}999\ldots$ benar-benar sama dengan 1? Dan berapa sebenarnya nilai $\frac{\sin x}{x}$ saat x "hampir nol"?

▼ Intip petunjuk

Kalau $0{,}999\ldots$ lebih kecil daripada 1, pasti ada bilangan lain di antara keduanya, misalnya rata-ratanya. Coba tuliskan bilangan itu dalam bentuk desimal! Kalau tidak bisa... mungkin keduanya memang sama. Bab 27 memperkenalkan **limit**: seni mendekati tanpa harus menyentuh.

BAB 27 · KALKULUS

27 Limit: Seni Mendekati Tanpa Menyentuh

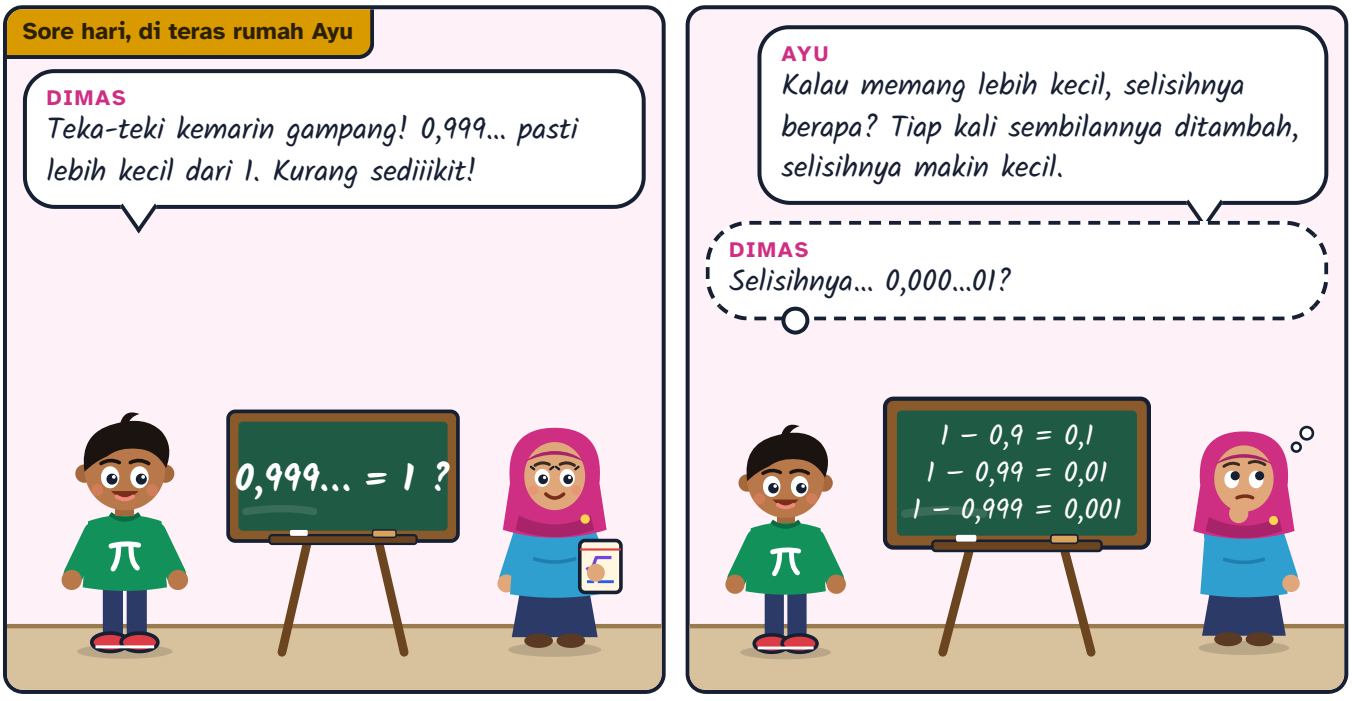
Benarkah 0,999… tepat sama dengan 1? Bagaimana Archimedes menjepit π dengan segi-96 tanpa kalkulator? Selamat datang di gerbang kalkulus, tempat "hampir" berubah menjadi "tepat".

Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan makna **limit** dengan bahasa sehari-hari, **tabel mendekat**, dan grafik (termasuk grafik berlubang);
- membedakan **limit kiri**, **limit kanan**, dan nilai fungsi tepat di suatu titik;
- menghitung limit aljabar dengan **substitusi**, **faktorisasi**, dan **perkalian sekawan**;
- menentukan **limit di tak hingga** dan **asimtot** fungsi rasional;
- memakai limit istimewa $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dan memeriksa **kontinuitas** sebuah fungsi.

SEMBILAN YANG TAK PERNAH HABIS

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ tidak terdefinisi di $x = 1$ karena penyebutnya nol. Apa yang terjadi pada $f(x)$ jika x sangat dekat dengan 1, misalnya $x = 0{,}999$?

- Nilainya meledak menjadi sangat besar, karena penyebutnya hampir nol.
- Nilainya hampir nol, karena pembilangnya hampir nol.
- Nilainya hampir 2.
- Kalkulator pasti menolak menghitungnya.

Jawabannya: hampir 2. Hitung saja: $f(0{,}999) = \frac{0{,}998001 - 1}{0{,}999 - 1} = \frac{-0{,}001999}{-0{,}001} = 1{,}999$. Pembilang dan penyebut sama-sama mengecil, dan "perlombaan" keduanya berakhir dengan perbandingan 2. Rahasianya: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, jadi untuk $x \neq 1$ berlaku $f(x) = x + 1$. Inilah gambaran pertamamu tentang **limit**.

27.1 Mendekati tanpa menyentuh

Kembali ke teka-teki 0,999.... Tulis barisan $0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ \ldots$ Setiap suku lebih dekat ke 1 daripada suku sebelumnya: selisihnya $0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$ Selisih itu bisa dibuat **sekecil apa pun** yang kamu mau,

asalkan sembilannya cukup banyak. Matematikawan berkata: barisan ini mempunyai **limit** 1.

Lambang 0,999… (sembilan tak berujung) **bukan** salah satu suku barisan itu. Ia adalah *tujuan akhir* barisan, yaitu limitnya. Karena limitnya 1, maka 0,999… = 1, tepat sama, bukan kira-kira.

Bahasa sederhana · Bayangkan kamu berjalan menuju pintu, dan setiap langkah menempuh setengah sisa jarak. Kamu makin dekat, makin dekat… Limit menjawab pertanyaan **"ke mana tujuanmu?"**, bukan "apakah kamu sudah sampai?". Tujuannya jelas: pintu.

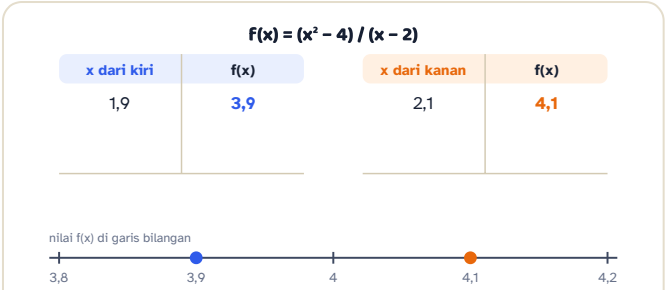
DEFINISI (LIMIT, VERSI INTUITIF)

Kita menulis

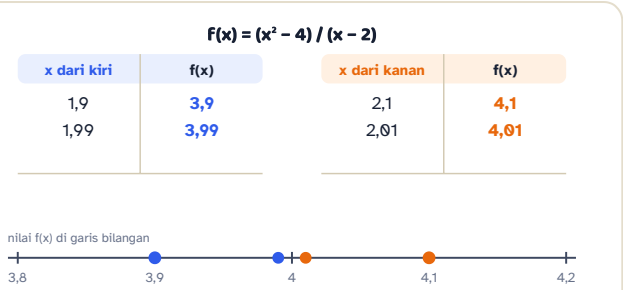
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(dibaca "limit $f(x)$ untuk x mendekati a sama dengan L") jika nilai $f(x)$ dapat dibuat **sedekat apa pun** ke L dengan memilih x cukup dekat ke a, tetapi $x \neq a$. Yang dilihat adalah perilaku f di **sekitar** a, bukan nilai f tepat di a.

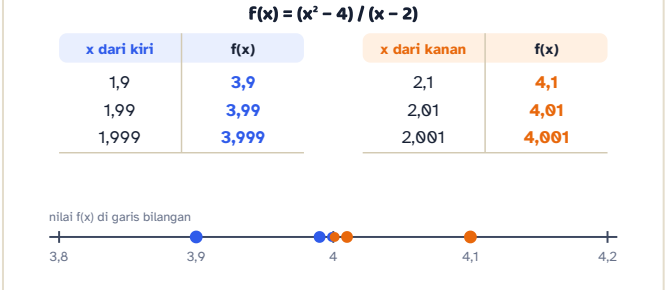
Cara paling jujur untuk "melihat" limit adalah **tabel mendekat**: pilih x yang makin dekat ke a dari kiri dan dari kanan, lalu amati ke mana $f(x)$ bergerak.



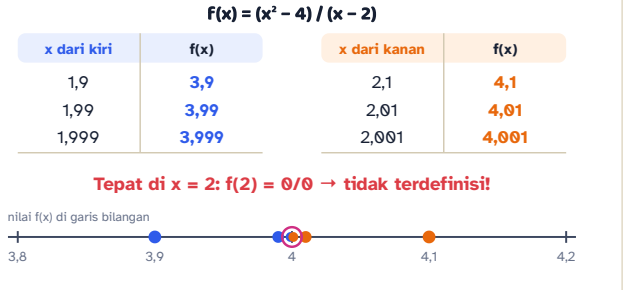
Langkah 1. Kita ingin tahu ke mana $f(x)$ menuju saat x mendekati 2. Mulai dari $x = 1{,}9$ (kiri) dan $x = 2{,}1$ (kanan): $f(1{,}9) = 3{,}9$ dan $f(2{,}1) = 4{,}1$.



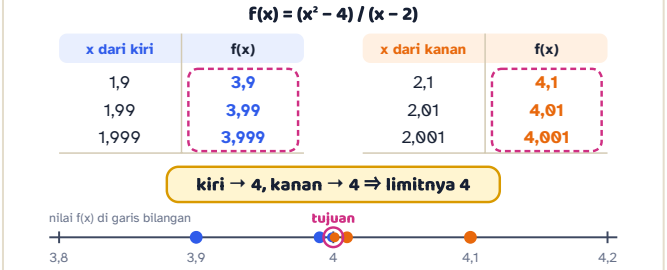
Langkah 2. Lebih dekat: $x = 1{,}99$ dan $x = 2{,}01$ memberi $3{,}99$ dan $4{,}01$. Pada garis bilangan, kedua titik merapat.



Langkah 3. Lebih dekat lagi: $3{,}999$ dan $4{,}001$. Selisihnya ke 4 tinggal $0{,}001$, dan bisa dibuat sekecil apa pun.



Langkah 4. Bagaimana tepat di $x = 2$? $f(2) = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$: tidak terdefinisi! Grafiknya berlubang di sana.



Langkah 5. Namun dari kiri maupun kanan, $f(x)$ menuju 4. Jadi $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, walaupun $f(2)$ sendiri tidak ada. Limit melihat *tujuan*, bukan *tempat tiba*.

Tiga bukti singkat bahwa 0,999… = 1

1. Aljabar. Misalkan $s = 0{,}999\ldots$ Maka $10s = 9{,}999\ldots$ Kurangkan: $10s - s = 9$, jadi $9s = 9$ dan $s = 1$.

2. Pecahan. $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ Kalikan kedua ruas dengan 3: $1 = 0{,}999\ldots$

3. Limit. 0,999… adalah limit jumlah $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$ Jumlah n suku pertamanya $1 - 10^{-n}$, dan $10^{-n} \to 0$, jadi limitnya $1 - 0 = 1$. Bukti ketiga inilah yang paling jujur: dua bukti pertama diam-diam sudah memakai limit.

TRIK KAK LINTANG

Limit itu seperti menebak tujuan angkot dari arah lajunya. Kamu tidak perlu menunggu angkot sampai di terminal; cukup lihat ke mana ia terus melaju. Begitu pula limit: lihat ke mana $f(x)$ menuju saat x makin dekat ke a, dari **dua arah**.

TAMU DARI MASA LALU

Zeno dari Elea (±490–430 SM) membuat paradoks terkenal: seorang pelari tidak akan pernah sampai di garis finis, karena ia harus menempuh setengah jarak, lalu setengah sisanya, lalu setengahnya lagi, tanpa akhir. Butuh lebih dari 2.000 tahun untuk menjawabnya dengan rapi: jumlah tak berhingga $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ mempunyai limit 1, jadi pelari itu sampai juga. Definisi limit yang ketat baru dirumuskan pada abad ke-19 oleh Augustin-Louis Cauchy dan Karl Weierstrass.

27.2 Limit dari tabel dan grafik

Kadang kita tidak punya rumus, hanya tabel atau grafik. Limit tetap bisa dibaca, asalkan kita mendekati a dari dua arah: dari **kiri** ($x < a$) dan dari **kanan** ($x > a$).

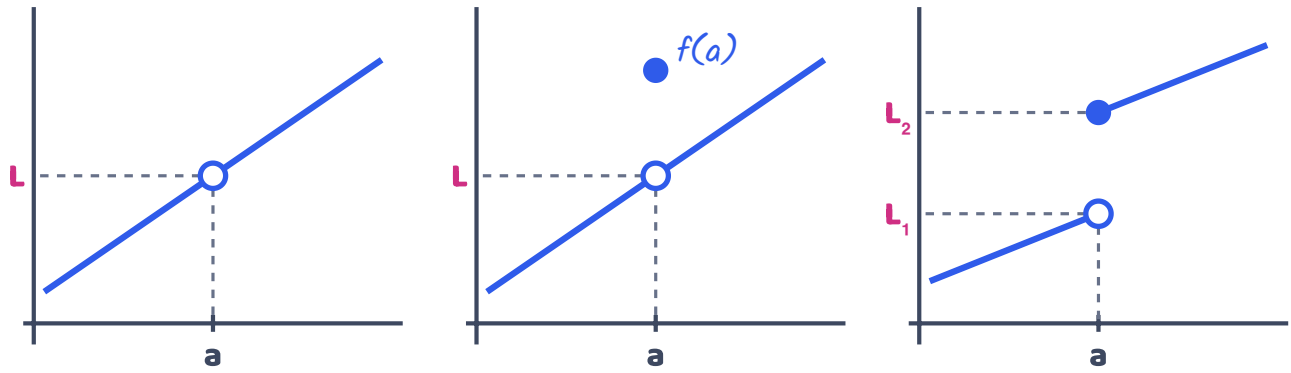
CARA MEMBACA LAMBANGNYA

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$ dibaca "limit kiri": x mendekati 2 dari bawah (1,9; 1,99; ...). $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ dibaca "limit kanan": x mendekati 2 dari atas (2,1; 2,01; ...). Tanda kecil $^-$ dan $^+$ hanya menunjukkan arah, bukan tanda negatif atau positif.

LIMIT ADA JIKA KEDUA ARAH SEPAKAT

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^+} f$$

Jika limit kiri dan limit kanan berbeda, limitnya **tidak ada**.



Lubang: limit = L, f(a) tidak terdefinisi.

Limit = L, tetapi f(a) ≠ L.

Lompatan: kiri ≠ kanan, limit tidak ada.

Titik kosong ○ berarti "grafik menuju ke sini, tetapi titik ini tidak termasuk". Titik penuh ● adalah nilai fungsi yang sebenarnya.

Lubang di grafik sangat penting dalam kalkulus. Fungsi $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ di bawah tidak terdefinisi di $x = 2$, tetapi grafiknya menuju titik $(2;\ 12)$. Perbesar grafiknya sebanyak apa pun: lubangnya tidak pernah tertutup, dan kurvanya malah makin tampak lurus. (Ingat pengamatan kurva yang "makin lurus" ini. Di Bab 28 ia akan menjadi bintang utama!)

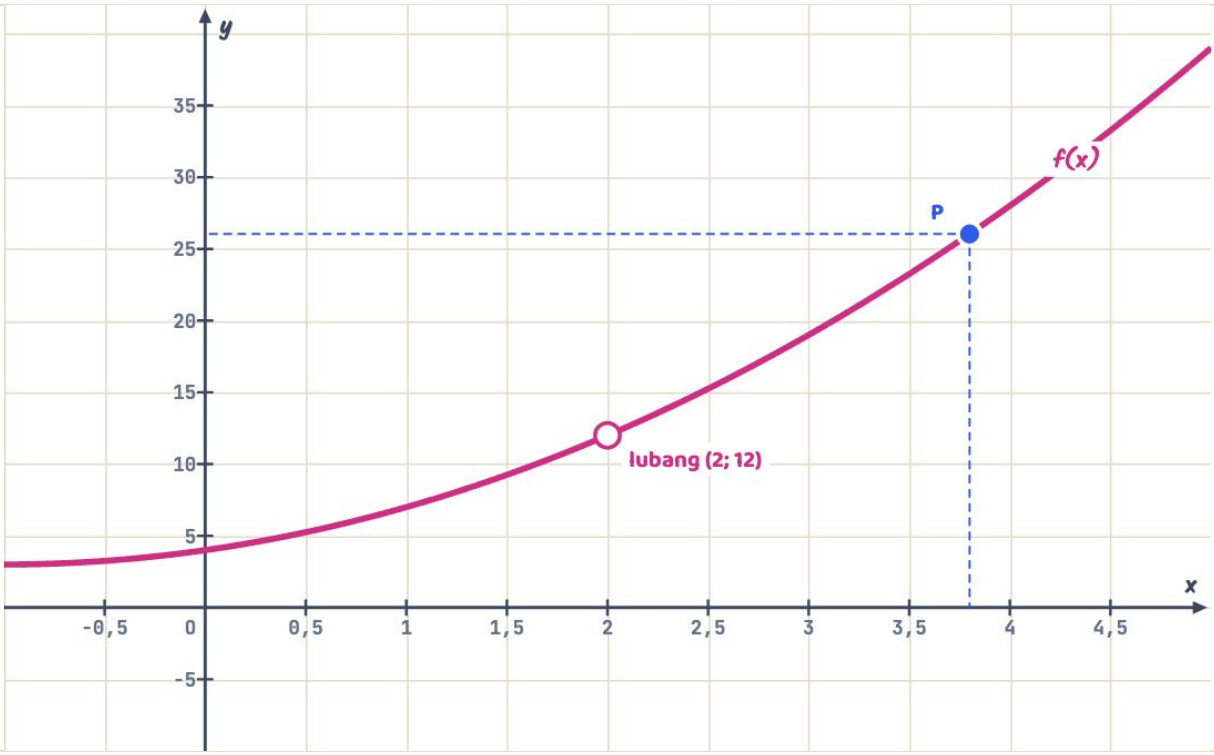
GRAFIK HIDUP **Zoom ke lubang grafik**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-27

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$x = 3{,}8 \;\Rightarrow\; f(x) = 26{,}04$$

Untuk x ≠ 2, f(x) = x² + 2x + 4, jadi lubangnya ada di (2; 12).



Perbesaran	x di titik P	f(x) di titik P	f(2)
1 ×	3,8	26,04	tidak terdefinisi (0/0)

Tekan ▶ **Jalankan** untuk zoom otomatis, atau geser slider perbesaran. Lalu geser titik P mendekati lubang. Tepat di $x = 2$ rumusnya menjadi $\frac{0}{0}$, karena itu slider P melompati posisi tengah. Seberapa dekat ke 12 nilai $f(x)$ bisa kamu buat?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Limit tidak sama dengan nilai fungsi. $\lim_{x \to a} f(x)$ bertanya "ke mana $f(x)$ menuju di sekitar a?", sedangkan $f(a)$ bertanya "berapa nilai f tepat di a?". Keduanya bisa sama, bisa berbeda, dan $f(a)$ bahkan boleh tidak ada.

CONTOH **Membaca limit dari tabel**

Ayu menghitung $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ dengan kalkulator. Tentukan $\lim_{x \to 1} g(x)$ dari tabelnya.

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$g(x)$	0,5132	0,5013	0,50013	0,49988	0,49876	0,48809

1. Dari kiri (0,9 → 0,999), nilai g turun: 0,5132 → 0,50013, makin dekat ke 0,5.
2. Dari kanan (1,1 → 1,001), nilai g naik: 0,48809 → 0,49988, juga makin dekat ke 0,5.
3. Kedua arah sepakat, jadi limitnya ada.

$\lim_{x \to 1} g(x) = 0{,}5$, walaupun $g(1) = \frac{0}{0}$ tidak terdefinisi. Di subbab 27.3 kamu akan membuktikannya tanpa kalkulator.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

DEFINISI E–Δ: LIMIT SEBAGAI PERMAINAN

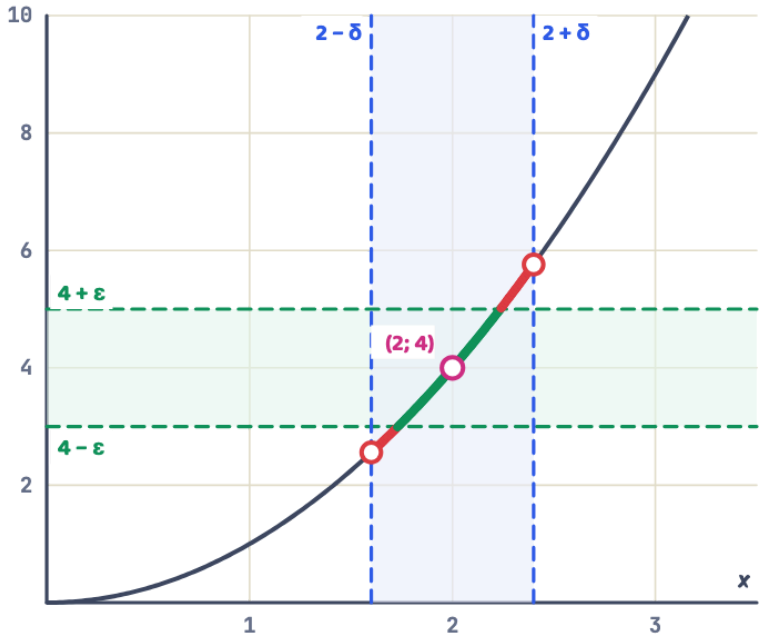
Kata "sedekat apa pun" dibuat tepat oleh Cauchy dan Weierstrass sebagai permainan dua pemain. Lawan menantang dengan bilangan kecil $\varepsilon > 0$ (epsilon): "Buat $f(x)$ berjarak kurang dari ε dari L!" Kamu menjawab dengan $\delta > 0$ (delta): "Asal x berjarak kurang dari δ dari a, dan $x \neq a$, pasti berhasil."

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \text{untuk setiap } \varepsilon > 0 \text{ ada } \delta > 0 \text{ sehingga } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limitnya L jika kamu **selalu** bisa menang, sekecil apa pun ε yang dipilih lawan. Contoh: untuk $f(x) = 3x + 1$ dan $a = 2$, berlaku $|f(x) - 7| = 3|x - 2|$, jadi pilihan $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ selalu menang. Coba mainkan sendiri di Lab Mini berikut.

LAB MINI **Permainan ε–δ: lawan memilih ε, kamu memilih δ**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-27



f(x) = x², a = 2, L = 4

Lawan: ε = 1

Kamu: δ = 0,4

Jika 0 < |x − 2| < δ, maka

|x² − 4| < 4δ + δ² = 1,76

> ε = 1

BOCOR ✗

ada bagian kurva merah

δ aman terbesar ≈ 0,2361

ε kecil ⇒ δ juga harus kecil

✋ *seret garis putus-putus*

jarak f(x) ke 4 paling jauh (4δ + δ²)	δ terbesar yang aman	Hasil
1,76	0,2361	BOCOR ✗

Fungsinya $f(x) = x^2$ di sekitar $a = 2$ (limitnya 4). Lawan memilih pita hijau setinggi $4 \pm \varepsilon$. Pilih pita biru selebar $2 \pm \delta$ supaya **seluruh** kurva di dalam pita biru jatuh ke dalam pita hijau (berwarna hijau, bukan merah). Seret garis putus-putus, lalu tekan "Lawan: ε dibagi dua". Bisakah kamu selalu menang?

27.3 Limit aljabar: substitusi, faktorisasi, sekawan

Membuat tabel itu melelahkan. Untungnya ada jalan pintas aljabar. Langkah pertama selalu sama: **substitusi**, yaitu masukkan saja $x = a$. Hasilnya memberi tahu langkah berikutnya.

SIFAT-SIFAT LIMIT

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$, maka

- $\lim(f \pm g) = L \pm M$, $\lim(k \cdot f) = kL$, $\lim(f \cdot g) = LM$;
- $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ asalkan $M \neq 0$, dan $\lim f^n = L^n$.

Akibatnya, untuk setiap polinomial p: $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$. Substitusi langsung selalu berhasil pada polinomial.

Hasil substitusi	Artinya	Langkah berikutnya
$x = a$		

bilangan biasa, mis. $\frac{3}{5}$	fungsinya "mulus" di a	selesai: itulah limitnya
$\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$	ada asimtot tegak	limitnya tak hingga atau tidak ada; cek kiri dan kanan
$\frac{0}{0}$	bentuk tak tentu: ada faktor tersembunyi	faktorkan, kalikan sekawan, atau pakai limit istimewa

⚠ **AWAS JEBAKAN**

$\frac{0}{0}$ bukan 0, bukan 1, dan bukan jawaban akhir. Ia **bentuk tak tentu**: tanda bahwa kamu harus bekerja lebih lanjut. Lihat tiga limit yang sama-sama berbentuk $\frac{0}{0}$ di $x = 2$ ini: $\frac{x^2-4}{x-2} \to 4$, $\frac{x-2}{x^2-4} \to \frac{1}{4}$, dan $\frac{(x-2)^2}{x-2} \to 0$.

RUMUS HIDUP **Limit selisih kuadrat (tabel mendekat)**

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}, \qquad x = a + h$$

Bentuk 0/0 di x = a ternyata menyembunyikan 2a: makin kecil jaraknya h, makin dekat f(x) ke 2a. Jadi limit (x² − a²)/(x − a) untuk x → a sama dengan 2a.

a Titik tujuan a | h Jarak h = x − a | $f(x)$ Nilai f(a + h)

NILAI F(A + H)

4,1

Di x = **2,1**, nilai f(x) = **4,1**. Tujuannya 2a = **4**, dan selisihnya tinggal **0,1**, tepat sebesar h. Makin kecil h, makin kecil selisihnya: limitnya 2a = **4**.

Cek satuan: Alasannya: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, jadi untuk $x \neq a$ nilai $f(x) = x + a$, yang menuju $a + a = 2a$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LIMIT-SELISIH-KUADRAT

KERJAKAN BERSAMA

Faktorisasi: coret faktor biang 0/0

Tentukan $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$.

1. Substitusi: $\frac{9-3-6}{9-9}=\frac{0}{0}$. Bentuk tak tentu, jadi pasti ada faktor $(x-3)$ di atas dan di bawah.
2. Faktorkan: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ dan $x^2-9=(x-3)(x+3)$.
3. Untuk $x\neq 3$: $\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$. Sekarang substitusi aman: $\frac{5}{6}$.

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\frac{5}{6}$. **Mencoret** $(x-3)$ **sah karena limit tidak pernah memakai** $x=3$ **itu sendiri.**

KERJAKAN BERSAMA

Perkalian sekawan untuk bentuk akar

Tentukan $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$.

1. Substitusi: $\frac{5-5}{0}=\frac{0}{0}$. Akar tidak bisa difaktorkan biasa, jadi kalikan dengan **sekawan** $\sqrt{x+25}+5$ di atas dan di bawah.
2. $\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+25}+5}{\sqrt{x+25}+5}=\frac{(x+25)-25}{x\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}$.
3. Substitusi $x=0$: $\frac{1}{5+5}=\frac{1}{10}$.

Limitnya $\frac{1}{10}=0{,}1$. **Dengan cara yang sama, limit** $g(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **pada contoh tabel tadi adalah** $\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$. **Cocok!**

ADU CEPAT

Limit faktorisasi kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-27

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pembilangnya selalu bisa difaktorkan menjadi (x – a)(x – b). Coret (x – a), lalu substitusi x = a: hasilnya a – b.

27.4 Limit di tak hingga dan asimtot

Bahasa sederhana · Bayangkan satu loyang martabak dibagi rata untuk x orang. Kalau $x = 10$, tiap orang mendapat $\frac{1}{10}$ loyang. Kalau $x = 1.000.000$, tiap orang hanya mendapat sejumput remah. Makin banyak orangnya, bagiannya makin dekat ke 0, tetapi tidak pernah negatif.

Dalam bahasa limit: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Lambang ∞ (tak hingga) **bukan bilangan**; "$x \to \infty$" berarti x tumbuh melewati bilangan apa pun yang kamu sebutkan. Lihat fungsi $f(x) = \frac{3x^2+5}{x^2-2}$ untuk x yang makin besar:

x	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	3,1122	3,0011	3,000011	3,00000011

Nilainya menempel ke 3. Untuk x yang sangat besar, angka 5 dan 2 tidak berarti dibanding $3x^2$ dan x^2. Garis $y = 3$ disebut **asimtot datar**.

DEFINISI (ASIMTOT)

- Garis $y = L$ adalah **asimtot datar** grafik f jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ atau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.
- Garis $x = a$ adalah **asimtot tegak** jika $f(x) \to +\infty$ atau $f(x) \to -\infty$ saat $x \to a^-$ atau $x \to a^+$.

TRIK KAK LINTANG: PANGKAT TERTINGGI MENANG

Untuk fungsi pecahan polinomial dengan $x \to \pm\infty$, bandingkan pangkat tertinggi saja:

- pangkat atas = pangkat bawah → limitnya perbandingan koefisien terdepan ($\frac{3x^2+5}{x^2-2} \to \frac{3}{1}$);
- pangkat atas < pangkat bawah → limitnya 0;
- pangkat atas > pangkat bawah → membesar tanpa batas (tidak ada asimtot datar).

Cara resminya: bagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi penyebut, lalu pakai $\frac{1}{x^k} \to 0$.

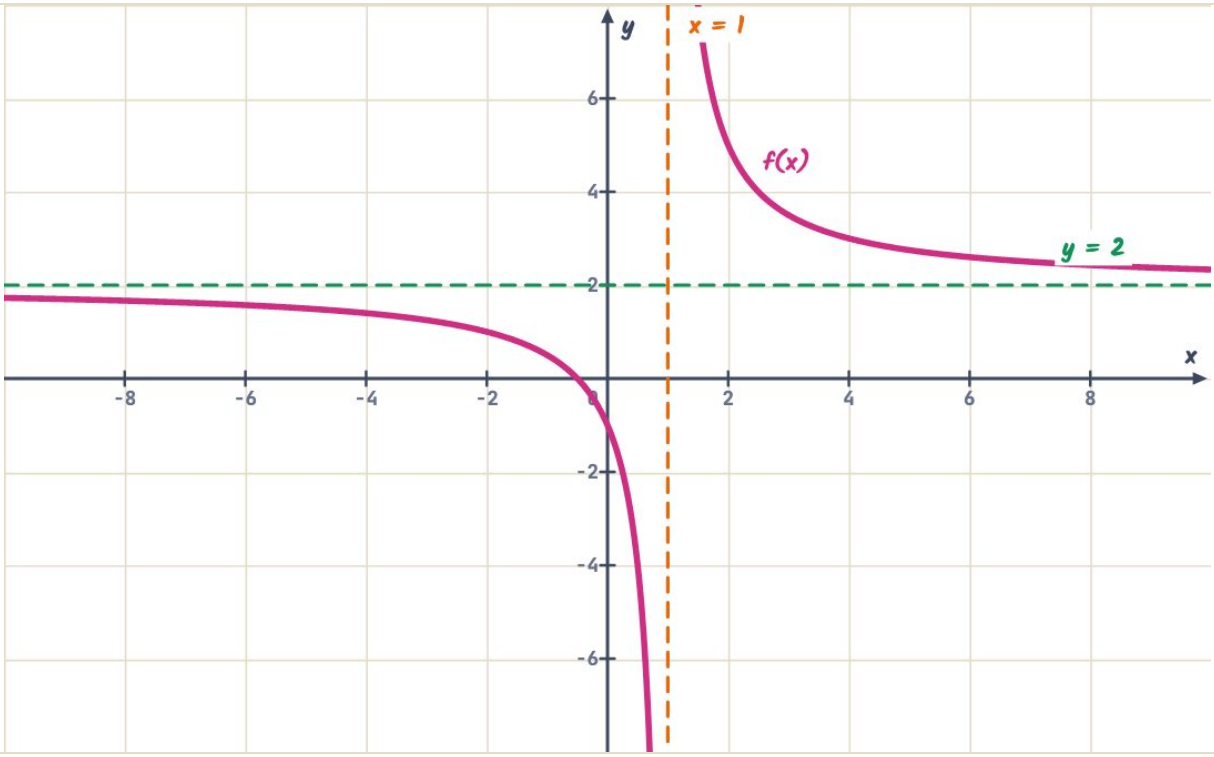
GRAFIK HIDUP

Pemburu asimtot: f(x) = (ax + b)/(x − c)

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-27

$$f(x) = \frac{ax + b}{x - c}$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$$



Di dekat x = 1, penyebut hampir nol ⇒ f(x) melesat ke ±∞

f(10)	f(100)	f(1000)	Asimtot datar y =
2,3333	2,0303	2,003	2

Geser a, b, dan c. Garis hijau (asimtot datar) selalu di $y = a$, dan garis oranye (asimtot tegak) di $x = c$. Lihat bacaan $f(10)$, $f(100)$, $f(1000)$ yang merayap ke a. Tantangan: buat $a = 2$, $c = 1$, lalu cari b yang membuat asimtot tegaknya lenyap!

COBA SENDIRI **Tak hingga dikurangi tak hingga**

Tentukan $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$**.**

1. Kedua suku membesar tanpa batas: bentuk $\infty-\infty$. Jangan tergoda menjawab 0!
2. Kalikan dengan sekawan: $\sqrt{x^2+4x}-x=\frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$.
3. Bagi atas dan bawah dengan x (untuk $x>0$): $\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}\to\frac{4}{1+1}=2$.

Limitnya 2. Cek: $x=1.000.000$ **memberi** $1{,}999998\ldots$ **Bentuk** $\infty-\infty$**, seperti** $\frac{0}{0}$**, adalah bentuk tak tentu.**

RUMUS HIDUP

Biaya rata-rata pabrik tahu

$$\bar{C} = \frac{F + v\,n}{n} = \frac{F}{n} + v$$

Biaya tetap F dibagi rata ke n potong tahu, lalu ditambah biaya bahan v per potong. Makin banyak tahu dibuat, biaya rata-rata turun mendekati v, tetapi tidak pernah di bawahnya.

- F Biaya tetap per hari `rupiah`
- v Biaya bahan per potong `rupiah`
- n Banyak tahu per hari `potong`
- $\bar{C}$ Biaya rata-rata per potong `rupiah`

BIAYA RATA-RATA PER POTONG

1.500

rupiah

Membuat **1.000** potong: biaya tetap per potong Rp**1.000**, ditambah bahan Rp**500**, jadi rata-ratanya Rp**1.500**. Garis C = v = **500** adalah asimtot datar: sebanyak apa pun tahu dibuat, biaya rata-rata tidak bisa di bawah Rp**500**.

Cek satuan: Satuan: rupiah dibagi potong = rupiah per potong.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BIAYA-RATA-TAHU

MITOS

"0,999... itu sedikit lebih kecil daripada 1."

FAKTA

Tidak ada bilangan di antara keduanya, jadi selisihnya nol. 0,999... hanyalah nama lain untuk 1, seperti $\frac{1}{2}$ adalah nama lain untuk 0,5.

MITOS

"Grafik tidak pernah memotong asimtotnya."

FAKTA

Asimtot tegak memang tidak terpotong, tetapi asimtot datar boleh! $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^2+1}$ mendekati $y = 2$, padahal $f(2) = \frac{10}{5} = 2$ tepat.

MITOS

"Limit di $x = a$ pasti sama dengan $f(a)$."

FAKTA

Hanya jika f **kontinu** di a. Limit melihat ke mana f menuju di sekitar a; nilai $f(a)$ bisa berbeda, bahkan tidak ada.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BILANGAN E: LIMIT YANG LAHIR DARI BUNGA BANK

Pada 1683 Jacob Bernoulli bertanya: jika bunga 100% setahun dibagi menjadi n kali pembungaan, berapa saldo akhirnya? Tabungan Rp1 menjadi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Makin sering dibungakan, hasilnya naik, tetapi **tidak** meledak:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828.$$

Trik olimpiade yang sering muncul: (1) $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \to e^k$ (substitusi $n = km$); (2) sekawan untuk bentuk $\infty - \infty$; (3) jumlah *teleskopik*, misalnya $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$; (4) barisan naik yang terbatas pasti punya limit.

RUMUS HIDUP

Bunga majemuk menuju e

$$A = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Uang Rp1 dengan bunga khayalan 100% setahun, dibungakan n kali. Makin sering dibungakan, hasilnya mendekati bilangan e ≈ 2,71828, bukan membesar tanpa batas.

- n Banyak pembungaan per tahun `kali`
- A Faktor pengali saldo

FAKTOR PENGALI SALDO

2,613035

bulanan

Dibungakan **12** kali setahun: tabungan Rp100.000 menjadi sekitar Rp**261.304**. Batas atasnya e × Rp100.000 ≈ Rp271.828, dan selisihnya tinggal Rp**10.525**.

Cek satuan: A tidak bersatuan: ia faktor pengali saldo awal.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUNGA-MENUJU-E

27.5 Limit trigonometri dan π ala Archimedes

Tebak Dulu!

Dengan kalkulator dalam mode radian, berapa kira-kira $\dfrac{\sin 0{,}001}{0{,}001}$?

Hampir 0, karena $\sin 0 = 0$.

Hampir 0,001.

Hampir 1.

Tidak terdefinisi.

Jawabannya: hampir 1, tepatnya $0{,}99999983\ldots$ Untuk sudut kecil dalam radian, $\sin x \approx x$: panjang busur kecil hampir sama dengan tinggi segitiganya. Jadi $\frac{\sin x}{x}$ mendekati 1 saat $x \to 0$.

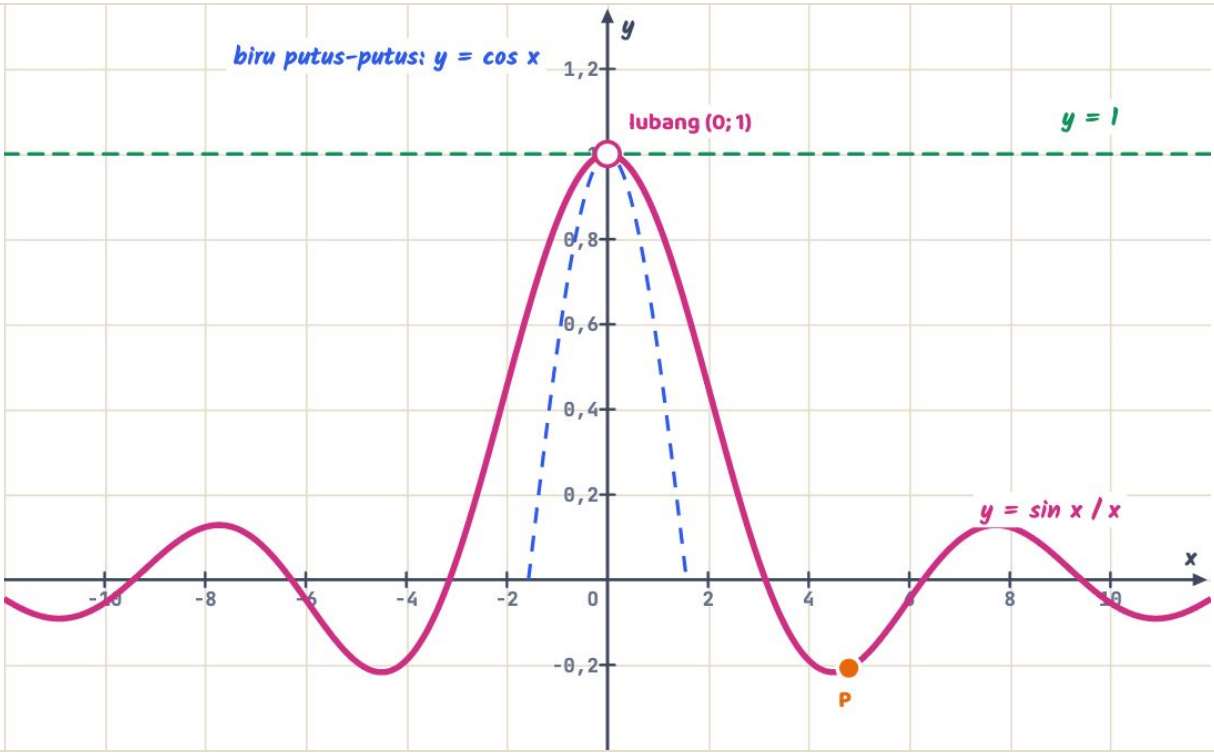
GRAFIK HIDUP

sin x / x: terjepit menuju 1

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-27

$$y = \frac{\sin x}{x}, \qquad \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\frac{\sin(4{,}8)}{4{,}8} = -0{,}207534$$



x di titik P	sin x / x	cos x (pengapit bawah)
4,8	-0,2075343	0,087499

Tekan ▶ **Jalankan** untuk zoom ke titik $(0;1)$. Kurva magenta selalu terjepit di antara $\cos x$ (biru) dan garis $y = 1$ (hijau), selama $|x| < \frac{\pi}{2}$. Karena kedua penjepit menuju 1, kurva di tengahnya pun dipaksa menuju 1.

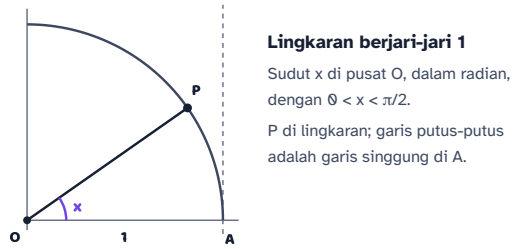
LIMIT ISTIMEWA TRIGONOMETRI

Untuk x dalam **radian**,

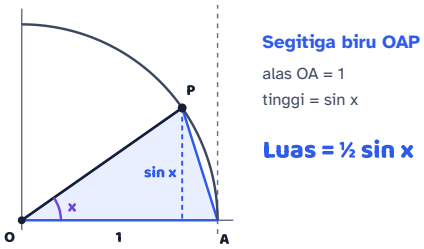
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Buktinya memakai **Teorema Apit**: jika $g(x) \le f(x) \le h(x)$ di sekitar a dan $\lim g = \lim h = L$, maka $\lim f = L$ juga. Fungsi f "terjepit" seperti roti isi di antara dua lapis roti.

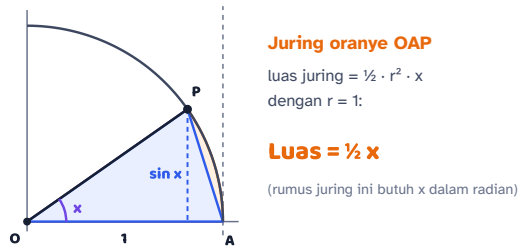
Mengapa $\frac{\sin x}{x}$ terjepit di antara $\cos x$ dan 1? Bandingkan tiga luas di lingkaran satuan berikut.



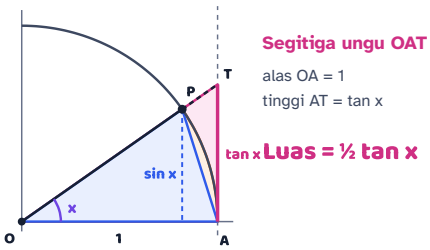
Langkah 1. Gambar lingkaran berjari-jari 1 dengan pusat O. Pilih sudut x (dalam radian) yang kecil, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



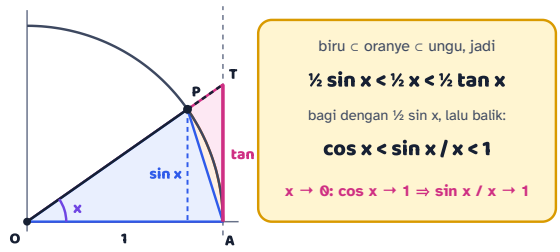
Langkah 2. Segitiga biru OAP: alasnya 1, tingginya $\sin x$. Luasnya $\frac{1}{2} \sin x$.



Langkah 3. Juring oranye OAP: luasnya $\frac{1}{2} r^2 x = \frac{1}{2} x$. Rumus ini hanya benar jika x dalam radian.



Langkah 4. Segitiga ungu OAT: alasnya 1, tingginya $AT = \tan x$. Luasnya $\frac{1}{2} \tan x$.



Langkah 5. Segitiga biru ada di dalam juring, dan juring ada di dalam segitiga ungu: $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$. Hasilnya $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Saat $x \to 0$, $\cos x \to 1$, jadi $\frac{\sin x}{x}$ terjepit menuju 1.

Bukti lengkap dengan aljabar

Untuk $0 < x < \frac{\pi}{2}$, perbandingan luas memberi $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$. Bagi setiap ruas dengan $\frac{1}{2}\sin x > 0$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Semua ruas positif, jadi kebalikannya membalik tanda: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Untuk $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, ketaksamaan yang sama berlaku karena $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ dan $\cos(-x) = \cos x$. Karena $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ dan $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, Teorema Apit memberi $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. ∎

∎

⚠ **AWAS JEBAKAN**

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ hanya berlaku jika x dalam **radian**. Dalam derajat, $\frac{\sin 1^\circ}{1} \approx 0{,}01745$, dan limitnya $\frac{\pi}{180}$, bukan 1. Inilah sebabnya kalkulus selalu memakai radian.

✏ **TRIK KAK LINTANG: SAMAKAN ISINYA**

Bentuk $\frac{\sin \square}{\square}$ dengan isi kotak yang **sama** dan menuju 0 selalu menuju 1. Jadi $\frac{\sin 7x}{x} = 7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \to 7$. Begitu juga $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \to 1$.

KERJAKAN BERSAMA **Menyamakan sudut**

Tentukan $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$.

1. Isi sinusnya $4x$, jadi buat penyebutnya juga $4x$: $\frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}$.
2. Saat $x \to 0$, $u = 4x \to 0$, sehingga $\frac{\sin u}{u} \to 1$.

Limitnya $\frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}$. Cek kalkulator: $x = 0{,}001$ memberi $\approx 1{,}33333$.

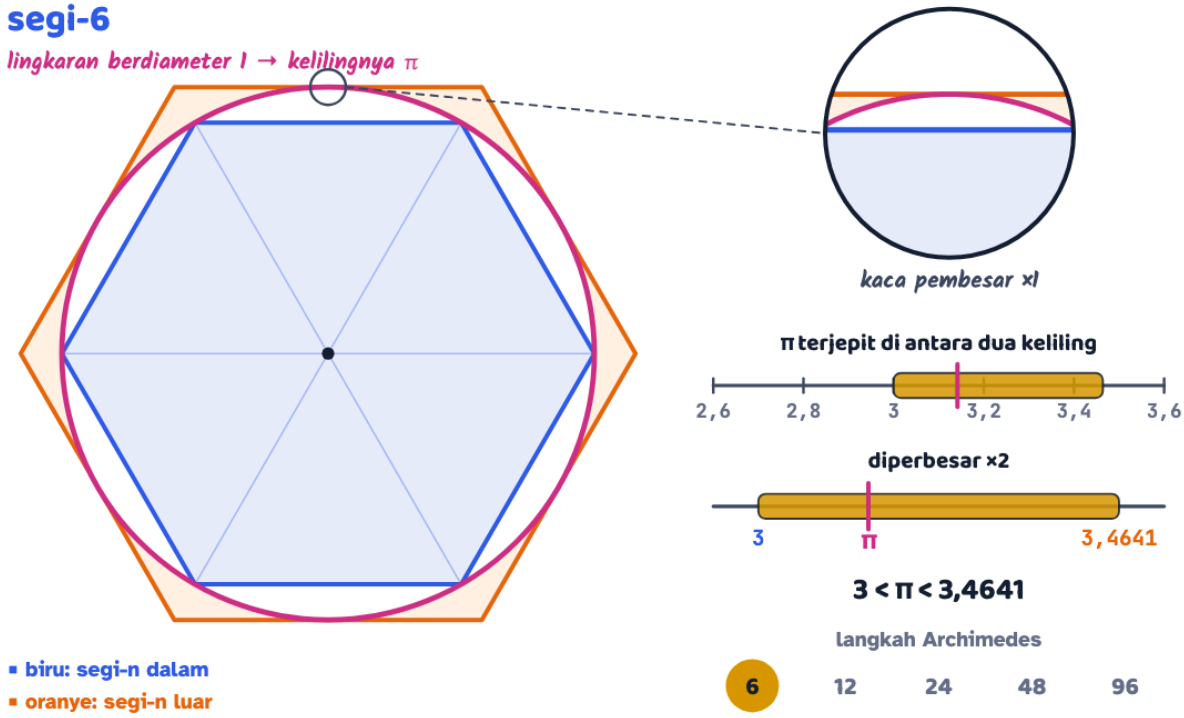
Sekarang kejutan: limit $\frac{\sin x}{x}$ ternyata sudah dipakai lebih dari 2.000 tahun lalu untuk menghitung π! Segi-n beraturan di dalam lingkaran berdiameter 1 mempunyai keliling $n\sin\frac{\pi}{n}$, dan

$$n\sin\frac{\pi}{n} = \pi\cdot\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \longrightarrow \pi\cdot 1 = \pi \quad (n\to\infty).$$

Segi-n di luar lingkaran mempunyai keliling $n\tan\frac{\pi}{n}$, yang juga menuju π, dari atas. Jadi π terjepit di antara keduanya, persis Teorema Apit.

LAB MINI Archimedes menjepit π

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-27



keliling segi-n dalam	keliling segi-n luar	lebar jepitan	angka π yang sudah pasti
3	3,4641	0,4641	3…

Geser n atau tekan **×2**. Tekan ▶ **Jalankan** untuk menapaki jalan Archimedes: 6 → 12 → 24 → 48 → 96 sisi. Perhatikan kaca pembesar di kanan atas: sisi poligon makin menempel pada lingkaran. Berapa sisi yang dibutuhkan agar angka "3,14" sudah pasti?

TAMU DARI MASA LALU

Archimedes dari Syracuse (±287–212 SM) tidak punya kalkulator, tetapi punya ide cemerlang: menjepit lingkaran di antara dua segi banyak. Mulai dari segi-6, ia menggandakan sisinya menjadi 12, 24, 48, dan 96, sambil menaksir akar-akar dengan sangat cermat. Hasilnya: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, yaitu $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$. Sekitar abad ke-3, Liu Hui dari Tiongkok meneruskan cara ini sampai segi-3.072 dan memperoleh $\pi \approx 3{,}1416$. Dua abad kemudian, Zu Chongzhi menemukan $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$, rekor yang bertahan hampir seribu tahun.

MATEMATIKA NUSANTARA

Lingkaran dari bilah-bilah lurus. Perajin bambu di banyak daerah membuat tampah, tenggok, dan bubu (perangkap ikan) yang bundar dari bilah-bilah yang lurus. Makin banyak dan makin sempit bilahnya, makin mulus lengkungannya, persis gagasan Archimedes. Rumah honai di Lembah Baliem, Papua, juga berdinding melingkar yang tersusun dari papan-papan kayu lurus yang berdiri rapat. Dari jauh tampak bulat, dari dekat ternyata segi banyak. Lingkaran adalah *limit* dari segi banyak!

27.6 Kontinuitas: menggambar tanpa mengangkat pensil

Bahasa sederhana · Fungsi disebut **kontinu** (bersambung) kalau grafiknya bisa kamu gambar dalam satu tarikan, tanpa mengangkat pensil. Lubang, lompatan, atau grafik yang melesat ke langit membuat pensilmu harus terangkat.

Kalimat "tanpa mengangkat pensil" bisa dibuat tepat dengan limit. Di titik a, grafik harus **menuju** suatu titik (limitnya ada), titik itu harus **ada** ($f(a)$ terdefinisi), dan keduanya harus **sama**.



DEFINISI (KONTINU DI SUATU TITIK)

Fungsi f **kontinu** di $x = a$ jika ketiga syarat ini terpenuhi:

1. $f(a)$ terdefinisi;
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ ada (limit kiri = limit kanan);
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

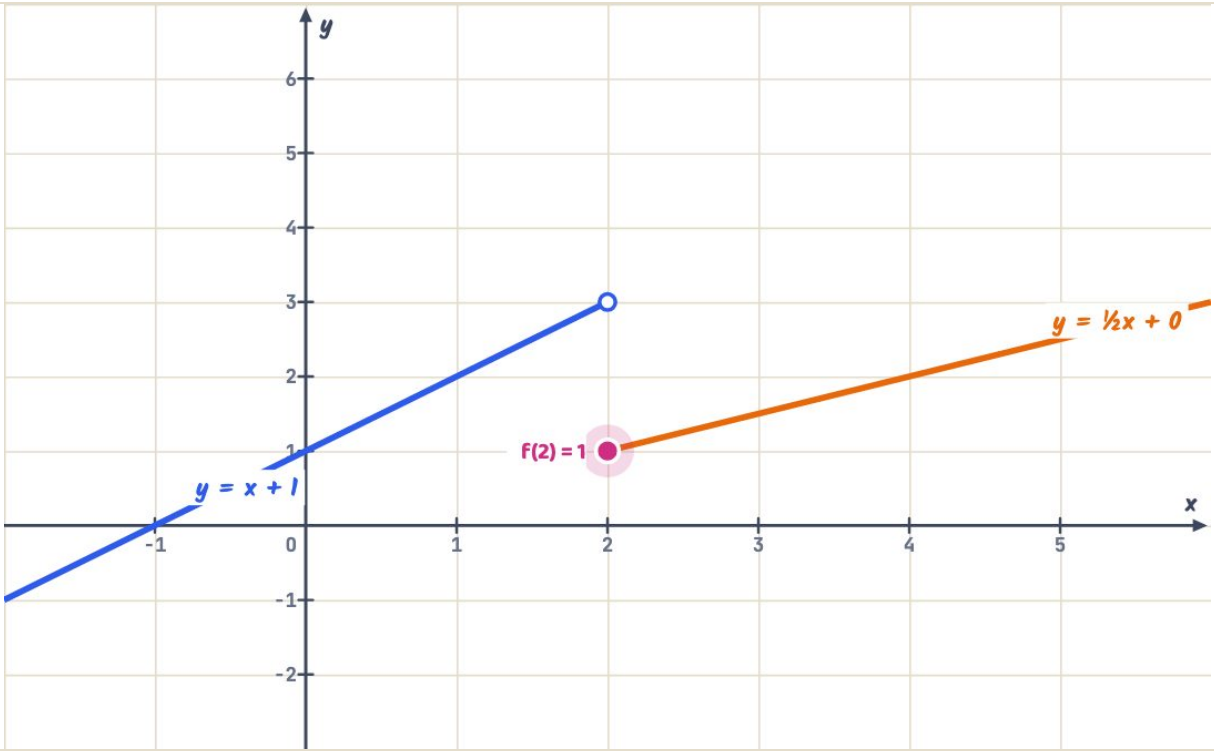
Polinomial, $\sin x$, $\cos x$, e^x, dan $\sqrt{x}$ (untuk $x \geq 0$) kontinu di seluruh daerah asalnya.

GRAFIK HIDUP **Sambungkan grafiknya!**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-27

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ \frac{1}{2}x + c, & x > 2 \end{cases}, \qquad f(2) = v$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1$$



Limit kiri ≠ limit kanan ⇒ limit di x = 2 tidak ada (diskontinuitas lompatan)

Limit kiri	Limit kanan	f(2)	Kesimpulan
3	1	1	limit tidak ada (lompatan)

Geser c agar potongan oranye menyambung dengan potongan biru, lalu seret titik magenta $f(2)$ ke tempat yang tepat. Perhatikan urutan syaratnya: limit kiri = limit kanan dulu, baru $f(2)$ = limit.

Jenis diskontinuitas	Contoh	Ciri pada grafik	Bisa "ditambal"?
Lubang (dapat dihapus)	$\frac{x^2-4}{x-2}$ di $x = 2$	titik kosong; limitnya ada	ya: definisikan $f(2) = 4$

Lompatan	$\frac{\lvert x\rvert}{x}$ di $x=0$; tarif parkir per jam	limit kiri ≠ limit kanan	tidak
Tak hingga	$\frac{1}{x}$ di $x=0$	asimtot tegak	tidak

COBA SENDIRI **Mencari konstanta agar kontinu**

Tentukan a agar fungsi $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<1\\ x^2+3, & x\geq 1\end{cases}$ kontinu di $x=1$.

1. Syarat 1: $f(1)=1^2+3=4$. Terdefinisi.
2. Limit kanan: $\lim_{x\to 1^+}(x^2+3)=4$. Limit kiri: $\lim_{x\to 1^-}(2x+a)=2+a$.
3. Syarat 2 dan 3: $2+a=4=f(1)$, jadi $a=2$.

$a=2$. Potongan kiri $y=2x+2$ tepat menyambung ke titik $(1;\ 4)$ pada parabola, tanpa lubang dan tanpa lompatan.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TEOREMA NILAI ANTARA

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan k terletak di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka ada c di antara a dan b dengan $f(c)=k$. Grafik yang tidak terputus tidak bisa "melompati" garis $y=k$.

- **Mencari akar:** $f(x)=x^3+x-1$ memenuhi $f(0)=-1<0$ dan $f(1)=1>0$, jadi ada akar di antara 0 dan 1. Membagi dua selang berulang-ulang (*metode bagi dua*) menjepit akarnya: $0{,}6823\ldots$
- **Rasa olimpiade:** setiap saat, selalu ada dua titik yang berseberangan tepat di khatulistiwa dengan suhu yang sama. Buktinya: fungsi $g(\theta)=T(\theta)-T(\theta+180^\circ)$ kontinu dan $g(\theta+180^\circ)=-g(\theta)$, jadi g berganti tanda dan pasti bernilai 0 di suatu tempat.

Speedometer

Jarum speedometer menunjukkan kecepatan *sesaat*: limit kecepatan rata-rata pada selang waktu yang makin singkat.

Teh tubruk mendingin

Suhu teh turun cepat lalu melambat, mendekati suhu ruangan. Suhu ruangan adalah asimtot datar grafiknya.

Mengisi baterai ponsel

Pengisian sengaja diperlambat menjelang 100% agar baterai awet, sehingga grafik persentasenya merayap makin pelan menuju garis 100%.

Pabrik tahu

Biaya rata-rata per potong turun saat produksi bertambah dan mendekati biaya bahan: sebuah limit di tak hingga.



Layar & peta digital

Lingkaran di layar sebenarnya segi banyak dari piksel, dan jalan yang melengkung tampak lurus saat peta diperbesar.

Cek Cepat

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \ldots$$

0

8

16

tidak ada, karena $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - x}{2x^3 + 7} = \ldots$

- 0
- ∞
- $\frac{5}{7}$
- $\frac{5}{2}$

Grafik f mendekati titik kosong $(1;\ 3)$ dari kiri dan dari kanan, sedangkan $f(1) = 5$. Pernyataan yang benar adalah...

- $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, dan f tidak kontinu di $x = 1$
- $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$
- f kontinu di $x = 1$
- limitnya tidak ada

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: kertas yang tak pernah habis

Bahan: selembar kertas HVS, gunting, pensil, buku catatan.

1. Anggap luas kertas utuh = 1. Gunting kertas menjadi dua bagian sama besar. Taruh satu bagian di meja: luas di meja $\frac{1}{2}$.
2. Gunting sisa kertas di tanganmu menjadi dua lagi. Taruh satu bagian di meja, di samping potongan pertama: luas di meja $\frac{3}{4}$.
3. Ulangi terus sampai potongannya terlalu kecil untuk digunting.
4. Setiap langkah, catat dalam tabel: nomor langkah n, luas di meja, dan luas di tangan.
5. Susun semua potongan di meja. Bentuk apa yang terlihat?

Pertanyaan: Tuliskan rumus luas di tangan dan luas di meja setelah n langkah. Berapa limitnya jika $n \to \infty$? Mengapa percobaan ini mirip teka-teki 0,999... = 1 (petunjuk: dalam basis dua, $0{,}111\ldots_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$)?

⚡ RINGKASAN KILAT — Bab 27 dalam 3 menit

☑️ Kamu sekarang bisa...

- menjelaskan makna **limit** dengan bahasa sehari-hari, **tabel mendekat**, dan grafik (termasuk grafik berlubang)
- membedakan **limit kiri**, **limit kanan**, dan nilai fungsi tepat di suatu titik
- menghitung limit aljabar dengan **substitusi**, **faktorisasi**, dan **perkalian sekawan**
- menentukan **limit di tak hingga** dan **asimtot** fungsi rasional
- memakai limit istimewa $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ dan memeriksa **kontinuitas** sebuah fungsi

🔑 Istilah kunci

limit · tabel mendekat · kiri · kanan · substitusi · bentuk tak tentu · sekawan · asimtot datar · Teorema Apit · kontinu

🧮 Rumus penting

$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a},\qquad x=a+h$$

Limit selisih kuadrat (tabel mendekat). Bentuk 0/0 di x = a ternyata menyembunyikan 2a: makin kecil jaraknya h, makin dekat f(x) ke 2a. Jadi limit $(x^2 - a^2)/(x - a)$ untuk $x \to a$ sama dengan 2a.

$$\bar{C}=\frac{F+v\,n}{n}=\frac{F}{n}+v$$

Biaya rata-rata pabrik tahu. Biaya tetap F dibagi rata ke n potong tahu, lalu ditambah biaya bahan v per potong. Makin banyak tahu dibuat, biaya rata-rata turun mendekati v, tetapi tidak pernah di bawahnya.

$$A=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Bunga majemuk menuju e. Uang Rp1 dengan bunga khayalan 100% setahun, dibungakan n kali. Makin sering dibungakan, hasilnya mendekati bilangan e ≈ 2,71828, bukan membesar tanpa batas.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Limit tidak sama dengan nilai fungsi.
- $\frac{0}{0}$ bukan 0, bukan 1, dan bukan jawaban akhir.
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ hanya berlaku jika x dalam radian.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=27

Teka-teki untuk Bab 28

Speedometer motor Ayu menunjukkan 40 km/jam tepat ketika melewati gapura kampung. Padahal kecepatan = jarak ÷ waktu, dan "tepat ketika" berarti waktu tempuhnya 0 detik dan jaraknya 0 meter: $\frac{0}{0}$! Jadi, speedometer sebenarnya mengukur apa?

▼ **Intip petunjuk**

Hitung kecepatan rata-rata pada selang waktu yang makin singkat: 1 detik, 0,1 detik, 0,01 detik, dan seterusnya. Nilainya mendekati satu bilangan, yaitu kecepatan sesaat. Itu sebuah limit berbentuk $\frac{0}{0}$, persis seperti yang kamu pelajari di bab ini! Di Bab 28, limit jenis ini diberi nama khusus: **turunan**.

BAB 28 · KALKULUS

28 Turunan: Rahasia di Balik Jarum Speedometer

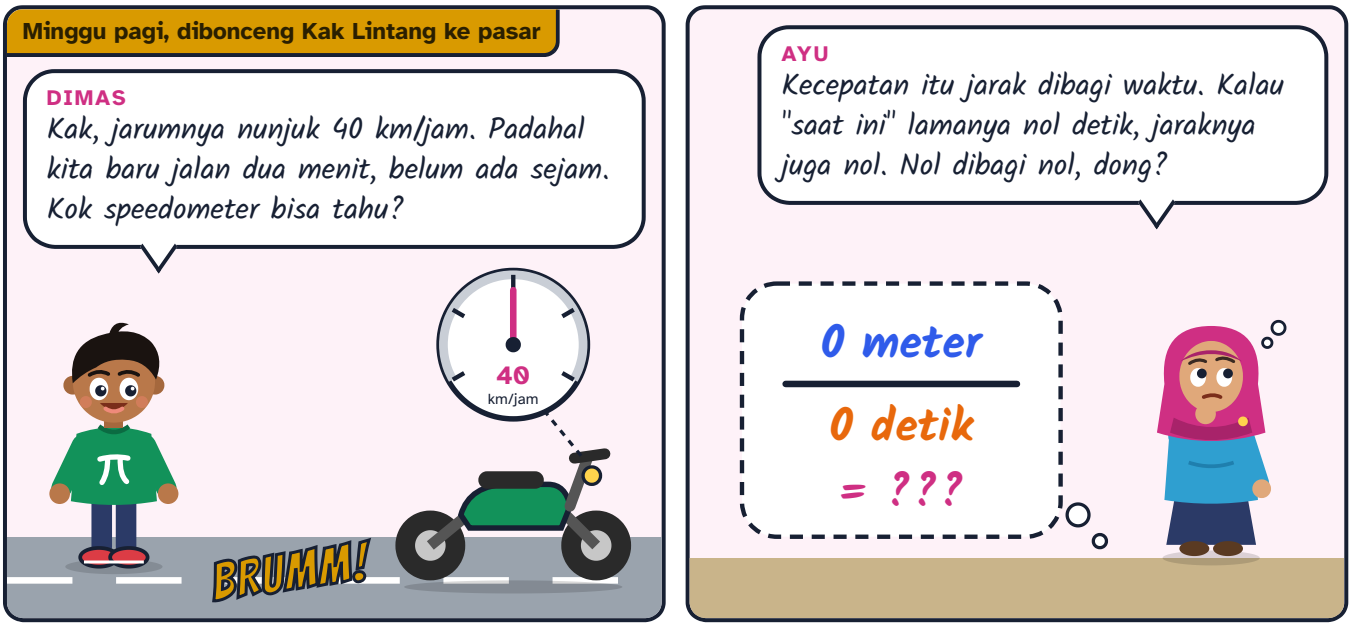
Jarum speedometer menunjuk 40 km/jam, padahal motornya belum berjalan satu jam pun. Angka itu adalah kecepatan pada *satu saat*, dan alat matematika yang menangkapnya bernama turunan.

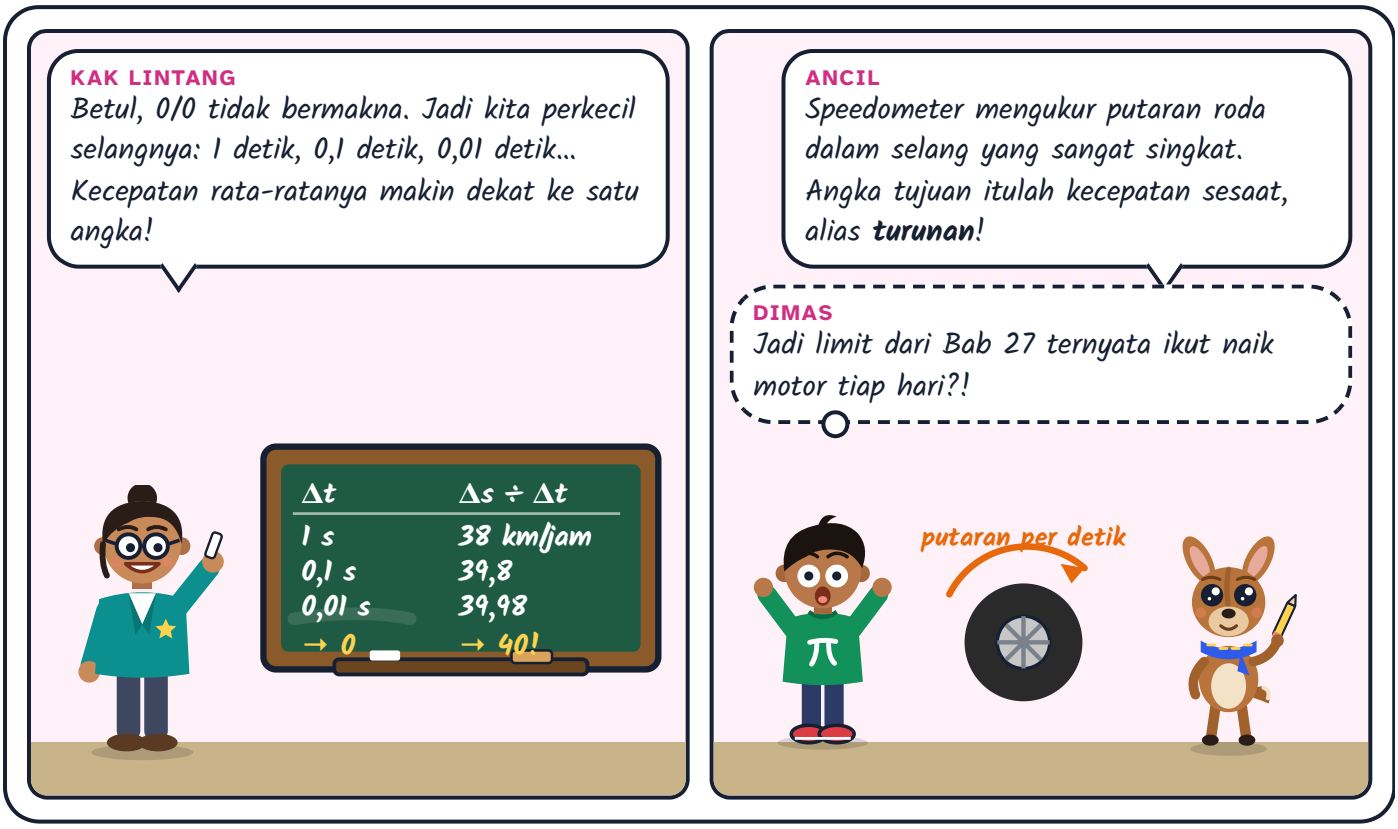
Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan **laju perubahan rata-rata** (kemiringan tali busur) dan **laju sesaat** (kemiringan garis singgung);
- menjelaskan turunan sebagai **limit** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ketika $h \to 0$;
- menurunkan fungsi dengan **aturan pangkat, jumlah, rantai, hasil kali, dan hasil bagi**;
- memakai turunan $\sin x$, $\cos x$, e^x, dan $\ln x$;
- memaknai turunan sebagai **kecepatan dan laju**, serta menulis **persamaan garis singgung**.

SPEEDOMETER YANG BIKIN PENASARAN

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Kak Lintang menempuh 5,25 km dalam 10 menit, termasuk berhenti satu menit di lampu merah. Kecepatan rata-ratanya 31,5 km/jam. Apakah jarum speedometer *pasti* pernah menunjuk tepat 31,5 km/jam?

- Tidak harus. Jarumnya bisa saja melompati angka itu.
- Hanya kalau motornya tidak pernah berhenti.
- Ya, pasti pernah, paling sedikit satu kali.
- Hanya kalau kecepatannya tetap sepanjang jalan.

Jawabannya: pasti pernah. Jarum speedometer bergerak tanpa melompat. Kalau sepanjang perjalanan jarumnya selalu di bawah 31,5, jarak yang ditempuh pasti kurang dari 5,25 km; kalau selalu di atasnya, jaraknya pasti lebih. Jadi jarum harus melewati angka 31,5. Fakta ini bernama **Teorema Nilai Rata-rata**, dan kamu bisa memburu saat-saat itu sendiri di Lab Mini speedometer pada subbab 28.6.

28.1 Laju perubahan: rata-rata dan sesaat

Di Bab 9 kamu sudah berkenalan dengan **kemiringan** garis lurus: naik dibagi maju. Garis lurus itu "jujur": kemiringannya sama di mana-mana. Masalahnya, dunia nyata jarang selurus itu. Harga cabai bisa naik pelan, lalu tiba-tiba melonjak menjelang hari raya. Motor melaju, mengerem, lalu melaju lagi. Untuk menceritakan perubahan seperti ini kita butuh satu kata kunci: **laju perubahan**.

Hari	Sen	Sel	Rab	Kam	Jum	Sab	Min
Harga cabai rawit (ribu Rp/kg)	40	42	45	52	60	63	64
Naik dari hari sebelumnya	–	+2	+3	+7	+8	+3	+1

Tabel di atas adalah data rekaan harga cabai rawit seminggu menjelang hari raya. Dari Senin sampai Minggu harga naik $64 - 40 = 24$ ribu rupiah dalam 6 hari, jadi rata-rata naik **Rp4.000 per hari**. Tetapi lihat baris terakhir: dari Kamis ke Jumat harga melonjak Rp8.000 dalam sehari, sedangkan dari Sabtu ke Minggu hanya Rp1.000. Laju rata-rata seminggu menyembunyikan cerita harian itu.

DEFINISI · LAJU PERUBAHAN RATA-RATA

Laju perubahan rata-rata fungsi f dari $x = a$ sampai $x = b$ adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pada grafik, angka ini adalah kemiringan **tali busur**, yaitu ruas garis yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ pada kurva.

Bahasa sederhana · Gampangnya: laju adalah **besar perubahan dibagi lama waktunya**. Harga naik Rp6.000 dalam 3 hari? Lajunya Rp2.000 per hari. Motor menempuh 20 km dalam setengah jam? Lajunya 40 km per jam.

CONTOH **Laju harga cabai**

Memakai tabel di atas, berapa laju kenaikan rata-rata harga cabai dari Selasa sampai Jumat?

1. Perubahan harga: $60 - 42 = 18$ ribu rupiah per kg.
2. Lama waktu: dari Selasa ke Jumat ada 3 hari (Selasa → Rabu → Kamis → Jumat).
3. Laju rata-rata: $\frac{18}{3} = 6$ ribu rupiah per kg per hari.

Rata-rata harga naik Rp6.000 per kg setiap hari. Satuan laju selalu "satuan hasil per satuan waktu": rupiah per hari, km per jam, jiwa per tahun.

Sekarang kembali ke speedometer. Sebutir kelapa yang jatuh dari pohon menempuh jarak $s(t) = 5t^2$ meter setelah t detik (percepatan gravitasi dibulatkan menjadi $10\ \mathrm{m/s^2}$, hambatan udara diabaikan). Berapa kecepatannya *tepat* pada detik ke-2? Kita tidak bisa membagi dengan selang nol, tetapi kita bisa memakai selang yang makin pendek:

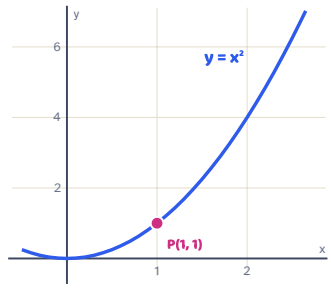
Selang waktu	Jarak tempuh Δs	Kecepatan rata-rata $\Delta s \div \Delta t$
2 s sampai 3 s	45 − 20 = 25 m	25 m/s
2 s sampai 2,1 s	22,05 − 20 = 2,05 m	20,5 m/s
2 s sampai 2,01 s	20,2005 − 20 = 0,2005 m	20,05 m/s
2 s sampai 2,001 s	20,020005 − 20 = 0,020005 m	20,005 m/s

Kecepatan rata-ratanya makin dekat ke **20 m/s**. Angka tujuan itulah **kecepatan sesaat** pada $t = 2$. Kamu baru saja menghitung sebuah limit, persis seperti di Bab 27:

$$v(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{\Delta t} = 20\ \mathrm{m/s}.$$

28.2 Dari tali busur ke garis singgung

Pada grafik, kecepatan rata-rata adalah kemiringan tali busur. Apa yang terjadi pada tali busur itu kalau selangnya kita perkecil terus? Tonton animasi berikut: titik Q merayap mendekati titik P pada parabola $y = x^2$.

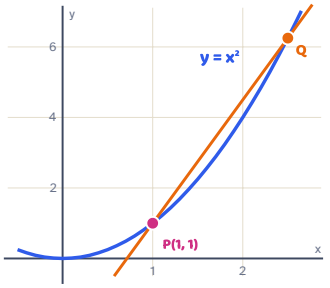


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan

Berapa kemiringan di P?

Langkah 1. Parabola $y = x^2$ melengkung, jadi kemiringannya berubah-ubah. Berapa kemiringan kurva tepat di titik $P(1, 1)$? Satu titik saja tidak cukup untuk menghitung "naik dibagi maju".

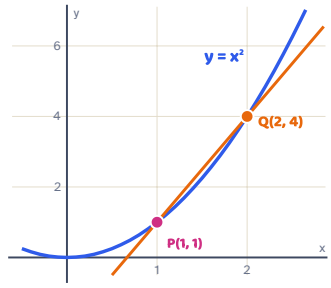


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5

(6,25 − 1) ÷ 1,5 = 3,5

Langkah 2. Ambil titik kedua Q di $x = 1 + h$. Untuk $h = 1{,}5$, $Q = (2{,}5;\ 6{,}25)$ dan kemiringan tali busur $PQ = \dfrac{6{,}25 - 1}{1{,}5} = 3{,}5$.

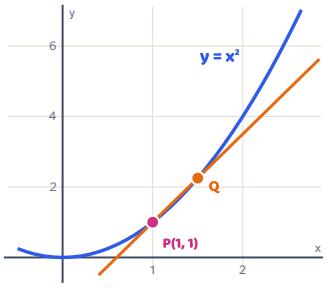


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3

(4 − 1) ÷ 1 = 3

Langkah 3. Dekatkan Q: untuk $h = 1$, $Q = (2, 4)$ dan kemiringannya $\dfrac{4 - 1}{1} = 3$.

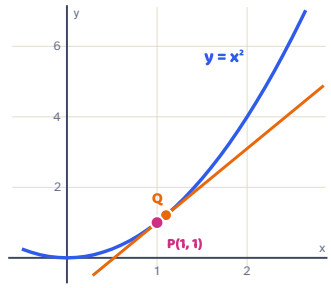


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3
0,5	(1,5; 2,25)	2,5

(2,25 − 1) ÷ 0,5 = 2,5

Langkah 4. Untuk $h = 0{,}5$: $Q = (1{,}5;\ 2{,}25)$, kemiringannya $\dfrac{2{,}25 - 1}{0{,}5} = 2{,}5$. Tali busur berputar pelan.

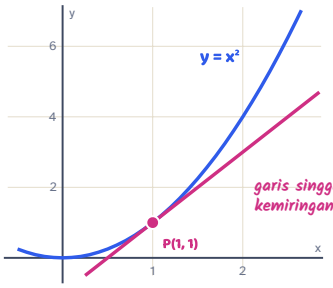


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3
0,5	(1,5; 2,25)	2,5
0,1	(1,1; 1,21)	2,1

(1,21 − 1) ÷ 0,1 = 2,1

Langkah 5. Untuk $h = 0{,}1$: kemiringannya $\dfrac{1{,}21 - 1}{0{,}1} = 2{,}1$. Di sekitar P, tali busur hampir menempel pada kurva.



Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3
0,5	(1,5; 2,25)	2,5
0,1	(1,1; 1,21)	2,1
→ 0	→ P	→ 2

F'(1) = 2

Langkah 6. Saat $h \to 0$, kemiringannya menuju 2. Garis batas itu adalah **garis singgung** di P, dan kemiringannya disebut **turunan**: $f'(1) = 2$.

DEFINISI · TURUNAN

Turunan fungsi f di titik x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

asalkan limit ini ada. Secara geometris, $f'(x)$ adalah **kemiringan garis singgung** grafik f di titik $(x, f(x))$. Secara fisik, $f'(x)$ adalah **laju perubahan sesaat** f terhadap x.

BANYAK NAMA, SATU MAKNA

Turunan $y = f(x)$ bisa ditulis $f'(x)$ (dibaca "f aksen x"), y', $\frac{dy}{dx}$, atau $\frac{d}{dx}f(x)$. Lambang $\frac{dy}{dx}$ mengingatkan asal-usulnya: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ketika Δx menjadi sangat-sangat kecil. Proses mencari turunan disebut **diferensiasi** atau "menurunkan" fungsi.

CONTOH **Turunan x² dari definisi**

Gunakan definisi untuk mencari turunan $f(x) = x^2$, lalu hitung $f'(3)$.

1. $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$.
2. Bagi dengan h (boleh, karena $h \neq 0$ selama masih mendekat): $\frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$.
3. Sekarang biarkan $h \to 0$: $f'(x) = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$.
4. Jadi $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

$f'(x) = 2x$ dan $f'(3) = 6$: garis singgung parabola di titik $(3, 9)$ naik 6 satuan untuk setiap 1 satuan ke kanan. Cocok dengan animasi tadi: $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

AWAS JEBAKAN

Jangan memasukkan $h = 0$ terlalu cepat! Kalau langsung disubstitusi, $\frac{f(x+0) - f(x)}{0} = \frac{0}{0}$, bentuk tak tentu yang tidak bermakna. Sederhanakan dulu sampai h di penyebut hilang (seperti $2x + h$), baru biarkan $h \to 0$.

GRAFIK HIDUP

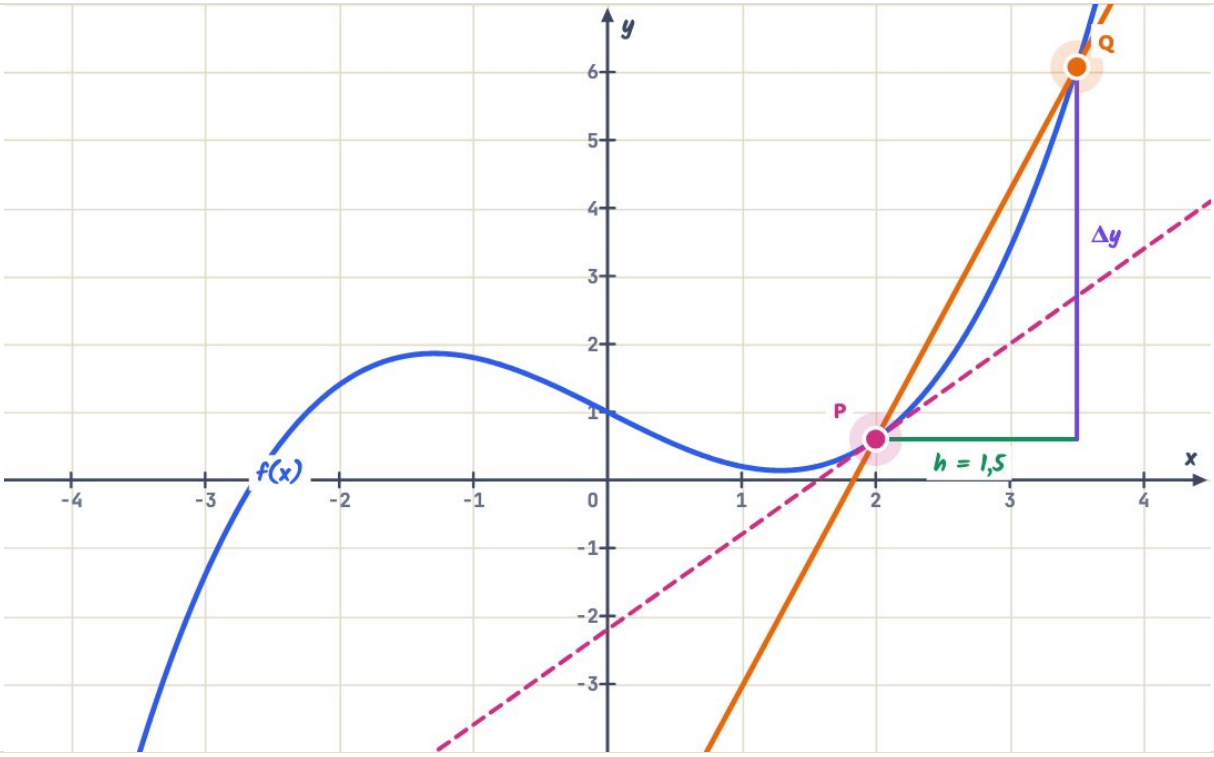
Tali busur yang berubah menjadi garis singgung

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28

$$m_{PQ} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

$$m_{PQ} = 3{,}65 \quad f'(2) = 1{,}4$$

Kurva biru: f(x) = 0,2x³ − x + 1. Saat Q → P, kemiringan tali busur menuju f′(x_P).



h = x_Q − x_P	kemiringan tali busur PQ	kemiringan garis singgung di P
1,5	3,65	1,4

Seret titik **Q** mendekati titik **P**. Tali busur oranye berputar dan akhirnya berimpit dengan garis putus-putus magenta, yaitu garis singgung di P. Dekati juga dari kiri! Jika Q tepat di P, rumus tali busur menjadi 0/0, sehingga kemiringannya ditampilkan sebagai "—".

RUMUS HIDUP **Kemiringan tali busur pada y = x²**

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Naik dibagi maju antara dua titik pada parabola. Semakin kecil h, semakin dekat hasilnya ke kemiringan garis singgung, yaitu 2x.

x Titik P di x | h Jarak ke Q (h) | m Kemiringan tali busur PQ

KEMIRINGAN TALI BUSUR PQ

3

Dari x = **1** ke x = **2**: y naik **3**, x maju **1**, jadi kemiringannya **3**. Hasilnya selalu tepat 2x + h. Kalau h menyusut menuju 0, kemiringan tali busur menuju 2x = **2**. Itulah kemiringan garis singgung di P, yaitu f′(**1**).

Cek satuan: Kemiringan di sini tidak bersatuan karena x dan y sama-sama bilangan murni. Jika y dalam meter dan x dalam detik, satuannya menjadi m/s.

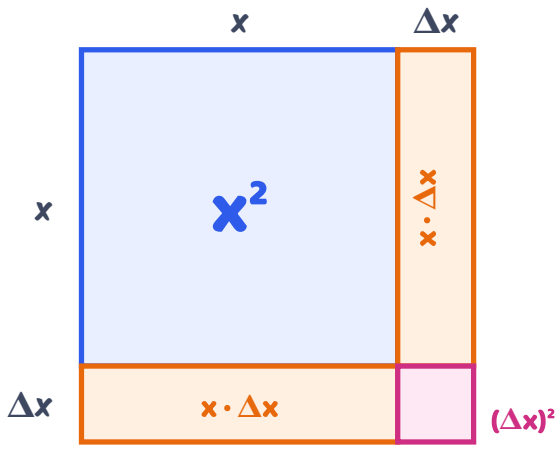
RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TALI-BUSUR

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 1665–1666, ketika Universitas Cambridge ditutup karena wabah, Isaac Newton yang masih muda mengembangkan "metode fluksi" untuk menghitung laju perubahan benda yang bergerak. Beberapa tahun kemudian Gottfried Wilhelm Leibniz di Jerman menemukan gagasan serupa secara mandiri dan menerbitkannya lebih dulu, pada 1684. Lambang $\frac{dy}{dx}$ yang kita pakai sampai sekarang adalah ciptaan Leibniz, sedangkan lambang $f'(x)$ dipopulerkan oleh Joseph-Louis Lagrange lebih dari seabad kemudian. Perdebatan "siapa yang pertama" sempat memanaskan hubungan ilmuwan Inggris dan daratan Eropa selama puluhan tahun. Kini keduanya diakui sebagai penemu kalkulus.

28.3 Aturan pangkat, konstanta, dan jumlah

Menghitung limit setiap kali mau menurunkan fungsi tentu melelahkan. Kabar baiknya, hasil-hasilnya membentuk pola yang sangat rapi. Lihat dulu gambar ini: mengapa turunan x^2 adalah $2x$?



Sisi x bertambah sedikit, sebesar Δx.

Tambahan luas = 2 · x · Δx + (Δx)²

Laju = tambahan luas ÷ Δx = 2x + Δx

Δx → 0 ⇒ (x²)' = 2x

Pojok mungil (Δx)² menyusut jauh lebih cepat, jadi akhirnya yang tersisa hanya dua pita.

Bukti tanpa kata untuk $(x^2)' = 2x$: ketika sisi persegi bertambah Δx, luasnya bertambah dua pita $x\,\Delta x$ dan satu pojok mungil $(\Delta x)^2$.

Kalau kamu mengulang perhitungan dengan definisi untuk x^3, hasilnya $3x^2$; untuk x^4, hasilnya $4x^3$. Polanya mulai terlihat: pangkat turun ke depan, lalu pangkatnya berkurang satu.

ATURAN DASAR TURUNAN

- **Konstanta:** $\dfrac{d}{dx}\,c = 0$. Sesuatu yang tidak berubah, lajunya nol.
- **Aturan pangkat:** $\dfrac{d}{dx}\,x^n = n\,x^{n-1}$ untuk setiap bilangan real n (untuk n yang bukan bilangan bulat, ambil $x > 0$).
- **Kelipatan konstanta:** $\dfrac{d}{dx}\big(a\,f(x)\big) = a\,f'(x)$.
- **Jumlah dan selisih:** $(f \pm g)' = f' \pm g'$. Turunkan suku demi suku.

$$\frac{d}{dx}\left(a\,x^{n}\right) = a\,n\,x^{n-1}$$

Bukti aturan pangkat untuk n bilangan asli

Dengan teorema binomial, $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$. Maka

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}.$$

Semua suku setelah suku pertama masih mengandung h, jadi semuanya lenyap ketika $h \to 0$. Yang tersisa hanya nx^{n-1}. Untuk pangkat negatif dan pecahan, buktinya memakai aturan hasil bagi dan aturan rantai pada subbab 28.4.

TRIK KAK LINTANG

Bayangkan pangkatnya "turun gunung": pangkat melompat ke depan menjadi pengali, lalu pangkat yang tersisa berkurang satu, misalnya $x^5 \to 5x^4$. Sebelum menurunkan, ubah dulu akar dan pecahan menjadi pangkat: $\sqrt{x} = x^{1/2}$ dan $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Hasilnya $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dan $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

RUMUS HIDUP **Aturan pangkat: kemiringan y = a·x^n**

$$m = a\,n\,x^{\,n-1}$$

Turunkan pangkat n ke depan untuk dikalikan dengan a, lalu kurangi pangkatnya satu. Masukkan nilai x untuk mendapat kemiringan garis singgung di titik itu.

- a Koefisien a
- n Pangkat n
- x Di titik x
- m Kemiringan garis singgung

KEMIRINGAN GARIS SINGGUNG

24

kurva sedang naik di titik ini ↗

Pangkat **3** turun ke depan: **2** × **3** = **6**, lalu pangkatnya berkurang satu menjadi **2**. Jadi turunan **2**·x^**3** adalah **6**·x^(**2**). Di x = **2**, kemiringannya **6** × (**2**)^(**2**) = **24**.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TURUNAN-PANGKAT

KERJAKAN BERSAMA

Turunkan suku demi suku

Tentukan turunan $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ dan $g(x) = 6\sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$. Hitung pula $f'(2)$ dan $g'(4)$.

1. Suku demi suku: $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 - 0 = 12x^2 - 10x + 7$.
2. $f'(2) = 12 \cdot 4 - 10 \cdot 2 + 7 = 48 - 20 + 7 = 35$.
3. Tulis ulang $g(x) = 6x^{1/2} + 2x^{-1}$, lalu $g'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 2 \cdot (-1)x^{-2} = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$.
4. $g'(4) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{16} = 1{,}5 - 0{,}125 = 1{,}375$.

$f'(x) = 12x^2 - 10x + 7$ dengan $f'(2) = 35$, dan $g'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$ dengan $g'(4) = 1{,}375$.
Konstanta -2 "menghilang" karena tidak menyumbang perubahan apa pun.

ADU CEPAT

Kemiringan kilat: aturan pangkat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Turunkan pangkat ke depan: f′(x) = a·n·x^{n-1}, lalu masukkan nilai x. Contoh: f(x) = 3x^2 memberi f′(x) = 6x, jadi f′(2) = 12.

ADU CEPAT

Koefisien kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Koefisien baru = koefisien lama × pangkat. Contoh: turunan 3x^5 adalah 15x^4.

MITOS

"Turunan itu cuma 'pangkat turun ke depan'."

FAKTA

Itu hanya jalan pintas untuk x^n. Makna turunan adalah **laju perubahan sesaat**, atau kemiringan garis singgung. Untuk $\sin x$, e^x, dan hasil kali fungsi, aturannya berbeda.

MITOS

"Garis singgung hanya menyentuh kurva di satu titik dan tidak pernah memotongnya."

FAKTA

Garis singgung $y = x^3$ di $(0, 0)$ adalah sumbu-x, dan garis itu menembus kurva. Garis singgung juga bisa memotong kurva lagi di tempat lain. Yang penting, di titik singgung arahnya sama dengan arah kurva.

MITOS

"Kalau $f'(a) = 0$, berarti $f(a) = 0$."

FAKTA

Turunan mengukur **kemiringan**, bukan ketinggian. Fungsi $f(x) = x^2 + 3$ punya $f'(0) = 0$, padahal $f(0) = 3$. Garis singgungnya mendatar di ketinggian 3.

28.4 Aturan rantai, hasil kali, dan hasil bagi

Fungsi di dunia nyata sering berupa gabungan: hasil kali dua fungsi, pecahan, atau fungsi di dalam fungsi. Sebelum belajar aturannya, uji dulu intuisimu.

Tebak Dulu!

Turunan x^2 adalah $2x$, dan turunan x^3 adalah $3x^2$. Jadi turunan $x^2 \cdot x^3$ adalah...

$2x \cdot 3x^2 = 6x^3$, cukup kalikan kedua turunannya.

$5x^4$.

$6x^4$.

$2x + 3x^2$.

Jawabannya: $5x^4$. Ingat $x^2 \cdot x^3 = x^5$, dan turunan x^5 adalah $5x^4$. Jawaban "kalikan saja turunannya" memberi $6x^3$, dan itu keliru! Turunan hasil kali punya aturan sendiri: $(x^2)' \cdot x^3 + x^2 \cdot (x^3)' = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$. Cocok!

TIGA ATURAN PENTING

Misalkan u dan v fungsi dari x yang punya turunan.

- **Aturan hasil kali:** $(uv)' = u'v + uv'$.
- **Aturan hasil bagi:** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, asalkan $v \neq 0$.
- **Aturan rantai:** jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, atau $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Mengapa aturan hasil kali seperti itu? (bukti dengan luas persegi panjang)

Pandang $u \cdot v$ sebagai luas persegi panjang bersisi u dan v. Jika x bertambah sedikit, sisi-sisinya bertambah Δu dan Δv. Luas baru dikurangi luas lama terdiri atas dua pita dan satu pojok mungil:

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v.$$

Bagi dengan Δx: $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$. Saat $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$ juga, sehingga suku terakhir lenyap. Hasilnya $(uv)' = uv' + vu'$. Ini perluasan gambar persegi di subbab 28.3!

AWAS JEBAKAN

Turunan hasil kali **bukan** hasil kali turunan: $(uv)' \neq u'v'$. Begitu pula turunan hasil bagi bukan $\frac{u'}{v'}$. Cek dengan contoh kecil, misalnya $u = v = x$: $(x \cdot x)' = (x^2)' = 2x$, padahal $u'v' = 1 \cdot 1 = 1$.

TRIK KAK LINTANG: RANTAI SEPEDA

Aturan rantai mirip gir sepeda. Kalau roda belakang berputar 3 kali setiap gir depan berputar sekali, dan kakimu memutar gir depan 2 kali per detik, roda belakang berputar $3 \times 2 = 6$ kali per detik. Laju-laju yang bersambung **dikalikan**. Untuk fungsi bersusun, kupaslah seperti bawang: turunkan lapisan luar (biarkan isinya utuh), lalu kalikan dengan turunan lapisan dalam.

KERJAKAN BERSAMA

Kupas bawang: aturan rantai

Turunkan $y = (3x^2 + 1)^4$.

1. Lapisan luar: u^4 dengan $u = 3x^2 + 1$. Turunannya $4u^3$.
2. Lapisan dalam: $u = 3x^2 + 1$, turunannya $u' = 6x$.
3. Kalikan: $y' = 4(3x^2 + 1)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 + 1)^3$.

$y' = 24x(3x^2 + 1)^3$. Bandingkan dengan cara "jabarkan dulu" yang menghasilkan polinomial berderajat 8: jauh lebih panjang!

COBA SENDIRI

Hasil kali dan hasil bagi

Tentukan turunan (a) $y = x^2(2x - 1)^3$ dan (b) $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$. Coba sendiri dulu sebelum membuka langkahnya!

1. (a) Ambil $u = x^2$ dan $v = (2x - 1)^3$. Maka $u' = 2x$ dan, dengan aturan rantai, $v' = 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = 6(2x - 1)^2$.
2. $y' = 2x(2x - 1)^3 + x^2 \cdot 6(2x - 1)^2 = 2x(2x - 1)^2\big[(2x - 1) + 3x\big] = 2x(2x - 1)^2(5x - 1)$.
3. (b) Ambil $u = x^2$ dan $v = x + 1$, sehingga $u' = 2x$ dan $v' = 1$. Maka $y' = \dfrac{2x(x + 1) - x^2 \cdot 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$.

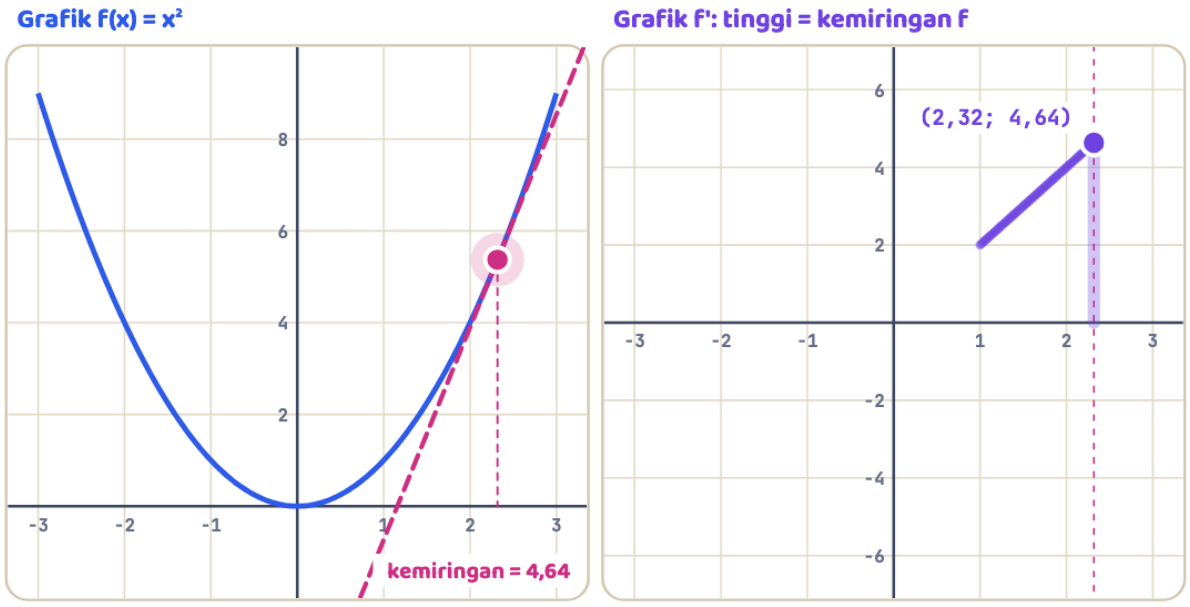
(a) $y' = 2x(2x - 1)^2(5x - 1)$; (b) $y' = \dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$. Memfaktorkan hasil akhir akan sangat berguna di Bab 29, saat kita mencari di mana turunan bernilai nol.

28.5 Turunan fungsi trigonometri, eksponen, dan logaritma

Bagaimana dengan fungsi yang bukan polinomial, seperti $\sin x$ atau e^x? Daripada langsung memberi rumus, mari jadi detektif. Di Lab Mini berikut, grafik kiri adalah f, sedangkan grafik kanan mencatat **kemiringan** f sebagai titik ungu. Geser titiknya pelan-pelan dan perhatikan jejak yang terbentuk di kanan.

LAB MINI **Pabrik grafik f': kemiringan menjadi ketinggian**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28



f(x)	f′(x) = kemiringan	Kurva sedang	Titik jejak
5,371	4,635	naik ↗	73

Seret titik magenta di grafik kiri (atau tekan ▶ **Jalankan** untuk menyapu otomatis). Setiap kemiringan garis singgung dicatat sebagai titik ungu di kanan. Pilih **sin x**: jejaknya membentuk kurva apa? Pilih **eˣ**: mengapa kedua grafik kembar? Pilih **|x|** lalu berhenti tepat di $x = 0$.

Kalau kamu memilih $\sin x$, jejak ungu membentuk gelombang yang dimulai dari puncak: itu grafik $\cos x$! Pilihan e^x menghasilkan dua grafik yang persis sama. Inilah keistimewaan bilangan $e \approx 2{,}718$: ia dipilih tepat agar kemiringan e^x di $x = 0$ bernilai 1, dan akibatnya turunan e^x adalah dirinya sendiri. Adapun $|x|$ punya pojok tajam di $x = 0$, sehingga di sana tidak ada satu garis singgung pun yang "paling pas": turunannya tidak ada.

TURUNAN FUNGSI ISTIMEWA

Untuk x dalam **radian**:

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (e^x$$

$f(x)$	$f'(x)$	**Catatan**
c (konstanta)	0	tidak berubah, lajunya nol
x^n	nx^{n-1}	aturan pangkat
$\sin x$	$\cos x$	x dalam radian
$\cos x$	$-\sin x$	perhatikan tanda minus
$\tan x$	$\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	dari aturan hasil bagi $\dfrac{\sin x}{\cos x}$
e^x	e^x	turunannya dirinya sendiri
a^x	$a^x \ln a$	karena $a^x = e^{x \ln a}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	untuk $x > 0$

Bukti $(\sin x)' = \cos x$ dan $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Dengan rumus jumlah sudut, $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$. Maka

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

Dari Bab 27, untuk h dalam radian, $\dfrac{\sin h}{h} \to 1$ dan $\dfrac{\cos h - 1}{h} \to 0$ ketika $h \to 0$. Jadi limitnya $\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$.

Untuk $\ln x$: jika $y = \ln x$ maka $x = e^y$. Turunkan terhadap y: $\dfrac{dx}{dy} = e^y = x$. Karena laju kebalikan adalah kebalikan laju, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

AWAS JEBAKAN

Rumus $(\sin x)' = \cos x$ hanya berlaku jika x dalam radian. Jika x dalam derajat, $\sin x^\circ = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)$, dan aturan rantai memberi $(\sin x^\circ)' = \frac{\pi}{180}\cos x^\circ$. Itulah sebabnya kalkulus selalu memakai radian.

KERJAKAN BERSAMA

Rantai bertemu e, sin, dan ln

Turunkan (a) $y = e^{3x}$, (b) $y = \sin(x^2)$, dan (c) $y = \ln(5x)$.

1. (a) Luar e^u, dalam $u = 3x$: $y' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$.
2. (b) Luar $\sin u$, dalam $u = x^2$: $y' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2)$.
3. (c) Luar $\ln u$, dalam $u = 5x$: $y' = \dfrac{1}{5x} \cdot 5 = \dfrac{1}{x}$.

(a) $3e^{3x}$; (b) $2x\cos(x^2)$; (c) $\dfrac{1}{x}$. Hasil (c) mengejutkan? Ingat $\ln(5x) = \ln 5 + \ln x$, dan konstanta $\ln 5$ turunannya nol.

Turunan e^x yang istimewa itu menjelaskan banyak hal di alam. Jika penduduk tumbuh dengan laju relatif tetap r per tahun, modelnya $P(t) = P_0 e^{rt}$. Dengan aturan rantai, $P'(t) = rP_0 e^{rt} = r\,P(t)$: **laju pertumbuhan sebanding dengan jumlah penduduk saat itu**. Makin banyak orang, makin cepat pula bertambah.

RUMUS HIDUP **Laju pertumbuhan penduduk**

$$P'(t) = r\,P_0\,e^{rt}$$

Pada pertumbuhan eksponensial, laju bertambahnya penduduk sebanding dengan banyaknya penduduk saat itu.

P_0 Penduduk awal `juta jiwa` | r Laju relatif `% per tahun` | t Waktu sejak awal `tahun` | $P'(t)$ Laju pertumbuhan `juta jiwa/tahun`

LAJU PERTUMBUHAN
3,08
juta jiwa/tahun

Setelah **0** tahun, penduduk **±280** juta jiwa dan bertambah **±3,08** juta jiwa per tahun, atau sekitar **8.438** jiwa setiap hari.

Cek satuan: Jika P_0 dalam juta jiwa dan r per tahun, maka P′(t) dalam juta jiwa per tahun.

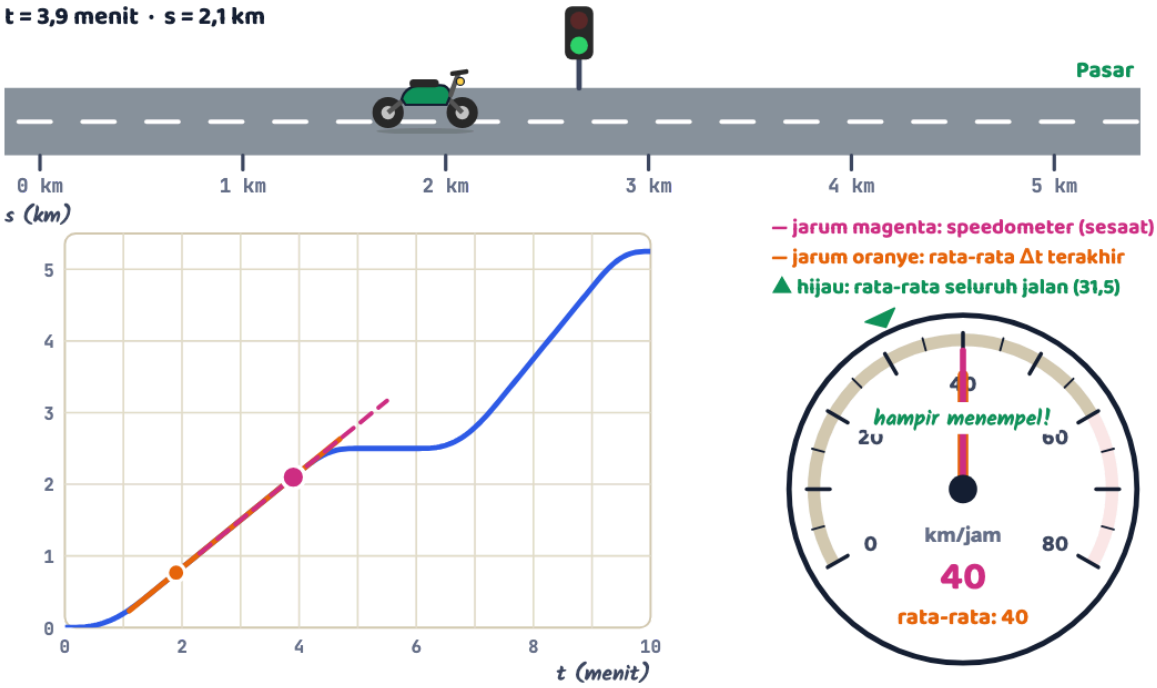
RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LAJU-PENDUDUK

28.6 Makna turunan: kecepatan, laju, dan garis singgung

Jika $s(t)$ adalah posisi benda pada waktu t, turunannya $s'(t) = v(t)$ adalah **kecepatan sesaat**, dan turunan kecepatan $v'(t) = a(t)$ adalah **percepatan**. Kecepatan sesaat inilah yang ditunjuk jarum speedometer. Di Lab Mini berikut, Kak Lintang mengendarai motor dari rumah ke pasar sejauh 5,25 km. Jarum **magenta** adalah speedometer (laju sesaat), sedangkan jarum **oranye** adalah kecepatan rata-rata dalam selang Δt terakhir.

LAB MINI Speedometer: rata-rata yang menjadi sesaat

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28



Jarak s(t)	Speedometer (sesaat)	Rata-rata Δt terakhir	Selisih kedua jarum
2,1 km	40 km/jam	40 km/jam	$7{,}11 \times 10^{-15}$ km/jam

Motor: **kecepatan tetap**

Tekan ▶ **Jalankan** atau geser waktu t (bisa juga menyeret grafik atau motornya). Lalu perkecil selang Δt: kapan jarum oranye menempel pada jarum magenta? Di grafik jarak–waktu, tali busur oranye berubah menjadi garis singgung magenta. Tantangan: temukan saat-saat jarum menunjuk tepat 31,5 km/jam (segitiga hijau), yaitu kecepatan rata-rata seluruh perjalanan.

KERJAKAN BERSAMA

Kecepatan ojek

Sebuah ojek yang sedang melaju pelan mulai menambah kecepatan. Posisinya t detik kemudian adalah $s(t) = 0{,}5t^2 + 2t$ meter. Berapa kecepatannya pada $t = 4$ detik, dalam m/s dan km/jam?

1. $v(t) = s'(t) = t + 2$.
2. $v(4) = 4 + 2 = 6$ m/s.
3. Ubah satuan: $6\ \text{m/s} = 6 \times 3{,}6 = 21{,}6$ km/jam.

Kecepatannya 6 m/s atau 21,6 km/jam. Percepatannya $a(t) = v'(t) = 1\ \text{m/s}^2$, tetap sepanjang waktu.

Turunan juga memberi kita **persamaan garis singgung**. Garis yang melalui titik $(a, f(a))$ dengan kemiringan $f'(a)$ adalah

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

GRAFIK HIDUP

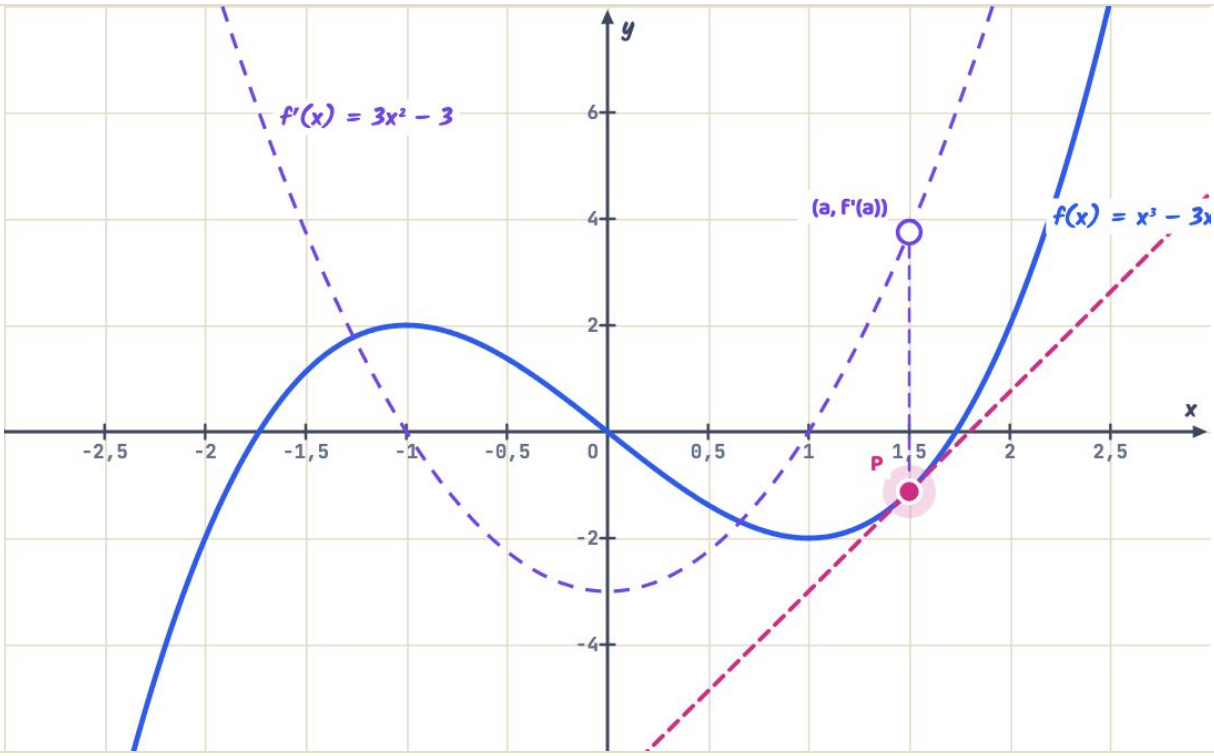
Garis singgung menari di atas kurva

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

$$f'(1{,}5) = 3{,}75, \quad y = 3{,}75x - 6{,}75$$

Kurva biru f(x) = x³ − 3x; kurva ungu putus-putus f′(x) = 3x² − 3.



f′(a) > 0: kurva sedang naik ↗

f(a)	f′(a) = kemiringan	cek numerik garis singgung	potong sumbu-y
-1,125	3,75	3,75	-6,75

Seret titik P atau tekan ▶ **Jalankan**. Garis singgung magenta "menari" di sepanjang kurva biru, sedangkan titik ungu berongga menunjukkan nilai $f'(a)$ pada grafik putus-putus f'. Kapan titik ungu berada di bawah sumbu-x? Apa yang sedang dilakukan kurva biru saat itu?

COBA SENDIRI **Persamaan garis singgung**

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik yang absisnya $x = 1$. Di titik mana lagi garis singgung kurva sejajar dengan garis itu?

1. Titik singgung: $y(1) = 1 - 2 = -1$, jadi titiknya $(1, -1)$.
2. Kemiringan: $y' = 3x^2 - 2$, sehingga $m = y'(1) = 1$.
3. Persamaan: $y = -1 + 1 \cdot (x - 1) = x - 2$.
4. Sejajar berarti kemiringannya juga 1: $3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Titik lainnya di $x = -1$, dengan $y = -1 + 2 = 1$, yaitu $(-1, 1)$.

Garis singgung di $(1, -1)$ adalah $y = x - 2$. Garis singgung di $(-1, 1)$ sejajar dengannya, yaitu $y = x + 2$.

Perhatikan juga **tanda** turunan. Jika $f'(a) > 0$, kurva sedang naik; jika $f'(a) < 0$, kurva sedang turun; dan jika $f'(a) = 0$, garis singgungnya mendatar, sering tepat di puncak atau lembah. Cara memakai fakta ini untuk mencari nilai terbesar dan terkecil adalah cerita Bab 29.

Bahasa sederhana · Ringkasnya: turunan adalah "speedometer" untuk apa saja. Untuk jarak, turunannya kecepatan. Untuk harga, turunannya laju kenaikan harga. Untuk jumlah penduduk, turunannya laju pertambahan penduduk.

MATEMATIKA NUSANTARA

Prakirawan BMKG tidak hanya mencatat *berapa banyak* hujan turun, tetapi juga *seberapa cepat*: intensitas hujan dalam milimeter per jam. Hujan 20 mm yang tercurah dalam satu jam jauh lebih berbahaya daripada 20 mm yang tersebar sepanjang hari; menurut kategori BMKG, intensitas di atas sekitar 20 mm per jam sudah tergolong hujan sangat lebat. Petugas pintu air di berbagai kota juga memantau seberapa cepat tinggi muka air naik (cm per jam) untuk memberi peringatan dini banjir. Itulah turunan yang bekerja menjaga keselamatan warga.

Speedometer

Mengukur putaran roda dalam selang yang sangat singkat, lalu menampilkan kecepatan sesaat: turunan jarak terhadap waktu.

Harga cabai

Pemerintah daerah memantau laju kenaikan harga per hari menjelang hari raya. Laju yang melonjak menjadi tanda perlunya operasi pasar.

Laju penduduk

BPS melaporkan laju pertumbuhan penduduk dalam persen per tahun untuk merencanakan sekolah, rumah sakit, dan lapangan kerja.

Kereta cepat

Percepatan adalah turunan kecepatan. Kereta cepat Jakarta–Bandung menambah kecepatan secara bertahap agar penumpang tetap nyaman sampai sekitar 350 km/jam.

Baterai HP

Perkiraan "sisa 3 jam" dihitung dari laju berkurangnya persen baterai per menit.

Intensitas hujan

Curah hujan per jam (mm/jam) adalah laju perubahan curah hujan terhadap waktu.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TEOREMA NILAI RATA-RATA

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan punya turunan pada (a, b), maka ada paling sedikit satu c di antara a dan b dengan

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Secara geometris: ada garis singgung yang **sejajar** dengan tali busur. Secara fisik: kecepatan sesaat pasti pernah sama dengan kecepatan rata-rata, persis jawaban Tebak Dulu di awal bab. Di beberapa negara, kamera tilang "kecepatan rata-rata" bersandar pada teorema ini: jika kamu menempuh 10 km dalam 5 menit (rata-rata 120 km/jam), pasti ada saat speedometermu menunjuk 120 km/jam.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TURUNAN UNTUK MEMBUKTIKAN KETAKSAMAAN

Buktikan $e^x \geq 1 + x$ untuk semua x. Misalkan $g(x) = e^x - 1 - x$. Maka $g'(x) = e^x - 1$, negatif untuk $x < 0$ dan positif untuk $x > 0$. Jadi g turun sampai $x = 0$, lalu naik: nilai terkecilnya $g(0) = 0$. Akibatnya $g(x) \geq 0$, yaitu $e^x \geq 1 + x$, dengan kesamaan hanya di $x = 0$. Bonus cantik: ambil $x = \frac{1}{n}$, maka $e^{1/n} > 1 + \frac{1}{n}$, sehingga $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ untuk setiap bilangan asli n. Barisan dari Bab 27 itu memang mendekati e dari bawah!

Cek Cepat

Turunan $f(x) = 5x^3$ adalah...

- $5x^2$
- $15x^3$
- $15x^2$
- $3x^5$

Kemiringan garis singgung parabola $y = x^2$ di titik $(-2, 4)$ adalah...

- -4
- 4
- -2
- 0

Jarak tempuh sebuah bola $s(t) = 4t^2$ meter. Kecepatannya pada $t = 3$ detik adalah...

- 36 m/s
- 12 m/s
- 8 m/s
- 24 m/s

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: laju tumbuh kecambah

Bahan: segenggam kacang hijau, kapas, gelas plastik, air, penggaris, buku catatan (atau kamera HP).

1. Rendam kacang hijau semalam, lalu letakkan di atas kapas basah di dalam gelas.
2. Setiap hari pada jam yang sama, ukur tinggi kecambah tertinggi dalam milimeter. Catat dalam tabel: hari ke-t dan tinggi $T(t)$.
3. Untuk setiap hari, hitung laju rata-rata harian $T(t+1) - T(t)$ dalam mm per hari.
4. Gambar grafik T terhadap t, lalu gambar tali busur di antara dua hari yang lajunya paling besar.
5. Bonus: pada hari dengan pertumbuhan tercepat, ukur dua kali (pagi dan sore) untuk memperkirakan laju yang "lebih sesaat".

Pertanyaan: Pada hari ke berapa kecambahmu tumbuh paling cepat? Apakah lajunya terus naik, atau mulai melambat? Mengapa mengukur dua kali sehari memberi perkiraan laju sesaat yang lebih baik?

RINGKASAN KILAT

Bab 28 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- membedakan **laju perubahan rata-rata** (kemiringan tali busur) dan **laju sesaat** (kemiringan garis singgung)
- menjelaskan turunan sebagai **limit** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ketika $h \to 0$
- menurunkan fungsi dengan **aturan pangkat, jumlah, rantai, hasil kali, dan hasil bagi**
- memakai turunan $\sin x$, $\cos x$, e^x, dan $\ln x$
- memaknai turunan sebagai **kecepatan dan laju**, serta menulis **persamaan garis singgung**

Istilah kunci

laju perubahan · tali busur · kecepatan sesaat · diferensiasi · percepatan

Rumus penting

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Kemiringan tali busur pada y = x². Naik dibagi maju antara dua titik pada parabola. Semakin kecil h, semakin dekat hasilnya ke kemiringan garis singgung, yaitu 2x.

$$m = a\,n\,x^{\,n-1}$$

Aturan pangkat: kemiringan y = a·xⁿ. Turunkan pangkat n ke depan untuk dikalikan dengan a, lalu kurangi pangkatnya satu. Masukkan nilai x untuk mendapat kemiringan garis singgung di titik itu.

$$P'(t) = r\,P_0\,e^{rt}$$

Laju pertumbuhan penduduk. Pada pertumbuhan eksponensial, laju bertambahnya penduduk sebanding dengan banyaknya penduduk saat itu.

Jangan sampai terjebak

- Jangan memasukkan $h = 0$ terlalu cepat!
- Turunan hasil kali bukan hasil kali turunan: $(uv)' \neq u'v'$.
- Rumus $(\sin x)' = \cos x$ hanya berlaku jika x dalam radian.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=28

🧩 Teka-teki untuk Bab 29

Ancil punya selembar karton persegi berukuran 30 cm × 30 cm. Ia memotong persegi kecil bersisi x cm di keempat pojoknya, lalu melipat sisi-sisinya menjadi kotak tanpa tutup. Kalau x terlalu kecil, kotaknya ceper; kalau terlalu besar, alasnya sempit. Berapa x supaya volume kotak paling besar?

▼ **Intip petunjuk**

Volumenya $V(x) = x(30 - 2x)^2$ untuk $0 < x < 15$. Di puncak grafik V, garis singgungnya mendatar, jadi $V'(x) = 0$. Coba hitung V untuk $x = 4, 5, 6$ dan tebak jawabannya. Bab 29 akan membuktikannya dengan turunan!

BAB 29 · KALKULUS

29 Aplikasi Turunan: Berburu Puncak dan Lembah

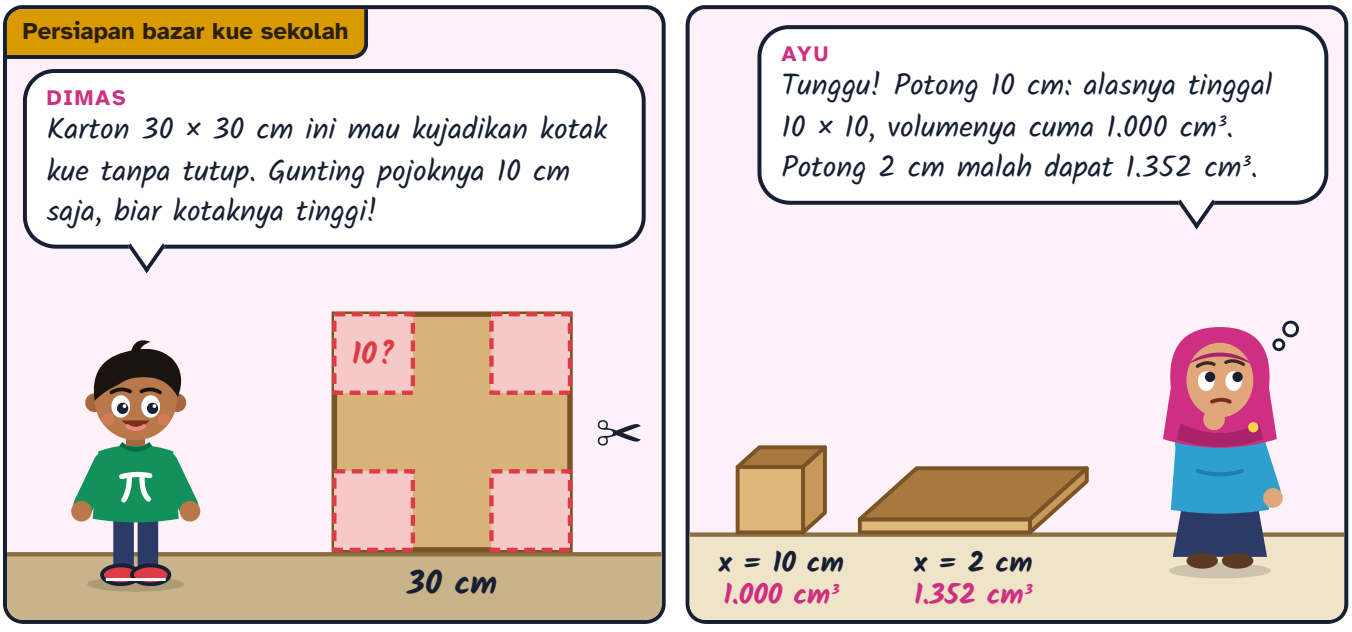
Berapa sentimeter pojok karton harus digunting agar kotaknya memuat kue paling banyak? Mengapa kaleng susu tidak dibuat setinggi tiang atau segepeng piring? Turunan dari Bab 28 ternyata adalah alat untuk menemukan yang *terbaik*.

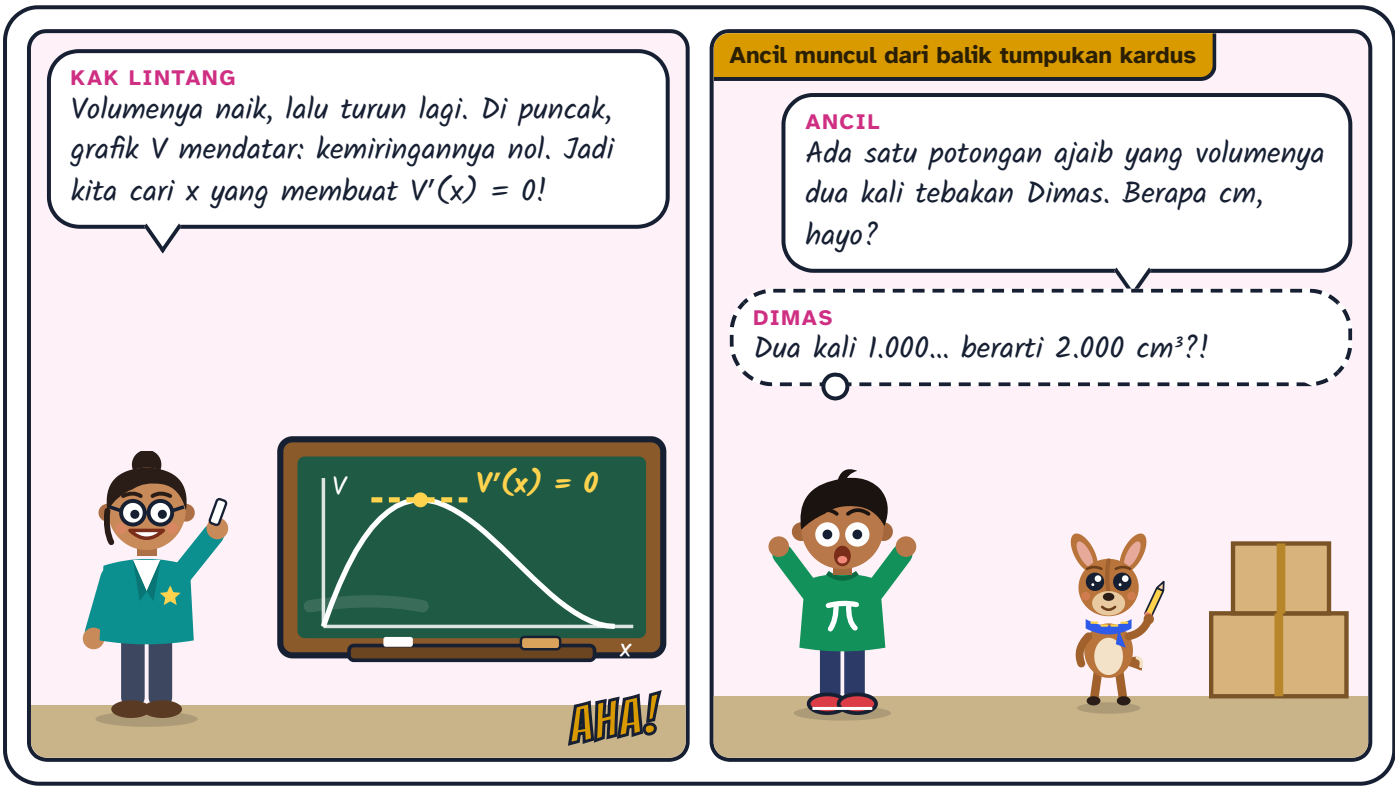
Setelah bab ini, kamu bisa

- menentukan interval fungsi **naik** dan **turun** serta **titik stasioner** dari tanda turunan pertama;
- membedakan maksimum lokal, minimum lokal, dan titik belok dengan **uji turunan pertama dan kedua**;
- **menggambar sketsa kurva** dari titik potong, titik stasioner, dan kecekungan;
- menyelesaikan masalah **optimasi**: kotak karton, kaleng hemat bahan, kebun berpagar, dan untung pedagang;
- menghitung **laju terkait** dan menganalisis gerak lurus dengan posisi, kecepatan, dan percepatan.

KOTAK KUE TERBESAR

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Karton 30 cm × 30 cm digunting persegi yang sama besar di keempat pojoknya, lalu sisi-sisinya dilipat ke atas menjadi kotak tanpa tutup. Potongan berapa cm yang menghasilkan volume terbesar?

10 cm, supaya kotaknya berbentuk kubus 10 × 10 × 10.

7,5 cm, tepat seperempat sisi karton.

5 cm, seperenam sisi karton.

1 cm, supaya alasnya seluas mungkin.

Jawabannya: 5 cm. Hitung saja: potongan 1 cm memberi $1 \times 28 \times 28 = 784$ cm³, potongan 5 cm memberi $5 \times 20 \times 20 = 2.000$ cm³, potongan 7,5 cm memberi 1.687,5 cm³, dan potongan 10 cm hanya 1.000 cm³. Potongan kecil membuat kotak pendek; potongan besar menghabiskan alas. Juaranya ada di tengah, dan turunan bisa menemukannya **tanpa mencoba satu per satu**.

29.1 Naik, turun, dan titik stasioner

Di jalan raya, *tanjakan* berarti jalan yang mendaki dan *turunan* berarti jalan yang menurun. Lucunya, turunan dalam matematika memang memberi tahu hal yang persis sama! Bayangkan kamu mengendarai motor dari kiri

ke kanan di sepanjang grafik $y = f(x)$. Kemiringan jalan di setiap titik adalah $f'(x)$, yaitu gradien garis singgung yang kamu pelajari di Bab 28.

Bahasa sederhana · Gampangnya: kalau turunannya **positif**, jalannya menanjak. Kalau turunannya **negatif**, jalannya menurun. Kalau turunannya **nol**, jalannya datar sejenak, misalnya tepat di puncak bukit atau di dasar lembah.

DEFINISI

Fungsi f **naik** pada suatu interval jika nilai $f(x)$ bertambah ketika x bertambah, dan **turun** jika nilai $f(x)$ berkurang ketika x bertambah. Titik $(c, f(c))$ dengan $f'(c) = 0$ disebut **titik stasioner**: di titik itu garis singgungnya mendatar.

SIFAT: TANDA TURUNAN MENENTUKAN ARAH

Pada suatu interval:

- jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x di interval itu, maka f **naik**;
- jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x di interval itu, maka f **turun**.

Jadi, untuk mengetahui arah grafik, cukup periksa **tanda** f', bukan nilainya.

CONTOH Peta naik-turun sebuah kurva

Tentukan interval naik, interval turun, dan titik stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2$.

1. Turunkan: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
2. Titik stasioner: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ atau $x = 2$. Nilainya $f(0) = 0$ dan $f(2) = 8 - 12 = -4$.
3. Uji tanda dengan satu titik di tiap interval: $f'(-1) = 9 > 0$, $f'(1) = -3 < 0$, $f'(3) = 9 > 0$.

f naik untuk $x < 0$ dan $x > 2$, turun untuk $0 < x < 2$. Titik stasionernya $(0, 0)$ dan $(2, -4)$: yang pertama puncak bukit, yang kedua dasar lembah.

GRAFIK HIDUP

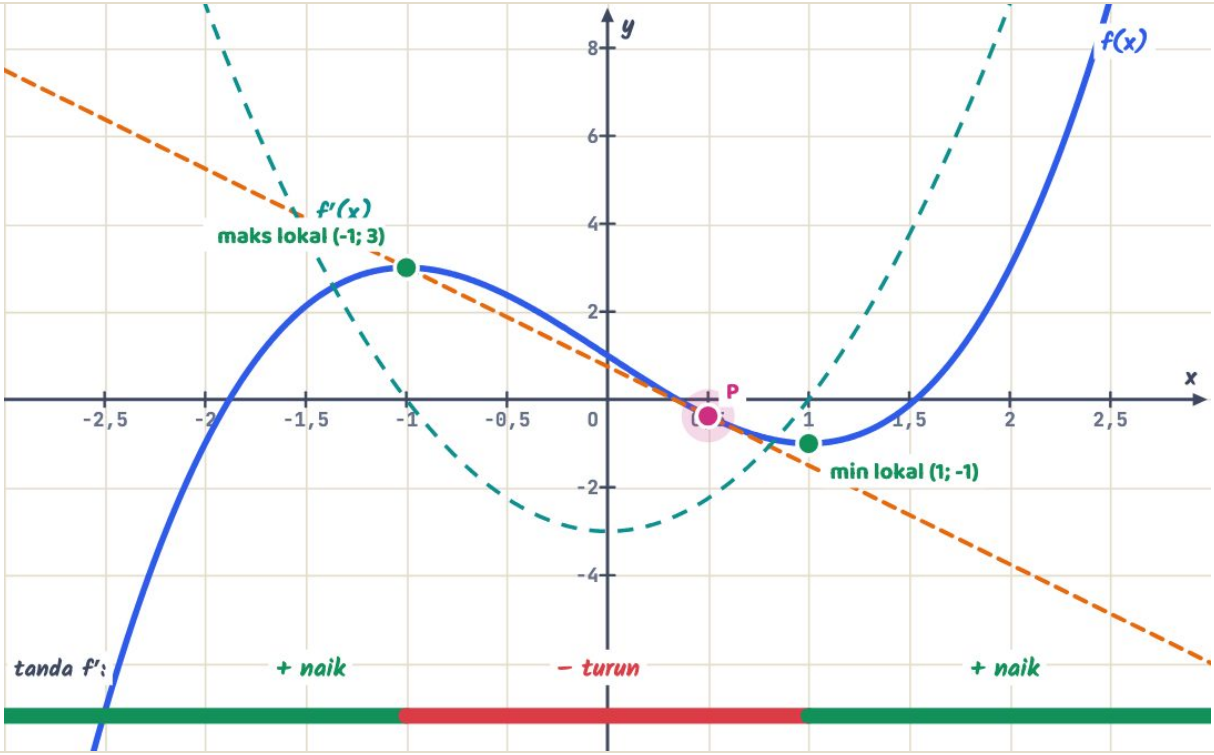
Tanda turunan: naik, turun, datar sejenak

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29

$$f(x) = x^3 - 3p\,x + 1$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad f'(x) = 3x^2 - 3$$

Garis putus-putus oranye adalah garis singgung di titik P, kurva toska putus-putus adalah f′. Pita di bawah adalah diagram tanda f′: hijau berarti naik, merah berarti turun.



f(a)	f′(a) = kemiringan	Keadaan di P
-0,38	-2,25	turun ↘

Seret titik P di sepanjang kurva. Kapan garis singgungnya mendatar? Perhatikan: di titik itu kurva hijau toska putus-putus f' memotong sumbu-x. Lalu geser p ke 0 dan ke nilai negatif. Apa yang terjadi pada puncak dan lembahnya?

ADU CEPAT

Titik stasioner kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

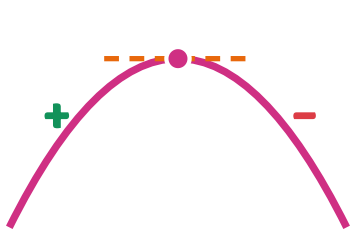
f′(x) = 2ax + b. Samakan dengan nol: x = −b/(2a). Contoh: f(x) = 2x² − 12x + 1 ⇒ 4x − 12 = 0 ⇒ x = 3.

29.2 Uji turunan pertama dan kedua

Titik stasioner baru berstatus **calon**. Ada tiga kemungkinan wajahnya: puncak bukit, dasar lembah, atau "bahu jalan" yang datar sejenak tetapi tetap menanjak. Untuk membedakannya, kita intip tanda f' di kiri dan kanan titik itu.

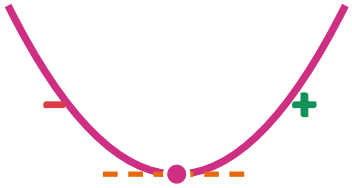
DEFINISI

$f(c)$ disebut **maksimum lokal** jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di sekitar c, dan **minimum lokal** jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di sekitar c. Keduanya disebut **nilai ekstrem**. Kata "lokal" berarti juara di lingkungannya saja; juara sejati di seluruh daerah asal disebut maksimum atau minimum **global** (mutlak).



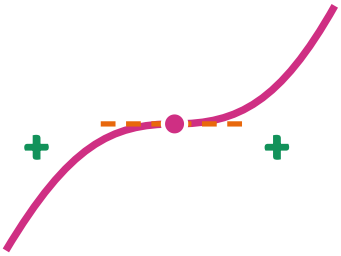
maksimum lokal

f′: + → 0 → −



minimum lokal

f′: − → 0 → +



titik belok datar

f′: + → 0 → +

Ketiganya punya garis singgung mendatar, tetapi hanya dua yang merupakan nilai ekstrem. Penentunya: apakah tanda f' **berganti**.

UJI TURUNAN PERTAMA

Misalkan $f'(c) = 0$.

- Jika tanda f' berubah dari **+ ke −** saat melewati c, maka $f(c)$ adalah **maksimum lokal**.
- Jika tanda f' berubah dari **− ke +**, maka $f(c)$ adalah **minimum lokal**.
- Jika tanda f' **tidak berubah**, maka $(c, f(c))$ bukan titik ekstrem, melainkan titik belok datar.

Ada cara yang sering lebih cepat. Turunan dari turunan, $f''(x)$, mengukur bagaimana kemiringan itu sendiri berubah. Jika $f'' > 0$, kemiringan terus bertambah dan grafik melengkung seperti **cekung ke atas** (mangkuk ∪). Jika $f'' < 0$, grafik **cekung ke bawah** (topi ∩). Titik tempat kecekungan berganti disebut **titik belok**.

UJI TURUNAN KEDUA

Misalkan $f'(c) = 0$.

- Jika $f''(c) < 0$ (cekung ke bawah), maka $f(c)$ adalah **maksimum lokal**.
- Jika $f''(c) > 0$ (cekung ke atas), maka $f(c)$ adalah **minimum lokal**.
- Jika $f''(c) = 0$, uji ini **tidak dapat menyimpulkan**; kembalilah ke uji turunan pertama.

Mengapa uji turunan kedua bekerja?

Misalkan $f'(c) = 0$ dan $f''(c) > 0$. Karena f'' adalah turunan dari f', nilai $f''(c) > 0$ berarti f' **sedang naik** di sekitar c. Fungsi f' yang naik dan bernilai 0 di c pasti negatif sedikit di kiri c dan positif sedikit di kanan c. Tanda f' berubah dari – ke +, jadi menurut uji turunan pertama $f(c)$ adalah minimum lokal. Alasan untuk $f''(c) < 0$ sama, hanya tandanya terbalik.

TRIK KAK LINTANG

Ingat **senyum dan cemberut**. Kalau $f'' > 0$, grafiknya tersenyum ∪, dan titik terendah senyuman adalah **minimum**. Kalau $f'' < 0$, grafiknya cemberut ∩, dan titik tertinggi wajah cemberut adalah **maksimum**. Positif = senyum = lembah.

AWAS JEBAKAN

$f'(c) = 0$ tidak menjamin ada puncak atau lembah di c. Untuk $f(x) = x^3$, berlaku $f'(0) = 0$, tetapi grafiknya terus naik melewati $x = 0$; ia hanya mendatar sejenak. Begitu pula $f''(c) = 0$ tidak berarti titik belok: $f(x) = x^4$ memiliki $f''(0) = 0$, padahal $(0, 0)$ adalah minimum. Selalu periksa perubahan tanda.

KERJAKAN BERSAMA **Grafik berbentuk huruf W**

Tentukan semua titik stasioner $f(x) = x^4 - 2x^2$ beserta jenisnya.

1. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$, jadi titik stasioner di $x = -1$, $x = 0$, dan $x = 1$.
2. $f''(x) = 12x^2 - 4$. Di $x = \pm 1$: $f''(\pm 1) = 8 > 0$, jadi minimum lokal dengan $f(\pm 1) = 1 - 2 = -1$.
3. Di $x = 0$: $f''(0) = -4 < 0$, jadi maksimum lokal dengan $f(0) = 0$.

Dua lembah $(-1, -1)$ dan $(1, -1)$ mengapit satu puncak $(0, 0)$: grafiknya berbentuk huruf W. Kedua lembah itu sekaligus minimum global, sedangkan puncaknya hanya maksimum lokal karena $f(x)$ bisa jauh lebih besar untuk x yang besar.

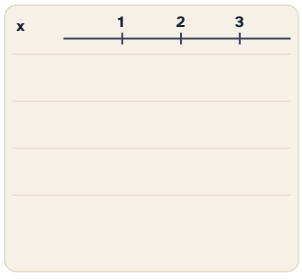
29.3 Menggambar kurva seperti detektif

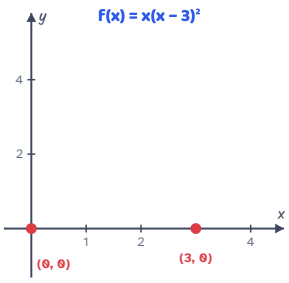
Kalkulator grafik bisa menggambar kurva dalam sekejap, tetapi seorang detektif kurva bisa **menjelaskan** setiap lekukannya. Kumpulkan petunjuk berikut, lalu sambungkan:

1. **Titik potong sumbu:** $f(x) = 0$ untuk sumbu-x, $f(0)$ untuk sumbu-y.
2. **Titik stasioner:** selesaikan $f'(x) = 0$, lalu tentukan jenisnya.
3. **Kecekungan dan titik belok:** periksa tanda $f''(x)$.

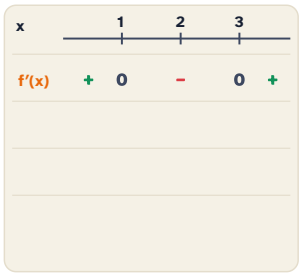
4. **Perilaku ujung:** ke mana grafik pergi saat x sangat besar atau sangat kecil?
5. **Sambungkan** semua titik dengan kurva mulus yang mematuhi diagram tanda.

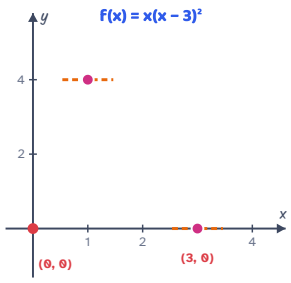
Bahasa sederhana · Menggambar kurva itu mirip menggambar rute perjalanan dari petunjuk: "mulai di sini, naik sampai puncak, turun ke lembah, lalu naik lagi". Turunan memberi tahu kapan harus naik dan kapan harus turun.



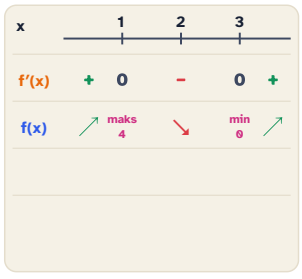


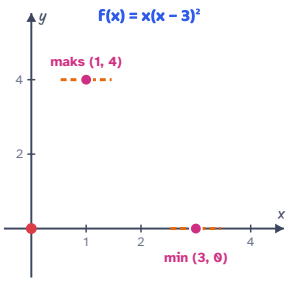
Langkah 1. Petunjuk 1, titik potong: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$. Grafik melewati $(0,0)$ dan $(3,0)$. Karena faktor $(x-3)$ berpangkat dua, grafik hanya **menyinggung** sumbu-x di $x = 3$.



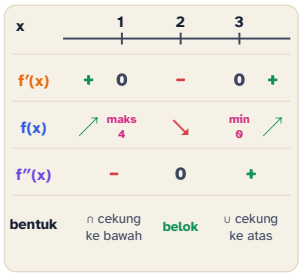


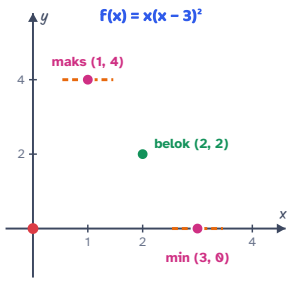
Langkah 2. Petunjuk 2, titik stasioner: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0$ di $x = 1$ dan $x = 3$. Tanda f': + lalu − lalu +.



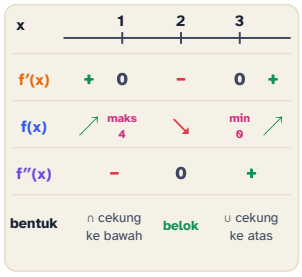


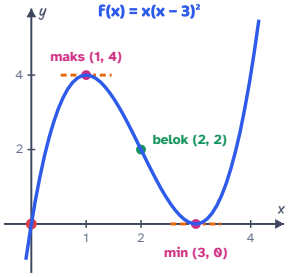
Langkah 3. Baca diagram tanda: naik, turun, naik. Jadi $(1, 4)$ adalah maksimum lokal dan $(3, 0)$ adalah minimum lokal.





Langkah 4. Petunjuk 3, kecekungan: $f''(x) = 6x - 12$ berganti tanda di $x = 2$. Titik belok $(2, f(2)) = (2, 2)$: kurva berubah dari cemberut menjadi tersenyum.





Langkah 5. Sambungkan dengan kurva mulus. Untuk x sangat besar, x^3 menang sehingga grafik melesat ke atas; untuk x sangat negatif, grafik terjun ke bawah. Selesai, tanpa satu pun tabel nilai!

CEK KEWAJARAN

Titik belok kubik selalu berada tepat di tengah-tengah dua titik stasionernya: di sini $x = 2$ adalah rata-rata dari 1 dan 3. Grafik kubik simetris terhadap titik beloknya. Petunjuk kecil ini berguna untuk memeriksa sketsamu.

29.4 Optimasi: mencari yang terbaik

Pedagang ingin untung terbesar, pabrik ingin bahan paling sedikit, petani ingin kebun paling luas. Semua itu adalah masalah **optimasi**: mencari nilai maksimum atau minimum sebuah besaran. Kuncinya sama dengan puncak bukit tadi. Di titik terbaik (yang tidak berada di ujung daerah asal), grafiknya mendatar, sehingga turunannya nol.



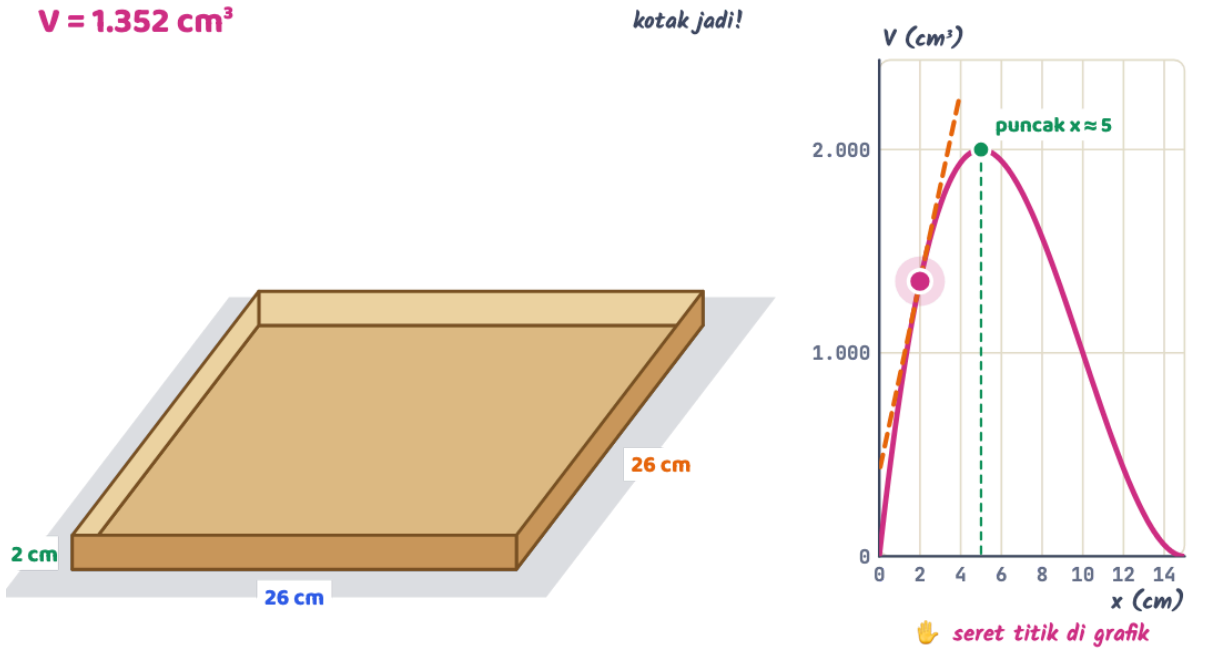
TRIK KAK LINTANG: LIMA LANGKAH OPTIMASI

1. **Gambar** situasinya dan beri nama setiap ukuran.
2. Tulis rumus besaran yang ingin dibuat **terbesar atau terkecil**.
3. Pakai **syarat** (kendala) untuk mengubahnya menjadi fungsi **satu variabel**, lalu tentukan daerah asalnya.
4. **Turunkan**, samakan dengan nol, dan selesaikan.
5. **Pastikan** jenisnya (uji turunan atau bandingkan dengan nilai di ujung), lalu jawab dengan kalimat lengkap dan satuan.

Mari selesaikan teka-teki kotak kue dari komik. Kalau karton $p \times l$ digunting persegi bersisi x di keempat pojoknya, kotaknya bertinggi x dengan alas $(p - 2x) \times (l - 2x)$.

LAB MINI Gunting pojok, lipat, dan ukur volumenya

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29



Alas kotak	Volume V	V′(x)	Kata turunan
26 × 26 cm	1.352 cm³	468 cm³ per cm	V′ > 0: perbesar x

Geser potongan x (atau seret titik magenta di grafik), lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melipat karton menjadi kotak. Garis oranye adalah garis singgung grafik $V(x)$. Di mana garis itu mendatar? Coba juga karton 40 × 25: apakah potongan terbaiknya masih seperenam sisi?

CONTOH **Kotak kue Dimas, dihitung tuntas**

Dari karton 30 cm × 30 cm, tentukan potongan pojok x yang membuat volume kotak tanpa tutup paling besar.

1. Volume: $V(x) = x(30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$, dengan daerah asal $0 < x < 15$.
2. Turunkan: $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x^2 - 20x + 75) = 12(x - 5)(x - 15)$.
3. $V'(x) = 0$ di $x = 5$ atau $x = 15$. Nilai $x = 15$ di luar daerah asal (alasnya habis), jadi tinggal $x = 5$.
4. Uji turunan kedua: $V''(x) = 24x - 240$, sehingga $V''(5) = -120 < 0$: maksimum.

Potong 5 cm di setiap pojok. Kotaknya berukuran 20 × 20 × 5 cm dengan volume maksimum 2.000 cm³, tepat dua kali tebakan Dimas.

RUMUS HIDUP

Volume kotak dari karton

$$V = x\,(p - 2x)(l - 2x)$$

Gunting persegi x di keempat pojok, lalu lipat: tinggi kotak x, alasnya (p − 2x) kali (l − 2x).

p Panjang karton cm

l Lebar karton cm

x Potongan pojok cm

V Volume kotak cm^3

VOLUME KOTAK

2.000

cm^3

🎯 **sangat dekat dengan potongan terbaik!**

karton persegi: potongan terbaik tepat seperenam sisi

Alas **20** × **20** cm dan tinggi **5** cm. Laju perubahan volume V′(x) = **0** cm^3 per cm, artinya **kamu tepat di puncak**. Potongan terbaik x ≈ **5** cm memberi volume maksimum ≈ **2.000** cm^3.

Cek satuan: cm × cm × cm = cm^3. Turunannya, V′(x), bersatuan cm^3 per cm: tambahan volume untuk setiap tambahan 1 cm potongan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOTAK-KARTON

Masalah lain yang mirip: **kebun berpagar**. Pak Darto punya 40 m kawat untuk memagari kebun cabai berbentuk persegi panjang di samping tembok rumah. Sisi yang menempel tembok tidak perlu dipagar. Jika lebarnya x, panjang sisi yang sejajar tembok $40 - 2x$, sehingga luasnya $L(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$. Dari $L'(x) = 40 - 4x = 0$ diperoleh $x = 10$ m, panjang 20 m, dan luas maksimum 200 m^2. Perhatikan: panjangnya tepat dua kali lebarnya.

RUMUS HIDUP

Kebun berpagar di samping tembok

$$L = x\,(K - 2x)$$

Dua sisi lebar x memakai 2x meter kawat; sisanya, K − 2x, menjadi sisi panjang yang sejajar tembok.

K Panjang kawat m

x Lebar kebun m

L Luas kebun m²

LUAS KEBUN

168

m²

Lebar **6** m dan panjang sejajar tembok **28** m. Turunannya L′(x) = K − 4x = **16**, jadi **luas masih bisa bertambah: perbesar x**. Luas terbesar **200** m² dicapai saat x = K/4 = **10** m. Jika muncul '—', lebar x terlalu besar: dua sisi lebar sudah menghabiskan seluruh kawat.

Cek satuan: m × m = m². Hasil umum: luas maksimum K²/8.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KEBUN-PAGAR

Tebak Dulu!

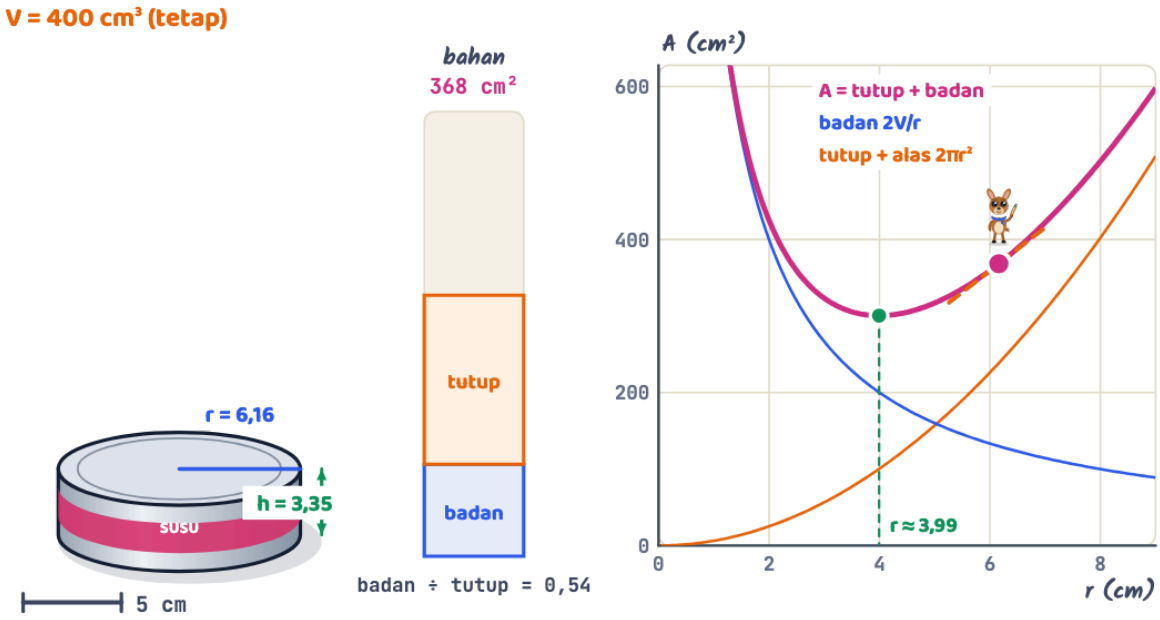
Sebuah pabrik membuat kaleng susu tertutup dengan isi yang sudah ditetapkan. Bentuk mana yang memakai pelat logam paling sedikit (badan, tutup, dan alas ikut dihitung)?

- Kaleng yang sangat langsing, seperti tabung minuman tinggi.
- Kaleng yang sangat gepeng, seperti kaleng biskuit bundar.
- Kaleng yang tingginya sama dengan diameternya.
- Semua sama saja, karena isinya sama.

Jawabannya: tinggi = diameter. Kaleng langsing boros di badan, kaleng gepeng boros di tutup dan alas. Titik keseimbangannya tercapai saat tinggi kaleng sama dengan diameternya. Kaleng di toko sering sedikit lebih tinggi karena ada pertimbangan lain: tutup yang lebih tebal, sambungan, dan kenyamanan digenggam (lihat soal Lv 5 di Tangga Latihan).

LAB MINI Kaleng susu paling hemat bahan

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29



Tinggi h	tinggi : diameter	Bahan A	Kata turunan
3,35 cm	0,27	368,4 cm²	A' > 0: perkecil r

Volume kaleng tetap; kamu hanya mengubah jari-jari r, dan tingginya menyesuaikan. Perhatikan batang bahan: tutup dan alas (oranye) melawan badan (biru). Pindahkan r jauh dari lembah, lalu tekan ▶ **Jalankan**: Ancil berjalan menuruni grafik mengikuti tanda turunan. Apa nilai "tinggi : diameter" saat ia berhenti?

KERJAKAN BERSAMA

Kaleng susu 400 mL

Kaleng tertutup berbentuk tabung harus memuat 400 cm³ (400 mL) susu. Tentukan jari-jari dan tinggi kaleng agar luas pelat logamnya minimum.

1. Kendala volume: $\pi r^2 h = 400$, sehingga $h = \dfrac{400}{\pi r^2}$.
2. Luas bahan: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \dfrac{800}{r}$, untuk $r > 0$.
3. $A'(r) = 4\pi r - \dfrac{800}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{200}{\pi} \approx 63{,}66 \Rightarrow r \approx 3{,}99$ cm.
4. $A''(r) = 4\pi + \dfrac{1600}{r^3} > 0$, jadi minimum. Tingginya $h = \dfrac{400}{\pi(3{,}99)^2} \approx 7{,}99$ cm.

Jari-jari ±3,99 cm dan tinggi ±7,99 cm, dengan bahan ±300,5 cm². Tingginya tepat sama dengan diameter! Hal ini selalu berlaku: dari $A' = 0$ diperoleh $V = 2\pi r^3$, sehingga $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = 2r$.

RUMUS HIDUP

Bahan kaleng tertutup

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Bahan = tutup dan alas ($2\pi r^2$) ditambah badan ($2\pi rh$). Karena $h = V/(\pi r^2)$, bahan badan sama dengan $2V/r$.

- V Volume kaleng cm^3
- r Jari-jari cm
- A Luas bahan cm^2

LUAS BAHAN

323,2

cm^2

kaleng langsing: badannya boros

Tinggi kaleng h = V/(πr²) = **14,147** cm. Bahan tutup dan alas **56,549** cm², bahan badan **266,667** cm². Jari-jari paling hemat r = ∛(V/2π) ≈ **3,993** cm, dengan bahan minimum ≈ **300,53** cm².

Cek satuan: πr² bersatuan cm², dan V/r = cm³/cm = cm². Keduanya cm², jadi boleh dijumlahkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KALENG-HEMAT

COBA SENDIRI **Harga martabak yang paling menguntungkan**

Pak Ujang menjual martabak manis dengan modal Rp20.000 per loyang. Jika harga jualnya x ribu rupiah per loyang, banyaknya martabak yang terjual setiap malam $100 - 2x$ loyang (untuk $20 \leq x \leq 50$). Berapa harga jual yang memberi untung terbesar?

1. Untung per loyang $x - 20$ ribu, sehingga untung semalam $U(x) = (x - 20)(100 - 2x) = -2x^2 + 140x - 2000$ ribu rupiah.
2. $U'(x) = -4x + 140 = 0 \Rightarrow x = 35$. Karena $U''(x) = -4 < 0$, titik ini maksimum.
3. Cek ujung: $U(20) = 0$ dan $U(50) = 0$, sedangkan $U(35) = 15 \times 30 = 450$.

Harga terbaik Rp35.000 per loyang: terjual 30 loyang dengan untung Rp450.000 per malam. Harga paling murah atau paling mahal justru tidak memberi untung sama sekali!

TAMU DARI MASA LALU

Pada 1613, Johannes Kepler (1571–1630) membeli anggur untuk pesta pernikahannya. Ia heran melihat pedagang menaksir isi tong hanya dengan menusukkan sebatang tongkat lewat lubang tong. Kepler lalu menulis buku tentang volume tong (terbit 1615) dan memperhatikan hal penting: **di dekat bentuk tong yang isinya terbesar, perubahan kecil pada ukuran hampir tidak mengubah isinya**. Itulah gagasan "turunan sama dengan nol" sebelum turunan ditemukan! Sekitar tahun 1636, Pierre de Fermat (±1601–1665) menyusun cara mencari maksimum dan minimum dengan membandingkan $f(x)$ dan $f(x + e)$ untuk e yang sangat kecil, beberapa dekade sebelum Newton dan Leibniz merumuskan kalkulus.

MATEMATIKA NUSANTARA

Banyak wadah anyaman tradisional, seperti **besek** dari bilah bambu, dibuat dari selembar anyaman persegi yang tepinya ditekuk ke atas. Pojoknya dilipat, bukan digunting, tetapi isinya tetap mengikuti rumus $V = x(s - 2x)^2$ untuk anyaman bersisi s dan tepi setinggi x. Coba ukur besek atau kotak kue di rumahmu: apakah tingginya mendekati seperenam lebar lembarannya? Jika tidak, mungkin pembuatnya mengutamakan hal lain, misalnya agar kue mudah diambil atau besek mudah ditumpuk.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

OPTIMASI TANPA KALKULUS: KETAKSAMAAN AM-GM

Untuk bilangan positif, rata-rata aritmetika selalu lebih besar atau sama dengan rata-rata geometri: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, dengan kesamaan jika $a = b = c$. Trik olimpiade untuk kotak karton: tulis

$$V = x(30-2x)^2 = \tfrac{1}{4} \cdot (4x)(30-2x)(30-2x).$$

Jumlah ketiga faktor $4x + (30-2x) + (30-2x) = 60$ **tetap**! Maka $(4x)(30-2x)^2 \leq \left(\frac{60}{3}\right)^3 = 8000$, sehingga $V \leq 2000$. Kesamaan terjadi saat $4x = 30-2x$, yaitu $x = 5$. Hasilnya sama dengan kalkulus, tanpa menurunkan apa pun. Seninya ada pada memilih faktor yang jumlahnya tetap; untuk kebun, $x(40-2x) = \frac{1}{2}(2x)(40-2x) \leq \frac{1}{2} \cdot 20^2 = 200$.

29.5 Laju terkait: kalau satu berubah, yang lain ikut

Lemparkan batu ke kolam ikan. Riak air melebar berbentuk lingkaran: jari-jarinya bertambah, dan luasnya juga bertambah. Kedua laju itu **terkait** karena r dan A dihubungkan oleh $A = \pi r^2$. Kalau kedua ruas diturunkan terhadap waktu t dengan aturan rantai (Bab 28), kita peroleh hubungan antara lajunya:

$$A = \pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

Inilah inti **laju terkait**: tulis persamaan yang menghubungkan besaran-besaran, turunkan terhadap waktu, baru masukkan angka pada saat yang ditanyakan.

Bahasa sederhana · Bayangkan dua anak yang bergandengan tangan. Kalau satu berlari, yang lain ikut bergerak. Laju terkait menjawab: kalau yang satu bergerak secepat ini, seberapa cepat yang lain?

KERJAKAN BERSAMA **Riak di kolam ikan**

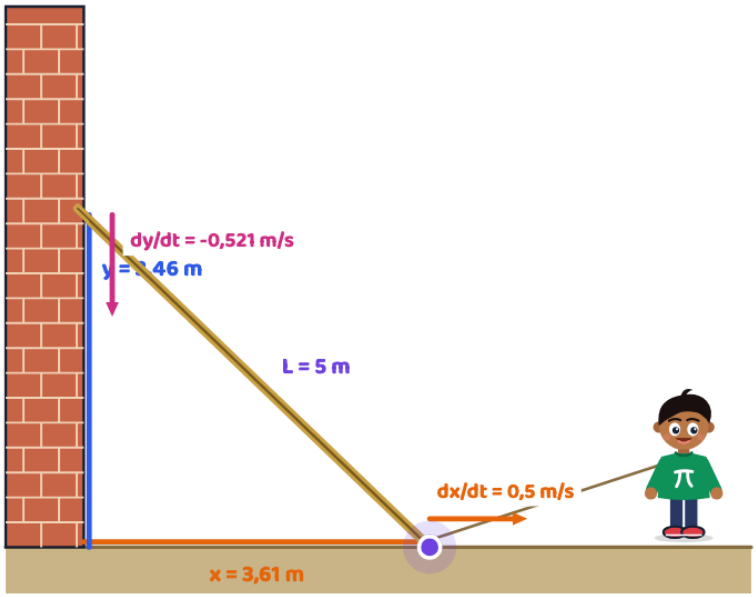
Jari-jari riak bertambah 0,5 m/s. Seberapa cepat luas lingkaran riak bertambah saat jari-jarinya 3 m?

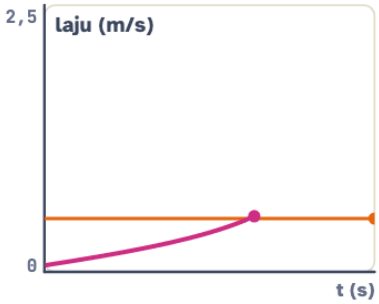
1. Hubungan: $A = \pi r^2$. Turunkan terhadap t: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$.
2. Masukkan $r = 3$ dan $\frac{dr}{dt} = 0{,}5$: $\frac{dA}{dt} = 2\pi(3)(0{,}5) = 3\pi \approx 9{,}42$ m²/s.

Luasnya bertambah ±9,42 m² per detik. Laju jari-jarinya tetap, tetapi laju luasnya makin besar seiring membesarnya lingkaran.

LAB MINI **Tangga bambu yang tergelincir**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29





$x^2 + y^2 = L^2$

turunkan terhadap t:

$2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 0$

$y' = -(x / y) \cdot x'$

$= -(3{,}61 / 3{,}46) \times 0{,}5$

$= -0{,}521$ m/s

x (kaki–tembok)	y (tinggi ujung)	dx/dt	dy/dt
3,61 m	3,46 m	0,5 m/s	-0,521 m/s

Dimas menarik kaki tangga menjauhi tembok dengan laju **tetap**. Tekan ▶ **Jalankan**. Apakah ujung atas tangga juga turun dengan laju tetap? Perhatikan grafik di kanan menjelang akhir. Kamu juga bisa menyeret kaki tangga saat simulasi berhenti, misalnya ke $x = 3$ m untuk tangga 5 m.

Pada tangga sepanjang L, berlaku $x^2 + y^2 = L^2$. Turunkan terhadap waktu: $2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0$, sehingga $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt}$. Untuk tangga 5 m dengan kaki ditarik 0,5 m/s, saat $x = 3$ dan $y = 4$ diperoleh $\dfrac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(0{,}5) = -0{,}375$ m/s. Tanda negatif berarti ujung atas **turun**. Semakin kecil y, semakin besar perbandingan x/y, sehingga ujung atas meluncur makin kencang. Dalam kenyataan, ujung tangga akan terlepas dari tembok sebelum lajunya menjadi sangat besar.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Jangan memasukkan nilai sesaat sebelum menurunkan. Kalau kamu menulis $x = 3$ lebih dulu, persamaannya menjadi $9 + y^2 = 25$, dan turunannya memberi $2y\dfrac{dy}{dt} = 0$: seolah-olah tangga diam! Besaran yang berubah terhadap waktu harus tetap berupa variabel sampai proses menurunkan selesai.

COBA SENDIRI **Bayangan di bawah lampu jalan**

Lampu jalan setinggi 6 m. Dimas (tinggi 1,5 m) berjalan menjauhi tiang lampu dengan laju 1,2 m/s. Seberapa cepat panjang bayangannya bertambah? Seberapa cepat ujung bayangannya bergerak?

1. Misalkan jarak Dimas ke tiang x dan panjang bayangan s. Dua segitiga sebangun: $\dfrac{6}{x+s} = \dfrac{1{,}5}{s}$.
2. Kali silang: $6s = 1{,}5x + 1{,}5s \Rightarrow 4{,}5s = 1{,}5x \Rightarrow s = \dfrac{x}{3}$.
3. Turunkan: $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{3}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4$ m/s. Ujung bayangan berada di $x+s$, jadi lajunya $1{,}2 + 0{,}4 = 1{,}6$ m/s.

Bayangan memanjang 0,4 m/s, dan ujungnya "berlari" 1,6 m/s, lebih cepat daripada Dimas sendiri. Menariknya, laju ini tidak bergantung pada jarak Dimas ke tiang.

29.6 Gerak lurus: posisi, kecepatan, percepatan

Jika $s(t)$ menyatakan posisi benda pada garis lurus, maka **kecepatan** adalah laju perubahan posisi dan **percepatan** adalah laju perubahan kecepatan:

$$v(t) = s'(t), \qquad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Speedometer motor hanya menunjukkan besar kecepatan (laju), tanpa tanda. Matematika memakai tanda untuk arah: $v > 0$ berarti maju, $v < 0$ berarti mundur. Benda makin cepat jika v dan a bertanda sama, dan makin lambat jika tandanya berlawanan.

Tanda v	Tanda a	Artinya
+	+	maju dan makin cepat
+	−	maju tetapi melambat (mengerem)
−	−	mundur dan makin cepat
−	+	mundur tetapi melambat
0	bukan 0	berhenti sesaat; jika tanda v berganti, benda berbalik arah

GRAFIK HIDUP

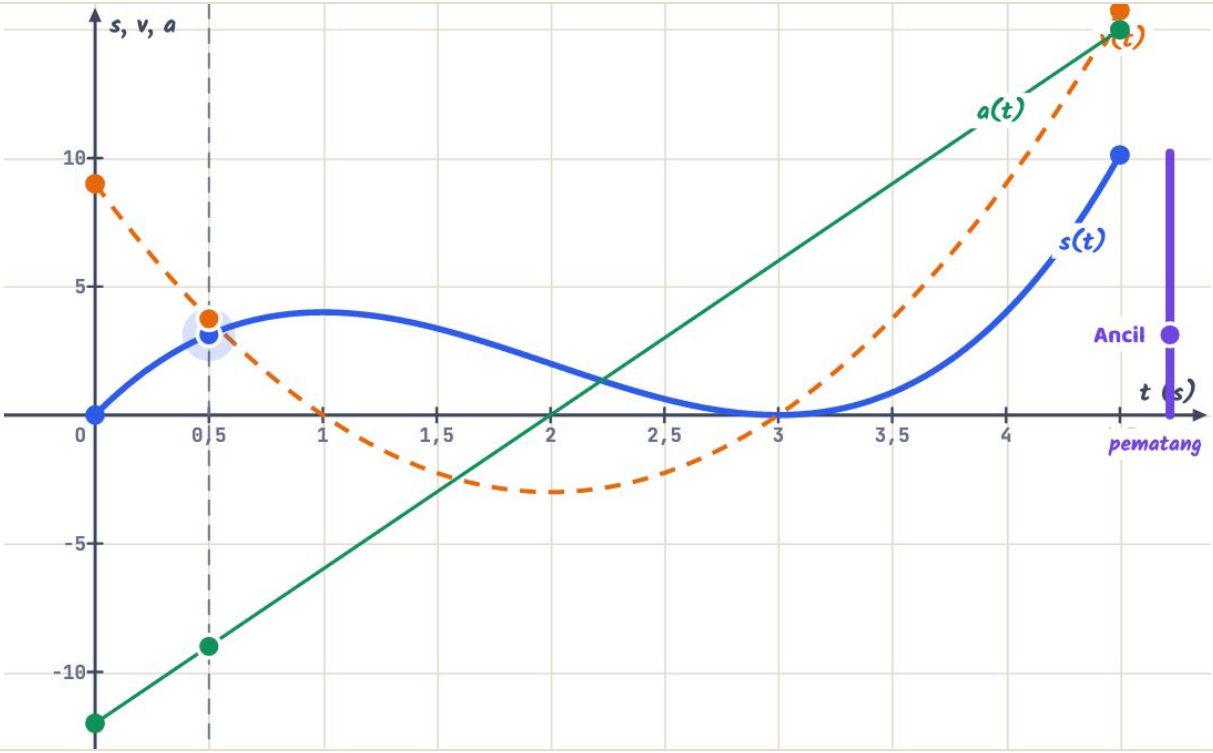
Ancil di pematang: posisi, kecepatan, percepatan

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad v = s', \quad a = v'$$

$$t = 0{,}5 : \; s = 3{,}13\ \text{m},\ v = 3{,}75\ \text{m/s},\ a = -9\ \text{m/s}^2$$

Biru = posisi s, oranye putus-putus = kecepatan v, hijau = percepatan a. Titik ungu di kanan menunjukkan posisi Ancil di pematang.



v dan a berlawanan tanda ⇒ makin lambat (mengerem)

posisi s	kecepatan v	percepatan a	Gerak Ancil
3,13 m	3,75 m/s	-9 m/s²	maju

Tekan ▶ **Jalankan** atau seret titik biru. Ancil maju, berhenti di $t = 1$, mundur, berhenti lagi di $t = 3$, lalu maju. Bandingkan: dari $t = 0$ sampai $t = 4$, posisinya hanya berpindah 4 m, tetapi jarak yang benar-benar ia tempuh 12 m. Mengapa? (Kurva ini sama dengan sketsa di 29.3!)

CONTOH **Bola dilempar ke atas**

Tinggi bola yang dilempar tegak ke atas adalah $h(t) = 20t - 5t^2$ meter. Kapan bola mencapai titik tertinggi, berapa tingginya, dan berapa percepatannya di sana?

1. $v(t) = h'(t) = 20 - 10t$. Di titik tertinggi bola berhenti sesaat: $v = 0 \Rightarrow t = 2$ s.
2. $h(2) = 40 - 20 = 20$ m.
3. $a(t) = v'(t) = -10$ m/s², selalu sama, termasuk di titik tertinggi.

Bola mencapai 20 m pada $t = 2$ s. Di puncak kecepatannya nol, tetapi percepatannya tetap –10 m/s² (tarikan gravitasi). Itulah sebabnya bola tidak melayang diam di udara.

MITOS

"Kalau $f'(c) = 0$, pasti ada puncak atau lembah di c."

FAKTA

Belum tentu. $f(x) = x^3$ memenuhi $f'(0) = 0$, tetapi grafiknya terus naik. Periksa apakah tanda f' berubah di sekitar c.

MITOS

"Nilai terbesar sebuah fungsi selalu berada di titik stasioner."

FAKTA

Pada interval tertutup, juaranya bisa di ujung. Untuk $f(x) = x^2$ pada $[-1, 3]$, maksimumnya $f(3) = 9$, padahal $f'(3) = 6 \neq 0$. Selalu bandingkan juga nilai di ujung interval.

MITOS

"Di titik tertinggi lemparan, percepatan bola nol."

FAKTA

Yang nol adalah **kecepatannya**. Percepatannya tetap sekitar −10 m/s². Kalau percepatannya juga nol, bola akan diam melayang selamanya.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TEOREMA NILAI RATA-RATA DAN GERBANG TOL

Bayangkan sebuah jalan tol mencatat waktu setiap mobil saat masuk dan keluar. Sebuah mobil menempuh 120 km dalam 1 jam, jadi kecepatan rata-ratanya 120 km/jam. **Teorema Nilai Rata-rata** menjamin: jika s kontinu pada $[a, b]$ dan dapat diturunkan pada (a, b), maka ada saat c di antaranya dengan

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Artinya, pada suatu saat speedometer mobil itu *pasti* menunjukkan tepat 120 km/jam, walaupun tidak ada kamera yang memotretnya. Secara geometri: selalu ada garis singgung yang sejajar dengan tali busur dari $(a, s(a))$ ke $(b, s(b))$. Teorema ini juga menjadi dasar bukti bahwa $f' > 0$ pada suatu interval membuat f naik.

Kemasan kaleng

Pabrik menghitung ukuran kaleng yang memakai pelat logam paling sedikit untuk isi yang sama. Hemat sedikit per kaleng berarti hemat banyak untuk jutaan kaleng.

Kebun berpagar

Petani dengan kawat terbatas memilih ukuran petak agar lahan yang terlindungi dari ayam dan kambing seluas mungkin.

Harga martabak

Penjual mencari harga yang pas: terlalu murah untungnya tipis, terlalu mahal pembelinya pergi.



Pengereman motor

Kecepatan adalah turunan posisi dan perlambatan adalah turunan kecepatan. Keduanya menentukan jarak pengereman yang aman.



Pintu air saat banjir

Petugas memantau laju naiknya muka air. Laju terkait menghubungkan debit air yang masuk dengan kecepatan kenaikan tinggi air.

Cek Cepat

Titik stasioner $f(x) = x^2 - 8x + 3$ berada di $x = \ldots$

- 8
- 4
- −4
- 3

Diketahui $f'(2) = 0$ dan $f''(2) = -5$. Titik pada $x = 2$ adalah...

- minimum lokal
- titik belok
- belum bisa ditentukan
- maksimum lokal

Posisi benda $s(t) = t^2 - 6t$ meter. Kapan benda berhenti sesaat?

- $t = 3$ s
- $t = 6$ s
- $t = 0$ s
- tidak pernah berhenti

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: lomba kotak kertas A4

Bahan: 5 lembar kertas A4 bekas (29,7 cm × 21 cm), gunting, selotip, penggaris, pensil, beras atau pasir kering, gelas takar.

1. Pada setiap lembar, gambar persegi di keempat pojok dengan sisi berbeda: 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, dan 6 cm.
2. Gunting pojok-pojoknya, lipat sisi-sisinya ke atas, lalu rekatkan dengan selotip.
3. Hitung volume setiap kotak dengan rumus $V = x(29{,}7 - 2x)(21 - 2x)$ dan catat di tabel.
4. Isi setiap kotak dengan beras sampai rata, lalu tuang ke gelas takar (1 mL = 1 cm^3). Bandingkan dengan hitunganmu.
5. Hitung potongan terbaik dengan turunan: selesaikan $V'(x) = 0$.

Pertanyaan: Kotak mana yang memenangi lomba? Apakah potongan terbaik hasil hitunganmu berada di antara dua kotak terbesar? Mengapa hasil takaran beras sedikit berbeda dari rumus?

RINGKASAN KILAT

Bab 29 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menentukan interval fungsi **naik** dan **turun** serta **titik stasioner** dari tanda turunan pertama
- membedakan maksimum lokal, minimum lokal, dan titik belok dengan **uji turunan pertama dan kedua**
- **menggambar sketsa kurva** dari titik potong, titik stasioner, dan kecekungan
- menyelesaikan masalah **optimasi**: kotak karton, kaleng hemat bahan, kebun berpagar, dan untung pedagang
- menghitung **laju terkait** dan menganalisis gerak lurus dengan posisi, kecepatan, dan percepatan

Istilah kunci

naik · turun · titik stasioner · maksimum lokal · minimum lokal · nilai ekstrem · cekung ke atas · cekung ke bawah · titik belok · optimasi · laju terkait · kecepatan · percepatan

Rumus penting

$$V = x\,(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume kotak dari karton. Gunting persegi x di keempat pojok, lalu lipat: tinggi kotak x, alasnya (p – 2x) kali (l – 2x).

$$L = x\,(K - 2x)$$

Kebun berpagar di samping tembok. Dua sisi lebar x memakai 2x meter kawat; sisanya, K – 2x, menjadi sisi panjang yang sejajar tembok.

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Bahan kaleng tertutup. Bahan = tutup dan alas ($2\pi r^2$) ditambah badan ($2\pi rh$). Karena $h = V/(\pi r^2)$, bahan badan sama dengan $2V/r$.

Jangan sampai terjebak

- $f'(c) = 0$ tidak menjamin ada puncak atau lembah di c.
- Jangan memasukkan nilai sesaat sebelum menurunkan.

Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=29

Teka-teki untuk Bab 30

Di bab ini kita berjalan dari posisi ke kecepatan: $v = s'$. Sekarang balik arahnya. Motor Dimas mulai dari diam, dan speedometernya mencatat kecepatan $v(t) = 2t$ m/s selama 10 detik. Berapa meter motor itu berjalan? Lebih menantang lagi: bagaimana kalau kecepatannya $v(t) = t^2$?

▼ **Intip petunjuk**

Gambar grafik v terhadap t. Untuk $v = 2t$, daerah di bawah grafik dari $t = 0$ sampai $t = 10$ berbentuk segitiga dengan alas 10 dan tinggi 20. Luasnya 100, dan itulah jaraknya dalam meter! Untuk $v = t^2$, daerahnya melengkung. Potonglah menjadi banyak persegi panjang tipis dan jumlahkan. Bab 30 membahas cara menjumlahkan tak hingga banyak persegi panjang itu: **integral**.

BAB 30 · KALKULUS

30 Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga

Berapa luas danau yang tepinya meliuk-liuk? Berapa liter nasi di dalam sebuah tumpeng? Jawabannya datang dari ide yang nekat: potong menjadi tak hingga banyak irisan tipis, lalu jumlahkan semuanya.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menaksir luas daerah lengkung dengan menghitung kotak dan **jumlah Riemann**;
- memahami **integral tentu** sebagai luas bertanda, misalnya jarak dari grafik kecepatan;
- menentukan **antiturunan** (integral tak tentu) dengan aturan pangkat;
- memakai **Teorema Dasar Kalkulus** untuk menghitung integral tentu dengan cepat;
- menghitung **luas antara dua kurva** dan **volume benda putar**, misalnya volume tumpeng.

DANAU TANPA RUMUS

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Daerah di bawah $y = x^2$ dari $x = 0$ sampai $x = 1$ terletak di dalam persegi satuan yang luasnya 1. Berapa luas daerah itu?

- $\frac{1}{2}$, karena bentuknya mirip segitiga.
- Tepat $\frac{1}{3}$.
- $\frac{1}{4}$.
- Tidak bisa dihitung tepat karena sisinya melengkung.

Jawabannya: tepat $\frac{1}{3}$. Parabola melengkung di bawah garis $y = x$, jadi luasnya pasti kurang dari luas segitiga, yaitu $\frac{1}{2}$. Dengan persegi panjang yang makin banyak, jumlah luasnya makin dekat ke $0{,}3333\ldots$ Buktinya ada di 30.1, dan di 30.4 kamu akan mendapatkannya hanya dalam satu baris!

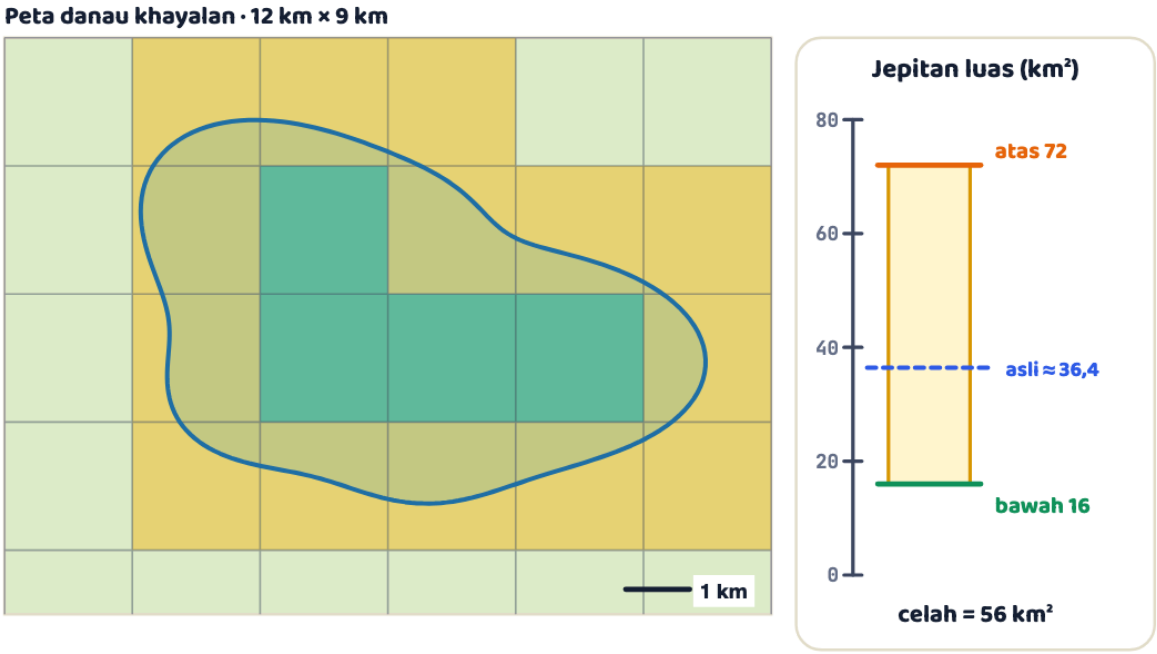
30.1 Menaksir luas: dari kotak ke persegi panjang

Bab 29 ditutup dengan pertanyaan: *berapa luas daerah di bawah sebuah kurva?* Rumus luas yang kamu kenal hanya bekerja untuk bangun bersisi lurus (persegi, segitiga, trapesium) dan lingkaran. Danau, daun, atau daerah di bawah parabola tidak punya rumus siap pakai. Jadi kita mulai dengan cara paling jujur: **menghitung kotak**.

Bahasa sederhana · Letakkan kertas berpetak di atas gambar danau. Hitung kotak yang **seluruhnya** berisi air: hasilnya pasti kekecilan. Lalu hitung juga kotak yang hanya **tersentuh** air: hasilnya pasti kebesaran. Luas sebenarnya terjepit di antara keduanya. Makin kecil kotaknya, makin rapat jepitannya.

LAB MINI **Peta danau: perkecil kotak, rapatkan jepitan**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30



Kotak penuh	Kotak sebagian	Taksiran bawah	Taksiran atas	Penuh + ½ sebagian
4	14	16 km²	72 km²	44 km²

Luas sebenarnya
36,44 km²

Pilih ukuran kotak dari 2 km sampai 125 m, atau tekan 🔍 **Perkecil kotak**. Kotak hijau seluruhnya berisi air, kotak kuning hanya sebagian. Lihat jepitan di kanan: menjadi berapa lebar celah antara taksiran bawah dan atas setiap kali sisi kotak dibuat setengahnya? Arahkan kursor ke sebuah kotak untuk melihat jenisnya.

Kertas berpetak cocok untuk peta. Untuk daerah di bawah grafik $y = f(x)$, ada cara yang lebih rapi: potong daerah itu menjadi **pita-pita tegak** yang sama lebar, lalu ganti setiap pita dengan sebuah persegi panjang.

DEFINISI · JUMLAH RIEMANN

Bagi selang $[a, b]$ menjadi n bagian yang sama lebar, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Dari bagian ke-$i$, pilih satu titik x_i^* (ujung kiri, ujung kanan, atau titik tengah). Jumlah

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f$$

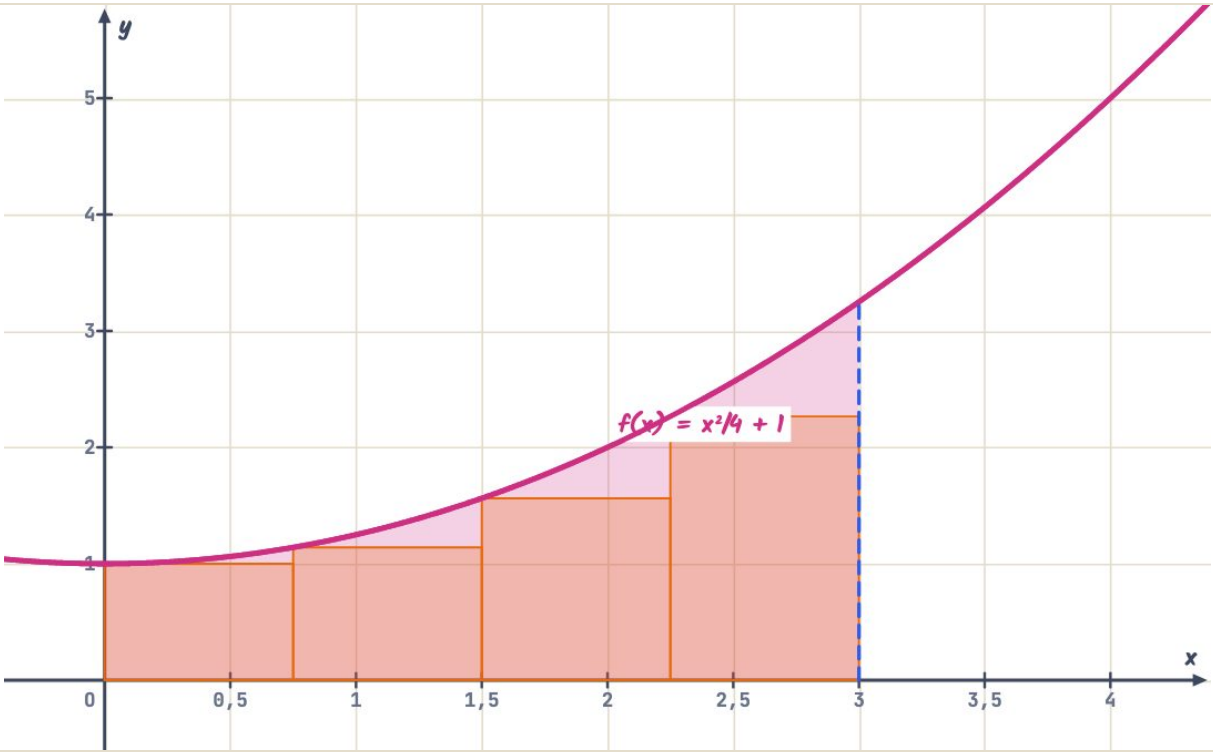
disebut **jumlah Riemann**. Setiap suku $f(x_i^*)\,\Delta x$ adalah luas satu persegi panjang: tinggi $f(x_i^*)$ kali lebar Δx.

GRAFIK HIDUP **Persegi panjang Riemann: tambah n, celahnya menghilang**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

$$\int_0^b \left(\tfrac{1}{4}x^2 + 1\right) dx \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

$$n = 4: \quad \text{jumlah Riemann} \approx 4{,}4766, \quad \text{luas eksak} = 5{,}25$$



tinggi dari ujung kiri: kurva naik ⇒ taksiran kekecilan

Jumlah Riemann	Luas eksak (integral)	Selisih
4,4766	5,25	-0,7734

Tekan ▶ **Jalankan**: n bertambah sendiri dan persegi panjang makin ramping. Bandingkan **Jumlah Riemann** dengan **Luas eksak**. Ganti cara mengambil tinggi (0 kiri, 1 kanan, 2 tengah): mana yang paling cepat mendekati luas eksak?

Sekarang kembali ke Tebak Dulu. Untuk $y = x^2$ pada $[0, 1]$, jumlah Riemann bisa dihitung dengan rumus jumlah kuadrat dari Bab 15, lalu kita lihat apa yang terjadi ketika n membesar.

Bukti: luas di bawah $y = x^2$ dari 0 sampai 1 sama dengan $\frac{1}{3}$

Bagi $[0, 1]$ menjadi n bagian selebar $\frac{1}{n}$ dan ambil tinggi di ujung kanan, yaitu $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^2}$. Jumlah Riemann kanannya

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Tulis $R_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$. Ketika $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, sehingga $R_n \to \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$. Jumlah kirinya $L_n = R_n - \frac{1}{n}$ juga menuju $\frac{1}{3}$. Luas sebenarnya selalu terjepit di antara L_n dan R_n, jadi luasnya tepat $\frac{1}{3}$. ∎

RUMUS HIDUP

Jumlah Riemann kanan untuk y = x²

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\,b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Jumlahkan n persegi panjang di bawah y = x² dari 0 sampai b. Makin banyak persegi panjangnya, makin dekat hasilnya ke b³/3.

- b Batas kanan b
- n Banyak persegi panjang n
- R_n Jumlah Riemann `satuan luas`

JUMLAH RIEMANN

0,46875

satuan luas

Dengan **4** persegi panjang, jumlahnya **0,46875**. Luas eksaknya b³/3 = **0,333**. Kelebihannya tinggal **0,135**, dan terus mengecil ketika n membesar.

Cek satuan: Satuan luas = satuan sumbu-x × satuan sumbu-y.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RIEMANN-KUADRAT

ATURAN TRAPESIUM

Ambil rata-rata jumlah kiri dan jumlah kanan. Hasilnya sama dengan mengganti setiap pita dengan **trapesium**. Jika tinggi kurva di titik-titik pembagi adalah $y_0, y_1, \ldots, y_n$, maka

$$\text{Luas} \approx \frac{\Delta x}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n\right].$$

Cara ini dipakai juru ukur yang hanya punya data lebar di beberapa titik, misalnya lebar sungai atau danau.

COBA SENDIRI **Luas danau dari perahu pengukur**

Tim pemetaan desa menyeberangi sebuah danau dengan perahu setiap 200 m, dari ujung barat ke ujung timur, dan mengukur lebar danau pada setiap lintasan: 0, 380, 520, 610, 450, dan 0 m. Taksir luas danau dengan aturan trapesium.

1. Ada 5 pita selebar $\Delta x = 200$ m dengan $y_0 = 0$, $y_1 = 380$, $y_2 = 520$, $y_3 = 610$, $y_4 = 450$, $y_5 = 0$.
2. $\text{Luas} \approx \frac{200}{2}\left[0 + 2(380 + 520 + 610 + 450) + 0\right] = 100 \times 3920$, yaitu 392.000 m².
3. Ubah satuan: 1 hektare = 10.000 m², jadi luasnya ±39,2 ha atau ±0,39 km².

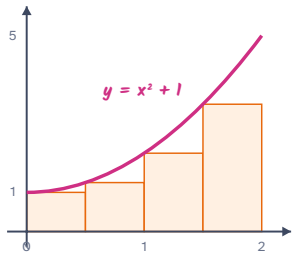
Luas danau sekitar 392.000 m² (±39 ha). Tidak ada rumus bangun datar yang dipakai: hanya lebar-lebar yang diukur lalu dijumlahkan!

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 2.200 tahun lalu, **Archimedes** dari Syracusa (±287–212 SM) menghitung luas tembereng parabola dengan "metode penghabisan". Ia mengisi daerah itu dengan segitiga-segitiga yang makin kecil, lalu menjumlahkan luasnya yang membentuk deret geometri $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{4}{3}$. Hasilnya: luas tembereng parabola sama dengan $\frac{4}{3}$ luas segitiga tertentu di dalamnya. Itulah gagasan integral, hampir dua ribu tahun sebelum kata "integral" dipakai.

30.2 Integral tentu: luas bertanda dan jarak tempuh

Apa yang terjadi jika persegi panjangnya tak hingga banyak dan tak hingga tipis? Jumlah Riemann mendekati satu bilangan tertentu. Bilangan itu diberi nama dan lambang khusus. Lihat bagaimana lambang itu lahir.



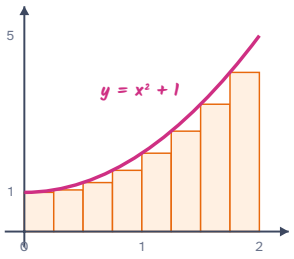
n = 4 persegi panjang

lebar $\Delta x = 0{,}5$

jumlah = 3,75

Celah di atas persegi panjang = luas yang terlewat.

Langkah 1. Ganti daerah di bawah $y = x^2 + 1$ pada $[0, 2]$ dengan 4 persegi panjang selebar $\Delta x = 0{,}5$, tingginya diambil di ujung kiri. Jumlah luasnya $1 \cdot 0{,}5 + 1{,}25 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 + 3{,}25 \cdot 0{,}5 = 3{,}75$.



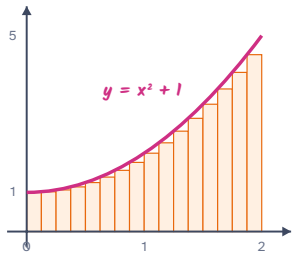
n = 8 persegi panjang

lebar $\Delta x = 0{,}25$

jumlah ≈ 4,19

Celahnya mengecil.

Langkah 2. Gandakan menjadi 8 persegi panjang ($\Delta x = 0{,}25$). Celahnya mengecil dan jumlahnya naik menjadi $4{,}1875$.



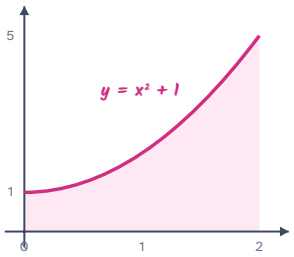
n = 16 persegi panjang

lebar $\Delta x = 0{,}125$

jumlah ≈ 4,42

Hampir menempel pada kurva.

Langkah 3. Dengan 16 persegi panjang ($\Delta x = 0{,}125$), jumlahnya $\approx 4{,}42$. Persegi panjangnya hampir menempel pada kurva.



n → ∞ dan Δx → 0

$\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = 14/3$

$\approx 4{,}67$ (luas eksak)

Σ menjadi $\int$ (huruf S panjang), Δx menjadi dx.

Langkah 4. Jika $n \to \infty$, jumlahnya menuju luas eksak $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$. Lambang Σ berubah menjadi $\int$, dan Δx menjadi dx.

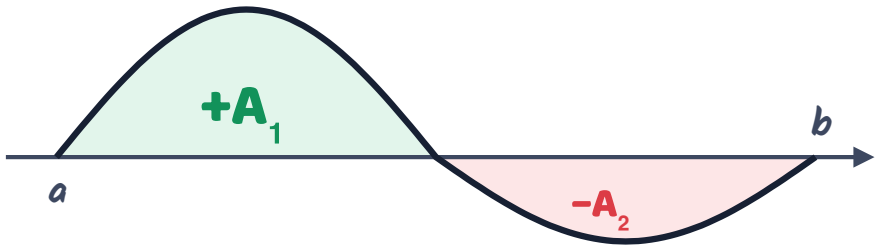
DEFINISI · INTEGRAL TENTU

Untuk fungsi f yang kontinu pada $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x.$$

Bilangan a disebut **batas bawah**, b **batas atas**, $f(x)$ **integran**, dan dx mengingatkan bahwa kita menjumlahkan pita-pita yang sangat tipis searah sumbu-x. Hasil limitnya sama, titik x_i^* mana pun yang dipilih.

Ada satu kejutan. Jika grafik berada **di bawah** sumbu-x, tinggi $f(x_i^*)$ bernilai negatif, sehingga "luas" persegi panjangnya ikut negatif. Jadi integral tentu adalah **luas bertanda**: daerah di atas sumbu-x dihitung positif, daerah di bawah sumbu-x dihitung negatif.



$\int f(x)\,dx = A_1 - A_2$

di atas sumbu-x: +

di bawah sumbu-x: −

luas daerah = $A_1 + A_2$

Integral tentu menjumlahkan luas **bertanda**. Luas daerah yang sebenarnya menjumlahkan keduanya sebagai bilangan positif.

Tebak Dulu!

Berapa nilai $\int_{-1}^{1} x\,dx$?

1, karena ada dua segitiga yang masing-masing luasnya $\frac{1}{2}$.

2, yaitu panjang selangnya.

0.

Tidak terdefinisi, karena sebagian grafiknya negatif.

Jawabannya: 0. Segitiga di kanan (di atas sumbu-x) bernilai $+\frac{1}{2}$, sedangkan segitiga di kiri (di bawah sumbu-x) bernilai $-\frac{1}{2}$. Integral tentu menjumlahkan luas *bertanda*, jadi hasilnya $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Luas daerahnya sendiri tetap 1.

SIFAT-SIFAT INTEGRAL TENTU

- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ dan $\int_a^b \big[f(x) \pm g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$: daerah boleh dipotong menjadi beberapa bagian.
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ dan $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$
- $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$, yaitu luas persegi panjang.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Integral tentu belum tentu sama dengan luas daerah. Jika soal meminta **luas**, cari dulu titik potong grafik dengan sumbu-x, hitung integral pada setiap bagian, lalu jumlahkan **nilai mutlaknya**. Contoh: $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$, padahal luas kedua segitiganya $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Integral juga menjawab pertanyaan sehari-hari. Speedometer motor menunjukkan kecepatan pada setiap saat. Jika kecepatan itu dikalikan selang waktu yang sangat pendek lalu dijumlahkan terus-menerus, hasilnya jarak tempuh. Itu jumlah Riemann!

Bahasa sederhana · Jika motor melaju tetap 10 m/s selama 20 detik, jaraknya 10 × 20 = 200 m. Pada grafik kecepatan–waktu, angka itu adalah luas persegi panjang setinggi 10 dan selebar 20. Kalau kecepatannya berubah-ubah, jaraknya tetap sama dengan **luas di bawah grafik**.

$$\text{jarak} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

GRAFIK HIDUP

Jarak tempuh = luas di bawah grafik kecepatan

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

$$s(T) = \int_0^T v(t)\,dt$$

$$s(10) = \int_0^{10} v(t)\,dt = 84 \text{ m}$$



melaju tetap 12 m/s: tiap detik jarak bertambah 12 m

Kecepatan v(T)	Jarak = luas arsir	Kecepatan rata-rata
12 m/s	84 m	8,4 m/s

Seret titik jingga atau tekan ▶ **Jalankan**. Kapan luas arsir bertambah paling cepat? Berapa jarak total sampai motor berhenti di detik ke-30?

CONTOH **Jarak motor Dimas ke sekolah**

Motor Dimas mulai dari diam. Kecepatannya naik teratur sampai 10 m/s dalam 5 detik, lalu tetap 10 m/s selama 20 detik, kemudian turun teratur sampai berhenti dalam 5 detik. Berapa jarak yang ditempuh?

1. Grafik kecepatan–waktunya berbentuk trapesium: alas bawah 30 s, alas atas 20 s, tinggi 10 m/s.
2. Pecah menjadi tiga bagian: segitiga $\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$ m, persegi panjang $20 \times 10 = 200$ m, dan segitiga 25 m.
3. Jumlahkan: $25 + 200 + 25 = 250$ m. Cek dengan rumus trapesium: $\frac{30+20}{2} \times 10 = 250$ m ✓.

Jarak tempuhnya 250 m, yaitu luas di bawah grafik kecepatan.

30.3 Antiturunan dan integral tak tentu

Di Bab 28 kamu belajar menurunkan: dari fungsi posisi $s(t)$ ke kecepatan $v(t) = s'(t)$. Sekarang kita berjalan mundur. Jika kecepatannya diketahui, fungsi posisi apa yang turunannya sama dengan kecepatan itu? Pertanyaan "mundur" ini disebut mencari **antiturunan**.

DEFINISI · ANTITURUNAN DAN INTEGRAL TAK TENTU

F disebut **antiturunan** dari f jika $F'(x) = f(x)$. Kumpulan semua antiturunan f ditulis

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

dan disebut **integral tak tentu**. Huruf C adalah **konstanta integrasi**. Konstanta apa pun hilang ketika diturunkan, jadi x^2, $x^2 + 5$, dan $x^2 - 100$ semuanya antiturunan dari $2x$.

Bahasa sederhana · Antiturunan itu seperti main tebak-tebakan terbalik. Kak Lintang bertanya, "Turunan sebuah fungsi adalah $2x$. Fungsinya apa?" Kamu menjawab x^2, karena turunan x^2 memang $2x$. Tetapi $x^2 + 7$ juga benar! Karena itu kita selalu menambahkan $+ C$.

ATURAN PANGKAT UNTUK INTEGRAL

Untuk $n \neq -1$,

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Integral juga bersifat linear: $\int \big[a\, f(x) + b\, g(x)\big]\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$.

Mengapa aturan ini benar?

Cukup turunkan ruas kanan: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \dfrac{(n+1)\,x^n}{n+1} + 0 = x^n$. Turunannya kembali ke x^n, jadi ruas kanan memang antiturunan x^n. Syarat $n \neq -1$ diperlukan karena penyebut $n+1$ tidak boleh nol.

TRIK KAK LINTANG

"**Naik satu, bagi yang baru.**" Pangkat dinaikkan satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Contoh: $\int 5x^4\, dx = 5 \cdot \dfrac{x^5}{5} + C = x^5 + C$. Ragu? **Turunkan jawabanmu.** Kalau hasilnya kembali ke soal, jawabanmu pasti benar.

Fungsi $f(x)$	$\int f(x)\, dx$	**Cek dengan menurunkan**
k (konstanta)	$kx + C$	$(kx)' = k$
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
e^x	$e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$(-\cos x)' = \sin x$
$\cos x$	$\sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Aturan pangkat tidak berlaku untuk $n = -1$. Rumusnya akan menghasilkan $\frac{x^0}{0}$, pembagian dengan nol! Untuk $\int \frac{1}{x}\,dx$ jawabannya $\ln|x| + C$. Jangan lupa juga menulis $+C$ pada setiap integral tak tentu.

RUMUS HIDUP **Luas di bawah y = xⁿ**

$$L = \int_0^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Naikkan pangkatnya satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Daerah di bawah x^n dari 0 sampai b mengisi tepat 1/(n + 1) bagian persegi panjang $b \times b^n$ yang membungkusnya.

b Batas atas b | n Pangkat n | L Luas `satuan luas`

LUAS

0,3333

satuan luas

⅓: angka rahasia volume kerucut dan tumpeng!

Pangkat **2** naik menjadi **3**, lalu dibagi **3**: luasnya **0,3333**. Persegi panjang pembungkusnya $b \times b^n$ = **1**, dan daerah ini mengisi tepat 1/**3** bagiannya.

Cek satuan: Luas memakai satuan sumbu-x × satuan sumbu-y.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-INTEGRAL-PANGKAT

CONTOH **Menemukan fungsi dari turunannya**

Tentukan $F(x)$ jika $F'(x) = 6x^2 + 4x - 5$ dan grafik F melalui titik $(0, 3)$.

1. Integralkan suku demi suku: $\int (6x^2 + 4x - 5)\,dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C = 2x^3 + 2x^2 - 5x + C$.
2. Cek dengan menurunkan: $(2x^3 + 2x^2 - 5x)' = 6x^2 + 4x - 5$ ✓.
3. Melalui $(0, 3)$ berarti $F(0) = C = 3$.

$F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 5x + 3$. Syarat "melalui sebuah titik" memilih satu kurva dari seluruh keluarga kurva $F(x) + C$.

ADU CEPAT **Antiturunan kilat**

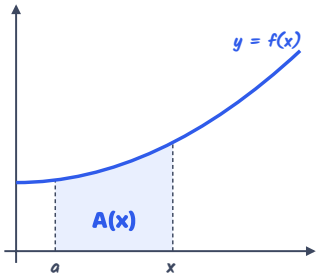
ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Naik satu, bagi yang baru: koefisien baru = koefisien lama ÷ pangkat baru. Contoh: $\int 12x^3\,dx = 3x^4 + C$.

30.4 Teorema Dasar Kalkulus: jembatan dua dunia

Sejauh ini ada dua dunia yang tampak terpisah. Dunia **luas** berisi integral tentu dan jumlah Riemann yang melelahkan. Dunia **antiturunan** berisi aturan pangkat yang cepat. Teorema Dasar Kalkulus adalah jembatan di antara keduanya. Ikuti animasi berikut langkah demi langkah.

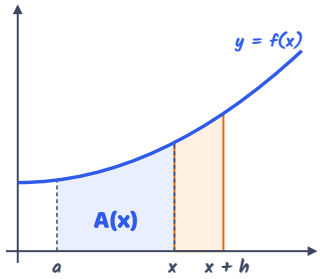


Fungsi luas A(x)

= luas di bawah kurva f dari a sampai x.

Geser x, maka A(x) ikut berubah.

Langkah 1. Misalkan $A(x)$ adalah luas di bawah kurva f dari titik tetap a sampai x. Jika x bergeser, luasnya berubah. Jadi A adalah sebuah fungsi.

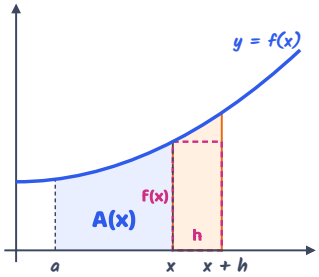


Tambah x sejauh h.

Luas bertambah sebesar pita jingga yang tipis:

A(x + h) − A(x)

Langkah 2. Geser x sedikit sejauh h. Luas bertambah sebesar pita tipis berwarna jingga: $A(x+h) - A(x)$.



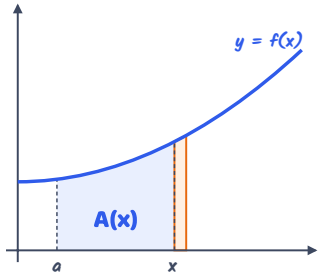
Pita ≈ persegi panjang

lebar h, tinggi f(x):

A(x+h) − A(x) ≈ f(x) · h

Sisa segitiga kecil di atasnya makin tak berarti.

Langkah 3. Pita tipis itu hampir berupa persegi panjang selebar h dan setinggi $f(x)$, jadi $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$.



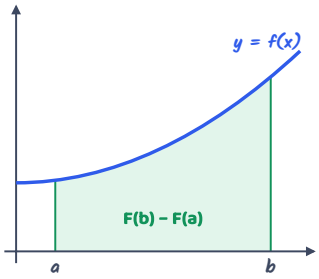
Bagi dengan h, lalu h → 0:

A'(x) = f(x)

Laju pertambahan luas = tinggi kurva di x.

A adalah antiturunan f!

Langkah 4. Bagi dengan h, lalu buat $h \to 0$: $\dfrac{A(x+h) - A(x)}{h} \to f(x)$, yaitu $A'(x) = f(x)$. Fungsi luas adalah antiturunan f!



Untuk antiturunan F apa pun:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Konstanta C saling menghapus, jadi C boleh diabaikan.

Langkah 5. Antiturunan lain hanya berbeda konstanta: $F = A + C$. Maka $\int_a^b f(x)\,dx = A(b) - A(a) = F(b) - F(a)$. Luas dihitung dengan antiturunan!

TEOREMA DASAR KALKULUS

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$.

1. Fungsi luas $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ memenuhi $A'(x) = f(x)$.
2. Jika F adalah antiturunan f yang mana pun, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Bukti singkat

(1) Pada selang $[x, x+h]$, misalkan m dan M adalah nilai terkecil dan terbesar f. Pita tipisnya terjepit di antara dua persegi panjang: $mh \le A(x+h) - A(x) \le Mh$. Bagi dengan h: $m \le \dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} \le M$. Ketika $h \to 0$, m dan M sama-sama menuju $f(x)$ karena f kontinu. Jadi $A'(x) = f(x)$.

(2) A dan F sama-sama antiturunan f, jadi selisihnya konstan: $A(x) = F(x) + C$. Karena $A(a) = 0$, diperoleh $C = -F(a)$. Maka $\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = F(b) - F(a)$. ∎

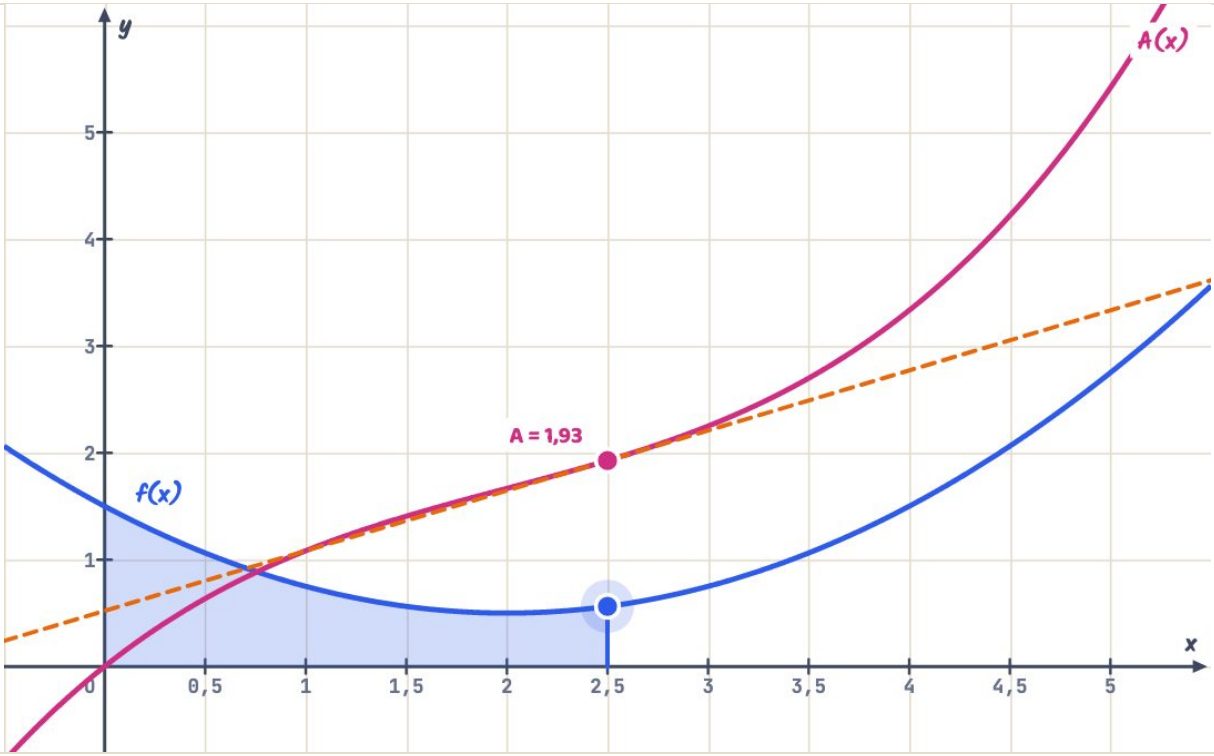
GRAFIK HIDUP **Kemiringan fungsi luas = tinggi kurva**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

$$A(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad A'(x) = f(x)$$

$$A(2{,}5) \approx 1{,}927, \qquad A'(2{,}5) = f(2{,}5) \approx 0{,}563$$

Kurva biru adalah f(x) = x²/4 − x + 1,5. Kurva magenta adalah A(x), luas daerah biru dari 0 sampai X. Garis singgung jingga mengukur seberapa cepat luas itu bertambah.



Luas arsir A(X)	Tinggi f(X)	Kemiringan A di X
1,927	0,563	0,563

Tekan ▶ **Jalankan** atau seret titik biru. Bandingkan bacaan **Tinggi f(X)** dan **Kemiringan A di X**: selalu sama! Di X berapa luas bertambah paling pelan?

Sekarang Tebak Dulu di awal bab selesai dalam satu baris: $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$. Tidak perlu lagi menjumlahkan ratusan persegi panjang!

KERJAKAN BERSAMA

Integral tentu dalam tiga langkah

Hitung $\int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx$.

1. Antiturunan: $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$. Konstanta C tidak perlu ditulis karena akan saling menghapus.
2. Masukkan batas: $F(3) = 9 + 9 = 18$ dan $F(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.
3. Kurangkan: $18 - \frac{4}{3} = \frac{50}{3} \approx 16{,}67$.

$\int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{50}{3}$. Grafiknya berada di atas sumbu-x pada $[1, 3]$, jadi nilai ini juga luas daerahnya.

ADU CEPAT

Integral tentu kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Antiturunannya (c ÷ pangkat baru)·x pangkat baru. Masukkan batas atas, lalu kurangi nilai di batas bawah 0 (hasilnya 0).

TAMU DARI MASA LALU

Teorema Dasar Kalkulus ditemukan secara terpisah oleh **Isaac Newton** di Inggris (sekitar 1665–1666) dan **Gottfried Wilhelm Leibniz** di Jerman (sekitar 1675). Keduanya sempat berselisih panjang soal siapa yang lebih dulu. Lambang $\int$ dan dx yang kita pakai sekarang berasal dari Leibniz: $\int$ adalah huruf S yang dipanjangkan, dari kata Latin *summa* (jumlah). Hampir dua abad kemudian, **Bernhard Riemann** (1854) merumuskan definisi integral dengan jumlah persegi panjang secara teliti.

MITOS

"Kalau potongannya tak hingga banyak, jumlahnya pasti tak hingga."

FAKTA

Potongannya juga makin tipis. Jumlah tak hingga banyak suku bisa menuju bilangan tertentu, seperti $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$ di Bab 15. Integral memakai ide yang sama.

MITOS

"Integral tentu selalu sama dengan luas daerah."

FAKTA

Integral tentu adalah luas **bertanda**. Bagian di bawah sumbu-x dihitung negatif, sehingga $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ walaupun luas daerahnya 1.

MITOS

"+C cuma hiasan, boleh dilupakan."

FAKTA

$+C$ mewakili seluruh keluarga antiturunan. Pada soal dengan syarat awal, misalnya posisi awal motor, nilai C justru yang dicari.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

JUMLAH YANG MENYAMAR SEBAGAI INTEGRAL

Berapa nilai $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$? Keluarkan $\frac{1}{n}$: suku ke-k menjadi $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+k/n}$. Ini jumlah Riemann kanan untuk $f(x)=\frac{1}{1+x}$ pada $[0,1]$ dengan $\Delta x=\frac{1}{n}$! Jadi limitnya

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}693.$$

Trik "kenali jumlah Riemann" ini sering muncul di olimpiade: carilah pola $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

30.5 Luas daerah antara dua kurva

Bagaimana jika daerahnya tidak menempel pada sumbu-x, tetapi terjepit di antara dua kurva? Potong lagi menjadi pita-pita tegak. Tinggi setiap pita adalah **kurva atas dikurangi kurva bawah**.

LUAS ANTARA DUA KURVA

Jika $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$, luas daerah di antara kedua kurva adalah

$$L = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,dx = \int_a^b (\text{atas} - \text{bawah})$$

Batas a dan b biasanya titik potong kedua kurva, yaitu penyelesaian $f(x) = g(x)$.

KERJAKAN BERSAMA **Daerah antara garis dan parabola**

Hitung luas daerah yang dibatasi parabola $y = x^2$ dan garis $y = x + 2$.

1. Titik potong: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$, jadi $x = -1$ dan $x = 2$.
2. Uji di $x = 0$: garis bernilai 2, parabola bernilai 0. Jadi garis berada di atas.
3. $L = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$.

Luasnya $\frac{9}{2} = 4{,}5$ satuan luas. Cocokkan dengan Grafik Hidup di bawah pada $m = 1$ dan $c = 2$.

GRAFIK HIDUP

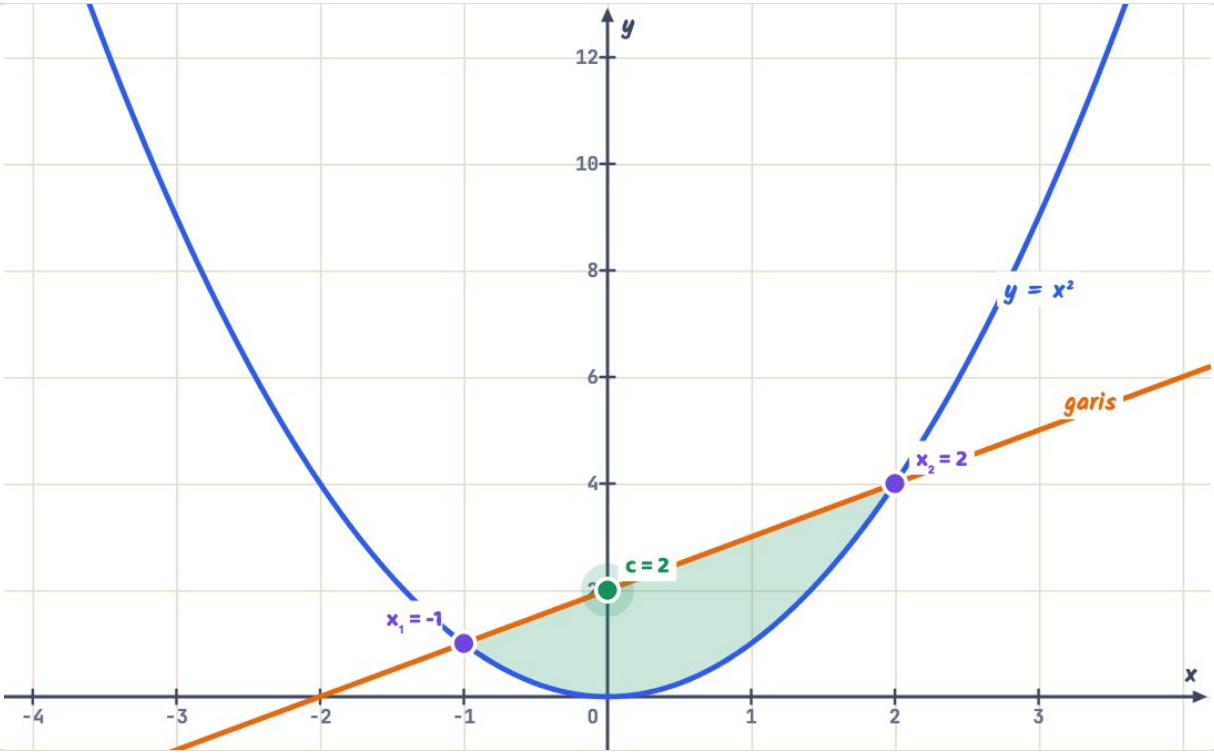
Luas antara garis dan parabola

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \left[(mx + c) - x^2\right] dx = \frac{D\sqrt{D}}{6}$$

$$D = 9: \quad L = \frac{9\sqrt{9}}{6} \approx 4{,}5$$

Garis $y = mx + c$ memotong parabola $y = x^2$ di x_1 dan x_2. Diskriminan persamaan $x^2 - mx - c = 0$ adalah $D = m^2 + 4c$.



✨ **D bilangan kuadrat: titik potongnya rasional**

$D = m^2 + 4c$	Luas (integral)	Rumus cepat $D\sqrt{D}/6$
9	4,5	4,5

Ubah gradien m atau seret titik hijau di sumbu-y. Daerah hijau selalu berada di antara garis (atas) dan parabola (bawah). Perhatikan: luas dari integral dan dari rumus cepat $\frac{D\sqrt{D}}{6}$ selalu sama!

TRIK KAK LINTANG: RUMUS CEPAT

Untuk daerah antara parabola dan garis (atau dua parabola), susun persamaan titik potongnya menjadi $ax^2 + bx + c = 0$ dengan diskriminan $D = b^2 - 4ac$. Luasnya langsung

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}.$$

Contoh di atas: $x^2 - x - 2 = 0$, $D = 1 + 8 = 9$, $L = \dfrac{9 \cdot 3}{6} = 4{,}5$ ✓. Boleh dihafal, tetapi pahami asal-usulnya.

Mengapa $L = \dfrac{D\sqrt{D}}{6a^2}$?

Misalkan selisih kedua kurva adalah $a(x - x_1)(x_2 - x)$ dengan $a > 0$ dan $x_1 < x_2$. Tulis $x = x_1 + u$ dan $d = x_2 - x_1$, sehingga $x_2 - x = d - u$. Maka

$$L = a\int_0^d u(d - u)\,du = a\left(\frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{3}\right) = \frac{a\,d^3}{6}.$$

Selisih kedua akar persamaan kuadrat adalah $d = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$, jadi $L = \dfrac{a}{6} \cdot \dfrac{D\sqrt{D}}{a^3} = \dfrac{D\sqrt{D}}{6a^2}$. ∎

∎

30.6 Volume benda putar: dari tumpeng sampai kendi

Tebak Dulu!

Sebuah tumpeng (kerucut) dan sebuah dandang (tabung) memiliki alas dan tinggi yang sama persis. Volume dandang berapa kali volume tumpeng?

- 2 kali, karena kerucut adalah "setengah" tabung.
- 3 kali.
- π kali.
- Sama besar, karena alas dan tingginya sama.

Jawabannya: 3 kali. Volume kerucut $\frac{1}{3}\pi r^2 t$, sedangkan tabung $\pi r^2 t$. Angka $\frac{1}{3}$ itu bukan kebetulan: ia adalah $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ dari Tebak Dulu pertama! Lihat sebabnya di bawah.

Tumpeng nasi kuning berbentuk kerucut. Bagaimana menghitung volumenya dengan integral? Iris mendatar! Tumpeng berubah menjadi tumpukan **cakram** tipis, mirip tumpukan koin yang makin ke atas makin kecil.

Bahasa sederhana · Bayangkan tumpeng dipotong mendatar menjadi banyak lempeng bundar setipis kerupuk. Setiap lempeng hampir berbentuk tabung pendek: volumenya luas lingkaran dikali tebalnya. Jumlahkan volume semua lempeng, maka kamu mendapat volume tumpeng. Makin tipis lempengnya, makin tepat hasilnya.

Satu cakram setebal Δy dengan jari-jari r bervolume $\pi r^2\,\Delta y$. Jumlahkan semua cakram, lalu buat $\Delta y \to 0$. Jumlah Riemann itu berubah menjadi integral.

VOLUME BENDA PUTAR (METODE CAKRAM)

Misalkan sebuah benda putar setinggi t mempunyai irisan mendatar berbentuk lingkaran berjari-jari $r(y)$ pada ketinggian y. Volumenya

$$V = \int_0^t \pi \left[r(y)\right]^2 dy.$$

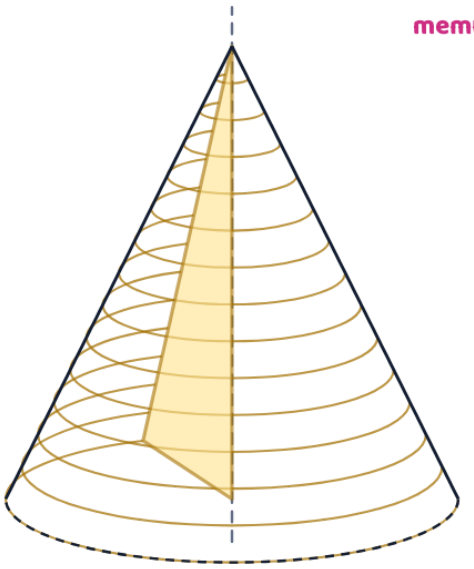
Untuk kurva $y = f(x)$ yang diputar 360° mengelilingi sumbu-x pada $[a, b]$: $V = \pi \displaystyle\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$.

LAB MINI Pabrik benda putar: tumpeng, kendi, bakso, gelas

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

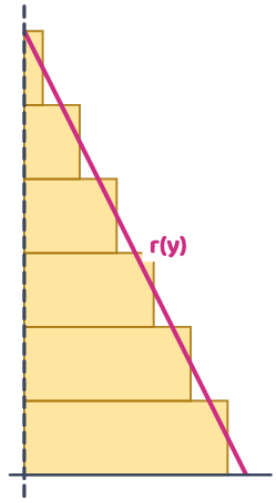
Tumpeng (kerucut)

$V \approx \Sigma\, \pi \cdot r_i^2 \cdot \Delta y, \quad \Delta y = 5$ cm



✋ *seret ke atas/bawah: ubah sudut pandang*

Penampang (diputar → cakram)



Jumlah n cakram	Volume integral	Selisih	Tahap
0 cm³	7.068,6 cm³	–	memutar penampang 360°

Pilih bentuknya, lalu tambah banyak cakram n. Bandingkan **Jumlah n cakram** dengan **Volume integral**. Tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat penampangnya diputar 360°, lalu cakram ditumpuk satu per satu. Seret gambar ke atas atau ke bawah untuk mengubah sudut pandang. Bentuk mana yang paling cepat "pas" dengan sedikit cakram?

RUMUS HIDUP

Volume tumpeng lewat integral

$$V = \int_0^t \pi \left(\frac{r}{t}\, y\right)^2 dy = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, t$$

Pada jarak y dari puncak, jari-jari irisan tumpeng adalah (r/t)·y. Jumlahkan semua cakram tipis dari puncak sampai alas, hasilnya sepertiga volume tabung.

r Jari-jari alas cm

t Tinggi tumpeng cm

V Volume cm³

VOLUME

7.069

cm³

ukuran tumpeng pada contoh di bawah

Tumpeng berjari-jari **15** cm dan setinggi **30** cm bervolume **7.069** cm³ ≈ **7,069** liter, cukup untuk ±**28** porsi nasi (250 cm³ per porsi). Dandang tabung dengan ukuran sama bervolume **21.205,75** cm³, tepat 3 kali lipatnya.

Cek satuan: cm × cm × cm = cm³. Ingat, 1.000 cm³ = 1 liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VOLUME-TUMPENG

COBA SENDIRI **Berapa porsi dari satu tumpeng?**

Tumpeng nasi kuning berbentuk kerucut dengan jari-jari alas 15 cm dan tinggi 30 cm. Tentukan volumenya dengan integral, lalu taksir banyak porsi jika satu porsi nasi ±250 cm³.

1. Letakkan puncak di $y = 0$ dan ukur y ke arah alas. Jari-jari irisan sebanding dengan jarak dari puncak: $r(y) = \frac{15}{30}\, y = \frac{y}{2}$.

2. $V = \displaystyle\int_0^{30} \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{30} = \frac{\pi}{4} \cdot 9000 = 2250\pi \approx 7069 \text{ cm}^3$.

3. Cocok dengan rumus kerucut: $\frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3}\pi \cdot 225 \cdot 30 = 2250\pi$ ✓.

4. Banyak porsi: $7069 \div 250 \approx 28$.

Volume tumpeng ±7.069 cm³ (±7 liter), cukup untuk ±28 porsi. Angka $\frac{1}{3}$ pada rumus kerucut ternyata berasal dari $\int y^2\, dy = \frac{y^3}{3}$!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pada volume benda putar, jari-jari dikuadratkan pada setiap irisan, di dalam integral: $\pi \int r^2\, dy$, bukan $\pi \left(\int r\, dy\right)^2$. Untuk benda berlubang seperti cincin, volume tiap irisan adalah $\pi(R^2 - r^2)\, \Delta y$, bukan $\pi(R - r)^2\, \Delta y$.

ID **MATEMATIKA NUSANTARA**

Benda putar bukan sekadar istilah buku. Para perajin gerabah di **Kasongan** (Bantul, Yogyakarta) dan **Plered** (Purwakarta, Jawa Barat) membentuk kendi, guci, dan celengan di atas **meja putar**. Tangan perajin menentukan "jari-jari" tanah liat pada setiap ketinggian, dan putaran meja menyelesaikan sisanya. Tumpeng pun dibentuk dengan cetakan kerucut dari anyaman bambu yang disebut *kukusan*. Dalam tradisi selamatan, pucuk tumpeng biasanya dipotong dan diberikan kepada orang yang paling dihormati.

BONUS: RUMUS VOLUME BOLA

Bola berjari-jari R adalah lingkaran $x^2 + y^2 = R^2$ yang diputar. Pada ketinggian y, jari-jari irisannya $\sqrt{R^2 - y^2}$. Maka

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\,(R^2 - y^2)\, dy = \pi\left[R^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Rumus yang kamu pakai di Bab 21 kini terbukti! Archimedes sangat bangga dengan temuannya bahwa volume bola sama dengan $\frac{2}{3}$ volume tabung pembungkusnya. Menurut cerita, ia ingin gambar bola dan tabung diukir di makamnya.

30.7 Nilai rata-rata, simetri, dan integral di sekitarmu

Integral juga bisa **meratakan**. Bayangkan pasir di dalam bak yang permukaannya bergelombang mengikuti grafik f. Ratakan pasir itu tanpa menambah atau membuangnya. Tinggi permukaan yang rata itulah **nilai rata-rata fungsi**.

DEFINISI · NILAI RATA-RATA FUNGSI

Nilai rata-rata f pada $[a, b]$ adalah luas dibagi lebar:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Contoh: motor pada Grafik Hidup 30.2 menempuh 288 m dalam 30 detik, jadi kecepatan rata-ratanya $\frac{1}{30}\int_0^{30} v(t)\,dt = \frac{288}{30} = 9{,}6$ m/s. Padahal motor itu hanya sebentar melaju 9,6 m/s, yaitu saat ngegas dan saat mengerem. Rata-rata tidak selalu menggambarkan keadaan yang paling sering terjadi.

Simetri juga bisa menghemat banyak hitungan. Fungsi **ganjil** memenuhi $f(-x) = -f(x)$; grafiknya simetris terhadap titik asal, misalnya x, x^3, dan $\sin x$. Pada selang simetris $[-a, a]$, luas di kanan dan di kiri sama besar tetapi berlawanan tanda.

TRIK ANCIL: INTEGRAL NOL TANPA MENGHITUNG

Jika f ganjil, maka $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. Contoh: $\int_{-2}^{2} (x^5 - 7x^3 + x)\,dx = 0$ seketika. Jika f **genap** ($f(-x) = f(x)$), cukup hitung separuhnya: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

INTEGRAL CERDIK: CERMINKAN, LALU JUMLAHKAN

Daerah di bawah $f(x)$ dan di bawah cerminannya $f(a+b-x)$ pada $[a, b]$ sama luasnya, jadi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$. Pakai sifat ini untuk

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx.$$

Ganti x dengan $\frac{\pi}{2} - x$: sinus dan kosinus bertukar tempat, sehingga $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx$. Jumlahkan kedua bentuk: $2I = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$, jadi $I = \frac{\pi}{4}$. Tanpa mencari antiturunan sama sekali!



Luas danau & hutan

Citra satelit terdiri atas piksel-piksel kecil. Luas danau atau hutan dihitung dengan menjumlahkan piksel, persis seperti menghitung kotak.



Aplikasi lari di HP

Aplikasi menjumlahkan kecepatan dari GPS dikali selang waktu yang sangat pendek. Jarak larimu adalah integral kecepatan.



Curah hujan BMKG

Penakar hujan otomatis mencatat intensitas hujan (mm/jam). Curah hujan sehari adalah luas di bawah grafik intensitas terhadap waktu.



Meteran listrik kWh

Meteran menjumlahkan daya (kW) yang terpakai dari waktu ke waktu. Energi dalam kWh adalah integral daya terhadap waktu.



Dosis obat

Apoteker memakai "luas di bawah kurva" kadar obat dalam darah (AUC) untuk menilai seberapa banyak obat yang sampai ke peredaran darah.



Tumpeng & kendi

Volume nasi dalam tumpeng atau air dalam kendi dapat dihitung dengan metode cakram, langsung dari bentuk lengkungnya.

Cek Cepat

Nilai $\int_0^3 2x\,dx$ **adalah...**

- 6
- 9
- 3
- 18

$\int 3x^2\,dx = \ldots$

- $6x + C$
- x^3
- $3x^3 + C$
- $x^3 + C$

Nilai $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ adalah...

- 0
- 8
- 4
- 16

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: menjepit luas sehelai daun

Bahan: sehelai daun lebar (daun jati, pisang, atau sukun), buku tulis berpetak (kotak 5 mm), pensil, penggaris.

1. Letakkan daun di atas kertas berpetak dan jiplak tepinya.
2. Dengan pensil tebal, buat petak besar 1 cm × 1 cm (setiap 2 × 2 kotak kecil). Hitung petak yang seluruhnya di dalam daun (P) dan petak yang hanya tersentuh tepi daun (S).
3. Catat taksiran bawah P, taksiran atas $P + S$, dan taksiran tengah $P + \frac{1}{2}S$ dalam cm².
4. Ulangi dengan kotak kecil 5 mm × 5 mm. Ingat, satu kotak kecil = 0,25 cm².
5. Bandingkan lebar celah (atas – bawah) pada kedua ukuran kotak.

Pertanyaan: Saat sisi kotak dibuat setengahnya, kira-kira menjadi berapa bagian lebar celahnya? Mengapa taksiran tengah $P + \frac{1}{2}S$ biasanya sudah cukup dekat dengan luas sebenarnya?

RINGKASAN KILAT **Bab 30 dalam 3 menit**

☑ Kamu sekarang bisa...

- menaksir luas daerah lengkung dengan menghitung kotak dan **jumlah Riemann**
- memahami **integral tentu** sebagai luas bertanda, misalnya jarak dari grafik kecepatan
- menentukan **antiturunan** (integral tak tentu) dengan aturan pangkat
- memakai **Teorema Dasar Kalkulus** untuk menghitung integral tentu dengan cepat
- menghitung **luas antara dua kurva** dan **volume benda putar**, misalnya volume tumpeng

🔑 Istilah kunci

jumlah Riemann · batas bawah · batas atas · integran · luas bertanda · antiturunan · integral tak tentu · konstanta integrasi · nilai rata-rata fungsi · ganjil

🧮 Rumus penting

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\,b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Jumlah Riemann kanan untuk y = x². Jumlahkan n persegi panjang di bawah $y = x^2$ dari 0 sampai b. Makin banyak persegi panjangnya, makin dekat hasilnya ke $b^3/3$.

$$L = \int_0^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Luas di bawah y = xⁿ. Naikkan pangkatnya satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Daerah di bawah x^n dari 0 sampai b mengisi tepat 1/(n + 1) bagian persegi panjang $b \times b^n$ yang membungkusnya.

$$V = \int_0^t \pi \left(\frac{r}{t}\,y\right)^2 dy = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, t$$

Volume tumpeng lewat integral. Pada jarak y dari puncak, jari-jari irisan tumpeng adalah (r/t)·y. Jumlahkan semua cakram tipis dari puncak sampai alas, hasilnya sepertiga volume tabung.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Integral tentu belum tentu sama dengan luas daerah.
- Aturan pangkat tidak berlaku untuk $n = -1$.
- Pada volume benda putar, jari-jari dikuadratkan pada setiap irisan, di dalam integral: $\pi \int r^2\,dy$, bukan $\pi \left(\int r\,dy\right)^2$.

⛰ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=30

Teka-teki untuk Bab 31

Di bab ini kamu meratakan kurva menjadi nilai rata-rata. Sekarang, wali kelas Dimas mengumumkan, "Rata-rata nilai ulangan kelas kita 70." Dimas lega: "Berarti kebanyakan anak dapat sekitar 70." Ternyata di kelas yang berisi 10 siswa itu **tidak seorang pun** mendapat 70, dan 8 dari 10 siswa nilainya **di bawah** rata-rata! Bagaimana mungkin?

▼ **Intip petunjuk**

Misalkan 8 siswa mendapat 65 dan 2 siswa mendapat 90. Jumlahnya $8 \times 65 + 2 \times 90 = 700$, jadi rata-ratanya $700 \div 10 = 70$. Dua nilai tinggi "menarik" rata-rata ke atas. Bab 31 memperkenalkan median dan modus, ukuran pemusatan yang tidak mudah tertipu.

BAB 31 · DATA & PELUANG

31 Statistika: Bercerita dengan Data

Rata-rata kelas 70, tetapi tidak ada satu pun siswa yang nilainya dekat dengan 70. Kok bisa? Di bab ini kamu belajar membuat angka bercerita dengan jujur, dan menangkap basah angka yang "berbohong".

Setelah bab ini, kamu bisa

- menyajikan data dengan **tabel turus, diagram batang, diagram lingkaran,** dan **histogram**;
- menghitung dan memilih ukuran pemusatan yang tepat: **rata-rata, median,** atau **modus**;
- meringkas sebaran data dengan **jangkauan, kuartil, box plot,** dan **simpangan baku**, serta mengenali **pencilan**;
- membaca **diagram pencar, korelasi,** dan **garis regresi** tanpa terjebak "korelasi = sebab-akibat";
- menjadi **detektif grafik** yang tidak mudah tertipu.

RATA-RATA YANG MENIPU

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Sepuluh orang di sebuah warung masing-masing membawa uang saku sekitar Rp20.000. Lalu datang seorang pengusaha yang membawa Rp1.000.000 dan ikut duduk. Apa yang terjadi pada uang saku "khas" di warung itu?

Rata-rata dan median sama-sama melonjak.

Rata-rata hampir tidak berubah, tetapi median melonjak.

Rata-rata melonjak menjadi sekitar Rp109.000, sedangkan median hampir tidak berubah.

Tidak ada yang berubah karena hanya satu orang yang datang.

Jawabannya: rata-rata melonjak, median tetap. Jumlah uangnya menjadi sekitar Rp200.000 + Rp1.000.000 = Rp1.200.000 untuk 11 orang, jadi rata-ratanya sekitar Rp109.000. Padahal sepuluh dari sebelas orang hanya membawa sekitar Rp20.000! Median, yaitu nilai tengah setelah data diurutkan, hanya bergeser satu posisi dan tetap sekitar Rp20.000. Itulah sebabnya laporan pendapatan sering memakai **median**.

31.1 Data: dari turus sampai histogram

Setiap hari kita dikelilingi angka: nilai rapor, curah hujan, harga cabai di pasar, jumlah penonton video. Kumpulan angka atau keterangan seperti itu disebut **data**. **Statistika** adalah ilmu mengumpulkan, merapikan, menyajikan, dan menafsirkan data, sehingga kumpulan angka yang bisu bisa **bercerita**.

Bahasa sederhana · Bayangkan kamu bertanya kepada teman sekelas, "Jajanan kantin apa yang paling kamu suka?" Semua jawaban mereka adalah data. Kalau setiap jawaban kamu catat dengan satu garis kecil (namanya **turus**), lalu garis-garis itu kamu ubah menjadi batang, kamu langsung bisa melihat jajanan mana yang paling laris.

DEFINISI

- **Populasi** adalah seluruh objek yang ingin kita ketahui, misalnya semua siswa SMP di satu kota.
- **Sampel** adalah sebagian populasi yang benar-benar didata, misalnya 200 siswa yang dipilih secara acak dari kota itu.
- **Data kategorik** berupa nama atau kelompok (jajanan favorit, golongan darah). **Data numerik** berupa bilangan: *diskret* bila diperoleh dengan membilang (banyak saudara), *kontinu* bila diperoleh dengan mengukur (tinggi badan, curah hujan).

Data mentah biasanya dirapikan dulu dalam **tabel turus**: setiap jawaban dicatat dengan satu garis, dan setiap garis kelima dibuat mencoret empat garis sebelumnya agar mudah dihitung per lima. Banyaknya garis disebut **frekuensi**. Dari tabel itu kita bisa membuat **diagram batang** (membandingkan banyak) atau **diagram lingkaran** (membandingkan bagian dari keseluruhan).

LAB MINI Survei jajan kantin: turus, batang, dan lingkaran sekaligus

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31

Jajanan	Turus	f
Cilok	𝍸 𝍸 ||||	9
Risol	𝍸 ||||	6
Bakwan	𝍸 |||	7
Onde-onde	|||	3
Nasi kuning	𝍸	5

Jumlah: 30

klik baris atau batang = tambah satu suara

Diagram batang

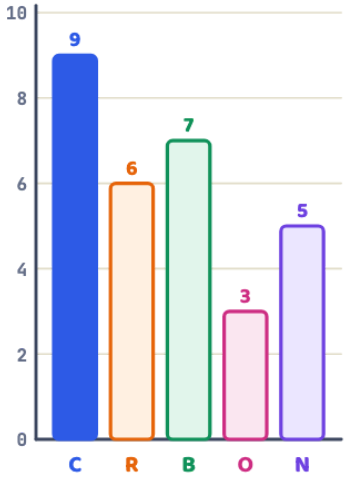
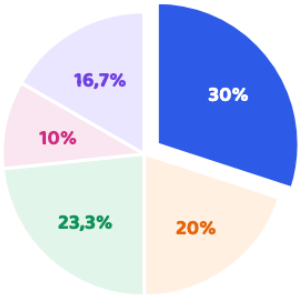


Diagram lingkaran



Sudut juring Cilok = 9/30 × 360° = 108°

Banyak responden	Modus	Sudut juring terpilih
30	Cilok	Cilok: 108°

Data awal: 30 siswa (data ilustratif). Klik baris tabel atau batang untuk menambah satu suara, lalu lihat ketiga sajian berubah bersama. Klik sebuah juring untuk melihat cara menghitung sudutnya. Tantangan: bisakah kamu membuat juring Onde-onde tepat 90°?

ATURAN SUDUT JURING

Pada diagram lingkaran, setiap kategori mendapat bagian lingkaran yang sebanding dengan frekuensinya:

$$\text{sudut juring} = \frac{\text{frekuensi}}{\text{jumlah data}} \times 360^\circ, \qquad \text{perse}$$

CONTOH **Juring bakwan**

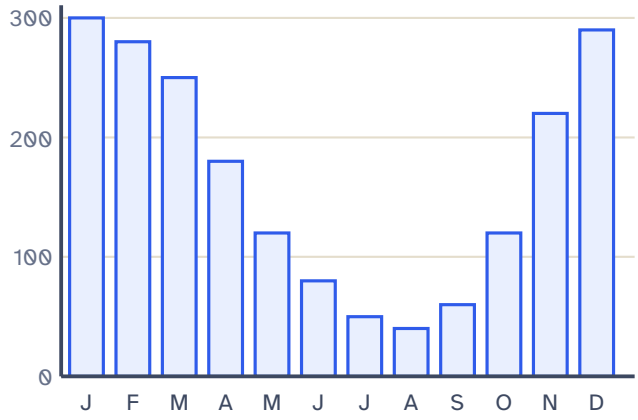
Dari 40 siswa, 14 orang memilih bakwan sebagai jajanan favorit. Berapa besar sudut juring bakwan pada diagram lingkaran, dan berapa persen siswa yang memilihnya?

1. Bagian bakwan dari seluruh siswa: $\frac{14}{40} = 0{,}35$.
2. Sudut juring: $0{,}35 \times 360^\circ = 126^\circ$.
3. Persentase: $0{,}35 \times 100\% = 35\%$.

Juring bakwan besarnya 126°, mewakili 35% siswa. Cek cepat: 35% sedikit lebih dari sepertiga lingkaran (120°), cocok!

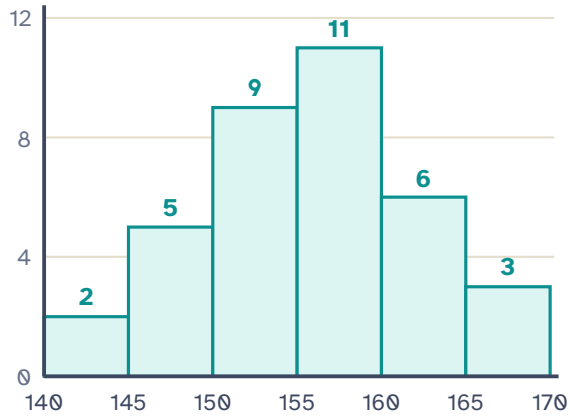
Untuk data numerik yang kontinu, seperti tinggi badan, data dikelompokkan ke dalam **kelas** yang bersambung, misalnya 150–155 cm, 155–160 cm, dan seterusnya. Sajiannya disebut **histogram**: batang-batangnya **bersentuhan** karena tidak ada celah di antara kelas-kelasnya.

Curah hujan bulanan (mm, ilustratif)



batang terpisah: tiap bulan adalah kategori sendiri

Histogram tinggi 36 siswa (cm)



batang bersentuhan: kelasnya bersambung

Kiri: diagram batang curah hujan bulanan sebuah kota di Jawa (data ilustratif); pola musim hujan dan kemarau langsung terlihat. Kanan: histogram tinggi badan 36 siswa yang dikelompokkan per 5 cm.

BATANG ATAU HISTOGRAM?

Diagram batang dipakai untuk kategori (jajanan, bulan, nama kota), jadi batangnya boleh berjarak dan urutannya boleh ditukar. Histogram dipakai untuk data kontinu yang dikelompokkan, jadi batangnya bersentuhan dan urutannya tidak boleh ditukar.

TAMU DARI MASA LALU

Pada tahun 1850-an, perawat Inggris **Florence Nightingale** mencatat penyebab kematian tentara dalam Perang Krimea. Ia menyajikannya dalam diagram berbentuk kelopak bunga (diagram area kutub) yang menunjukkan bahwa jauh lebih banyak tentara meninggal karena penyakit yang bisa dicegah daripada karena luka perang. Grafik itu ikut meyakinkan pemerintah untuk memperbaiki kebersihan rumah sakit. Nightingale juga tercatat sebagai perempuan pertama yang menjadi anggota perhimpunan statistika kerajaan Inggris (1858). Grafik yang baik bisa menyelamatkan nyawa!

31.2 Pusat data: rata-rata, median, modus

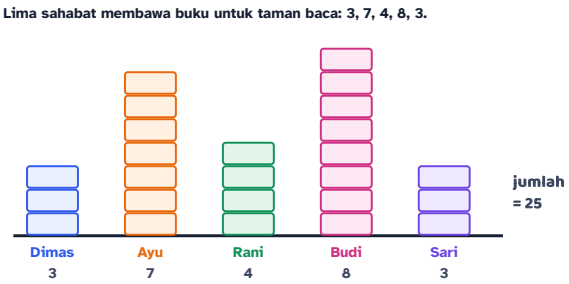
Kalau kamu hanya boleh memakai **satu** angka untuk mewakili seluruh data, angka mana yang kamu pilih? Ada tiga calon utama, dan masing-masing punya kelebihan.

DEFINISI: TIGA UKURAN PEMUSATAN

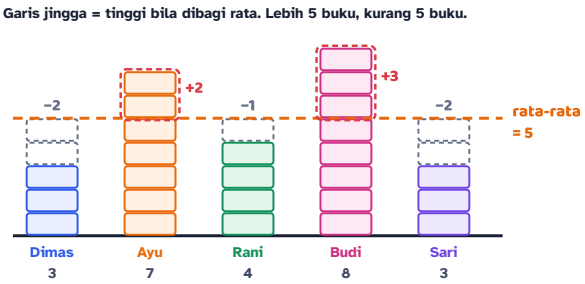
Untuk data $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

- **Rata-rata** (*mean*): $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{\sum x_i}{n}$.
- **Median**: nilai tengah setelah data **diurutkan**. Jika n ganjil, median adalah data ke-$\frac{n+1}{2}$; jika n genap, median adalah rata-rata dua data di tengah.
- **Modus**: nilai yang paling sering muncul. Data bisa punya satu modus, beberapa modus, atau tidak punya modus.

Bahasa sederhana · Rata-rata itu seperti **membagi rata**. Kalau lima sahabat membawa buku dengan jumlah berbeda-beda lalu semua buku dikumpulkan dan dibagi sama banyak, setiap orang mendapat "rata-rata" buku. Perhatikan animasi berikut.



Langkah 1. Lima sahabat membawa buku: Dimas 3, Ayu 7, Rani 4, Budi 8, Sari 3. Jumlahnya 25 buku. Kalau dibagi rata, masing-masing mendapat berapa?



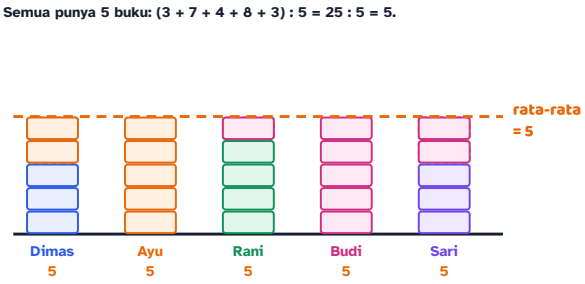
Langkah 2. Bayangkan garis setinggi 5 buku. Bagian di atas garis (kelebihan) ada $2 + 3 = 5$ buku; lubang di bawah garis (kekurangan) ada $2 + 1 + 2 = 5$ buku. Kelebihan **sama persis** dengan kekurangan!



Langkah 3. Ayu memindahkan 2 buku teratasnya ke tumpukan Dimas.



Langkah 4. Budi memindahkan 1 buku ke Rani dan 2 buku ke Sari. Tidak ada buku yang hilang atau bertambah.



Langkah 5. Sekarang semua tumpukan setinggi 5. Inilah arti rata-rata: **jumlah semua data dibagi banyak data**, $\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$.

SIFAT TITIK SEIMBANG

Jumlah simpangan semua data terhadap rata-ratanya selalu nol:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Artinya, total "kelebihan" di atas rata-rata sama dengan total "kekurangan" di bawahnya. Kalau data diletakkan sebagai beban di sebuah papan, papan itu **seimbang tepat di titik rata-rata**.

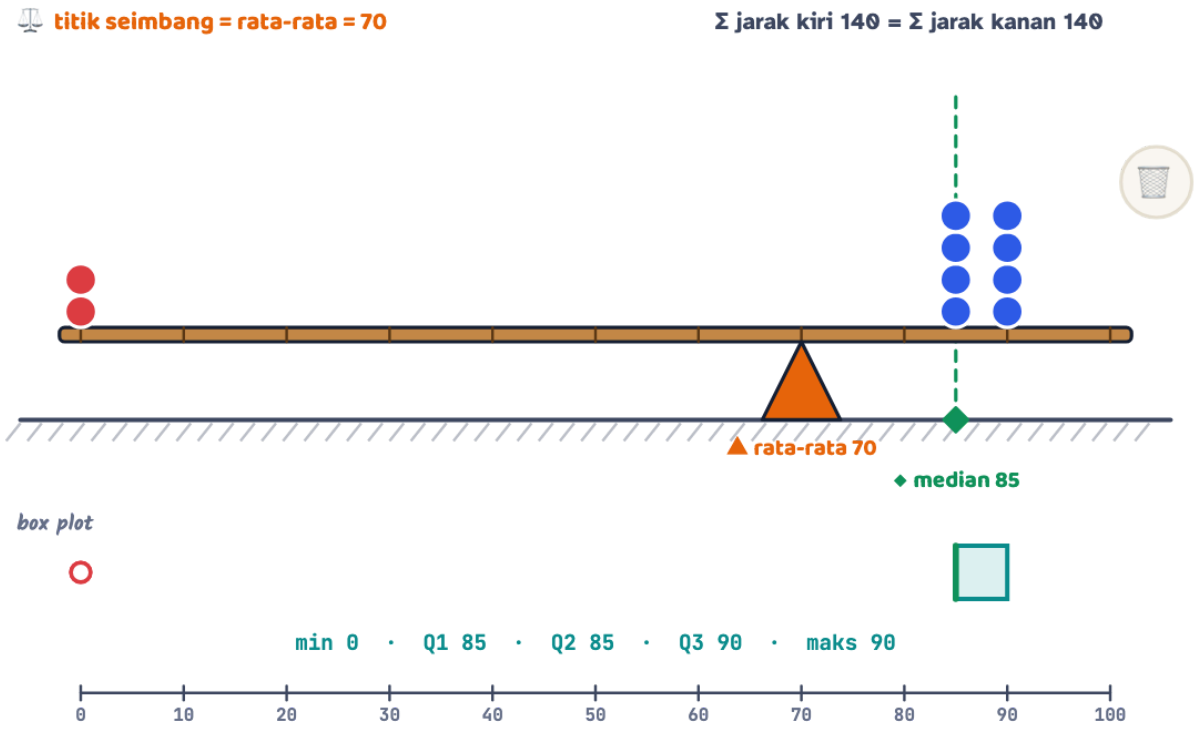
Bukti singkat

$\sum(x_i - \bar{x}) = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - n \cdot \dfrac{\sum x_i}{n} = \sum x_i - \sum x_i = 0$. Dalam bahasa fisika: momen gaya di kiri titik tumpu sama dengan momen gaya di kanannya, jadi papan seimbang.

Sekarang coba sendiri. Lab berikut memakai data komik di awal bab. Setiap titik adalah satu nilai ulangan yang duduk di atas papan jungkat-jungkit.

LAB MINI **Jungkat-jungkit data: rata-rata vs median**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31



Banyak data	Rata-rata	Median	Modus	Jangkauan antarkuartil
10	70	85	85 & 90 (4×)	5

Simpangan baku σ
35,07

Seret titik biru ke kiri atau ke kanan. Klik tempat kosong di atas papan untuk menambah titik; seret titik ke 🗑 untuk membuangnya. Perhatikan: segitiga jingga (rata-rata) selalu berlari mengejar setiap titik, sedangkan garis hijau (median) sering diam saja. Lalu tekan 🚀 **Tambah pencilan**. Siapa yang lebih "tahan banting"? Nyalakan **Aku pasang tumpuan sendiri** untuk menebak titik seimbangnya. Kotak di bagian bawah adalah **box plot** yang akan kita bedah di 31.3.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Median adalah data tengah setelah **diurutkan**, bukan data yang kebetulan berada di tengah daftar. Untuk data 7, 3, 9, 5, 4, angka di tengah daftar adalah 9, tetapi setelah diurutkan (3, 4, 5, 7, 9) mediannya 5.

CONTOH **Nilai rapor Ayu**

Nilai rapor Ayu pada tujuh mata pelajaran: 85, 90, 78, 92, 85, 88, 80. Tentukan rata-rata, median, dan modusnya.

1. Rata-rata: $\frac{85+90+78+92+85+88+80}{7} = \frac{598}{7} \approx 85{,}43$.
2. Urutkan: 78, 80, 85, **85**, 88, 90, 92. Ada 7 data, jadi median adalah data ke-4, yaitu 85.
3. Nilai 85 muncul dua kali, yang lain sekali. Modusnya 85.

Rata-rata ±85,43, median 85, modus 85. Ketiganya berdekatan karena datanya tidak punya pencilan.

✏️ **TRIK KAK LINTANG: RATA-RATA TEBAKAN**

Mau menghitung rata-rata 78, 82, 85, 79, 81 di kepala? Tebak saja 80, lalu hitung selisih tiap data dari tebakan: $-2, +2, +5, -1, +1$. Jumlah selisihnya 5, dan $5 : 5 = 1$. Jadi rata-ratanya $80 + 1 = 81$. Angka kecil jauh lebih ramah daripada angka besar!

ADU CEPAT **Rata-rata kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pakai trik rata-rata tebakan: pilih angka di tengah, rata-ratakan selisihnya. Atau jumlahkan semua, lalu bagi 4.

ADU CEPAT Median kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Urutkan dulu! Median lima data adalah data ke-3 setelah diurutkan.

Bagaimana jika dua kelompok digabung? Misalkan kelas 9A punya 30 siswa dengan rata-rata 78, dan kelas 9B punya 20 siswa dengan rata-rata 83. Rata-rata gabungannya **bukan** $\frac{78+83}{2}$, karena kelas 9A lebih besar dan suaranya lebih banyak.

RUMUS HIDUP Rata-rata gabungan

$$\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{n_1\,\bar{x}_1 + n_2\,\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Jumlahkan dulu semua nilai (banyak anggota × rata-rata) dari kedua kelompok, baru bagi dengan banyak anggota seluruhnya.

- n_1 Banyak siswa kelas A `siswa`
- $\bar{x}_1$ Rata-rata kelas A
- n_2 Banyak siswa kelas B `siswa`
- $\bar{x}_2$ Rata-rata kelas B
- $\bar{x}_{\text{gab}}$ Rata-rata gabungan

RATA-RATA GABUNGAN

80

kelas yang lebih besar menarik hasil ke arahnya

Jumlah nilai kelas A = **30** × **78** = **2.340**, kelas B = **20** × **83** = **1.660**. Semuanya **4.000** dibagi **50** siswa = **80**. Kalau kamu keliru merata-ratakan kedua rata-rata, hasilnya **80,5**, meleset **0,5**.

Cek satuan: Rata-rata gabungan selalu berada di antara kedua rata-rata kelompok.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RATA-GABUNGAN

KERJAKAN BERSAMA **Menggabungkan dua kelas**

Kelas 9A (30 siswa) memiliki rata-rata 78 dan kelas 9B (20 siswa) memiliki rata-rata 83. Berapa rata-rata seluruh 50 siswa?

1. Jumlah nilai 9A: $30 \times 78 = 2340$. Jumlah nilai 9B: $20 \times 83 = 1660$.
2. Jumlah seluruhnya: $2340 + 1660 = 4000$ untuk $30 + 20 = 50$ siswa.
3. $\bar{x}_{\text{gab}} = \dfrac{4000}{50} = 80$.

Rata-rata gabungannya 80, bukan 80,5. Hasilnya lebih dekat ke 78 karena kelas 9A lebih besar.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Rata-rata gabungan bukan rata-rata dari rata-rata, kecuali banyak anggota kedua kelompok sama. Selalu kembali ke **jumlah**: jumlah = banyak data × rata-rata.

Untuk data dalam **tabel frekuensi**, nilai x_i yang muncul f_i kali cukup dikalikan dengan frekuensinya: $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$. Jika datanya dikelompokkan dalam kelas (seperti histogram), pakai **titik tengah** tiap kelas sebagai x_i; hasilnya adalah *taksiran* rata-rata.

Ukuran	Kelebihan	Kelemahan	Cocok untuk
Rata-rata	memakai semua data; bisa digabung antarkelompok	mudah tertarik oleh pencilan	data yang cukup simetris: nilai ulangan, tinggi badan
Median	tahan terhadap pencilan	tidak memakai besar setiap data	data yang miring atau berpencilan: pendapatan, harga rumah, waktu tempuh
Modus	satu-satunya yang bisa dipakai untuk data kategorik	bisa tidak ada atau lebih dari satu	jajanan terlaris, ukuran sepatu yang paling banyak dicari

31.3 Sebaran: jangkauan, kuartil, dan box plot

Kelas 7A dan 7B sama-sama punya rata-rata 75. Di 7A semua nilai berada di antara 70 dan 80, sedangkan di 7B separuh kelas mendapat 100 dan separuh lagi mendapat 50. Rata-ratanya sama, ceritanya sangat berbeda! Selain pusat, kita perlu mengukur **sebaran**.

DEFINISI: UKURAN SEBARAN BERBASIS URUTAN

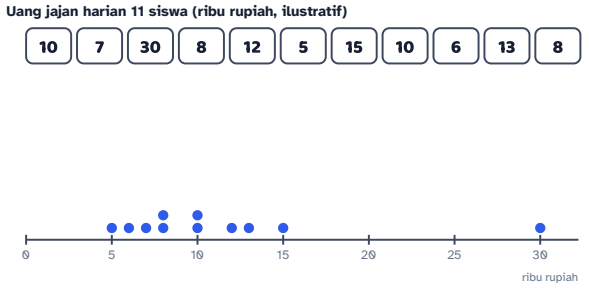
Setelah data diurutkan:

- **Jangkauan** = data terbesar − data terkecil.
- **Kuartil** membagi data terurut menjadi empat bagian yang kira-kira sama banyak: Q_1 (kuartil bawah), Q_2 = median, dan Q_3 (kuartil atas).
- **Jangkauan antarkuartil** (*interquartile range*): $\text{IQR} = Q_3 - Q_1$, lebar "separuh data yang di tengah".
- Sebuah data disebut **pencilan** bila letaknya di bawah $Q_1 - 1{,}5 \times \text{IQR}$ atau di atas $Q_3 + 1{,}5 \times \text{IQR}$.

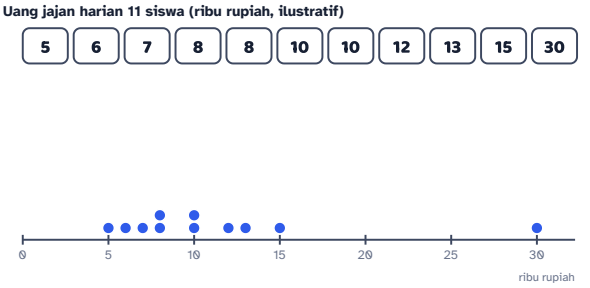
CARA MENGHITUNG KUARTIL DI BUKU INI

Kita memakai cara "median dari setengah data": Q_1 adalah median setengah data bawah dan Q_3 adalah median setengah data atas. Bila banyak data ganjil, median tidak ikut ke setengah mana pun. Cara ini dipakai kalkulator grafik dan banyak soal IB. Buku lain kadang memakai rumus letak $\frac{n+1}{4}$ dengan interpolasi; untuk banyak data ganjil kedua cara memberi hasil yang sama, tetapi untuk banyak data genap hasilnya bisa sedikit berbeda.

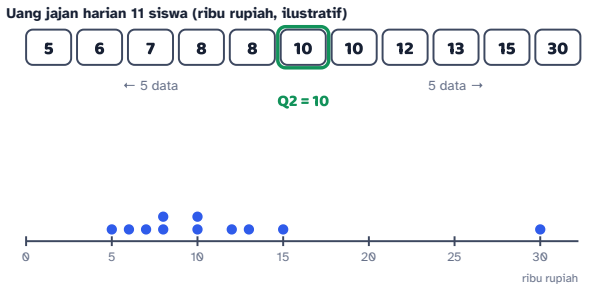
Lima angka (terkecil, Q_1, median, Q_3, terbesar) disebut **ringkasan lima angka**. Gambarnya adalah **box plot** (diagram kotak-garis): sebuah kotak dari Q_1 ke Q_3, sebuah garis di median, dan dua "kumis" yang menjulur ke data terkecil dan terbesar yang bukan pencilan.



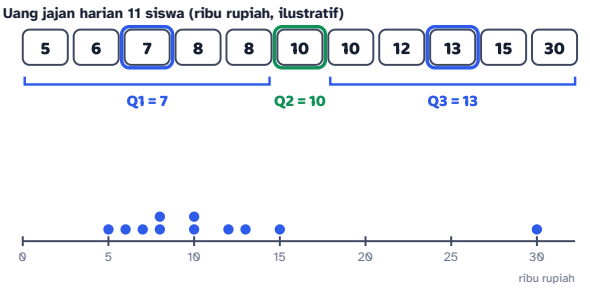
Langkah 1. Data mentah: uang jajan harian 11 siswa (dalam ribu rupiah). Titik-titik di garis bilangan menunjukkan sebarannya.



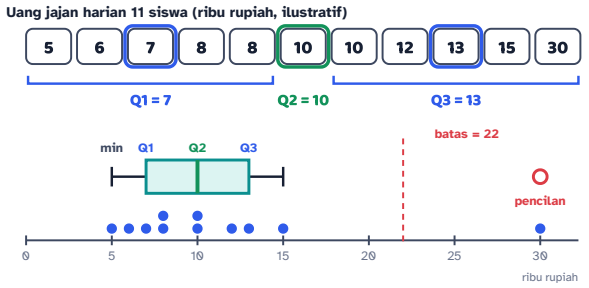
Langkah 2. Langkah pertama selalu sama: **urutkan** dari kecil ke besar.



Langkah 3. Median Q_2 adalah data ke-$\frac{11+1}{2} = 6$, yaitu 10. Ada 5 data di kirinya dan 5 data di kanannya.



Langkah 4. Kuartil bawah Q_1 = median setengah bawah (5, 6, 7, 8, 8) = 7. Kuartil atas Q_3 = median setengah atas (10, 12, 13, 15, 30) = 13. Jadi $\text{IQR} = 13 - 7 = 6$.



Langkah 5. Gambar kotak dari Q_1 ke Q_3 dengan garis di median. Batas pencilan atas $= 13 + 1{,}5 \times 6 = 22$, jadi 30 adalah **pencilan** (lingkaran merah). Kumis kanan berhenti di data terbesar yang bukan pencilan, yaitu 15. Batas bawah $7 - 9 = -2$, jadi kumis kiri sampai ke data terkecil, 5.

KERJAKAN BERSAMA **Hujan deras yang tidak biasa**

Curah hujan harian (mm) selama 11 hari di sebuah stasiun pengamatan (data ilustratif): 0, 2, 5, 8, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 64. Tentukan ringkasan lima angka, IQR, dan periksa apakah ada pencilan.

1. Data sudah terurut, $n = 11$. Median = data ke-6 = 15.
2. Q_1 = median dari 0, 2, 5, 8, 12 = 5. Q_3 = median dari 18, 20, 25, 30, 64 = 25. $\text{IQR} = 25 - 5 = 20$.
3. Batas atas $= 25 + 1{,}5 \times 20 = 55$; batas bawah $= 5 - 30 = -25$. Hanya 64 yang melewati batas.

Ringkasan lima angka: 0, 5, 15, 25, 64. IQR = 20 mm, dan 64 mm adalah pencilan: hari hujan sangat lebat. Rata-ratanya $199 : 11 \approx 18{,}1$ mm, lebih besar daripada median 15 mm karena tertarik oleh hari hujan lebat itu.

Box plot juga memperlihatkan **bentuk** sebaran. Jika kotak dan kumisnya hampir simetris terhadap median, datanya **simetris** dan rata-rata ≈ median. Jika kumis kanan jauh lebih panjang, datanya **miring ke kanan** (*positively skewed*) dan biasanya rata-rata > median, seperti curah hujan dan pendapatan. Jika kumis kiri yang panjang, datanya miring ke kiri dan biasanya rata-rata < median.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Bagian box plot yang lebih panjang tidak berarti datanya lebih banyak. Setiap bagian (kumis kiri, dua bagian kotak, kumis kanan) memuat kira-kira seperempat data; bagian yang panjang hanya berarti datanya lebih **renggang** di situ.

🕰 **TAMU DARI MASA LALU**

Box plot diperkenalkan oleh ahli statistika Amerika **John Tukey** pada tahun 1970-an sebagai bagian dari "analisis data eksploratif": melihat data dengan gambar sederhana sebelum menghitung macam-macam. Tukey juga dikenal sebagai pencipta istilah *bit* untuk satuan informasi digital. Box plot buatan Tukey bisa digambar dengan pensil dalam dua menit, tetapi sampai sekarang dipakai ilmuwan di seluruh dunia.

31.4 Simpangan baku: seberapa jauh dari rata-rata?

IQR hanya melihat separuh data di tengah. Ukuran sebaran yang memakai **setiap** data adalah simpangan baku. Idenya: ukur jarak setiap data dari rata-rata, lalu cari "jarak khas"-nya.

Bahasa sederhana · Bayangkan dua pemain basket yang sama-sama rata-rata mencetak 10 poin. Pemain pertama selalu mencetak 9, 10, atau 11 poin. Pemain kedua kadang 0, kadang 20. Pemain pertama lebih bisa diandalkan karena poinnya **tidak menyebar jauh** dari rata-rata. Simpangan baku adalah angka yang mengukur seberapa jauh data menyebar dari rata-ratanya: makin kecil, makin seragam.

Tebak Dulu!

Keempat kelompok data berikut sama-sama punya rata-rata 5. Mana yang simpangan bakunya paling besar?

- 1, 3, 5, 7, 9 (berjarak sama)
- 4, 5, 5, 5, 6
- 1, 1, 5, 9, 9
- 5, 5, 5, 5, 5

Jawabannya: 1, 1, 5, 9, 9. Jangkauannya sama dengan 1, 3, 5, 7, 9 (yaitu 8), tetapi empat datanya menumpuk di ujung, sejauh 4 dari rata-rata. Jumlah kuadrat simpangannya $16 + 16 + 0 + 16 + 16 = 64$, dibandingkan $16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$. Data 5, 5, 5, 5, 5 sama sekali tidak menyebar: simpangan bakunya 0.

DEFINISI: VARIANS DAN SIMPANGAN BAKU

Untuk data $x_1, \ldots, x_n$ dengan rata-rata $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

σ^2 disebut **varians** (rata-rata kuadrat simpangan) dan σ disebut **simpangan baku**. Satuan σ sama dengan satuan data.

POPULASI ATAU SAMPEL? PEMBAGI N ATAU N − 1?

Rumus di atas (pembagi n) memberi simpangan baku **populasi** σ. Pakai rumus ini bila datamu adalah seluruh kelompok yang ingin kamu gambarkan, misalnya semua nilai di kelasmu. Bila datamu hanya **sampel** dan kamu ingin **menaksir** simpangan baku populasi, pakai pembagi $n - 1$:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Di bab ini, bila tidak disebut lain, "simpangan baku" berarti σ dengan pembagi n. Kalkulator ilmiah biasanya menampilkan keduanya: σ_x (pembagi n) dan s_x (pembagi $n - 1$). Di IB, σ dipakai untuk menggambarkan data, sedangkan s_{n-1} dipakai sebagai taksiran tak bias bagi varians populasi. Selalu baca soal: populasi atau sampel?

Mari menghitungnya selangkah demi selangkah untuk data 4, 6, 7, 9, 14. Rata-ratanya $\bar{x} = 40 : 5 = 8$.

x_i	4	6	7	9	14	**Jumlah**
$x_i - \bar{x}$	−4	−2	−1	1	6	0 (selalu!)
$(x_i - \bar{x})^2$	16	4	1	1	36	**58**

Varians populasi $\sigma^2 = 58 : 5 = 11{,}6$, jadi $\sigma = \sqrt{11{,}6} \approx 3{,}41$. Jika kelima data itu sampel, $s^2 = 58 : 4 = 14{,}5$ dan $s \approx 3{,}81$. Mengapa dikuadratkan? Karena jumlah simpangan biasa selalu nol (sifat titik seimbang!), jadi tanda negatifnya harus dihilangkan dulu.

RUMUS HIDUP

Simpangan baku lima data

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5}}$$

Ukur jarak tiap data dari rata-rata, kuadratkan, rata-ratakan, lalu tarik akarnya: itulah jarak khas data dari pusatnya.

- x_1 Data ke-1
- x_2 Data ke-2
- x_3 Data ke-3
- x_4 Data ke-4
- x_5 Data ke-5
- σ Simpangan baku (pembagi n)

SIMPANGAN BAKU (PEMBAGI N)

10

Rata-rata = **75**. Simpangan tiap data: **-15**; **-5**; **0**; **5**; **15** (jumlahnya selalu 0). Varians σ^2 = **100**, jadi σ = **10**. Bila kelima data ini hanya sampel, simpangan baku sampel s = **11,18**.

Cek satuan: Simpangan baku bersatuan sama dengan datanya (poin, cm, menit), sedangkan varians bersatuan kuadrat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SIMPANGAN-BAKU

COBA SENDIRI **Siapa yang lebih konsisten?**

Hasil lima kali lompat jauh (meter). Dimas: 4,0; 4,5; 3,5; 5,0; 3,0. Ayu: 4,1; 3,9; 4,0; 4,2; 3,8. Pelatih ingin mengirim atlet yang lebih konsisten. Siapa yang dipilih?

1. Rata-rata keduanya sama: $20{,}0 : 5 = 4{,}0$ m. Rata-rata saja tidak bisa memutuskan.
2. Dimas: simpangan $0;\ 0{,}5;\ -0{,}5;\ 1;\ -1$. Kuadratnya berjumlah $0 + 0{,}25 + 0{,}25 + 1 + 1 = 2{,}5$, jadi $\sigma^2 = 0{,}5$ dan $\sigma \approx 0{,}71$ m.
3. Ayu: simpangan $0{,}1;\ -0{,}1;\ 0;\ 0{,}2;\ -0{,}2$. Kuadratnya berjumlah $0{,}1$, jadi $\sigma^2 = 0{,}02$ dan $\sigma \approx 0{,}14$ m.

Simpangan baku Ayu (±0,14 m) jauh lebih kecil daripada Dimas (±0,71 m). Rata-rata sama, tetapi Ayu jauh lebih konsisten, jadi Ayu yang dipilih.

RUMUS CEPAT VARIANS

Varians sama dengan "rata-rata kuadrat dikurangi kuadrat rata-rata":

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2.$$

Rumus ini praktis untuk data dalam tabel frekuensi dan untuk menggabungkan dua kelompok.

Bukti dengan menjabarkan kuadrat

$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$. Bagi kedua ruas dengan n. Cek dengan data 4, 6, 7, 9, 14: $\sum x_i^2 = 16 + 36 + 49 + 81 + 196 = 378$, dan $378 : 5 - 8^2 = 75{,}6 - 64 = 11{,}6$. Cocok!

Apa yang terjadi pada rata-rata dan simpangan baku jika **setiap** data diubah dengan cara yang sama, misalnya suhu diubah dari Celsius ke Fahrenheit dengan $F = 1{,}8C + 32$?

RUMUS HIDUP

Mengubah semua data sekaligus

$$\bar{y} = a\,\bar{x} + b$$

$$\sigma_y = |a|\,\sigma_x$$

Mengalikan data dengan a mengalikan rata-rata dan simpangan bakunya; menambah b hanya menggeser rata-rata, sebarannya tidak berubah.

$\bar{x}$ Rata-rata data awal

σ_x Simpangan baku awal

a Pengali a

b Penambah b

σ_y Simpangan baku baru

SIMPANGAN BAKU BARU

4,5

ini rumus Celsius → Fahrenheit

Rata-rata baru = **1,8** × **28** + (**32**) = **82,4**. Simpangan baku baru = |**1,8**| × **2,5** = **4,5**. Geser slider b: rata-rata ikut bergeser, tetapi simpangan baku sama sekali tidak berubah!

Cek satuan: Simpangan baku tidak pernah negatif; itulah sebabnya pengalinya |a|, bukan a.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRANSFORMASI-DATA

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA DIBAGI N − 1?

Rata-rata sampel $\bar{x}$ adalah titik yang paling dekat dengan data sampel itu sendiri (lihat kotak Lanjut di 31.6: $\bar{x}$ meminimumkan jumlah kuadrat simpangan). Akibatnya, simpangan terhadap $\bar{x}$ cenderung **lebih kecil** daripada simpangan terhadap rata-rata populasi μ yang sebenarnya, sehingga pembagi n membuat varians sampel terlalu kecil. Secara tepat dapat dibuktikan bahwa $E\left[\sum(x_i - \bar{x})^2\right] = (n-1)\sigma^2$, jadi membagi dengan $n-1$ menghasilkan taksiran yang tepat sasaran rata-rata (*tak bias*). Cara lain memandangnya: karena $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$, hanya $n-1$ simpangan yang "bebas"; simpangan terakhir sudah ditentukan oleh yang lain. Inilah yang disebut **derajat kebebasan**.

31.5 Diagram pencar, korelasi, dan garis regresi

Sejauh ini setiap data hanya berupa satu angka. Sering kali kita punya **pasangan** angka untuk setiap objek, misalnya jam belajar dan nilai ulangan setiap siswa. Pasangan (x, y) itu digambar sebagai titik pada **diagram pencar** (*scatter diagram*). Pola titik-titiknya bercerita tentang hubungan kedua besaran.

Tebak Dulu!

Data sebuah kota menunjukkan bahwa pada bulan-bulan ketika penjualan es teh tinggi, penjualan kipas angin juga tinggi. Kesimpulan mana yang paling masuk akal?

- Minum es teh membuat orang ingin membeli kipas angin.
- Kipas angin membuat orang haus sehingga membeli es teh.
- Keduanya mungkin sama-sama dipengaruhi faktor ketiga, yaitu cuaca panas.
- Data itu pasti salah karena es teh dan kipas angin tidak berhubungan.

Jawabannya: ada faktor ketiga. Cuaca panas membuat orang membeli es teh *dan* kipas angin. Kedua penjualan naik-turun bersama (berkorelasi), tetapi yang satu tidak menyebabkan yang lain. Faktor tersembunyi seperti ini disebut **variabel perancu**. Ingat semboyan para statistikawan: *korelasi bukan sebab-akibat*.

DEFINISI: KORELASI

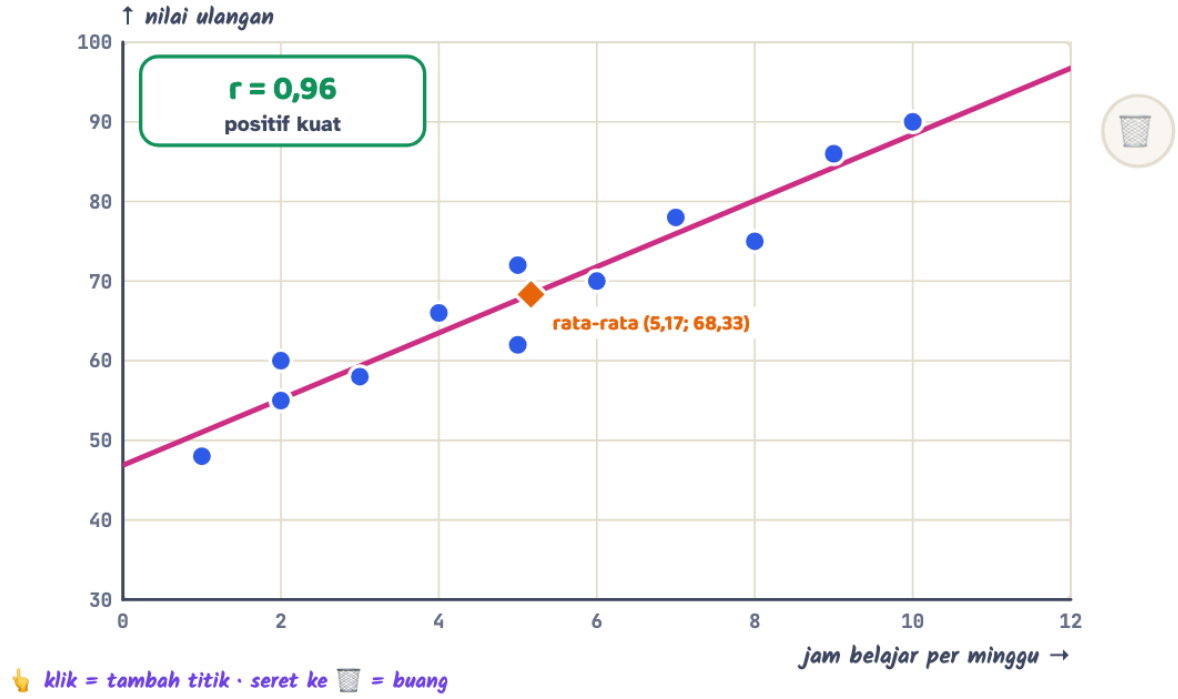
Korelasi menyatakan seberapa kuat titik-titik pada diagram pencar mengikuti sebuah garis lurus. Korelasi **positif**: y cenderung naik ketika x naik. Korelasi **negatif**: y cenderung turun ketika x naik. Kekuatannya diukur dengan **koefisien korelasi** Pearson r, dengan $-1 \le r \le 1$:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

$r = 1$ atau $r = -1$ berarti semua titik tepat segaris; $r \approx 0$ berarti tidak ada hubungan **linear**. Patokan kasar: $|r| \ge 0{,}8$ kuat, $0{,}5 \le |r| < 0{,}8$ sedang, $0{,}2 \le |r| < 0{,}5$ lemah.

LAB MINI **Diagram pencar hidup: korelasi dan garis regresi**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31



Banyak titik	Koefisien korelasi r	Garis regresi	Korelasi
12	0,962	$\hat{y} = 46{,}86 + 4{,}157x$	positif kuat

Pilih kumpulan data (semuanya ilustratif). Seret titik dan lihat garis regresi serta nilai r berubah. Klik tempat kosong untuk menambah titik, seret titik ke untuk membuangnya. Arahkan kursor di dalam grafik untuk menaksir y dari garis. Coba: tambahkan **satu** titik jauh di pojok kanan bawah data "jam belajar". Seberapa besar satu titik bisa mengubah r?

GARIS REGRESI (METODE KUADRAT TERKECIL)

Garis lurus $\hat{y} = a + bx$ yang paling cocok dengan data adalah garis yang membuat **jumlah kuadrat sisa** $\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$ sekecil mungkin. Koefisiennya:

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \qquad a = \bar{y} - b\,\bar{x}.$$

Karena $a = \bar{y} - b\bar{x}$, garis regresi **selalu melalui titik** $(\bar{x}, \bar{y})$. Lambang $\hat{y}$ ("y topi") berarti nilai *taksiran*, bukan nilai sebenarnya.

GRAFIK HIDUP

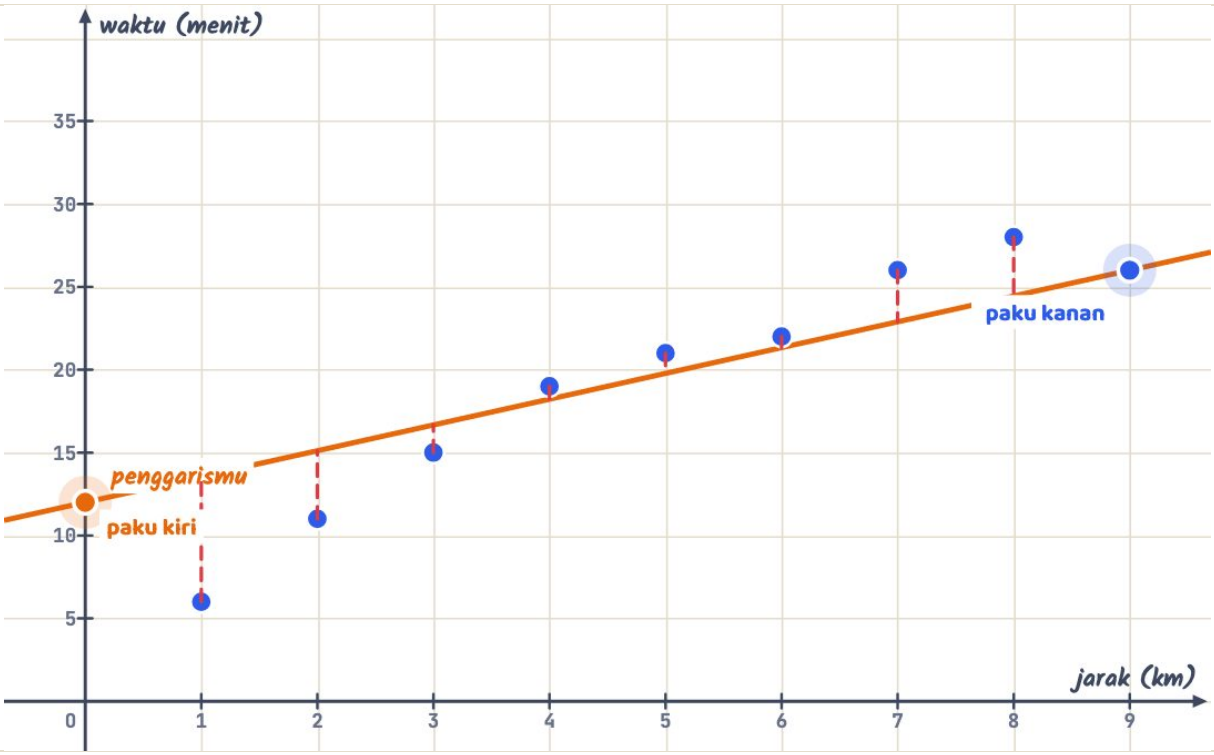
Pasang penggaris terbaik: jarak rumah vs waktu tempuh

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31

$$\hat{y} = p + \frac{q - p}{9}\,x$$

$$\hat{y} \approx 12 + 1{,}56\,x \qquad \text{JKS} \approx 101{,}63$$

Delapan siswa mencatat jarak rumah (km) dan waktu tempuh ke sekolah (menit), data ilustratif. Seret dua paku untuk memasang penggaris. Garis merah putus-putus adalah sisa (selisih data dengan garis). Garis terbaik membuat jumlah kuadrat sisa (JKS) sekecil mungkin.



Kemiringan garismu	JKS garismu	JKS terkecil yang mungkin
1,56 menit/km	101,63	12

Tantangan: buat JKS serendah mungkin hanya dengan menyeret paku. JKS terkecil yang mungkin adalah 12. Setelah berhasil, tafsirkan garisnya: berapa menit tambahan untuk setiap 1 km, dan apa arti angka saat $x = 0$?

Garis regresi data di atas adalah $\hat{y} = 5 + 3x$. Kemiringan 3 berarti setiap tambahan 1 km jarak menambah waktu tempuh sekitar 3 menit (kira-kira 20 km/jam). Titik potong 5 dapat ditafsirkan sebagai waktu "tetap" sekitar 5 menit, misalnya menunggu angkot atau berjalan ke gerbang.

COBA SENDIRI **Menghitung garis regresi dan r dengan tangan**

Lima siswa mencatat lama latihan per minggu x (jam) dan skor kuis y (dari 10): $(1,3), (2,5), (3,4), (4,7), (5,6)$**. Tentukan garis regresi y atas x dan koefisien korelasinya.**

1. $\bar{x} = 15 : 5 = 3$ dan $\bar{y} = 25 : 5 = 5$.
2. Simpangan x: $-2, -1, 0, 1, 2$. Simpangan y: $-2, 0, -1, 2, 1$.
3. $S_{xy} = (-2)(-2) + (-1)(0) + 0 \cdot (-1) + (1)(2) + (2)(1) = 8$, $S_{xx} = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$, $S_{yy} = 4 + 0 + 1 + 4 + 1 = 10$.
4. $b = 8 : 10 = 0{,}8$ dan $a = 5 - 0{,}8 \times 3 = 2{,}6$. Jadi $\hat{y} = 2{,}6 + 0{,}8x$.
5. $r = \dfrac{8}{\sqrt{10 \times 10}} = 0{,}8$.

$\hat{y} = 2{,}6 + 0{,}8x$ dan $r = 0{,}8$: korelasi positif yang kuat. Setiap tambahan 1 jam latihan berkaitan dengan kenaikan skor sekitar 0,8 poin. Taksiran untuk 3,5 jam: $2{,}6 + 0{,}8 \times 3{,}5 = 5{,}4$.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Korelasi yang kuat tidak membuktikan sebab-akibat, dan garis regresi hanya dapat dipercaya di dalam rentang data. Menaksir di dalam rentang data disebut **interpolasi** dan biasanya aman. Menaksir di luar rentang disebut **ekstrapolasi** dan berbahaya: garis "jarak vs waktu" di atas tidak bisa dipakai untuk jarak 50 km, karena di sana mungkin ada jalan tol, kemacetan, atau kamu sudah naik kereta.

🕰 **TAMU DARI MASA LALU**

Kata *regresi* berasal dari ilmuwan Inggris **Francis Galton** (1822–1911). Ia meneliti tinggi badan orang tua dan anak-anaknya, dan menemukan bahwa anak dari orang tua yang sangat tinggi cenderung lebih pendek daripada orang tuanya, sedangkan anak dari orang tua yang sangat pendek cenderung lebih tinggi. Tingginya "kembali" (*regress*) ke arah rata-rata. Muridnya, **Karl Pearson**, kemudian merumuskan koefisien korelasi r yang kita pakai sekarang.

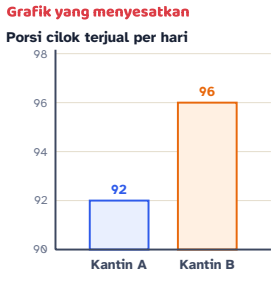
LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA $-1 \le R \le 1$?

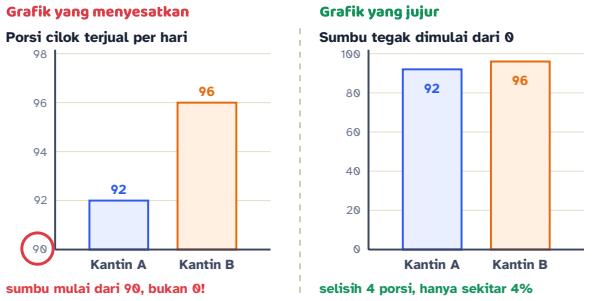
Tulis $u_i = x_i - \bar{x}$ dan $v_i = y_i - \bar{y}$. Maka $r = \dfrac{\sum u_i v_i}{\sqrt{\sum u_i^2 \sum v_i^2}}$. **Ketaksamaan Cauchy–Schwarz** menyatakan $\left(\sum u_i v_i\right)^2 \le \sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2$, sehingga $r^2 \le 1$. Buktinya cantik: untuk setiap bilangan real t, $\sum (u_i t - v_i)^2 \ge 0$. Ruas kiri adalah fungsi kuadrat $At^2 - 2Bt + C$ dengan $A = \sum u_i^2$, $B = \sum u_i v_i$, $C = \sum v_i^2$. Fungsi kuadrat yang tidak pernah negatif punya diskriminan ≤ 0: $4B^2 - 4AC \le 0$, yaitu $B^2 \le AC$. Kesamaan terjadi tepat ketika $v_i = t\,u_i$ untuk semua i, yaitu ketika semua titik segaris.

31.6 Detektif grafik dan statistika di sekitarmu

Grafik bisa menyampaikan kebenaran dengan cepat. Sayangnya, grafik juga bisa **menyesatkan**, baik karena sengaja maupun tidak. Jadilah detektif: periksa tiga kasus berikut sebelum percaya.



Langkah 1. Kasus 1. Kantin B menjual 96 porsi cilok sehari, Kantin A 92 porsi. Pada grafik iklan Kantin B, batangnya tampak tiga kali lebih tinggi. Apakah Kantin B benar-benar tiga kali lebih laris?



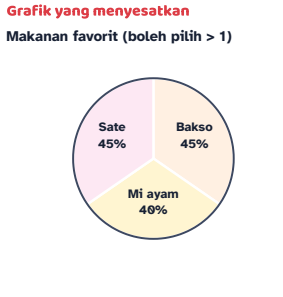
Langkah 2. Tertangkap! Sumbu tegaknya dimulai dari 90, bukan 0, sehingga selisih kecil tampak raksasa. Dengan sumbu dari 0, selisihnya hanya 4 porsi, sekitar $\frac{4}{92} \approx 4\%$.



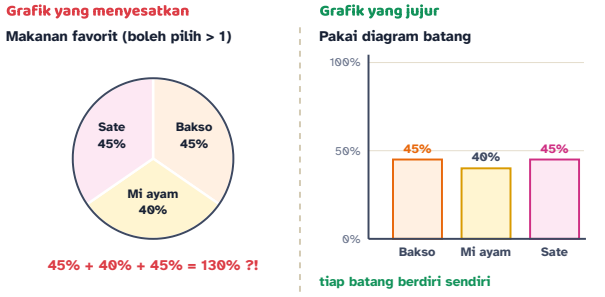
Langkah 3. Kasus 2. Panen naik dari 2 ton menjadi 4 ton, yaitu 2 kali. Gambar karungnya dibuat 2 kali lebih tinggi... dan diam-diam juga 2 kali lebih lebar.



Langkah 4. Tertangkap! Lebar 2× dan tinggi 2× membuat **luas** gambar 4×, sehingga mata kita membaca kenaikan 4 kali. Piktogram yang jujur memakai ikon berukuran sama dan menambah **banyaknya**.



Langkah 5. Kasus 3. Survei makanan favorit, dan setiap orang boleh memilih lebih dari satu. Hasilnya disajikan sebagai diagram lingkaran yang tampak rapi.



Langkah 6. Tertangkap! Persentasenya berjumlah 130%, padahal satu lingkaran utuh harus 100%. Karena satu orang boleh memilih lebih dari satu, pakai diagram batang. **Daftar periksa detektif:** sumbu mulai dari mana? Ukuran ikon sebanding? Jumlah persen 100%? Siapa pembuat grafik, dan dari mana datanya?

MITOS

"Rata-rata adalah nilai yang dimiliki kebanyakan orang."

FAKTA

Itu **modus**. Rata-rata bisa saja nilai yang tidak dimiliki siapa pun: di komik, rata-rata kelas 70 padahal tidak ada yang mendapat nilai dekat 70.

MITOS

"Kalau dua hal berkorelasi kuat, yang satu pasti menyebabkan yang lain."

FAKTA

Penjualan es teh dan kipas angin berkorelasi kuat, tetapi penyebab keduanya adalah cuaca panas. Untuk membuktikan sebab-akibat diperlukan percobaan yang dirancang dengan baik.

MITOS

"Makin banyak responden, survei pasti makin akurat."

FAKTA

Cara memilih sampel lebih penting. Sepuluh ribu responden dari satu grup obrolan bisa lebih menyesatkan daripada seribu responden yang dipilih **acak** dari seluruh populasi.

MATEMATIKA NUSANTARA

Dalam dongeng **Kancil dan Buaya**, si kancil ingin menyeberang sungai. Ia berkata kepada para buaya bahwa raja memerintahkan agar jumlah buaya dihitung, lalu meminta mereka berbaris dari tepi ke tepi. Sambil melompat dari punggung ke punggung, kancil menghitung, "Satu, dua, tiga...", dan sampailah ia di seberang. Kancil memakai "sensus" sebagai siasat! Sensus sungguhan diselenggarakan Badan Pusat Statistik (BPS) kira-kira setiap sepuluh tahun; Sensus Penduduk 2020 untuk pertama kalinya memadukan pengisian daring dengan wawancara langsung. Saat pemilu, lembaga survei melakukan **quick count** (hitung cepat): dari ratusan ribu TPS, hanya beberapa ribu TPS yang dipilih **secara acak** sebagai sampel, tetapi hasilnya dalam beberapa jam biasanya sudah sangat dekat dengan hasil resmi. Kuncinya adalah sampel yang acak dan mewakili, bukan sampel yang sangat besar.

Curah hujan BMKG

BMKG membandingkan curah hujan suatu bulan dengan rata-rata jangka panjangnya untuk menyebut bulan itu "di atas normal", "normal", atau "di bawah normal".

Nilai rapor

Rata-rata menunjukkan capaian kelas, sedangkan sebaran (jangkauan atau simpangan baku) membantu guru melihat apakah sebagian siswa tertinggal jauh.

Quick count

Sampel acak dari TPS di seluruh Indonesia cukup untuk menaksir hasil pemilu dengan selisih kecil, dilengkapi margin galat (*margin of error*).

Harga cabai

Harga dipantau di banyak pasar. Median membantu agar satu pedagang yang memasang harga sangat tinggi tidak merusak gambaran harga pada umumnya.

Grafik tumbuh posyandu

Grafik pertumbuhan di buku KIA membandingkan berat dan tinggi seorang anak dengan sebaran ukuran anak-anak seusianya.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

SIFAT ISTIMEWA RATA-RATA DAN MEDIAN

Cari bilangan c yang "paling dekat" dengan semua data. Jawabannya bergantung pada cara mengukur kedekatan!

- **Rata-rata meminimumkan jumlah kuadrat jarak.** Untuk setiap c, $\sum(x_i - c)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$ (jabarkan $(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)$ dan pakai sifat titik seimbang). Suku kedua ≥ 0 dan bernilai 0 hanya jika $c = \bar{x}$.
- **Median meminimumkan jumlah jarak mutlak** $\sum |x_i - c|$. Pasangkan data terkecil dengan terbesar, kedua terkecil dengan kedua terbesar, dan seterusnya. Untuk setiap pasangan $x_i \leq x_j$, berlaku $|x_i - c| + |x_j - c| \geq x_j - x_i$, dengan kesamaan bila c terletak di antara keduanya. Median terletak di antara semua pasangan sekaligus!

Akibat menarik: karena $|\bar{x} - m| = \frac{1}{n}|\sum(x_i - m)| \leq \frac{1}{n}\sum|x_i - m| \leq \frac{1}{n}\sum|x_i - \bar{x}|$ dengan m median, jarak rata-rata ke median tidak pernah melebihi rata-rata jarak data ke rata-ratanya, dan (dengan Cauchy–Schwarz) tidak pernah melebihi simpangan baku: $|\bar{x} - m| \leq \sigma$.

Cek Cepat

Data: 2, 3, 4, 5, 100. Ukuran pemusatan yang paling tepat mewakili nilai "khas" data ini adalah...

- rata-rata, yaitu 22,8
- median, yaitu 4
- jangkauan, yaitu 98
- nilai terbesar, yaitu 100

Setiap siswa mendapat bonus 10 poin pada nilai ulangannya. Simpangan baku nilai-nilai itu...

- bertambah 10
- menjadi 10 kali lipat
- bertambah $\sqrt{10}$
- tidak berubah

Sebuah box plot memiliki $Q_1 = 40$ dan $Q_3 = 60$. Menurut aturan $1{,}5 \times \mathrm{IQR}$, data manakah yang merupakan pencilan?

- 95
- 85
- 15
- 50

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A

Tantangan Rumah: survei waktu tempuh ke sekolah

Bahan: buku catatan, pensil, penggaris, HP (opsional, untuk kalkulator).

1. Tanyakan kepada 11 teman atau anggota keluarga: berapa menit waktu tempuh dari rumah ke sekolah atau tempat kerja? (Sebelas orang membuat median dan kuartil mudah dicari.)
2. Catat datanya, lalu urutkan dari yang tercepat sampai yang terlama.
3. Tentukan ringkasan lima angka, IQR, dan rata-ratanya.
4. Periksa pencilan dengan aturan $1{,}5 \times \text{IQR}$, lalu gambar box plot di atas garis bilangan.
5. Hitung simpangan bakunya (boleh dengan kalkulator) dan tulis apakah datamu "rapat" atau "menyebar".

Pertanyaan: Mana yang lebih mewakili waktu tempuh "khas" di kelompokmu, rata-rata atau median? Apakah ada orang yang rumahnya jauh sekali dan menjadi pencilan? Jelaskan dengan memakai data yang kamu kumpulkan.

RINGKASAN KILAT

Bab 31 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menyajikan data dengan **tabel turus, diagram batang, diagram lingkaran,** dan **histogram**
- menghitung dan memilih ukuran pemusatan yang tepat: **rata-rata, median,** atau **modus**
- meringkas sebaran data dengan **jangkauan, kuartil, box plot,** dan **simpangan baku**, serta mengenali **pencilan**
- membaca **diagram pencar, korelasi,** dan **garis regresi** tanpa terjebak "korelasi = sebab-akibat"
- menjadi **detektif grafik** yang tidak mudah tertipu

Istilah kunci

data · Statistika · Populasi · Sampel · Data kategorik · Data numerik · tabel turus · frekuensi · histogram · Rata-rata · Median · Modus · Jangkauan · Kuartil · Jangkauan antarkuartil · pencilan

Rumus penting

$$\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{n_1\,\bar{x}_1 + n_2\,\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Rata-rata gabungan. Jumlahkan dulu semua nilai (banyak anggota × rata-rata) dari kedua kelompok, baru bagi dengan banyak anggota seluruhnya.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5}}$$

Simpangan baku lima data. Ukur jarak tiap data dari rata-rata, kuadratkan, rata-ratakan, lalu tarik akarnya: itulah jarak khas data dari pusatnya.

$$\bar{y} = a\,\bar{x} + b$$
$$\sigma_y = |a|\,\sigma_x$$

Mengubah semua data sekaligus. Mengalikan data dengan a mengalikan rata-rata dan simpangan bakunya; menambah b hanya menggeser rata-rata, sebarannya tidak berubah.

⚠️ **Jangan sampai terjebak**

- Median adalah data tengah setelah diurutkan, bukan data yang kebetulan berada di tengah daftar.
- Rata-rata gabungan bukan rata-rata dari rata-rata, kecuali banyak anggota kedua kelompok sama.
- Bagian box plot yang lebih panjang tidak berarti datanya lebih banyak.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=31

🧩 Teka-teki untuk Bab 32

Ayu punya 4 kerudung, 3 kemeja, dan 2 rok, dan semuanya serasi satu sama lain. Ia ingin tampil dengan setelan yang berbeda setiap hari sekolah. Berapa hari ia bisa bertahan tanpa mengulang setelan yang sama? Bisakah kamu menghitungnya tanpa menuliskan semua setelan satu per satu?

▼ **Intip petunjuk**

Untuk setiap kerudung ada 3 pilihan kemeja, dan untuk setiap pasangan kerudung–kemeja ada 2 pilihan rok. Gambarlah diagram pohon kecil, lalu perhatikan bagaimana banyak cabangnya bertambah. Bab 32 membahas aturan perkalian ini, sampai ke permutasi dan kombinasi!

BAB 32 · DATA & PELUANG

32 Kaidah Pencacahan: Menghitung Tanpa Mendaftar

Berapa banyak gaya seragam yang bisa kamu pakai, dan berapa lama pencuri harus menebak PIN ATM-mu? Dengan beberapa kaidah pencacahan yang cerdik, kamu bisa menghitung jutaan kemungkinan tanpa mendaftarnya satu per satu.

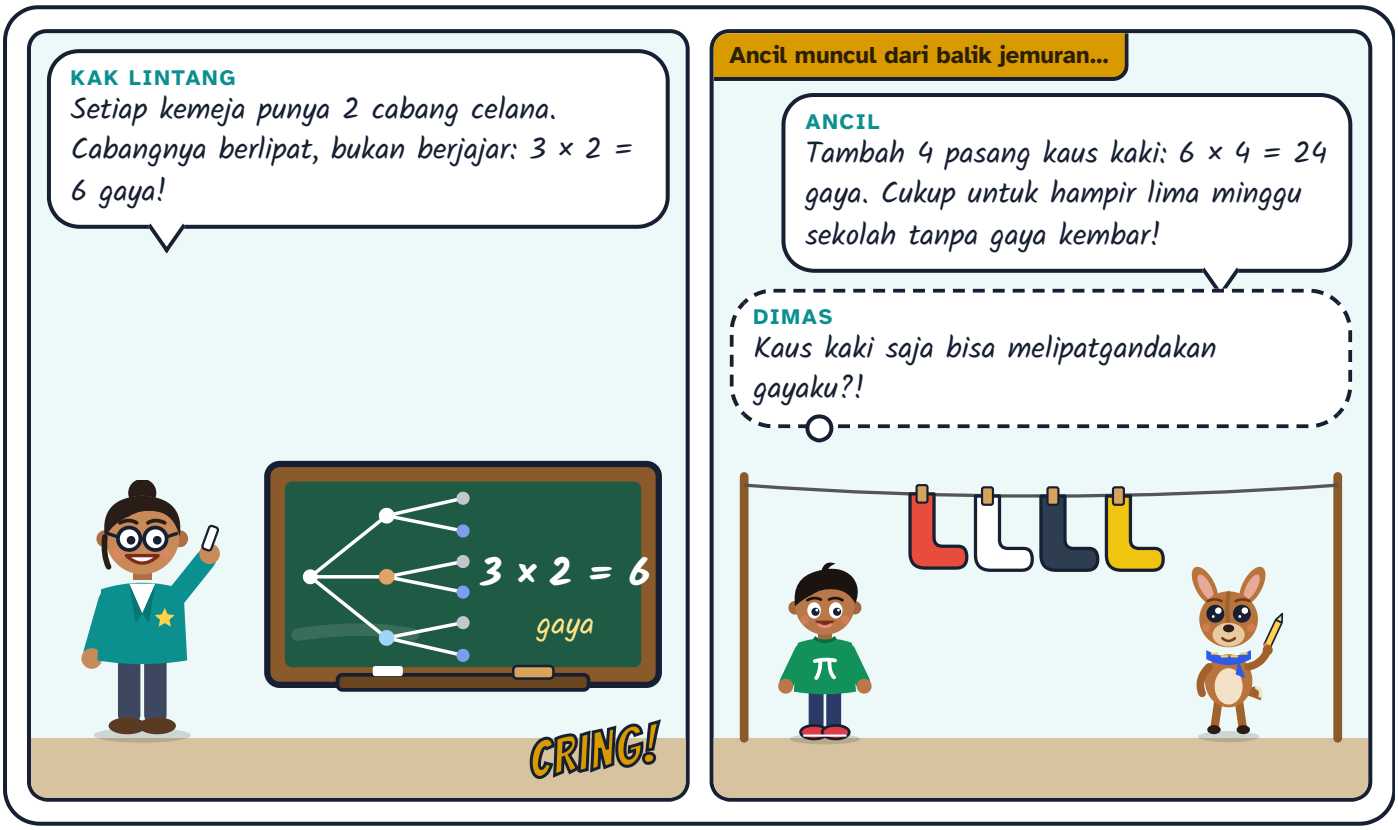
Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **aturan perkalian** dan **aturan penjumlahan** lewat diagram pohon dan kotak pengisian tempat;
- menghitung **faktorial** dan **permutasi**, termasuk permutasi dengan unsur yang sama dan permutasi siklis;
- membedakan **permutasi** (urutan penting) dan **kombinasi** (urutan tidak penting);
- membaca **segitiga Pascal** dan memakainya untuk menjabarkan $(a+b)^n$ dengan **binomial Newton**;
- memakai jurus olimpiade **bintang dan sekat** serta **inklusi-eksklusi**.

LEMARI SERAGAM DIMAS

KOMIK · 4 PANEL





Ingat teka-teki di akhir Bab 31: *berapa banyak cara memakai seragam?* Komik di atas menjawabnya, dan jawabannya jauh lebih besar daripada tebakan Dimas. Bab ini mengajarimu **kaidah pencacahan**: cara menghitung banyaknya kemungkinan **tanpa** harus mendaftar semuanya satu per satu.

Tebak Dulu!

PIN ATM terdiri atas 6 angka (0–9), dan angka boleh berulang. Ada berapa banyak PIN berbeda yang mungkin?

- Sekitar 60, karena ada 6 kotak dan 10 angka.
- Sekitar 1.000, cukup untuk dicoba semalam.
- Tepat 1.000.000, dari 000000 sampai 999999.
- Tak terhingga banyaknya.

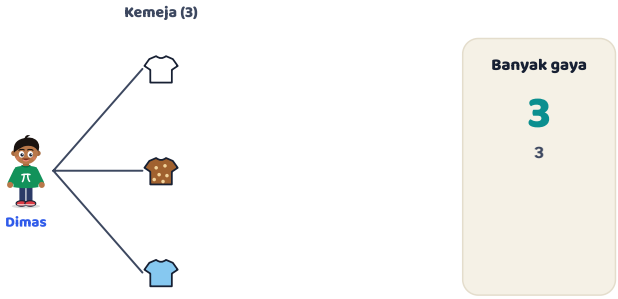
Jawabannya: tepat satu juta. Setiap kotak punya 10 pilihan, dan keenam kotak semuanya diisi, jadi $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$. Pencuri yang menebak satu PIN per detik tanpa henti butuh ±11,6 hari untuk mencoba semuanya. Itulah sebabnya kartu ATM diblokir setelah 3 kali salah: dengan 3 kali coba, ia hanya punya 3 kesempatan dari sejuta!

32.1 Aturan perkalian dan aturan penjumlahan

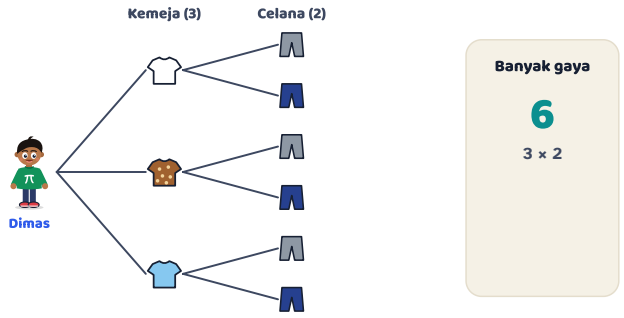
Dimas mengira gayanya hanya $3 + 2 = 5$. Padahal **setiap** kemeja bisa dipasangkan dengan **setiap** celana. Cara paling jujur untuk melihatnya adalah menggambar **diagram pohon**: setiap keputusan membuat cabang baru. Bagaimana kalau sepatu juga ikut dipilih?



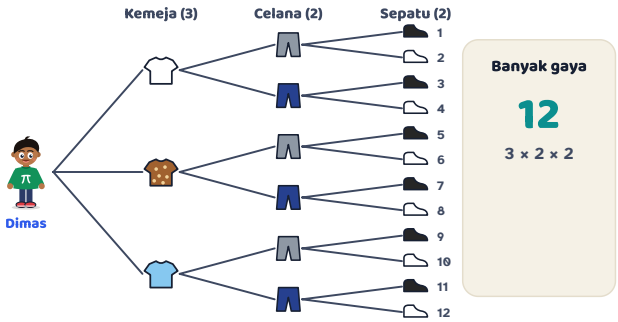
Langkah 1. Dimas berdiri di depan lemari. Ia harus mengambil tiga keputusan berurutan: kemeja, lalu celana, lalu sepatu.



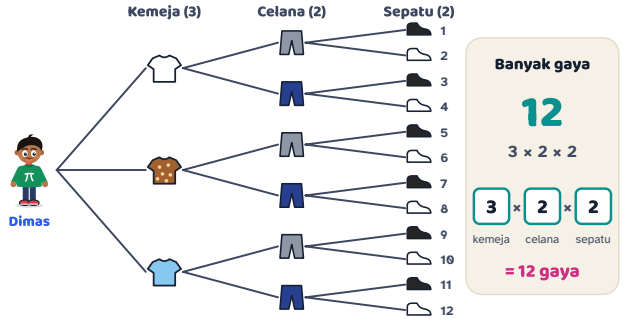
Langkah 2. Keputusan pertama: ada 3 kemeja (putih, batik, biru muda). Pohon bercabang menjadi 3.



Langkah 3. Untuk **setiap** kemeja ada 2 celana (abu-abu, biru tua). Setiap cabang bercabang lagi menjadi 2, sehingga ada $3 \times 2 = 6$ ujung.



Langkah 4. Untuk setiap pasangan kemeja–celana ada 2 sepatu (hitam, putih). Ujung pohon menjadi $3 \times 2 \times 2 = 12$. Setiap ujung adalah satu gaya yang berbeda.



Langkah 5. Tidak perlu menggambar pohonnya! Cukup isi tiga kotak dengan banyak pilihan tiap langkah, lalu kalikan: $3 \times 2 \times 2 = 12$. Inilah **aturan perkalian**.

DEFINISI · ATURAN PERKALIAN

Jika sebuah kegiatan terdiri atas beberapa langkah berurutan, langkah pertama dapat dilakukan dengan n_1 cara, langkah kedua dengan n_2 cara (untuk **setiap** hasil langkah pertama), dan seterusnya sampai langkah ke-k dengan n_k cara, maka banyak cara melakukan seluruh kegiatan adalah

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

Menghitung dengan kotak-kotak pilihan seperti ini disebut juga **aturan pengisian tempat**.

Bahasa sederhana · Gampangnya: buat satu kotak untuk setiap keputusan. Tulis banyak pilihan di dalam setiap kotak, lalu kalikan semua angkanya.

ATURAN PENJUMLAHAN

Jika kamu harus memilih **satu** dari kelompok A **atau** kelompok B, dan kedua kelompok tidak punya anggota yang sama, banyak pilihannya $n(A) + n(B)$. Contoh: Ayu hanya boleh meminjam satu buku, dari 6 komik atau 4 buku cerita rakyat. Pilihannya $6 + 4 = 10$, bukan 6×4.

AWAS JEBAKAN

Kalikan jika kegiatannya terdiri atas beberapa langkah yang **semuanya** dilakukan ("kemeja *dan* celana"). Jumlahkan jika kamu memilih **salah satu** jalan ("komik *atau* cerita rakyat"). Kesalahan Dimas di komik adalah menjumlahkan sesuatu yang seharusnya dikalikan.

CONTOH **Paket hemat warteg**

Warteg Bu Sri menawarkan paket hemat: nasi dengan 1 lauk (dari 4 pilihan), 1 sayur (dari 3 pilihan), dan 1 minuman (es teh atau teh hangat). Berapa macam paket yang mungkin?

1. Ada tiga keputusan berurutan: lauk, sayur, minuman. Ketiganya dilakukan, jadi kalikan.
2. Isi kotak pilihan: $\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2}$.
3. $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Ada 24 macam paket. Kalau kamu makan di sana setiap hari sekolah dengan paket yang berbeda, perlu hampir lima minggu untuk mencoba semuanya!

Aturan perkalian ada di mana-mana. Perhatikan betapa cepatnya hasilnya membesar ketika kotaknya bertambah:

Situasi	Kotak pilihan	Banyak kemungkinan
Kode gembok koper 3 angka	$10 \times 10 \times 10$	1.000
PIN ATM 6 angka (boleh berulang)	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	1.000.000
PIN 6 angka, semua angka berbeda	$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$	151.200
Seragam: 3 kemeja, 2 celana, 4 pasang kaus kaki	$3 \times 2 \times 4$	24

Bagaimana jika ada syarat, misalnya "bilangannya harus genap" atau "tidak boleh diawali angka 0"? Kotak-kotaknya tidak lagi sama mudahnya diisi.

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Isi dulu kotak yang **paling rewel**, yaitu kotak yang punya syarat. Setelah si rewel diurus, kotak sisanya biasanya tinggal dihitung mundur. Kalau ada dua syarat yang saling berebut angka yang sama, pecah menjadi beberapa **kasus**, lalu jumlahkan hasilnya.

COBA SENDIRI **Bilangan genap dan angka nol yang rewel**

Dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5 akan dibentuk bilangan genap tiga angka dengan angka-angka yang berbeda. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk?

1. Ada dua kotak rewel: angka satuan harus genap (0, 2, atau 4), dan angka ratusan tidak boleh 0. Angka 0 muncul di kedua syarat, jadi pisahkan menjadi dua kasus.
2. **Kasus 1: satuan = 0.** Ratusan boleh 1–5 (5 pilihan), puluhan dari 4 angka sisanya: $5 \times 4 \times 1 = 20$.
3. **Kasus 2: satuan = 2 atau 4** (2 pilihan). Ratusan tidak boleh 0 dan tidak boleh sama dengan satuan: 4 pilihan. Puluhan dari 4 angka sisanya (0 boleh): $4 \times 4 \times 2 = 32$.
4. Kedua kasus tidak mungkin terjadi bersamaan, jadi pakai aturan penjumlahan: $20 + 32 = 52$.

Ada 52 bilangan. Perhatikan: aturan perkalian dipakai *di dalam* setiap kasus, sedangkan aturan penjumlahan dipakai *antarkasus*.

MATEMATIKA NUSANTARA

Plat nomor kendaraan di Indonesia umumnya berpola **kode wilayah – angka – huruf seri**, misalnya `B 1234 XYZ`. Bayangkan satu kode wilayah memakai nomor 1 sampai 9.999 dan tiga huruf seri dari 26 huruf. Aturan perkalian memberi $9.999 \times 26 \times 26 \times 26 = 175.742.424$ nomor! Aturan resminya membatasi beberapa huruf dan susunan, jadi angka sebenarnya lebih kecil, tetapi tetap sangat besar. Itulah sebabnya daerah yang kendaraannya sangat banyak memerlukan huruf seri yang lebih panjang.

32.2 Faktorial: perkalian yang menurun

Lima sahabat (Dimas, Ayu, Ancil, Sari, dan Budi) antre membeli es dawet. Berapa banyak urutan antrean yang mungkin? Kotak pertama punya 5 pilihan, kotak kedua tinggal 4, lalu 3, 2, dan akhirnya 1: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Perkalian menurun seperti ini sangat sering muncul, sehingga diberi nama dan lambang sendiri.

DEFINISI · FAKTORIAL

Untuk bilangan asli n, **faktorial** n ditulis $n!$ (dibaca "n faktorial") dan berarti

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Disepakati pula $0! = 1$. Maknanya: $n!$ adalah banyak cara menyusun n benda berbeda dalam satu baris.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5.040	40.320	362.880	3.628.800

Faktorial tumbuh gila-gilaan: setiap langkah dikalikan dengan bilangan yang makin besar. Hanya sepuluh langkah sudah menembus tiga juta.

FAKTA UNIK DARI ANCIL

$10!$ detik itu **tepat** 6 minggu! Coba cek: $6 \times 7 \times 24 \times 60 \times 60 = 3.628.800 = 10!$. Jadi kalau lima sahabat tadi ditambah lima teman lagi, lalu mereka mencoba satu urutan antrean setiap detik, semua urutan baru selesai dicoba setelah 42 hari tanpa tidur.

Mengapa 0! = 1, bukan 0?

Perhatikan pola mundur: $4! = 24$, $3! = 24 : 4 = 6$, $2! = 6 : 3 = 2$, $1! = 2 : 2 = 1$. Langkah berikutnya: $0! = 1! : 1 = 1$. Secara umum $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$, dan untuk $n = 0$ hasilnya 1.

Dari sudut pandang menghitung: ada tepat **satu** cara menyusun nol benda, yaitu tidak melakukan apa-apa. Kesepakatan ini juga membuat rumus permutasi dan kombinasi tetap berlaku untuk $r = 0$ dan $r = n$.



TRIK KAK LINTANG

Jangan menghitung faktorial besar lalu membaginya. **Coret dulu!**

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720.$$

Tanpa trik ini kamu harus membagi 3.628.800 dengan 5.040. Capek, dan rawan salah.



TAMU DARI MASA LALU

Tanda seru untuk faktorial diperkenalkan oleh matematikawan Prancis **Christian Kramp** pada tahun 1808. Sebelumnya orang menuliskan perkalian menurun dengan lambang yang berbeda-beda dan merepotkan. Pilihan tanda seru itu terasa pas, karena hasil faktorial memang sering bikin kaget!



LANJUT · IB & OLIMPIADE

FAKTORIAL RAKSASA DAN RUMUS STIRLING

Untuk n besar, faktorial bisa ditaksir dengan rumus Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Untuk $n = 10$ hasilnya ±3.598.696, meleset kurang dari 1% dari 3.628.800, dan galat relatifnya makin kecil ketika n membesar. Dengan cara serupa diketahui $52! \approx 8{,}07 \times 10^{67}$: banyak urutan satu set kartu remi. Angka ini begitu besar sehingga setiap kali kartu dikocok benar-benar acak, urutan yang muncul hampir pasti belum pernah ada sepanjang sejarah.

32.3 Permutasi: ketika urutan itu penting

Rapat OSIS akan memilih **ketua, wakil ketua, dan sekretaris** dari 8 calon. Satu orang hanya boleh memegang satu jabatan. Kursi ketua punya 8 calon, kursi wakil tinggal 7, kursi sekretaris tinggal 6: $8 \times 7 \times 6 = 336$ cara.

Perhatikan: "Dimas ketua, Ayu wakil" **berbeda** dengan "Ayu ketua, Dimas wakil". Ketika urutan atau jabatan membuat susunan berbeda, kita sedang menghitung **permutasi**.

DEFINISI · PERMUTASI

Permutasi r unsur dari n unsur berbeda adalah susunan **berurutan** dari r unsur yang diambil dari n unsur itu ($r \le n$). Banyaknya ditulis $P(n,r)$, ${}_nP_r$, atau P_r^n:

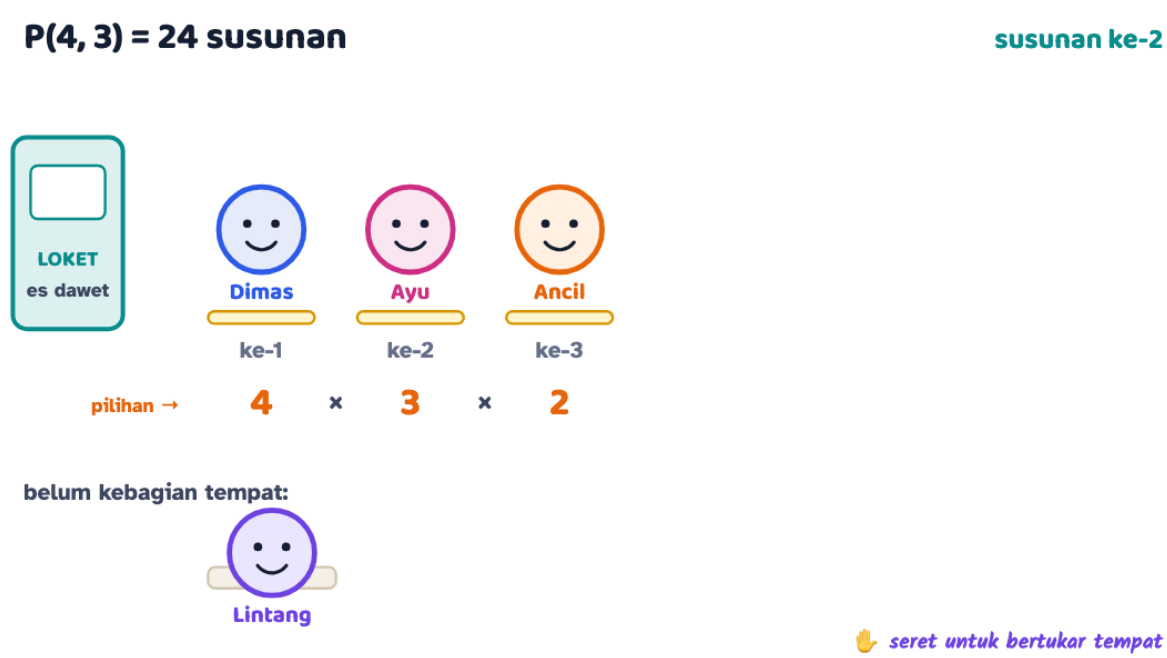
$$P(n,r) = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}_{r \text{ faktor}} = \frac{}{(r}$$

Mengapa perkalian menurun itu sama dengan n! dibagi (n − r)!?

Tulis $n!$ lengkap, lalu kelompokkan: $n! = \big[n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)\big] \times (n-r)!$. Bagi kedua ruas dengan $(n-r)!$; yang tersisa tepat r faktor pertama. Contoh: $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$.

LAB MINI **Penyusun antrean: dari loket sampai meja bundar**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32



Banyak susunan	Susunan ini	Hitungan
24	ke-2 dari 24	P(4, 3) = 4 × 3 × 2

Seret seorang teman ke tempat lain untuk bertukar posisi, atau tekan ➡ **Berikutnya** untuk melihat susunan satu per satu (▶ **Jalankan** memutar semuanya). Angka oranye di bawah antrean adalah kotak-kotak aturan perkalian. Lalu tekan 🔄 **Putar**: pada antrean lurus nomor susunannya berubah, tetapi pada **meja bundar** nomornya tetap. Mengapa? Coba juga mode gelang dengan tombol ↔ **Balik**.

RUMUS HIDUP

Permutasi: menyusun r dari n

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Ada n calon dan r kursi berlabel. Kursi pertama punya n pilihan, kursi kedua n − 1, dan seterusnya: kalikan r bilangan menurun mulai dari n.

- n Banyak calon `orang`
- r Banyak kursi berurutan `kursi`
- $P(n, r)$ Banyak susunan `cara`

BANYAK SUSUNAN

336

cara

Dari **8** calon untuk **3** kursi berurutan: **8 × 7 × 6 = 336**. Tanda '—' berarti r lebih besar daripada n, sehingga tidak semua kursi bisa terisi. Sebagai pembanding, menyusun semua **8** calon ada n! = **40.320** cara.

Cek satuan: Hasilnya berupa banyak susunan (bilangan cacah), jadi selalu bulat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERMUTASI-NPR

KALAU BOLEH BERULANG

Pada permutasi, setiap orang hanya dipakai sekali. Kalau unsur **boleh dipakai berulang** (seperti angka PIN), setiap kotak tetap punya n pilihan, jadi banyaknya n^r. Itu sebabnya PIN 6 angka ada 10^6, sedangkan PIN tanpa angka kembar hanya $P(10, 6) = 151.200$.

KERJAKAN BERSAMA **Empat jabatan pengurus OSIS**

Ada 8 calon pengurus OSIS. Akan dipilih ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara (satu orang satu jabatan). Berapa banyak susunan pengurus yang mungkin? Bagaimana jika Ayu sudah pasti menjadi sekretaris?

1. Jabatannya berbeda-beda, jadi urutan penting: permutasi 4 dari 8.
2. $P(8, 4) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.680$.
3. Jika Ayu pasti menjadi sekretaris, tinggal 3 jabatan untuk 7 calon: $P(7, 3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Ada 1.680 susunan pengurus, dan 210 di antaranya menempatkan Ayu sebagai sekretaris. Cek kewajaran: $1.680 : 8 = 210$. Cocok, karena kedelapan calon sama-sama mungkin duduk di kursi sekretaris.

ADU CEPAT **Permutasi kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan r bilangan menurun mulai dari n. Contoh: P(7, 3) = 7 × 6 × 5 = 210.

32.4 Huruf kembar dan meja bundar

Berapa banyak susunan huruf dari kata **KATA**? Kalau keempat hurufnya berbeda, jawabannya $4! = 24$. Tetapi ada dua huruf A yang kembar. Beri label sementara: A_1 dan A_2. Susunan $\mathrm{KA}_1\mathrm{TA}_2$ dan $\mathrm{KA}_2\mathrm{TA}_1$ sama-sama terbaca KATA. Setiap kata terhitung $2! = 2$ kali, sehingga banyak susunan yang benar-benar berbeda adalah $24 : 2 = 12$.

PERMUTASI DENGAN UNSUR YANG SAMA

Banyak susunan n unsur yang terdiri atas k_1 unsur jenis pertama, k_2 unsur jenis kedua, ..., dan k_m unsur jenis ke-m (dengan $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$) adalah

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_m!}$$

Pembagi $k_1!$ "menghapus" urutan di antara unsur kembar jenis pertama, dan seterusnya.

Bahasa sederhana · Caranya: hitung dulu seolah-olah semua huruf berbeda. Lalu bagi dengan faktorial banyaknya setiap huruf yang kembar.

RUMUS HIDUP

Lampu hias Agustusan

$$S = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

Susun dulu seolah-olah semua lampu berbeda: (a + b + c)! cara. Lalu bagi dengan a!, b!, dan c!, karena menukar dua lampu yang warnanya sama tidak menghasilkan susunan baru.

- a Lampu merah buah
- b Lampu kuning buah
- c Lampu hijau buah
- S Banyak susunan susunan

BANYAK SUSUNAN

210

susunan

Ada **7** lampu (**3** merah, **2** kuning, **2** hijau). Jika semua dianggap berbeda: **7**! = **5.040** susunan. Bagi dengan **3**! × **2**! × **2**! = **24**, hasilnya **210** susunan yang benar-benar berbeda.

Cek satuan: Pembilang dan penyebut sama-sama berupa banyak susunan, jadi hasilnya selalu bilangan bulat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERMUTASI-UNSUR-SAMA

KERJAKAN BERSAMA

Mengacak huruf MATEMATIKA

Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat dibuat dari semua huruf kata MATEMATIKA?

1. Hitung hurufnya: M, A, T, E, M, A, T, I, K, A ada 10 huruf.
2. Huruf kembar: A muncul 3 kali, M muncul 2 kali, T muncul 2 kali. E, I, K masing-masing sekali.
3. $\dfrac{10!}{3!\,2!\,2!} = \dfrac{3.628.800}{6 \times 2 \times 2} = \dfrac{3.628.800}{24} = 151.200.$

Ada 151.200 susunan. Lucunya, angka ini sama dengan banyak PIN 6 angka tanpa angka kembar. Kebetulan? Karena $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24 = 4!$, kita dapat $\dfrac{10!}{4!} = P(10, 6)$. Matematika suka memberi kejutan kecil seperti ini.

Sekarang pindah ke warung bakso. Teman-teman tidak antre lurus, tetapi duduk mengelilingi meja bundar.

Tebak Dulu!

Lima sahabat duduk mengelilingi meja bundar. Dua cara duduk dianggap sama jika yang satu hanya hasil memutar yang lain (setiap orang tetap punya tetangga kiri dan kanan yang sama). Ada berapa cara duduk yang berbeda?

- 120, sama seperti antrean lurus 5 orang.
- 60, karena dibagi 2.
- 24.
- 5.

Jawabannya: 24. Setiap susunan melingkar bisa dibaca mulai dari 5 kursi yang berbeda, dan kelima cara membaca itu terlihat sebagai 5 antrean lurus yang berbeda. Jadi $120 : 5 = 24 = 4!$. Cara lain: kunci Dimas di satu kursi sebagai patokan, lalu susun 4 orang sisanya: $4! = 24$.

PERMUTASI SIKLIS

Banyak cara menyusun n unsur berbeda secara melingkar (susunan yang hanya berbeda putaran dianggap sama) adalah

$$(n-1)!$$

Jika susunan yang dicerminkan juga dianggap sama, seperti manik-manik pada gelang yang bisa dibalik, banyaknya $\frac{(n-1)!}{2}$ untuk $n \geq 3$.

Bukti singkat: mengapa dibagi n?

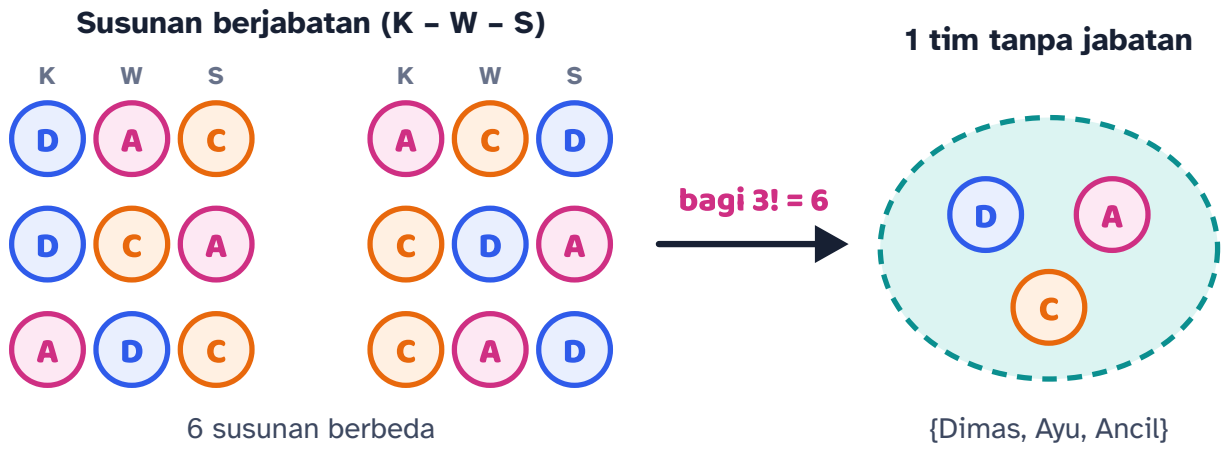
Susunan lurus ada $n!$. Setiap susunan melingkar, jika dibaca searah jarum jam mulai dari kursi yang berbeda-beda, menghasilkan tepat n susunan lurus yang berbeda (karena semua unsur berbeda). Jadi setiap susunan melingkar terhitung n kali, dan banyaknya $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Pada gelang, setiap susunan dan cerminannya juga terhitung dua kali, sehingga dibagi 2 lagi.

AWAS JEBAKAN

Rumus $(n-1)!$ hanya berlaku jika kursinya **tidak bernomor** dan yang penting hanyalah posisi relatif (siapa di sebelah siapa). Jika kursi di meja bundar diberi nomor, misalnya kursi 1 yang dekat pintu, memutar susunan menghasilkan susunan baru, sehingga banyaknya kembali $n!$.

32.5 Kombinasi: ketika urutan tidak penting

Kak Lintang perlu mengirim **3 siswa** dari 5 calon (Dimas, Ayu, Ancil, Sari, Budi) ke lomba cerdas cermat. Tidak ada jabatan: tim {Dimas, Ayu, Ancil} sama saja dengan tim {Ancil, Dimas, Ayu}. Kalau kita menghitung dengan permutasi, $P(5,3) = 60$, setiap tim terhitung berkali-kali. Berapa kali tepatnya?



Enam susunan berjabatan berisi orang yang sama. Begitu jabatannya dihapus, keenamnya menyatu menjadi satu tim. Jadi banyak tim = banyak susunan dibagi $3! = 6$.

Setiap tim 3 orang muncul sebagai $3! = 6$ susunan berjabatan. Jadi banyak tim adalah $60 : 6 = 10$. Memilih tanpa memperhatikan urutan disebut **kombinasi**.

DEFINISI · KOMBINASI

Kombinasi r unsur dari n unsur berbeda adalah pemilihan r unsur **tanpa memperhatikan urutan**. Banyaknya ditulis $\binom{n}{r}$, $C(n,r)$, ${}_nC_r$, atau C_r^n:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Bukti: hitung susunan berjabatan dengan dua cara

Ada dua cara mengisi r jabatan dari n calon. **Cara 1:** langsung, sebanyak $P(n,r)$. **Cara 2:** pilih dulu timnya, $\binom{n}{r}$ cara, lalu bagikan r jabatan kepada anggota tim, $r!$ cara. Kedua cara menghitung hal yang sama, jadi $P(n,r) = \binom{n}{r} \cdot r!$. Bagi dengan $r!$, selesai. Teknik "hitung dua kali" ini adalah senjata favorit di olimpiade.

RUMUS HIDUP

Kombinasi: memilih r dari n

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Hitung dulu susunan berurutan P(n, r), lalu bagi dengan r! karena urutan di dalam tim tidak penting.

n Banyak calon orang

r Ukuran tim orang

$\binom{n}{r}$ Banyak tim cara

BANYAK TIM

120

cara

Pilih **3** dari **10**: ada P(**10**, **3**) = **720** susunan berurutan, dan setiap tim terhitung **3**! = **6** kali. Jadi banyak tim = **720** : **6** = **120**. Memilih **7** orang yang tidak ikut juga menghasilkan **120** cara: sama persis! Tanda '—' berarti r lebih besar daripada n, jadi tim tidak bisa dibentuk.

Cek satuan: Hasilnya selalu bilangan bulat: P(n, r) pasti habis dibagi r!.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOMBINASI-NCR

Tebak Dulu!

Di kelas ada 10 siswa. Mana yang lebih banyak: cara memilih tim 3 orang, atau cara memilih tim 7 orang?

Tim 3 orang, karena timnya lebih kecil dan lebih mudah dibentuk.

Tim 7 orang, karena lebih banyak orang yang dipilih.

Sama banyak.

Tidak bisa dibandingkan tanpa daftar nama.

Jawabannya: sama banyak, yaitu 120. Setiap kali kamu memilih 3 orang yang ikut, kamu sekaligus memilih 7 orang yang **tidak** ikut. Pasangannya satu-satu, jadi $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$.

SIFAT SIMETRI

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Memilih r orang yang **ikut** sama dengan memilih $n - r$ orang yang **tidak ikut**.

Contoh: $\binom{30}{28} = \binom{30}{2} = \dfrac{30 \times 29}{2} = 435$.

TRIK KAK LINTANG: UJI TUKAR

Bingung memilih permutasi atau kombinasi? Ambil satu hasil, lalu **tukar posisi dua orang** di dalamnya. Kalau hasilnya menjadi sesuatu yang berbeda (ketua dan wakil bertukar jabatan), urutan penting: **permutasi**. Kalau hasilnya tetap sama (tim yang sama), urutan tidak penting: **kombinasi**.

	Permutasi	Kombinasi
Apakah urutan atau jabatan penting?	Ya	Tidak
Kata pemicu	menyusun, mengurutkan, jabatan berbeda, antrean, kata sandi	memilih, tim, panitia, kelompok, jabat tangan
Rumus	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$	$\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
Contoh 3 dari 5 orang	60 susunan ketua–wakil–sekretaris	10 tim lomba

CONTOH **Jabat tangan selesai rapat**

Selesai rapat, 6 pengurus OSIS saling berjabat tangan. Setiap dua orang berjabat tangan tepat sekali. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi?

1. Satu jabat tangan = memilih 2 orang. "Dimas–Ayu" sama dengan "Ayu–Dimas", jadi urutan tidak penting: kombinasi.
2. $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2!} = 15.$
3. Cek dengan cara lain: setiap orang menjabat 5 tangan, $6 \times 5 = 30$, tetapi setiap jabat tangan terhitung dua kali (sekali oleh setiap orang). $30 : 2 = 15$. ✓

Terjadi 15 jabat tangan.

KERJAKAN BERSAMA **Tim cerdas cermat dengan syarat**

Dari 7 calon (termasuk Ayu dan Dimas) akan dipilih tim cerdas cermat beranggotakan 3 orang. (a) Berapa banyak tim jika Ayu wajib ikut? (b) Berapa banyak tim jika Ayu wajib ikut, tetapi Dimas berhalangan?

1. (a) Ayu sudah pasti masuk, jadi tinggal memilih 2 orang dari 6 calon lainnya: $\binom{6}{2} = 15.$
2. (b) Ayu pasti masuk dan Dimas pasti tidak, jadi pilih 2 orang dari 5 calon sisanya: $\binom{5}{2} = 10.$

(a) 15 tim, (b) 10 tim. Syarat "wajib ikut" mengurangi ukuran tim yang dipilih, sedangkan syarat "tidak boleh ikut" mengurangi banyak calon.

MITOS

"Gembok koper 'kombinasi' memakai rumus kombinasi."

FAKTA

Pada gembok, urutan angka penting (1-2-3 berbeda dengan 3-2-1) dan angka boleh berulang. Jadi banyak kodenya $10 \times 10 \times 10 = 1.000$. Secara matematika itu permutasi berulang, bukan kombinasi!

MITOS

"Kalau urutan tidak penting, bagi saja hasil permutasinya dengan 2."

FAKTA

Yang benar dibagi $r!$, yaitu banyak cara mengurutkan r orang terpilih. Tim 3 orang dibagi 6, tim 4 orang dibagi 24. Membagi dengan 2 hanya benar untuk $r = 2$.

MITOS

"0! = 0, karena tidak ada yang dikalikan."

FAKTA

$0! = 1$. Ada tepat satu cara menyusun nol benda: tidak melakukan apa-apa. Pola $n! = (n+1)! : (n+1)$ juga memaksa $0! = 1! : 1 = 1$.

ADU CEPAT **Kombinasi kilat**

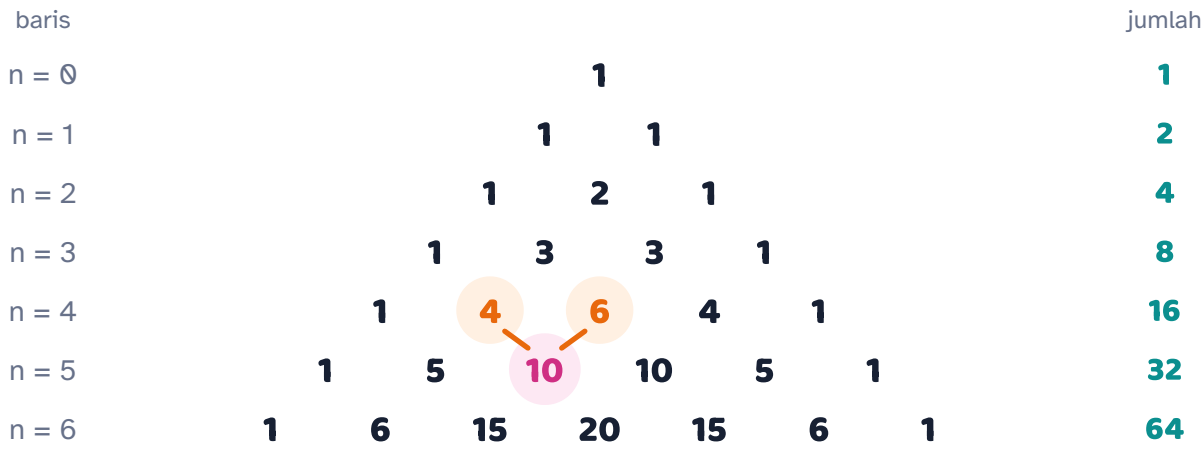
ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Untuk r yang besar, pakai simetri: C(12, 10) = C(12, 2) = 12 × 11 : 2 = 66.

32.6 Segitiga Pascal dan binomial Newton

Tuliskan $\binom{n}{r}$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ dan susun berjenjang. Muncullah segitiga yang terkenal: **segitiga Pascal**. Setiap baris diawali dan diakhiri angka 1, dan setiap bilangan di dalamnya adalah **jumlah dua bilangan tepat di atasnya**.



Baris ke-n berisi $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Contoh aturan jumlah: $4 + 6 = 10$. Kolom kanan menunjukkan jumlah setiap baris, yang selalu 2^n.

ATURAN PASCAL

Untuk $1 \le r \le n - 1$,

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

Bukti tanpa rumus: Ancil ikut atau tidak?

Kita memilih tim r orang dari n calon, dan Ancil adalah salah satu calonnya. Setiap tim pasti termasuk salah satu dari dua jenis berikut.

- **Ancil ikut.** Sisa $r - 1$ kursi diisi dari $n - 1$ calon lain: $\binom{n-1}{r-1}$ tim.
- **Ancil tidak ikut.** Semua r kursi diisi dari $n - 1$ calon lain: $\binom{n-1}{r}$ tim.

Kedua jenis tidak tumpang tindih dan bersama-sama mencakup semua tim. Dengan aturan penjumlahan, $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$. ∎

∎

LAB MINI Segitiga Pascal ajaib: warnai bilangan ganjilnya

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32



Aturan Pascal

ketuk sebuah sel
untuk melihat asal-usulnya

Arti warna
habis dibagi 2
sisa 1

Coba 8, 16, 32, atau 64 baris (pangkat dari 2)

Sel berwarna	Semua sel	Persentase berwarna
11	15	73,3 %

Ketuk sebuah sel untuk melihat dari mana bilangannya berasal (jumlah dua sel di atasnya). Lalu naikkan banyak baris menjadi 32 atau 64 dan tekan ▶ **Jalankan**: sel ganjil yang diwarnai membentuk **segitiga Sierpiński**, segitiga berlubang yang berulang di dalam dirinya sendiri. Ganti pilihan warna ke sisa bagi 3 atau 5. Pola apa yang muncul?

MENGAPA MUNCUL SEGITIGA SIERPIŃSKI?

Warna sel hanya bergantung pada **ganjil atau genap**, dan aturan Pascal versi ganjil-genap sangat sederhana: ganjil + ganjil = genap, ganjil + genap = ganjil. Karena itu blok 2 baris, 4 baris, 8 baris, dan seterusnya selalu berulang sebagai tiga salinan dengan lubang di tengah. Pada 64 baris pertama ada $3^6 = 729$ sel ganjil dari 2.080 sel, kira-kira 35%. Semakin banyak baris, persentase sel ganjil makin kecil menuju 0%! Pola ini dinamai dari matematikawan Polandia Wacław Sierpiński, yang membahasnya pada tahun 1915.

GRAFIK HIDUP

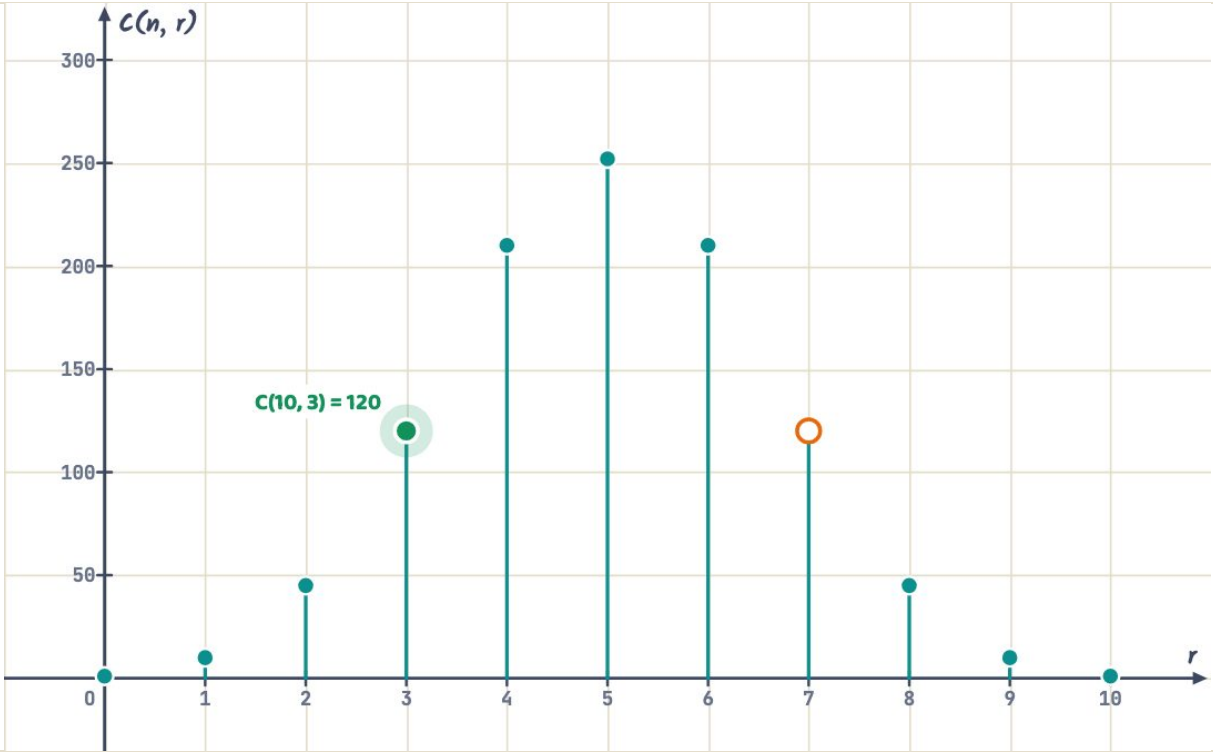
Gunung kombinasi: satu baris segitiga Pascal

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

$$y = \binom{n}{x}$$

$$\binom{10}{3} = 120 = \binom{10}{7}$$

Setiap batang adalah satu bilangan pada baris ke-n. Bentuknya simetris dan memuncak di tengah.



titik oranye = pasangan simetrinya C(n, n − r)

C(n, r)	C(n, n − r)	Jumlah satu baris = 2^n
120	120	1.024

Seret titik hijau di sepanjang baris. Titik oranye selalu setinggi titik hijau: itulah sifat simetri. Naikkan n: gunungnya makin tinggi dan makin mirip lonceng. Bentuk lonceng ini akan muncul lagi di Bab 34!

Sekarang kejutan berikutnya. Mengapa $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ memakai koefisien 1, 2, 1, dan $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ memakai 1, 3, 3, 1? Itu baris ke-2 dan ke-3 segitiga Pascal!

Bayangkan $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$. Setiap suku hasil kali didapat dengan memilih a **atau** b dari **setiap** kurung. Suku a^2b muncul setiap kali kita memilih b dari tepat 1 kurung (dan a dari dua kurung lainnya). Banyak caranya $\binom{3}{1} = 3$. Itulah koefisien 3!

TEOREMA BINOMIAL NEWTON

Untuk setiap bilangan asli n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^n$$

Suku ke-$(k+1)$ adalah $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$: pilih b dari k kurung di antara n kurung.

COBA SENDIRI **Koefisien yang tersembunyi**

Tentukan koefisien x^3 pada penjabaran $(2x+1)^5$ tanpa menjabarkan seluruhnya.

1. Suku umum: $\binom{5}{k}(2x)^{5-k} \cdot 1^k$.
2. Agar pangkat x sama dengan 3, perlu $5-k=3$, jadi $k=2$.
3. Sukunya: $\binom{5}{2}(2x)^3 = 10 \times 8x^3 = 80x^3$.

Koefisien x^3 adalah 80. Jebakan umum: lupa memangkatkan angka 2 di dalam $(2x)^3$, sehingga menjawab 10.

TAMU DARI MASA LALU

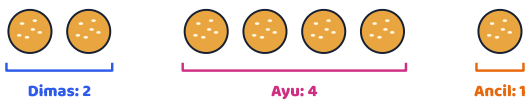
Segitiga ini memakai nama **Blaise Pascal** (1623–1662) dari Prancis, yang menulis risalah tentangnya sekitar tahun 1654. Namun ia bukan yang pertama. Di India, pola serupa muncul dalam kajian irama puisi sejak karya Pingala (±abad ke-2 SM) dan dijelaskan lebih rinci oleh Halayudha (±abad ke-10). Al-Karaji di Persia (±1000 M) juga mengenalnya. Di Tiongkok segitiga ini disebut *segitiga Yang Hui*, dari buku Yang Hui tahun 1261 yang mengutip Jia Xian (±abad ke-11). Di Italia ia dikenal sebagai segitiga Tartaglia. Nama "binomial Newton" dipakai karena Isaac Newton (±1665) memperluas rumus ini untuk pangkat pecahan dan negatif.

32.7 Jurus olimpiade: bintang & sekat, inklusi-eksklusi

Ibu membeli 7 onde-onde yang sama persis untuk dibagikan kepada Dimas, Ayu, dan Ancil. Boleh saja ada yang tidak kebagian (mungkin Ancil sedang berpuasa). Ada berapa cara membagi? Mendaftar satu per satu sangat melelahkan. Ada trik yang sangat elegan: ubah onde-onde menjadi **bintang** dan batas jatah menjadi **sekat**.



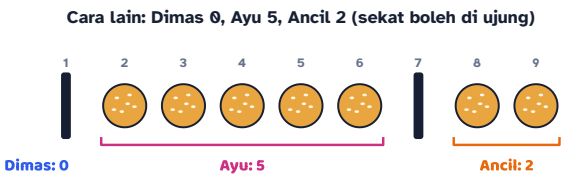
Langkah 1. Ada 7 onde-onde identik dan 3 anak. Yang dihitung hanyalah **berapa banyak** onde-onde yang diterima setiap anak.



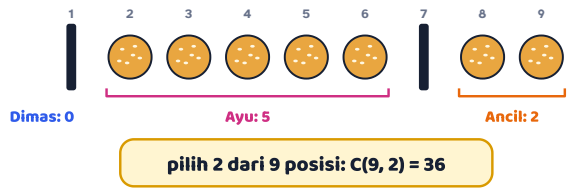
Langkah 2. Satu cara membagi: Dimas 2, Ayu 4, Ancil 1. Jajarkan jatah mereka dari kiri ke kanan.



Langkah 3. Batas antarjatah diganti dengan **sekat**. Untuk 3 anak cukup 2 sekat, jadi ada $7 + 2 = 9$ simbol berjajar: ●●|●●●●|●



Langkah 4. Cara lain: sekat paling kiri, artinya Dimas tidak kebagian (0), Ayu 5, Ancil 2: |●●●●●|●●. Setiap cara membagi berpadanan dengan tepat satu deretan simbol.



Langkah 5. Jadi banyak cara membagi = banyak cara memilih posisi 2 sekat di antara 9 posisi: $\binom{9}{2} = 36$. Tidak perlu mendaftar satu per satu!

TEOREMA BINTANG DAN SEKAT

Banyak cara membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak mendapat bagian) sama dengan banyak penyelesaian bilangan cacah dari $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, yaitu

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Jika setiap orang wajib mendapat minimal satu, banyaknya $\binom{n-1}{k-1}$.

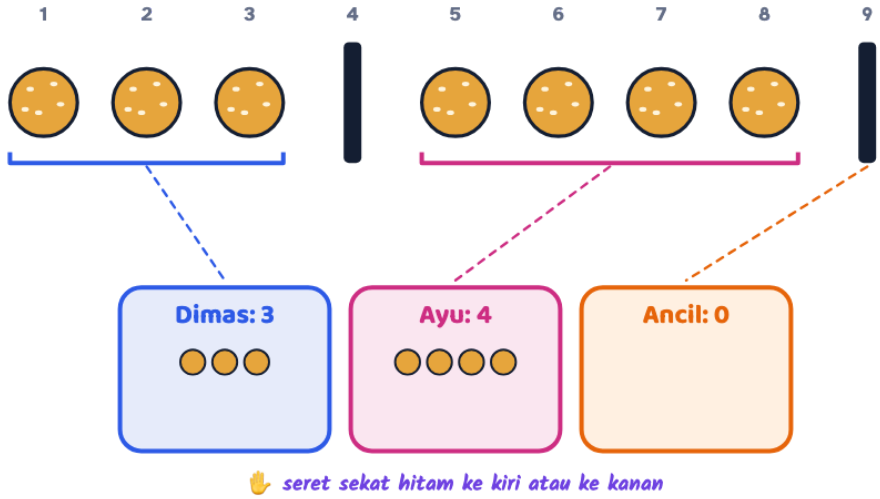
Bahasa sederhana · Intinya: jajarkan semua benda, lalu sisipkan sekat untuk memisahkan jatah setiap orang. Menghitung cara membagi sama dengan menghitung cara menaruh sekat.

LAB MINI Bagi-bagi onde-onde dengan sekat

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

$$C(7+3-1, 3-1) = C(9, 2) = 36$$

7 bintang + 2 sekat = 9 simbol



Banyak cara	Cara ini	Pembagian
36	ke-26 dari 36	Dimas 3 · Ayu 4 · Ancil 0

Seret **sekat hitam** ke kiri atau ke kanan dan lihat jatah setiap anak berubah. Tekan ➡ **Berikutnya** untuk menelusuri semua cara secara berurutan, atau ▶ **Jalankan** untuk menghitungnya sampai habis. Nyalakan "setiap anak minimal 1": berapa simbol yang tersisa untuk diatur?

RUMUS HIDUP

Bintang dan sekat

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak kebagian) sama dengan memilih posisi k − 1 sekat di antara n + k − 1 tempat.

- n Onde-onde identik `buah`
- k Banyak anak `orang`
- W Banyak cara membagi `cara`

BANYAK CARA MEMBAGI

36

cara

7 onde-onde untuk **3** anak: deretan **9** simbol berisi **7** bintang dan **2** sekat. Banyak cara = C(**9**, **2**) = **36**. Jika setiap anak wajib mendapat minimal satu, banyaknya C(**6**, **2**) = **15** cara.

Cek satuan: Benda harus identik. Jika bendanya berbeda-beda, setiap benda punya k pilihan penerima, sehingga banyaknya k^n.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINTANG-SEKAT

COBA SENDIRI

Semua harus kebagian

Ada 10 onde-onde identik untuk Dimas, Ayu, dan Ancil. Setiap anak wajib mendapat minimal satu. Ada berapa cara membagi?

1. Berikan dulu masing-masing 1 onde-onde. Tersisa $10 - 3 = 7$ onde-onde yang boleh dibagi bebas.
2. Bintang dan sekat untuk 7 onde-onde dan 3 anak: $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$.
3. Cocok dengan rumus "minimal satu": $\binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$.

Ada 36 cara. Trik "bagikan jatah wajib dulu" mengubah soal bersyarat menjadi soal bintang dan sekat biasa.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Berapa bilangan dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2 **atau** 3? Aturan penjumlahan tidak bisa langsung dipakai, karena kedua kelompok tumpang tindih. Kalau dijumlahkan begitu saja, $50 + 33 = 83$, kelipatan 6 terhitung dua kali. Kurangi sekali: $83 - 16 = 67$. Secara umum,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Polanya: tambahkan semua, kurangi irisan dua, tambahkan irisan tiga, dan seterusnya berselang-seling. Prinsip ini menjawab soal olimpiade klasik seperti "tukar kado tanpa ada yang mendapat kadonya sendiri". Coba tantangannya di Tangga Latihan Lv 6!

Plat nomor kendaraan

Kode wilayah, 1–4 angka, dan hingga 3 huruf seri. Aturan perkalian menunjukkan satu kode wilayah bisa menampung ratusan juta nomor.

PIN ATM

Ada 10^6 PIN 6 angka. Kartu diblokir setelah 3 kali salah, sehingga menebak secara acak hampir mustahil berhasil.

Menu warteg

Paket lauk × sayur × minuman. Menambah satu pilihan lauk menambah banyak paket sebanyak (sayur × minuman).

Pengurus OSIS

Ketua, wakil, sekretaris punya jabatan berbeda: permutasi. Panitia tanpa jabatan: kombinasi.

Jadwal liga sepak bola

Liga 18 klub dengan laga kandang dan tandang butuh $2 \times \binom{18}{2} = 306$ pertandingan dalam semusim.

Kode genetik

DNA memakai 4 basa yang dibaca berkelompok tiga. Aturan perkalian: $4^3 = 64$ kodon, cukup untuk 20 jenis asam amino.

Cek Cepat

Dari 6 calon akan dipilih ketua kelas dan wakil ketua kelas. Banyak cara memilihnya adalah...

- 12
- 15
- 30
- 36

Ayu memilih 2 dari 5 menu warteg untuk dibungkus. Urutan memilih tidak penting. Banyak pilihannya adalah...

- 10
- 20
- 25
- 7

Banyak susunan huruf berbeda dari kata KAKAK adalah...

- 120
- 60
- 20
- 10

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: detektif kartu huruf

Bahan: 4 potong kertas kecil, pensil, buku catatan, dan 3 anggota keluarga.

1. Tulis huruf S, A, T, U pada empat kertas. Daftarlah semua susunannya secara teratur: mulai dari yang berawalan S, lalu A, lalu T, lalu U. Apakah hasilnya 24?
2. Ganti kertas S dengan huruf A sehingga hurufnya A, A, T, U. Daftar lagi semua susunan yang **terbaca** berbeda.
3. Ulangi untuk huruf K, A, K, A.
4. Ajak 3 anggota keluarga duduk mengelilingi meja makan bersamamu. Catat berapa susunan duduk yang berbeda jika yang penting hanya siapa duduk di sebelah siapa.

Pertanyaan: Berapa susunan pada langkah 2 dan 3? Jelaskan mengapa hasilnya $24 : 2$ dan $24 : (2 \times 2)$. Mengapa susunan duduk melingkar 4 orang hanya $3! = 6$, padahal antrean lurus 4 orang ada 24?

RINGKASAN KILAT Bab 32 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- memakai **aturan perkalian** dan **aturan penjumlahan** lewat diagram pohon dan kotak pengisian tempat
- menghitung **faktorial** dan **permutasi**, termasuk permutasi dengan unsur yang sama dan permutasi siklis
- membedakan **permutasi** (urutan penting) dan **kombinasi** (urutan tidak penting)
- membaca **segitiga Pascal** dan memakainya untuk menjabarkan $(a+b)^n$ dengan **binomial Newton**
- memakai jurus olimpiade **bintang dan sekat** serta **inklusi-eksklusi**

Istilah kunci

kaidah pencacahan · diagram pohon · aturan pengisian tempat · faktorial · permutasi · kombinasi · segitiga Pascal

Rumus penting

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutasi: menyusun r dari n. Ada n calon dan r kursi berlabel. Kursi pertama punya n pilihan, kursi kedua n – 1, dan seterusnya: kalikan r bilangan menurun mulai dari n.

$$S = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

Lampu hias Agustusan. Susun dulu seolah-olah semua lampu berbeda: (a + b + c)! cara. Lalu bagi dengan a!, b!, dan c!, karena menukar dua lampu yang warnanya sama tidak menghasilkan susunan baru.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Kombinasi: memilih r dari n. Hitung dulu susunan berurutan P(n, r), lalu bagi dengan r! karena urutan di dalam tim tidak penting.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Bintang dan sekat. Membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak kebagian) sama dengan memilih posisi k – 1 sekat di antara n + k – 1 tempat.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Kalikan jika kegiatannya terdiri atas beberapa langkah yang semuanya dilakukan ("kemeja dan celana").
- Rumus $(n-1)!$ hanya berlaku jika kursinya tidak bernomor dan yang penting hanyalah posisi relatif (siapa di sebelah siapa).

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=32

🧩 Teka-teki untuk Bab 33

Dimas melempar dua dadu sekaligus, lalu menjumlahkan mata dadunya. "Jumlahnya bisa 2, 3, 4, sampai 12. Ada 11 kemungkinan, jadi peluang mendapat jumlah 7 pasti 1 dari 11!" katanya yakin. Ayu menggeleng. Siapa yang benar?

▼ **Intip petunjuk**

Pakai aturan perkalian: dua dadu menghasilkan $6 \times 6 = 36$ pasangan hasil yang sama-sama mungkin. Hitung pasangan yang jumlahnya 7: $(1,6), (2,5), \ldots$. Ada berapa? Lalu bandingkan dengan jumlah 2, yang hanya bisa didapat dari $(1,1)$. Apakah semua jumlah sama mudahnya muncul? Bab 33 membahasnya dengan **peluang**.

BAB 33 · DATA & PELUANG

33 Peluang: Menjinakkan Ketidakpastian



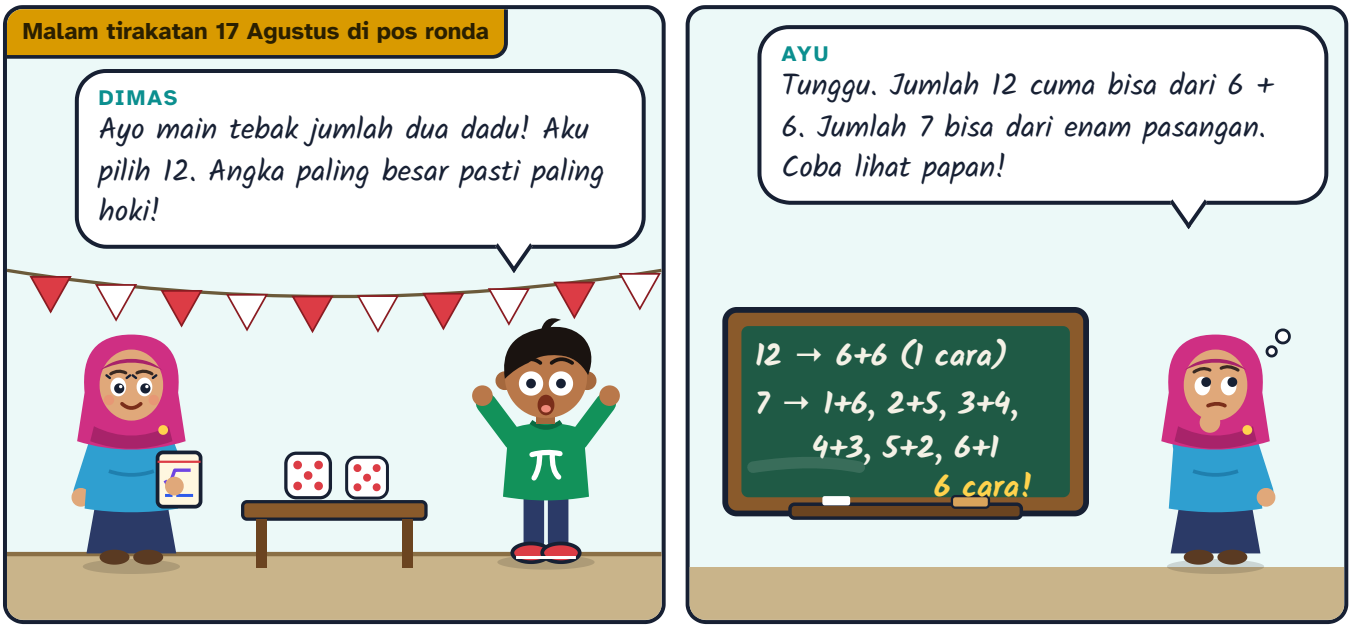
Mengapa jumlah 7 jauh lebih sering muncul daripada jumlah 12 saat dua dadu dilempar? Mengapa berpindah pintu bisa melipatgandakan peluangmu membawa pulang sepeda? Hal yang belum pasti ternyata bisa diukur dengan angka.

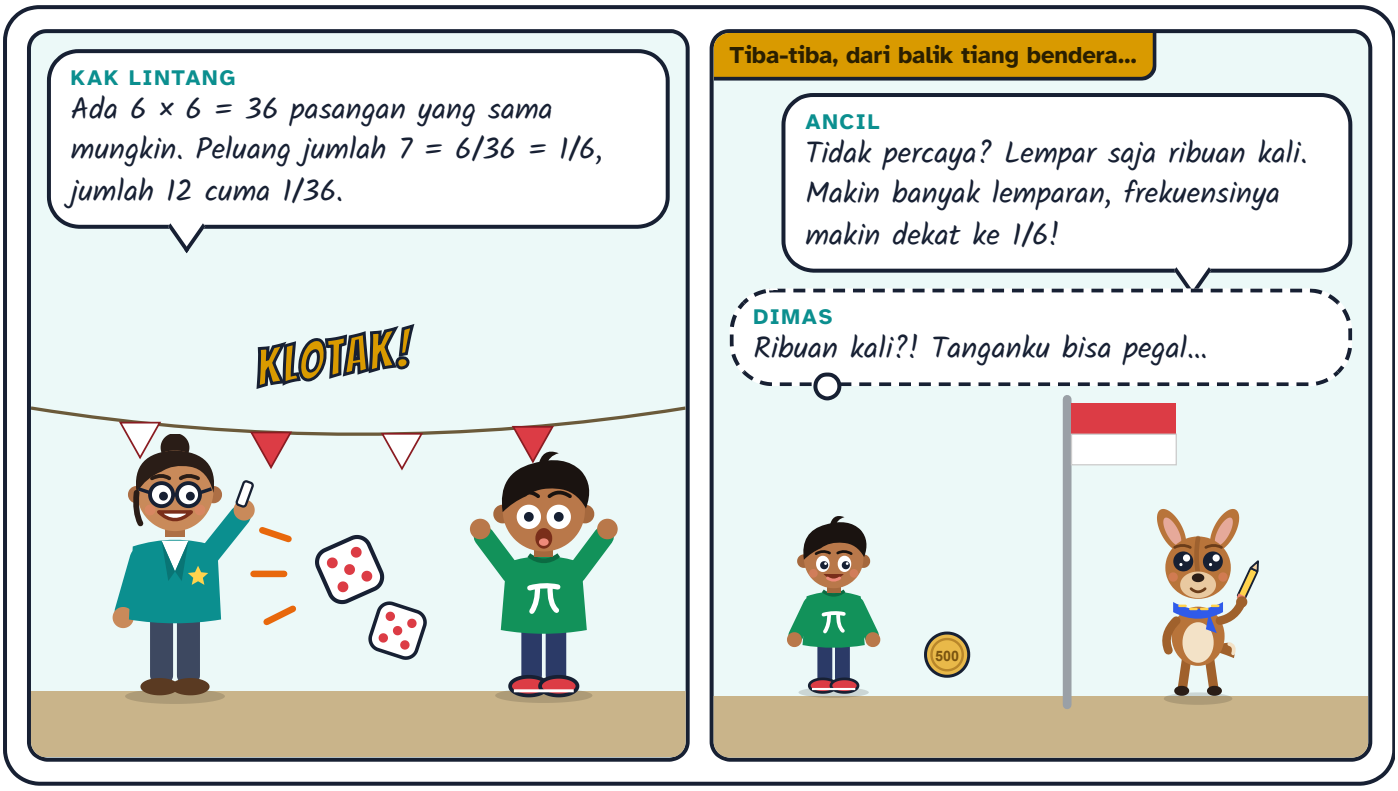
Setelah bab ini, kamu bisa

- menyusun **ruang sampel** dan menghitung **peluang klasik** suatu kejadian;
- menaksir peluang dari **percobaan** dan menjelaskan mengapa frekuensi relatif makin dekat ke peluang teoretis;
- memakai **diagram pohon**, **diagram Venn**, aturan penjumlahan, dan aturan perkalian;
- membedakan kejadian **saling lepas** dan **saling bebas**, serta menghitung **peluang bersyarat**;
- menghitung **nilai harapan** dan menilai apakah sebuah permainan adil.

TEBAK DADU MALAM TUJUH BELASAN

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Dua dadu dilempar bersamaan, lalu kedua mata dadunya dijumlahkan. Jumlah berapa yang paling mungkin muncul?

- 12, karena angkanya paling besar.
- Semua jumlah dari 2 sampai 12 sama mungkin.
- 7.
- 2, karena dadu sering menunjukkan mata 1.

Jawabannya: 7. Ada 36 pasangan mata dadu yang sama mungkin. Jumlah 7 dapat dibentuk oleh **enam** pasangan, lebih banyak daripada jumlah lain, sedangkan jumlah 2 dan 12 masing-masing hanya oleh satu pasangan. Inilah jawaban teka-teki di akhir Bab 32: peluang jumlah 7 adalah $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

33.1 Ruang sampel dan peluang klasik

Melempar dadu, mengocok kupon undian, atau menebak cuaca besok adalah contoh **percobaan** acak: kita tahu apa saja hasil yang mungkin, tetapi tidak tahu hasil mana yang akan muncul. Himpunan semua hasil yang mungkin disebut **ruang sampel** S, dan setiap anggotanya disebut **titik sampel**. Sekumpulan hasil yang kita minati, misalnya "muncul mata genap", disebut **kejadian**.

Contoh: pada pelemparan satu dadu, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jadi $n(S) = 6$. Kejadian A = "muncul mata genap" $= \{2, 4, 6\}$, jadi $n(A) = 3$.

DEFINISI: PELUANG KLASIK

Jika semua titik sampel dalam ruang sampel S **sama mungkin** terjadi, maka **peluang** kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{banyak hasil yang dimina}}{\text{banyak semua hasil yang mu}}$$

Untuk dadu tadi, $P(\text{genap}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Bahasa sederhana · Gampangnya: peluang = **banyak cara yang kita harapkan** dibagi **banyak semua cara yang mungkin**. Di kantong ada 3 permen jeruk dan 1 permen stroberi. Peluang mengambil permen jeruk tanpa melihat adalah 3 dari 4, yaitu $\frac{3}{4}$.

SIFAT-SIFAT PELUANG

- $0 \le P(A) \le 1$. Peluang 0 berarti **mustahil**, peluang 1 berarti **pasti**.
- $P(S) = 1$: pasti ada salah satu hasil yang muncul.
- **Komplemen**: peluang A *tidak* terjadi adalah $P(A') = 1 - P(A)$.

Kembali ke dua dadu Dimas. Ruang sampelnya berisi $6 \times 6 = 36$ pasangan (dadu pertama, dadu kedua). Tabel di bawah memuat jumlah setiap pasangan. Perhatikan enam sel bertanda: semuanya berjumlah 7 dan berjajar pada satu diagonal.

dadu 1 \ dadu 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Jadi $P(\text{jumlah } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, sedangkan $P(\text{jumlah } 12) = \frac{1}{36}$. Pilihan Dimas enam kali lebih kecil peluangnya!

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Hasil yang mungkin belum tentu sama mungkin. Jumlah dua dadu punya 11 nilai (2 sampai 12), tetapi $P(\text{jumlah } 7) \neq \frac{1}{11}$. Rumus $n(A)/n(S)$ hanya boleh dipakai pada ruang sampel yang titik-titiknya **sama mungkin**, yaitu 36 pasangan, bukan 11 jumlah.

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Untuk dua dadu, jumlah s muncul sebanyak $6 - |s - 7|$ kali dari 36. Cek: jumlah 7 muncul $6 - 0 = 6$ kali, jumlah 10 muncul $6 - 3 = 3$ kali, jumlah 2 muncul $6 - 5 = 1$ kali. Bentuk tabelnya seperti atap rumah dengan puncak di 7!

CONTOH **Kartu bernomor 1 sampai 20**

Dua puluh kartu diberi nomor 1 sampai 20, lalu dikocok. Ayu mengambil satu kartu. Berapa peluang nomornya kelipatan 3? Berapa peluang nomornya bukan kelipatan 3?

1. Ruang sampel: $n(S) = 20$, dan setiap kartu sama mungkin terambil.
2. Kelipatan 3: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, jadi $n(A) = 6$.
3. $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Dengan komplemen, $P(A') = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Peluang kelipatan 3 adalah $\frac{3}{10}$, dan peluang bukan kelipatan 3 adalah $\frac{7}{10}$. Jumlah keduanya pasti 1.

ADU CEPAT **Jumlah dua dadu kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Jumlah s muncul 6 – |s – 7| kali dari 36. Tulis jawabanmu sebagai pecahan, misalnya 5/36.

33.2 Frekuensi relatif: peluang dari percobaan

Tidak semua peluang bisa dihitung dengan membilang. Lemparkan sebuah tutup botol plastik: apakah ia lebih sering mendarat telentang atau telungkup? Bentuknya tidak simetris, jadi kedua hasil itu belum tentu sama mungkin. Satu-satunya cara untuk mengetahuinya: **coba berkali-kali dan catat**.

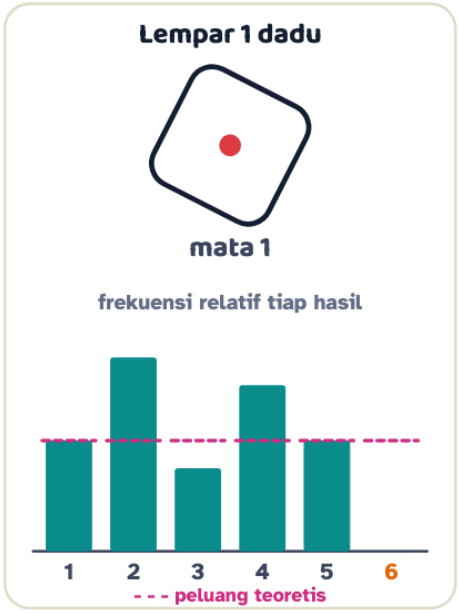
DEFINISI: FREKUENSI RELATIF DAN FREKUENSI HARAPAN

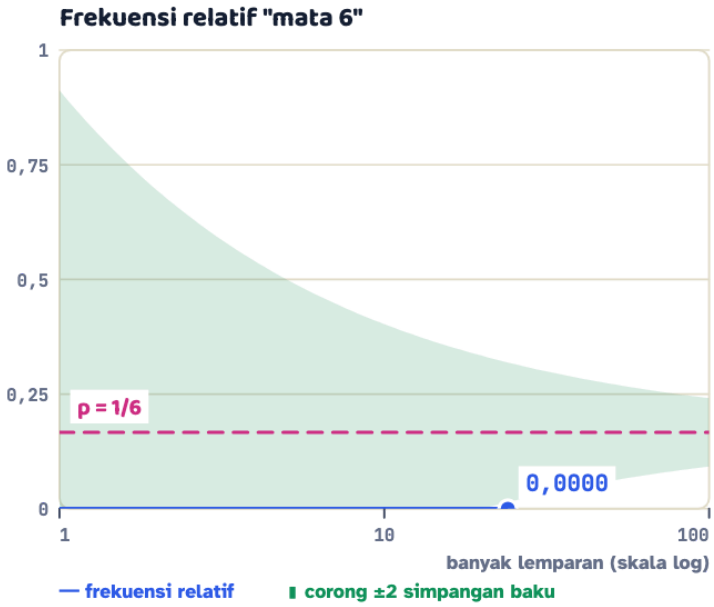
Jika sebuah percobaan diulang n kali dan kejadian A muncul k kali, maka **frekuensi relatif** A adalah $\frac{k}{n}$. Sebaliknya, jika peluang A diketahui, banyak kemunculan yang kita harapkan dalam n percobaan adalah **frekuensi harapan** $F_h(A) = n \cdot P(A)$.

Ketika n kecil, frekuensi relatif bisa melenceng jauh: lempar koin 4 kali dan bisa saja keluar Angka semua. Namun, ketika n makin besar, frekuensi relatif makin mantap mendekati peluang teoretis. Sifat ini disebut **hukum bilangan besar**. Buktikan sendiri di lab berikut.

LAB MINI **Pelempar ribuan kali: tunggu frekuensinya jinak**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33





Banyak lemparan	Kejadian muncul	Frekuensi relatif	Peluang teoretis	Selisih
24	0	0,0000	1/6 ≈ 0,1667	0,1667

Pilih percobaan, lalu tekan ▶ **Jalankan** atau ⚡ **+10.000**. Garis biru adalah frekuensi relatif, garis putus-putus adalah peluang teoretis, dan corong hijau menunjukkan seberapa jauh frekuensi biasanya masih boleh melenceng. Perhatikan sumbu mendatarnya: 1, 10, 100, 1.000, ... Untuk **tutup botol**, peluangnya dirahasiakan. Bisakah kamu menaksirnya sebelum menyalakan sakelar "Tampilkan peluang teoretis"?

TAMU DARI MASA LALU

Beberapa ilmuwan pernah benar-benar melempar koin ribuan kali. Naturalis Prancis Comte de Buffon (abad ke-18) mencatat sisi kepala muncul 2.048 kali dari 4.040 lemparan (±0,507). Ahli statistik Inggris Karl Pearson (sekitar tahun 1900) melempar 24.000 kali dan memperoleh 12.012 kepala (±0,5005). Matematikawan John Kerrich, saat ditawan pada Perang Dunia II, melempar 10.000 kali dan mendapat 5.067 kepala. Semuanya mendekati $\frac{1}{2}$, persis seperti ramalan hukum bilangan besar.

KERJAKAN BERSAMA **Tutup botol yang misterius**

Dimas melempar tutup botol 80 kali; 28 kali tutup itu mendarat telentang. (a) Taksirlah peluang tutup botol mendarat telentang. (b) Jika tutup itu dilempar 500 kali, kira-kira berapa kali ia mendarat telentang?

1. (a) Frekuensi relatif telentang $= \frac{28}{80} = \frac{7}{20} = 0{,}35$. Inilah taksiran peluangnya.
2. (b) Frekuensi harapan $= 500 \times 0{,}35 = 175$.
3. Ingat: 80 lemparan masih sedikit. Taksiran makin bisa dipercaya jika datanya ditambah, misalnya dengan menggabungkan hasil lemparan teman-teman sekelas.

Taksiran peluang telentang 0,35, dan dari 500 lemparan kita mengharapkan sekitar 175 kali telentang. "Sekitar", bukan "tepat"!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

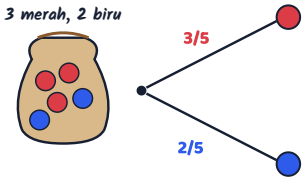
Koin tidak punya ingatan. Setelah Angka muncul lima kali berturut-turut, peluang lemparan berikutnya menghasilkan Angka tetap $\frac{1}{2}$. Hukum bilangan besar tidak bekerja dengan cara "membalas" hasil sebelumnya. Keanehan di awal hanya makin tidak berarti karena tertimbun ribuan lemparan baru.

33.3 Kejadian majemuk: diagram pohon dan diagram Venn

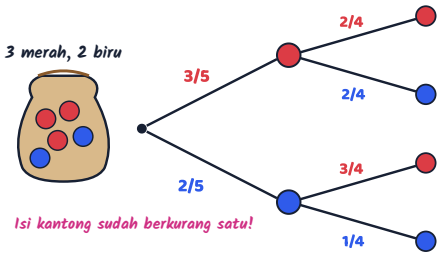
Banyak pertanyaan peluang melibatkan dua kejadian atau lebih: "ambil dua kelereng", "suka bakso **atau** mie ayam", "hujan pada hari Sabtu **dan** Minggu". Dua alat gambar membuat soal seperti ini jauh lebih mudah: **diagram pohon** untuk percobaan bertahap, dan **diagram Venn** untuk kejadian yang saling tumpang tindih.



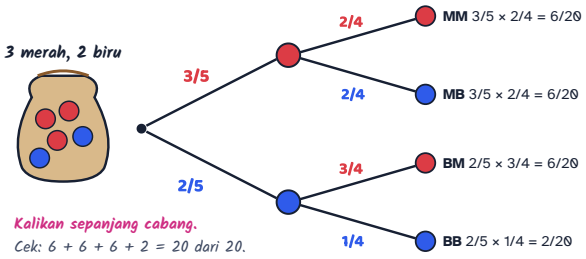
Langkah 1. Kantong berisi 3 kelereng merah (M) dan 2 biru (B). Ayu mengambil satu kelereng, **tidak dikembalikan**, lalu mengambil satu lagi. Berapa peluang kedua kelereng berwarna sama?



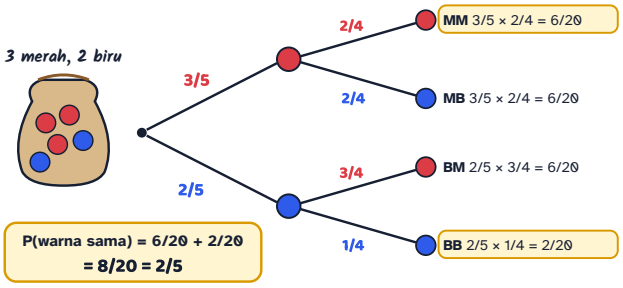
Langkah 2. Cabang pertama: $P(\text{M}) = \frac{3}{5}$ dan $P(\text{B}) = \frac{2}{5}$. Peluang pada cabang yang keluar dari satu titik selalu berjumlah 1.



Langkah 3. Cabang kedua bergantung pada hasil pertama. Jika yang pertama merah, sisa 2 merah dan 2 biru, jadi $\frac{2}{4}$ dan $\frac{2}{4}$. Jika yang pertama biru, sisa 3 merah dan 1 biru, jadi $\frac{3}{4}$ dan $\frac{1}{4}$.



Langkah 4. Peluang satu jalur = hasil kali peluang di sepanjang cabangnya. Keempat jalur: $\frac{6}{20}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{2}{20}$, dan totalnya tepat 1.

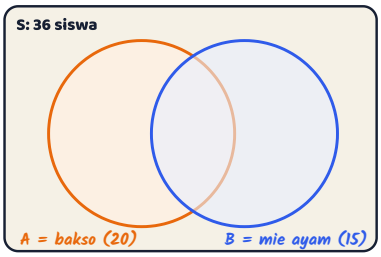


Langkah 5. "Warna sama" terdiri atas jalur MM dan BB, jadi jumlahkan: $\frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

TRIK KAK LINTANG

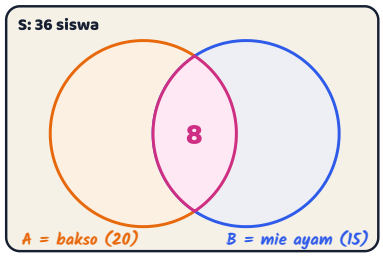
Mantra diagram pohon: **kalikan** sepanjang cabang (kata "dan"), lalu **jumlahkan** antarjalur (kata "atau"). Kalau semua jalur dijumlahkan hasilnya bukan 1, pasti ada cabang yang keliru.

Sekarang diagram Venn. Kak Lintang mendata kesukaan 36 siswa kelas IX: 20 siswa suka bakso, 15 siswa suka mie ayam, dan 8 siswa suka keduanya. Berapa peluang seorang siswa yang dipilih acak suka bakso **atau** mie ayam?



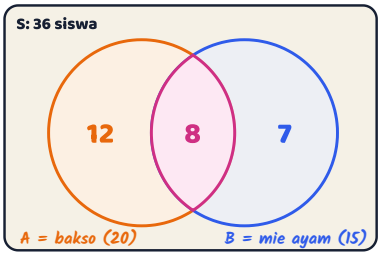
36 siswa ditanya:
20 suka bakso (A)
15 suka mie ayam (B)
8 suka keduanya

Langkah 1. Lingkaran A memuat siswa yang suka bakso (20), lingkaran B memuat siswa yang suka mie ayam (15). Keduanya tumpang tindih karena ada siswa yang suka keduanya.



Mulai dari irisan:
A ∩ B = 8 siswa
(suka bakso dan mie ayam sekaligus)

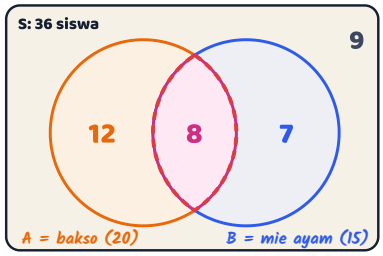
Langkah 2. Isi bagian tengah (irisan $A \cap B$) lebih dulu: 8 siswa.



Hanya bakso:
20 − 8 = 12

Hanya mie ayam:
15 − 8 = 7

Langkah 3. Bagian "hanya bakso" berisi $20 - 8 = 12$ siswa dan bagian "hanya mie ayam" berisi $15 - 8 = 7$ siswa.

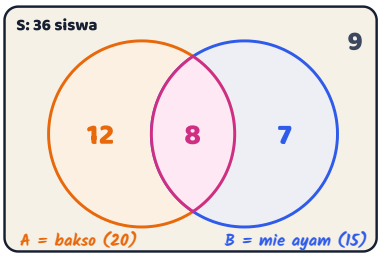


20 + 15 = 35? Keliru!
Irisan terhitung 2 kali.

n(A ∪ B) = 20 + 15 − 8 = 27

Bukan keduanya:
36 − 27 = 9

Langkah 4. Jika langsung menjumlahkan $20 + 15$, irisan terhitung dua kali. Kurangi sekali: $n(A \cup B) = 20 + 15 - 8 = 27$. Siswa di luar kedua lingkaran: $36 - 27 = 9$.



12 + 8 + 7 = 27 siswa
suka bakso atau mie ayam.

P(A ∪ B) = 27/36 = 3/4
= 20/36 + 15/36 − 8/36

Langkah 5. Jadi $P(A \cup B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$. Bagi setiap bilangan dengan 36 dan muncullah aturan penjumlahan peluang.

ATURAN PENJUMLAHAN PELUANG

Untuk sembarang dua kejadian A dan B dalam ruang sampel yang sama,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B$ berarti "A atau B (atau keduanya)", sedangkan $A \cap B$ berarti "A dan B sekaligus".

Bukti dengan membilang

Daerah $A \cup B$ terdiri atas tiga bagian yang tidak bertumpuk: hanya A, irisan, dan hanya B. Banyak anggota "hanya A" adalah $n(A) - n(A \cap B)$, dan "hanya B" adalah $n(B) - n(A \cap B)$. Jadi

$$n(A \cup B) = \big(n(A) - n(A \cap B)\big) + n(A \cap B) + \big(n(B) - n(A \cap B)\big) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Bagi kedua ruas dengan $n(S)$ dan diperoleh $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Aturan ini tetap berlaku untuk peluang dari percobaan, karena frekuensi relatif juga dibilang dengan cara yang sama.

RUMUS HIDUP

Aturan penjumlahan peluang

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jumlahkan peluang kedua kejadian, lalu kurangi peluang irisannya, karena irisan itu sudah terhitung dua kali.

- $P(A)$ Peluang A
- $P(B)$ Peluang B
- $P(A \cap B)$ Peluang A dan B sekaligus
- $P(A \cup B)$ Peluang A atau B



P(A) + P(B) = **0,97**. Irisan **0,22** ikut terhitung dua kali, jadi dikurangi sekali: hasilnya **0,75**. Jika hasil tampil '—', kombinasi angkanya mustahil: irisan tidak boleh lebih besar daripada P(A) atau P(B), dan P(A ∪ B) tidak boleh melebihi 1.

Cek satuan: Semua besaran adalah peluang, bilangan dari 0 sampai 1 tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PELUANG-GABUNGAN

KERJAKAN BERSAMA **Hati atau As**

Satu kartu diambil acak dari setumpuk kartu remi berisi 52 kartu (13 kartu hati dan 4 kartu As, termasuk As hati). Berapa peluang kartu yang terambil hati atau As?

1. $P(\text{hati}) = \frac{13}{52}$ dan $P(\text{As}) = \frac{4}{52}$.
2. As hati termasuk keduanya: $P(\text{hati} \cap \text{As}) = \frac{1}{52}$.
3. $P(\text{hati} \cup \text{As}) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

Peluangnya $\frac{4}{13}$. Tanpa dikurangi irisan, As hati akan terhitung dua kali dan jawabannya menjadi $\frac{17}{52}$ yang keliru.

33.4 Kejadian saling lepas dan saling bebas

Dua istilah ini sering tertukar, padahal artinya sangat berbeda. **Saling lepas** membicarakan apakah dua kejadian bisa terjadi *bersamaan*. **Saling bebas** membicarakan apakah terjadinya satu kejadian *mengubah peluang* kejadian lain.

DEFINISI

- A dan B **saling lepas** jika keduanya tidak mungkin terjadi bersamaan: $A \cap B = \varnothing$. Akibatnya $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- A dan B **saling bebas** jika terjadinya yang satu tidak memengaruhi peluang yang lain. Syaratnya: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Bahasa sederhana · Contoh saling lepas: dalam satu lemparan dadu, "muncul 2" dan "muncul 5" tidak mungkin terjadi bersamaan. Contoh saling bebas: hasil lemparan koin dan hasil lemparan dadu tidak saling memengaruhi, karena koin tidak tahu apa yang dilakukan dadu.

ATURAN PERKALIAN UNTUK KEJADIAN SALING BEBAS

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ saling bebas, maka peluang semuanya terjadi adalah

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(\text{}$$

Gabungkan dengan komplemen untuk kejadian "paling sedikit satu kali": $P(\text{paling sedikit sekali}) = 1 - P(\text{tidak pernah})$.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Saling lepas tidak sama dengan saling bebas. Jika A dan B saling lepas dan peluang keduanya positif, keduanya justru **tidak bebas**: begitu A terjadi, peluang B langsung menjadi 0. Kejadian "muncul 2" dan "muncul 5" pada satu dadu saling lepas, tetapi sangat bergantung satu sama lain.

KERJAKAN BERSAMA **Akhir pekan tanpa hujan?**

Prakiraan cuaca menyebut peluang hujan pada hari Sabtu 0,3 dan pada hari Minggu 0,4. Anggap cuaca kedua hari itu saling bebas. Berapa peluang akhir pekan sama sekali tidak hujan? Berapa peluang paling sedikit satu hari hujan?

1. Peluang Sabtu kering $= 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ dan Minggu kering $= 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
2. Saling bebas, jadi kalikan: $P(\text{dua hari kering}) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.
3. Komplemennya: $P(\text{paling sedikit satu hari hujan}) = 1 - 0{,}42 = 0{,}58$.

Peluang akhir pekan kering 0,42, dan peluang paling sedikit sehari hujan 0,58. Perhatikan: bukan $0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$, karena hujan Sabtu dan hujan Minggu bisa terjadi bersamaan.

Tebak Dulu!

Sebuah dadu dilempar 4 kali. Berapa kira-kira peluang muncul mata 6 paling sedikit sekali?

- $\frac{4}{6} \approx 0{,}67$, karena setiap lemparan menyumbang $\frac{1}{6}$.
- Tepat $\frac{1}{2}$.
- Sedikit di atas setengah, sekitar 0,52.
- $\frac{1}{6}$, karena dadunya sama saja.

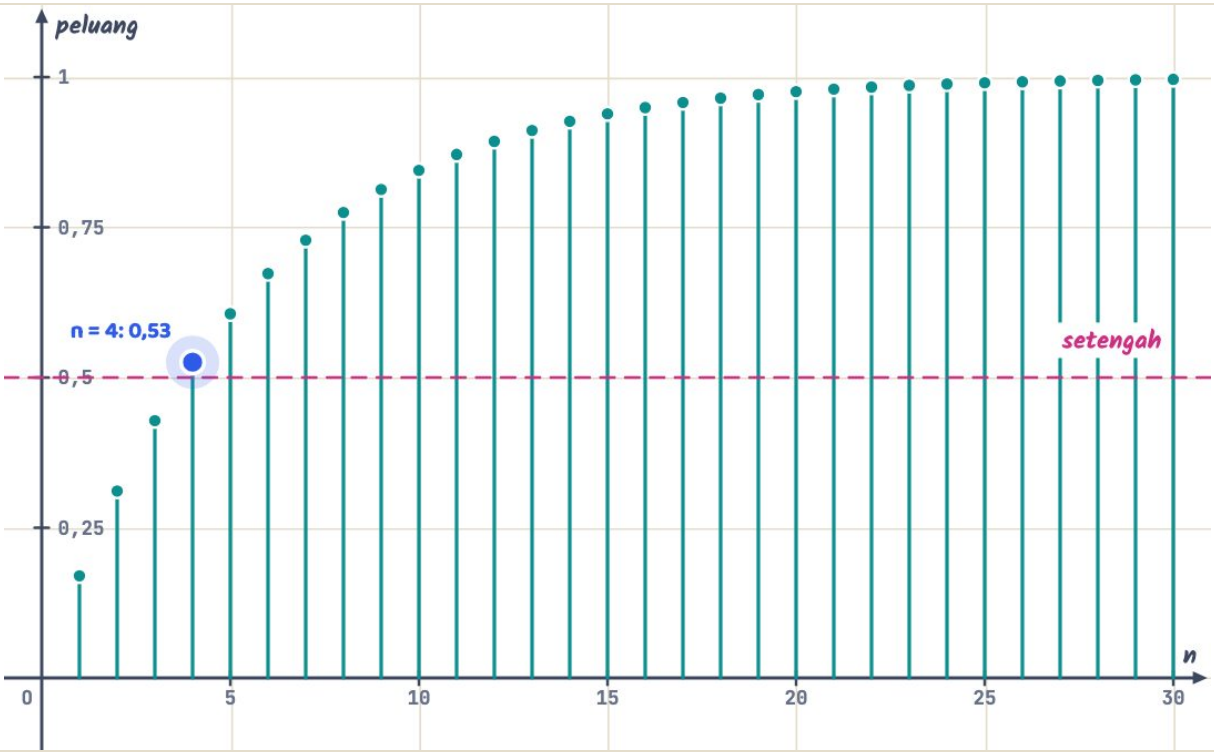
Jawabannya: sekitar 0,52. Peluang tidak pernah muncul 6 dalam 4 lemparan adalah $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}48$. Komplemennya $1 - 0{,}48 \approx 0{,}52$. Menjumlahkan $\frac{1}{6}$ empat kali keliru karena kejadian "6 pada lemparan ke-1", "6 pada lemparan ke-2", dan seterusnya tidak saling lepas. Kalau dadu dilempar 7 kali, cara menjumlahkan akan menghasilkan $\frac{7}{6} > 1$, padahal peluang tidak pernah melebihi 1!

GRAFIK HIDUP **Paling sedikit sekali berhasil**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33

$$P(\text{paling sedikit sekali dalam } n \text{ kali}) = 1 - (1 - p)^n$$

$$1 - (1 - 0{,}17)^4 = 0{,}53$$



🎲 p ≈ 1/6: seperti menunggu mata 6 pada dadu

☑ peluangnya sudah lebih dari setengah

P(paling sedikit sekali)	P(gagal terus)	n terkecil agar ≥ 50%
0,5254	0,4746	4

Seret titik biru atau geser slider n. Dengan $p \approx \frac{1}{6}$ (dadu), mulai lemparan ke berapa peluang muncul 6 paling sedikit sekali melewati setengah? Lalu ubah p menjadi 0,3 seperti peluang hujan harian: berapa peluang paling sedikit sekali hujan dalam seminggu ($n = 7$)?

33.5 Peluang bersyarat dan masalah tiga pintu

Informasi baru dapat mengubah peluang. Jika kamu tahu jumlah dua dadu adalah 8, ruang sampelnya menyusut dari 36 pasangan menjadi 5 pasangan saja: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2). Peluang yang dihitung **setelah** kita tahu bahwa B terjadi disebut **peluang bersyarat**.

DEFINISI: PELUANG BERSYARAT

Peluang A dengan syarat B telah terjadi (dibaca "peluang A jika diketahui B") adalah

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0.$$

Artinya: B menjadi ruang sampel yang baru, dan kita hanya melihat bagian A yang berada di dalam B.

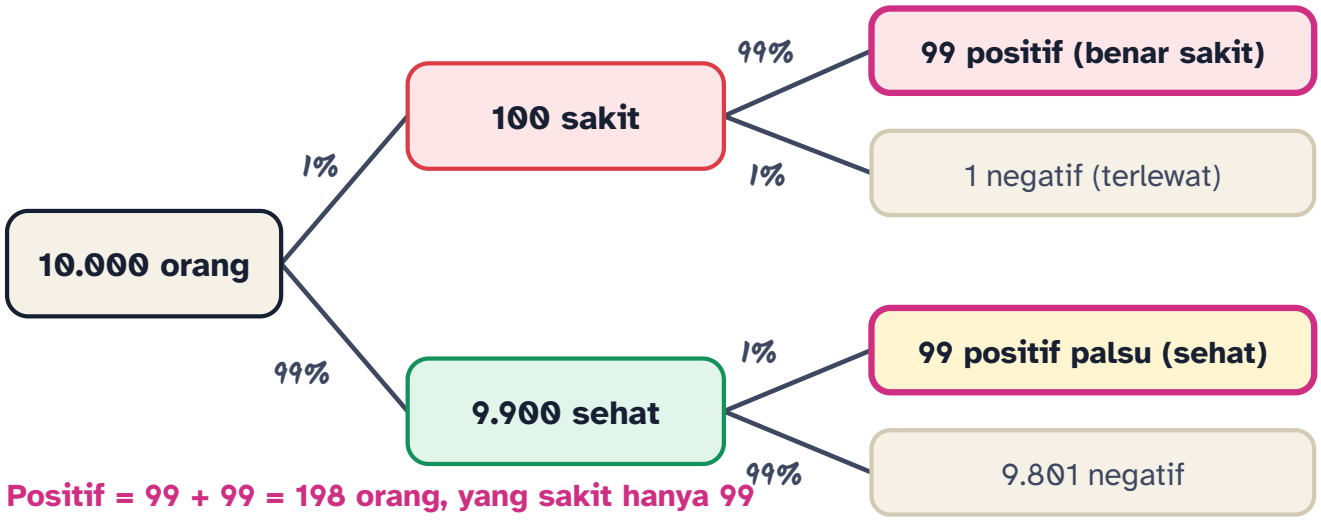
Contoh dengan data rekaan: sebuah kota mencatat prakiraan cuaca dan kenyataannya selama 100 hari.

	Benar hujan	Tidak hujan	Jumlah
Diprakirakan hujan	36	9	45
Diprakirakan cerah	6	49	55
Jumlah	42	58	100

$P(\text{hujan} \mid \text{diprakirakan hujan}) = \frac{36}{45} = 0{,}8$: jika prakiraan menyebut hujan, 8 dari 10 kali benar hujan. Sebaliknya, $P(\text{diprakirakan hujan} \mid \text{hujan}) = \frac{36}{42} \approx 0{,}86$. Kedua peluang itu memakai pembilang yang sama, tetapi penyebutnya berbeda.

AWAS JEBAKAN

$P(A \mid B)$ umumnya tidak sama dengan $P(B \mid A)$. "Hampir semua orang sakit mendapat hasil tes positif" tidak berarti "hampir semua orang yang hasil tesnya positif sedang sakit". Jika penyakitnya langka, banyak hasil positif justru berasal dari orang sehat (positif palsu).



Tes yang "99% akurat" untuk penyakit yang diidap 1% penduduk: dari 198 orang bertanda positif, hanya 99 yang benar-benar sakit, jadi $P(\text{sakit} \mid \text{positif}) = \frac{99}{198} = 50\%$.

Perhitungan pada pohon frekuensi itu sama dengan rumus berikut, yang dikenal sebagai aturan Bayes:

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{P(\text{sakit}) \cdot P(+ \mid \text{sakit})}{P(\text{sakit}) \cdot P(+ \mid \text{sakit}) + P(\text{sehat}) \cdot P}$$

RUMUS HIDUP

Arti hasil tes positif

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{r\,s}{r\,s + (1-r)(1-t)}$$

Dari semua orang yang hasil tesnya positif, berapa bagian yang benar-benar sakit? Bandingkan positif benar dengan seluruh hasil positif (benar ditambah palsu).

- r Prevalensi (bagian penduduk yang sakit)
- s Sensitivitas (sakit → positif)
- t Spesifisitas (sehat → negatif)
- $P(\text{sakit} \mid +)$ Peluang benar-benar sakit jika positif

PELUANG BENAR-BENAR SAKIT JIKA POSITIF

0,5

⚖️ **separuh hasil positif ternyata orang sehat**

Bayangkan 10.000 orang: sekitar **100** sakit dan **9.900** sehat. Positif benar ≈ **99** orang, positif palsu ≈ **99** orang. Jadi di antara orang yang positif, hanya sekitar **50**% yang benar-benar sakit.

Cek satuan: Semua besaran berupa peluang (0 sampai 1), tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TES-KESEHATAN

COBA SENDIRI **Tes cepat yang tampak akurat**

Sebuah tes cepat mendeteksi 95% orang yang sakit dan memberi hasil negatif pada 90% orang yang sehat. Penyakitnya diidap 2% penduduk. Jika hasil tes Pak Darto positif, berapa peluang ia benar-benar sakit?

1. Bayangkan 10.000 orang: 200 sakit dan 9.800 sehat.
2. Positif benar: $95\% \times 200 = 190$. Positif palsu: $10\% \times 9.800 = 980$.
3. $P(\text{sakit} \mid +) = \dfrac{190}{190 + 980} = \dfrac{190}{1.170} \approx 0{,}162.$

Hanya sekitar 16%! Karena itu dokter biasanya meminta tes kedua yang lebih teliti untuk memastikan hasil positif.

MATEMATIKA NUSANTARA

Arisan ibu-ibu RT adalah contoh peluang bersyarat yang adil. Misalkan ada 10 anggota dan setiap bulan satu gulungan nama dikocok dari gelas; yang sudah keluar tidak ikut dikocok lagi. Peluang namamu keluar **tepat pada bulan ketiga**: tidak keluar di bulan pertama $\left(\frac{9}{10}\right)$, tidak keluar di bulan kedua $\left(\frac{8}{9}\right)$, lalu keluar di bulan ketiga $\left(\frac{1}{8}\right)$. Hasil kalinya $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$. Hitung untuk bulan mana pun, hasilnya selalu $\frac{1}{10}$. Semua anggota punya peluang yang sama untuk mendapat giliran di bulan berapa pun. Hal yang sama berlaku untuk undian doorprize 17-an: tidak ada untungnya berebut mengambil kupon lebih dulu.

Sekarang tantangan paling terkenal dalam peluang bersyarat. Dalam lomba 17-an, ada tiga pintu. Di balik satu pintu ada sepeda, di balik dua pintu lainnya ada sandal jepit. Kamu memilih satu pintu. Kak Lintang, pembawa acara yang **tahu** letak sepeda, lalu membuka salah satu pintu lain yang berisi sandal jepit, kemudian bertanya: "Mau tetap, atau pindah ke pintu yang masih tertutup?"

Tebak Dulu!

Apa yang sebaiknya kamu lakukan?

Tetap, karena pilihan pertama biasanya benar.

Terserah, karena sekarang peluangnya 50:50.

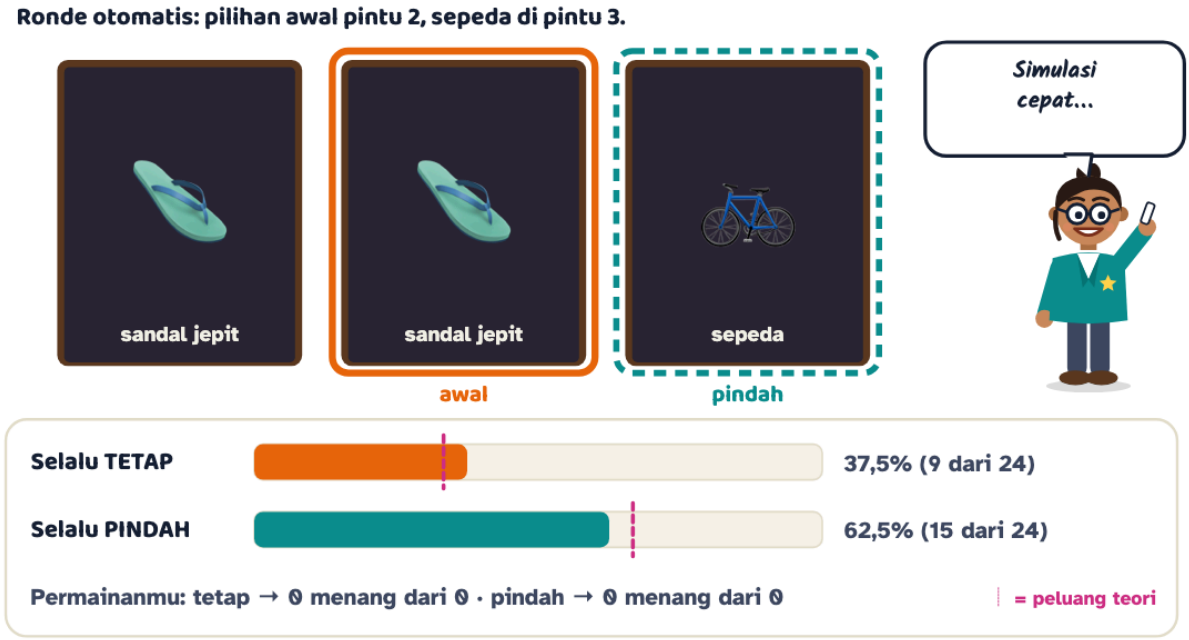
Pindah, karena peluang menangnya menjadi $\frac{2}{3}$.

Tidak bisa ditentukan tanpa melihat isi pintu.

Jawabannya: pindah! Pilihan pertamamu benar dengan peluang $\frac{1}{3}$ saja, dan peluang itu tidak berubah karena Kak Lintang *selalu* bisa membuka pintu bersandal. Dengan peluang $\frac{2}{3}$ pilihan pertamamu salah, dan dalam kasus itu Kak Lintang terpaksa menyisakan pintu bersepeda. Jadi pindah menang $\frac{2}{3}$ dari seluruh permainan. Tidak percaya? Mainkan di lab berikut.

LAB MINI Tiga pintu hadiah: tetap atau pindah?

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33



Ronde otomatis	Menang jika selalu TETAP	Menang jika selalu PINDAH	Teori (tetap : pindah)
24	37,5 %	62,5 %	1/3 : 2/3

Klik sebuah pintu, lihat Kak Lintang membuka pintu bersandal, lalu klik pintu pilihanmu (**tetap**) atau pintu tertutup lainnya (**pindah**). Mainkan 10 ronde dengan tangan, lalu tekan ▶ **Jalankan** atau ⚡ **+1.000 ronde** untuk membandingkan kedua strategi. Coba juga 10 pintu: Kak Lintang membuka 8 pintu kosong. Masih ragu untuk pindah?

Bukti dengan tabel: semua kemungkinan letak sepeda

Misalkan kamu memilih pintu 1 (pilihan lain berjalan sama persis). Letak sepeda sama mungkin di pintu 1, 2, atau 3.

Sepeda di	Kak Lintang membuka	Jika tetap (pintu 1)	Jika pindah
pintu 1	pintu 2 atau 3	menang 🚲	kalah
pintu 2	pintu 3 (terpaksa)	kalah	menang 🚲
pintu 3	pintu 2 (terpaksa)	kalah	menang 🚲

Tetap menang di 1 dari 3 kasus yang sama mungkin, sedangkan pindah menang di 2 dari 3 kasus. Jadi $P(\text{menang} \mid \text{tetap}) = \frac{1}{3}$ dan $P(\text{menang} \mid \text{pindah}) = \frac{2}{3}$. Kuncinya: pembawa acara **tahu** letak hadiah. Jika ia membuka pintu secara asal dan kebetulan berisi sandal, peluangnya memang menjadi 50:50.

CERITA DI BALIK TIGA PINTU

Masalah ini dinamai dari Monty Hall, pembawa acara kuis televisi di Amerika Serikat. Pada tahun 1990, kolumnis Marilyn vos Savant menulis bahwa pemain sebaiknya pindah. Ribuan pembaca, termasuk banyak yang bergelar doktor, mengirim surat dan menyatakan ia keliru. Konon, matematikawan besar Paul Erdős pun baru yakin setelah melihat hasil simulasi komputer. Ternyata Marilyn benar!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

ATURAN BAYES DAN PELUANG TOTAL

Jika $B_1, B_2, \ldots, B_k$ saling lepas dan gabungannya seluruh ruang sampel, maka untuk kejadian A berlaku **aturan peluang total** $P(A) = \sum_i P(A \mid B_i)\,P(B_i)$ dan **aturan Bayes**

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)\,P(B_j)}{\sum_i P(A \mid B_i)\,P(B_i)}.$$

Bayes "membalik" arah syarat: dari $P(+ \mid \text{sakit})$ yang diketahui pabrik pembuat tes, kita memperoleh $P(\text{sakit} \mid +)$ yang dibutuhkan pasien. Pada masalah tiga pintu, misalkan kamu memilih pintu 1 dan pembawa acara membuka pintu 3. Peluang ia membuka pintu 3 adalah $\frac{1}{2}$ jika sepeda di pintu 1, 1 jika sepeda di pintu 2, dan 0 jika sepeda di pintu 3. Bayes memberi $P(\text{sepeda di } 2 \mid \text{buka } 3) = \dfrac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0} = \frac{2}{3}$.

MITOS

"Setelah satu pintu kosong dibuka, tinggal dua pintu, jadi peluangnya pasti 50:50."

FAKTA

Pembawa acara **tahu** letak hadiah dan sengaja membuka pintu kosong. Informasi itu membuat pintu tertutup yang tersisa berpeluang $\frac{2}{3}$. Dua pilihan belum tentu sama mungkin.

MITOS

"Hanya ada dua kemungkinan, lulus atau tidak, jadi peluang lulus $\frac{1}{2}$."

FAKTA

Banyaknya kemungkinan tidak sama dengan peluang. Rumus $n(A)/n(S)$ hanya berlaku jika semua hasil sama mungkin. Peluang lulus bergantung pada persiapanmu, bukan pada banyaknya pilihan.

MITOS

"Ramalan 'peluang hujan 70%' salah kalau ternyata hari itu cerah."

FAKTA

Peluang 70% berarti: dari banyak hari dengan keadaan cuaca serupa, sekitar 7 dari 10 hari turun hujan. Hari cerah termasuk 3 dari 10 sisanya. Ramalan peluang dinilai dari ketepatannya dalam jangka panjang.

33.6 Nilai harapan dan permainan adil

Dimas dan Ayu bermain di pos ronda: dua dadu dilempar. Jika jumlahnya 7, Dimas mendapat 3 poin dari Ayu. Jika tidak, Ayu mendapat 1 poin dari Dimas. Kedengarannya Dimas untung karena hadiahnya lebih besar. Benarkah? Untuk menjawabnya, kita butuh **rata-rata jangka panjang**.

DEFINISI: NILAI HARAPAN

Jika sebuah permainan atau percobaan menghasilkan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dengan peluang $p_1, p_2, \ldots, p_k$, maka **nilai harapan**nya adalah

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k = \sum x_i\, p_i.$$

Nilai harapan adalah rata-rata hasil per percobaan jika percobaan itu diulang sangat banyak kali. Sebuah permainan disebut **permainan adil** jika nilai harapan keuntungan setiap pemain sama dengan 0.

Untuk Dimas: $E = \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{5}{6}\cdot(-1) = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{3}$. Rata-rata Dimas **kehilangan** sepertiga poin setiap kali bermain. Hadiah besar belum tentu menguntungkan jika peluangnya kecil.

Bahasa sederhana · Cara mudah membayangkannya: mainkan 60 kali. Jumlah 7 muncul sekitar 10 kali (Dimas dapat $10 \times 3 = 30$ poin), dan bukan 7 sekitar 50 kali (Dimas kehilangan 50 poin). Akhirnya Dimas rugi sekitar 20 poin, yaitu $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ poin per permainan.

RUMUS HIDUP

Nilai harapan permainan menang-kalah

$$E = p \cdot a - (1 - p) \cdot b$$

Kalikan setiap hasil dengan peluangnya, lalu jumlahkan. Permainan adil jika nilai harapannya nol.

- p Peluang menang
- a Poin yang didapat jika menang `poin`
- b Poin yang hilang jika kalah `poin`
- E Nilai harapan `poin per permainan`

NILAI HARAPAN

0

`poin per permainan`

⚖️ **permainan adil**

Dalam 100 permainan, kamu kira-kira menang **25** kali (mendapat **75** poin) dan kalah **75** kali (kehilangan **75** poin). Totalnya sekitar **0** poin, atau rata-rata **0** poin per permainan. Agar adil dengan peluang dan poin kalah ini, poin menang seharusnya **3** (tampil '—' jika peluang menang 0, karena berapa pun hadiahnya tidak akan pernah didapat).

Cek satuan: Nilai harapan bersatuan sama dengan skornya (poin).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-NILAI-HARAPAN

COBA SENDIRI **Membuat permainan dadu yang adil**

Dimas ingin mengubah aturan main tadi agar adil. Jika jumlah dua dadu 7, Dimas mendapat x poin dari Ayu; jika tidak, Ayu mendapat 1 poin dari Dimas. Berapa x?

1. $P(\text{jumlah } 7) = \frac{1}{6}$ dan $P(\text{bukan } 7) = \frac{5}{6}$.
2. Nilai harapan keuntungan Dimas: $E = \frac{1}{6}x - \frac{5}{6} \cdot 1$.
3. Adil berarti $E = 0$: $\frac{1}{6}x = \frac{5}{6}$, jadi $x = 5$.

Hadiahnya harus 5 poin. Dalam permainan adil, perbandingan hadiah sama dengan kebalikan perbandingan peluang: peluang 1 : 5, hadiah 5 : 1.



TAMU DARI MASA LALU

Teori peluang modern lahir dari surat-menyurat Blaise Pascal dan Pierre de Fermat pada tahun 1654. Seorang bangsawan Prancis, Chevalier de Méré, bertanya bagaimana membagi hadiah secara adil jika sebuah permainan dihentikan sebelum ada pemenangnya. Jawaban mereka: bagilah hadiah sesuai peluang setiap pemain untuk menang seandainya permainan dilanjutkan. Inilah gagasan nilai harapan. De Méré juga heran mengapa "paling sedikit satu mata 6 dalam 4 lemparan satu dadu" (±0,518) sedikit lebih mungkin daripada "paling sedikit satu pasangan 6–6 dalam 24 lemparan dua dadu" (±0,491). Kamu sekarang bisa menghitung keduanya dengan komplemen!



Prakiraan cuaca BMKG

Peluang hujan dihitung dari model cuaca dan data bertahun-tahun. Nelayan dan petani memakainya untuk memutuskan kapan melaut atau mulai menanam.



Tes kesehatan

Dokter menafsirkan hasil tes dengan peluang bersyarat. Hasil positif pada penyakit langka biasanya dipastikan dengan tes kedua.



Undian doorprize 17-an

Jika kupon dikocok dengan baik, setiap kupon punya peluang sama, tidak peduli diambil pertama atau terakhir.

Pewarisan sifat

Hukum Mendel memakai diagram pohon: dua orang tua pembawa sifat resesif berpeluang $\frac{1}{4}$ menurunkan sifat itu kepada setiap anaknya.

Kendali mutu pabrik

Pabrik memeriksa sampel acak untuk menaksir peluang produk cacat tanpa harus membuka setiap kemasan.

33.7 Kejutan peluang: ulang tahun kembar dan peluang geometris

Intuisi kita sering meleset jauh dalam urusan peluang. Contoh paling terkenal adalah pertanyaan tentang hari ulang tahun.

Tebak Dulu!

Di sebuah kelas ada 23 siswa. Berapa kira-kira peluang ada paling sedikit dua siswa yang berulang tahun pada hari yang sama (tanggal dan bulan)?

- Sekitar 6%, karena $\frac{23}{365} \approx 0{,}06$.
- Sekitar 25%.
- Sedikit lebih dari 50%.
- 100%, pasti ada.

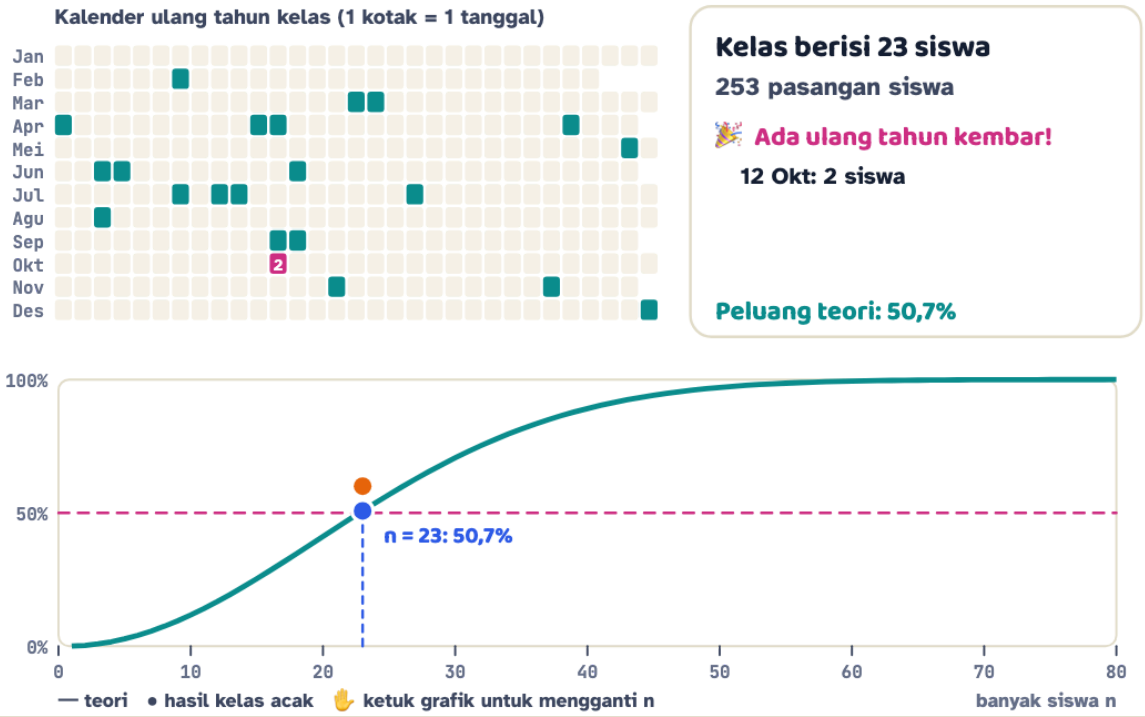
Jawabannya: sekitar 50,7%. Kuncinya: yang dibandingkan bukan 23 orang, tetapi **pasangan** orang. Dari 23 siswa dapat dibentuk $\binom{23}{2} = 253$ pasangan, dan setiap pasangan bisa saja kembar ulang tahun. Dengan 57 siswa, peluangnya sudah sekitar 99%!

Hitung lewat komplemen: peluang semua ulang tahun **berbeda**. Siswa kedua harus menghindari 1 hari, siswa ketiga menghindari 2 hari, dan seterusnya (anggap setahun 365 hari dan setiap hari sama mungkin):

$$P(\text{ada yang kembar}) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - }{3($$

LAB MINI Paradoks ulang tahun: kelas acak

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33



Banyak pasangan siswa	Peluang ada yang kembar (teori)	Kelas acak dicoba
253	50,7 %	10

Kelas yang punya kembar
60 %

Atur banyak siswa, lalu tekan **Satu kelas acak**. Kotak magenta menandai tanggal yang dimiliki dua siswa atau lebih. Tekan ▶ **Jalankan** untuk mencoba kelas acak terus-menerus, lalu bandingkan persentase kelas yang punya ulang tahun kembar dengan kurva teori. Kamu juga bisa mengetuk atau menyeret grafik di bawah untuk mengganti banyak siswa.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA 23 CUKUP?

Dengan ketaksamaan $1 - x \le e^{-x}$, peluang semua berbeda memenuhi

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{365}\right) \le e^{-(0+1+\cdots+(n-1))/365} = e^{-n(n-1)/730}.$$

Agar peluang ada yang kembar melewati $\frac{1}{2}$, cukup $\frac{n(n-1)}{730} > \ln 2 \approx 0{,}693$, yaitu $n(n-1) > 506$. Untuk $n = 23$, $n(n-1) = 506$ dan $\frac{506}{730} \approx 0{,}693151$ masih sedikit lebih besar daripada $\ln 2 \approx 0{,}693147$. Secara umum, kembaran mulai sering muncul jika n sekitar $\sqrt{365}$, bukan sekitar $365/2$. Gagasan yang sama dipakai para ahli keamanan komputer untuk menilai kekuatan kode acak.

Peluang juga bisa dihitung dengan **luas**. Jika hasil percobaan adalah sebuah titik yang dipilih acak dari suatu daerah, peluang titik itu jatuh di bagian tertentu sama dengan perbandingan luasnya. Inilah **peluang geometris**.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

JANJIAN DI MONAS

Dimas dan Ayu berjanji bertemu di Monas antara pukul 16.00 dan 17.00. Masing-masing datang pada saat acak dan menunggu paling lama 15 menit. Tulis waktu kedatangan (dalam menit setelah 16.00) sebagai titik (x, y) pada persegi 60×60. Mereka bertemu jika $|x - y| \le 15$, yaitu pita di sepanjang diagonal persegi. Daerah sisanya berupa dua segitiga siku-siku sama kaki dengan kaki $60 - 15 = 45$, luas totalnya $45^2 = 2.025$. Jadi

$$P(\text{bertemu}) = 1 - \frac{2.025}{3.600} = 1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \approx 0{,}44.$$

Ternyata lebih besar kemungkinan mereka *tidak* bertemu. Jika waktu tunggunya 30 menit, peluang bertemu naik menjadi $1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$.

Cek Cepat

Satu huruf dipilih acak dari kata MATEMATIKA. Peluang terpilih huruf A adalah...

- $\frac{1}{10}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{3}{10}$
- $\frac{1}{3}$

Kejadian A dan B saling lepas dengan $P(A) = 0{,}3$ dan $P(B) = 0{,}5$. Nilai $P(A \cup B)$ adalah...

- 0,15
- 0,8
- 0,65
- 0,2

Sebuah koin seimbang sudah menghasilkan Angka 4 kali berturut-turut. Peluang lemparan kelima menghasilkan Angka adalah...

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{32}$
- lebih kecil daripada $\frac{1}{2}$
- lebih besar daripada $\frac{1}{2}$

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. B · 3. A

Tantangan Rumah: peluang rahasia tutup botol

Bahan: 1 tutup botol plastik, buku catatan, pensil, kalkulator atau HP.

1. Tebak dulu dan tulis tebakanmu: tutup botol lebih sering mendarat telentang (lubang di atas) atau telungkup?
2. Jatuhkan tutup botol dari ketinggian sekitar 30 cm ke lantai sebanyak 50 kali. Catat setiap hasil dengan turus.
3. Hitung frekuensi relatif telentang setelah 10, 20, 30, 40, dan 50 lemparan. Gambarlah grafiknya seperti di Lab Mini.
4. Gabungkan datamu dengan data 4 teman atau anggota keluarga yang memakai tutup botol sejenis, sehingga ada sekitar 250 lemparan.
5. Ulangi percobaan dengan tutup botol yang bentuknya berbeda (misalnya tutup botol kecap atau tutup galon kecil).

Pertanyaan: Berapa taksiranmu untuk peluang tutup botol mendarat telentang? Mengapa peluang ini tidak bisa dihitung dengan rumus $n(A)/n(S)$? Bagaimana grafik frekuensi relatifmu berubah ketika datanya digabungkan?

RINGKASAN KILAT

Bab 33 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menyusun **ruang sampel** dan menghitung **peluang klasik** suatu kejadian
- menaksir peluang dari **percobaan** dan menjelaskan mengapa frekuensi relatif makin dekat ke peluang teoretis
- memakai **diagram pohon**, **diagram Venn**, aturan penjumlahan, dan aturan perkalian
- membedakan kejadian **saling lepas** dan **saling bebas**, serta menghitung **peluang bersyarat**

- menghitung **nilai harapan** dan menilai apakah sebuah permainan adil

Istilah kunci

percobaan · ruang sampel · titik sampel · kejadian · peluang · Komplemen · frekuensi relatif · frekuensi harapan · hukum bilangan besar · diagram pohon · diagram Venn · saling lepas · saling bebas · peluang bersyarat · nilai harapan · permainan adil

Rumus penting

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aturan penjumlahan peluang. Jumlahkan peluang kedua kejadian, lalu kurangi peluang irisannya, karena irisan itu sudah terhitung dua kali.

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{r\,s}{r\,s + (1-r)(1-t)}$$

Arti hasil tes positif. Dari semua orang yang hasil tesnya positif, berapa bagian yang benar-benar sakit? Bandingkan positif benar dengan seluruh hasil positif (benar ditambah palsu).

$$E = p \cdot a - (1-p) \cdot b$$

Nilai harapan permainan menang-kalah. Kalikan setiap hasil dengan peluangnya, lalu jumlahkan. Permainan adil jika nilai harapannya nol.

Jangan sampai terjebak

- Hasil yang mungkin belum tentu sama mungkin.
- Koin tidak punya ingatan.
- Saling lepas tidak sama dengan saling bebas.

Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=33

Teka-teki untuk Bab 34

Lempar 10 koin sekaligus dan catat banyaknya Gambar. Ulangi 1.000 kali, lalu buat diagram batang dari hasilnya. Bentuknya akan menyerupai lonceng, mirip sekali dengan histogram tinggi badan siswa di sekolahmu! Berapa peluang muncul tepat 5 Gambar? Dan mengapa begitu banyak data di alam, dari tinggi badan sampai berat beras dalam kemasan, membentuk lonceng?

▼ Intip petunjuk

Banyak susunan 10 koin dengan tepat 5 Gambar adalah $\binom{10}{5} = 252$ dari $2^{10} = 1.024$ susunan yang sama mungkin, jadi peluangnya $\frac{252}{1024} \approx 24{,}6\%$. Bab 34 membahas distribusi binomial, papan Galton, dan kurva normal yang berbentuk lonceng.

34 Distribusi Peluang: Rahasia Kurva Lonceng

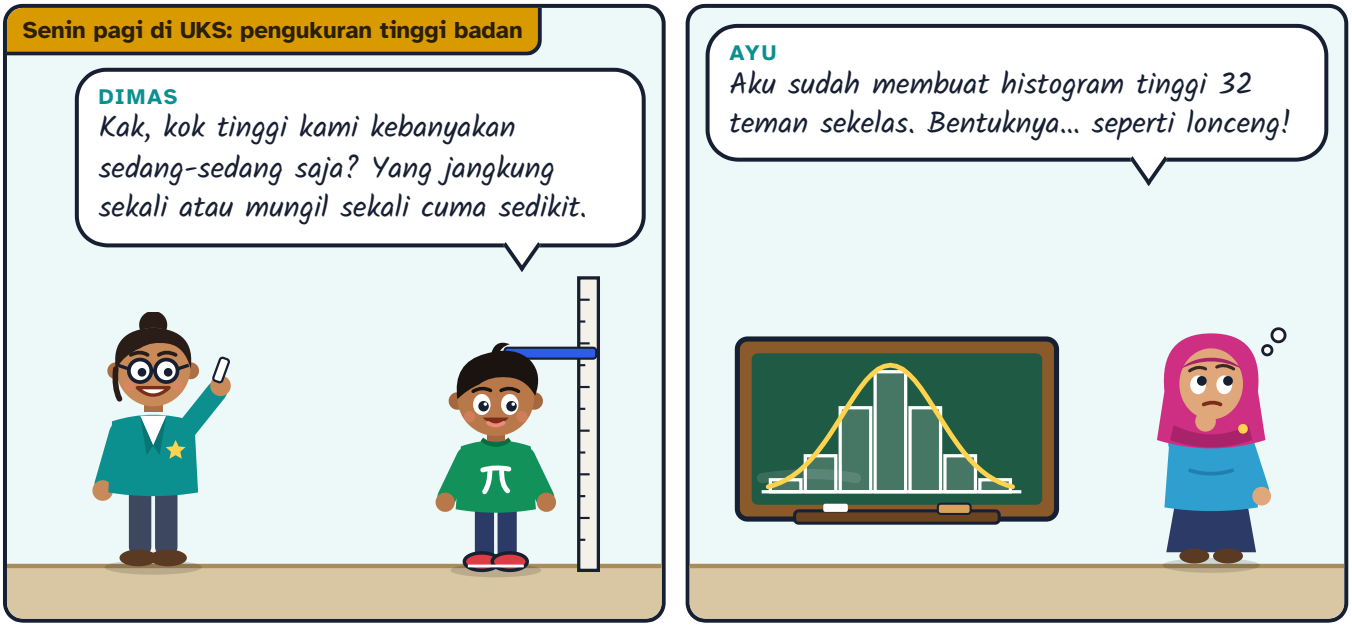
Mengapa kelereng yang dijatuhkan sembarangan di papan berpaku selalu menumpuk membentuk lonceng? Mengapa maskapai berani menjual tiket lebih banyak daripada jumlah kursinya? Dua bintang statistika, distribusi binomial dan distribusi normal, siap menjawabnya.

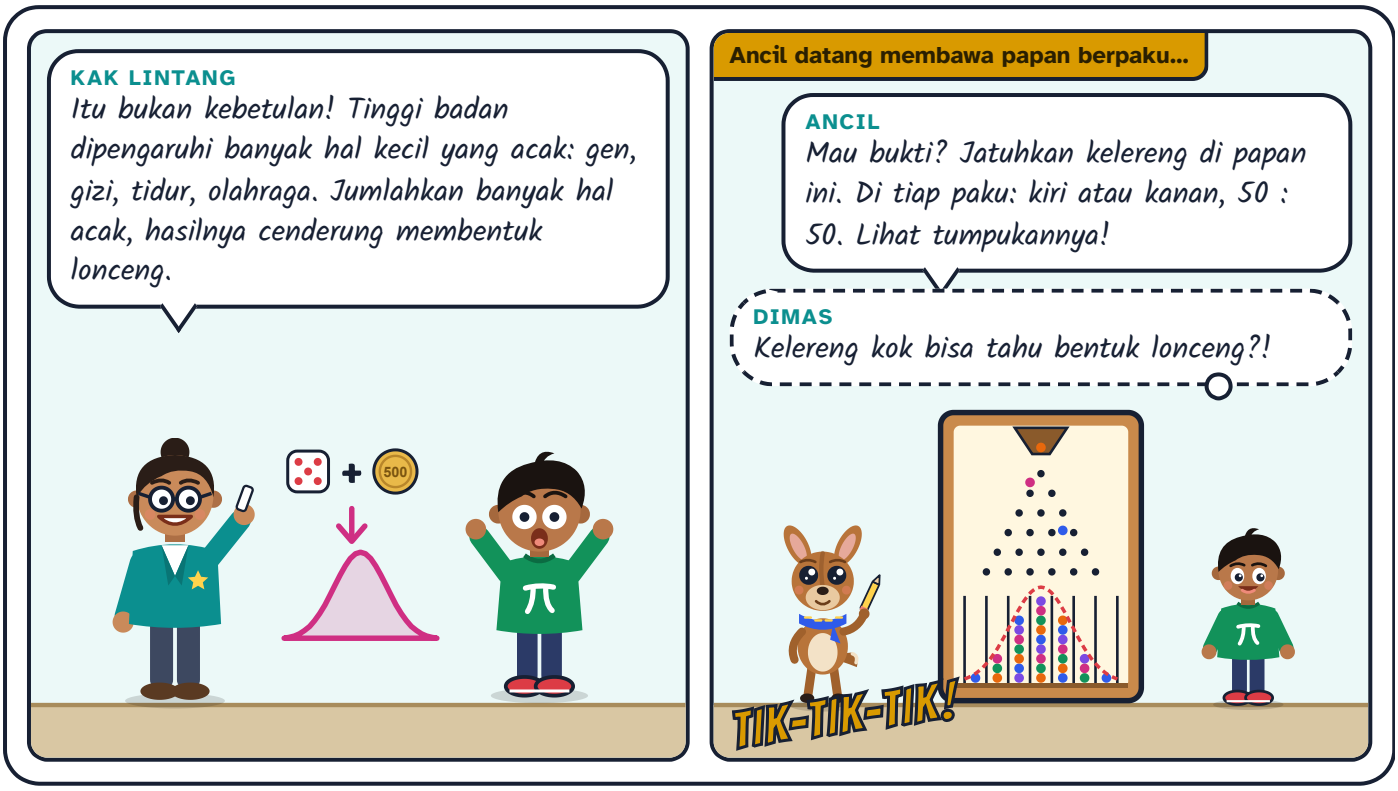
Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan **variabel acak diskret**, menyusun tabel distribusi peluangnya, dan menghitung **nilai harapan** serta varians;
- mengenali **percobaan binomial** dan menghitung $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$;
- menghitung **rataan** np dan **simpangan baku** $\sqrt{np(1-p)}$ distribusi binomial;
- membaca **kurva normal**, memakai aturan 68–95–99,7, dan mengubah data menjadi **skor z** untuk menghitung peluang;
- menjelaskan mengapa papan Galton dan binomial dengan n besar menghasilkan kurva lonceng (**aproksimasi normal**).

LONCENG DI RUANG UKS

KOMIK · 4 PANEL





Di akhir Bab 33 ada teka-teki: *apakah tinggi badan siswa membentuk lonceng?* Jawabannya: ya, hampir selalu! Untuk memahami alasannya, kita perlu cara baru memandang peluang. Bukan lagi "berapa peluang satu kejadian", melainkan "bagaimana peluang **tersebar** ke semua hasil yang mungkin". Sebaran inilah yang disebut **distribusi peluang**.

Tebak Dulu!

Sebutir kelereng dijatuhkan di papan Galton dengan 10 baris paku. Di setiap paku, kelereng memantul ke kiri atau ke kanan dengan peluang sama. Di laci mana kelereng itu paling mungkin mendarat?

- Di laci paling kiri atau paling kanan, karena kelereng cenderung terus memantul ke satu arah.
- Semua laci sama besar peluangnya, karena setiap pantulan adil.
- Di laci tengah, karena paling banyak jalur yang menuju ke sana.
- Tidak bisa diduga sama sekali.

Jawabannya: laci tengah. Setiap pantulan memang adil, tetapi laci-lacinya tidak! Ke laci paling kiri hanya ada 1 jalur (kiri terus 10 kali), peluangnya $\frac{1}{1024}$, kurang dari 0,1%. Ke laci tengah ada $\binom{10}{5} = 252$ jalur, peluangnya $\frac{252}{1024} \approx 24{,}6\%$. Banyaknya jalur inilah rahasia bentuk lonceng.

34.1 Variabel acak: memberi angka pada hasil acak

Saat tiga koin dilempar, kita jarang peduli urutannya (AGA atau GAA, dengan A = angka dan G = gambar). Yang biasanya ditanyakan: **berapa banyak angka** yang muncul? Aturan yang memberi sebuah bilangan pada setiap hasil percobaan acak disebut **variabel acak**, biasanya ditulis dengan huruf kapital seperti X.

DEFINISI

Variabel acak X disebut **diskret** jika nilai-nilainya dapat dicacah satu per satu, misalnya 0, 1, 2, 3. Daftar semua nilai x beserta peluangnya $P(X = x)$ disebut **distribusi peluang** X. Syaratnya ada dua: setiap $P(X = x) \geq 0$, dan jumlah semua peluang $\sum P(X = x) = 1$.

Banyak angka, x	**0**	**1**	**2**	**3**
Hasil yang cocok	GGG	AGG, GAG, GGA	AAG, AGA, GAA	AAA
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Bahasa sederhana · Gampangnya, variabel acak itu seperti **papan skor**. Percobaannya acak (koin dilempar), tetapi setiap hasil langsung diberi angka. Tabel distribusi peluang memberi tahu seberapa sering setiap angka diharapkan muncul. Jumlah semua peluangnya selalu 1, karena pasti ada satu hasil yang terjadi.

Variabel seperti tinggi badan, berat beras, atau waktu tempuh ojek berbeda: nilainya bisa berupa bilangan desimal apa saja dalam suatu rentang. Variabel seperti itu disebut **kontinu**, dan kita akan bertemu dengannya di Subbab 34.4.

NILAI HARAPAN DAN VARIANS

Untuk variabel acak diskret X:

$$\mu = E(X) = \sum x\, P(X = x), \qquad \mathrm{Var}(X) = \sum$$

Nilai harapan $E(X)$ adalah rata-rata jangka panjang jika percobaan diulang berkali-kali. Simpangan bakunya $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ mengukur seberapa jauh hasil biasanya menyebar dari rata-rata itu.

CONTOH **Tiga koin dan nilai harapannya**

Tiga koin dilempar dan X = banyak angka. Hitung $E(X)$ dan simpangan baku X.

1. Pakai tabel di atas: $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$.
2. $E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$.
3. $\mathrm{Var}(X) = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$, jadi $\sigma = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$.

Rata-ratanya 1,5 angka dengan simpangan baku ±0,87. Masuk akal: setengah dari 3 koin, dan hasilnya biasanya 1 atau 2.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Nilai harapan tidak harus berupa nilai yang bisa muncul. Tiga koin tidak pernah menghasilkan "1,5 angka"! $E(X) = 1{,}5$ artinya: jika kamu melempar tiga koin seribu kali, rata-rata banyak angkanya akan sangat dekat dengan 1,5.

34.2 Distribusi binomial: sukses berulang kali

Banyak peristiwa sehari-hari punya pola yang sama: satu percobaan dengan dua kemungkinan, **sukses** atau **gagal**, diulang beberapa kali. Menebak soal pilihan ganda (benar/salah), menanam benih cabai (tumbuh/tidak), menunggu penumpang di bandara (datang/batal). Yang ingin kita ketahui: berapa peluang mendapat tepat k sukses?

DEFINISI · PERCOBAAN BINOMIAL

Sebuah percobaan disebut **percobaan binomial** jika memenuhi empat syarat:

1. banyak percobaan **tetap**, yaitu n kali;
2. setiap percobaan hanya punya **dua** hasil: sukses atau gagal;
3. peluang sukses **sama** di setiap percobaan, yaitu p;
4. percobaan-percobaan itu saling **bebas**.

Jika X = banyak sukses, kita menulis $X \sim B(n, p)$ dan menyebut sebarannya **distribusi binomial**.

TRIK KAK LINTANG

Hafalkan syaratnya dengan kalimat "**T**im **D**imas **S**elalu **B**erani": banyak percobaan **T**etap, **D**ua hasil, peluang **S**ama, saling **B**ebas. Kalau satu saja tidak terpenuhi, rumus binomial tidak boleh dipakai.

Tebak Dulu!

Kamu melempar koin yang adil 10 kali. Berapa kira-kira peluang mendapat tepat 5 sisi angka?

50%, karena koinnya adil.

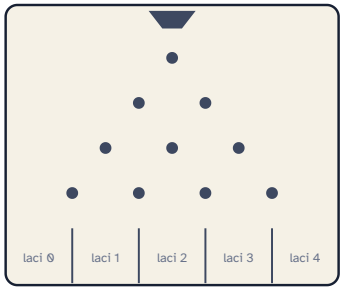
Hampir 100%, karena setengah dari 10 adalah 5.

Sekitar 25%.

Sekitar 5%.

Jawabannya: sekitar 25%. Tepatnya $\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 24{,}6\%$. Hasil "tepat 5" memang yang *paling* mungkin, tetapi ia hanya satu dari 11 kemungkinan (0 sampai 10 angka). Jadi lebih mungkin kamu **tidak** mendapat tepat 5 angka (sekitar 75%)!

Dari mana muncul $\binom{n}{k}$? Papan Galton menjawabnya tanpa banyak kata. Ikuti langkah-langkah di bawah.

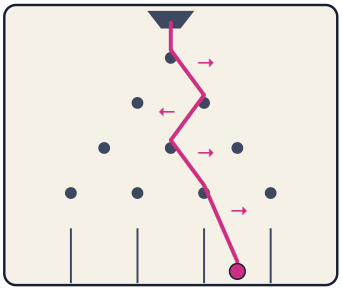


Papan Galton mini: 4 baris

Kelereng masuk dari atas. Di setiap paku ia memantul ke kiri atau ke kanan, masing-masing berpeluang ½.

Ke laci mana ia jatuh?

Langkah 1. Papan Galton mini dengan 4 baris paku. Di setiap paku, kelereng memantul ke kiri atau ke kanan dengan peluang $\frac{1}{2}$.



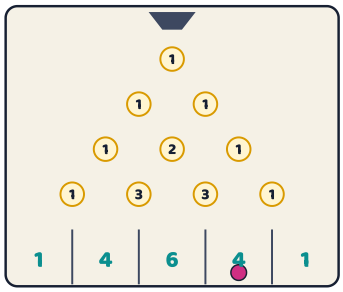
Satu jalur: → ← → →

Peluang jalur ini:

½ × ½ × ½ × ½ = 1/16

Ada 3 kali ke kanan, jadi kelereng jatuh di laci 3. (Laci bernomor 0 sampai 4.)

Langkah 2. Satu jalur, misalnya kanan–kiri–kanan–kanan, berpeluang $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Banyak pantulan ke kanan menentukan nomor laci: 3 kali ke kanan berarti laci 3.



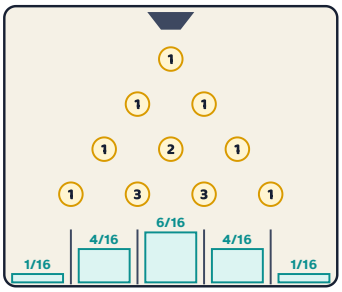
Hitung banyak jalur

Angka di setiap paku = jumlah dua angka tepat di atasnya.

Muncul segitiga Pascal!

Ke laci 0–4 ada 1, 4, 6, 4, 1 jalur, yaitu C(4, k).

Langkah 3. Banyak jalur menuju setiap paku sama dengan jumlah dua angka di atasnya. Muncullah segitiga Pascal: ke laci 0 sampai 4 ada 1, 4, 6, 4, 1 jalur, yaitu $\binom{4}{k}$.



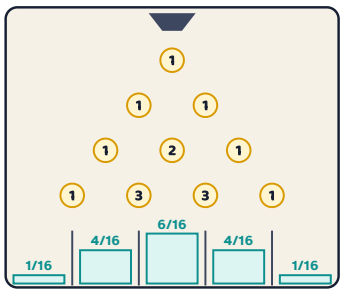
Tiap jalur berpeluang 1/16

Laci k menerima C(4, k) jalur, sehingga

P(X = k) = C(4, k) / 16

Laci tengah paling ramai: 6/16 = 37,5%.

Langkah 4. Karena setiap jalur berpeluang $\frac{1}{16}$, peluang jatuh di laci k adalah $\binom{4}{k}/16$. Tumpukannya sudah mulai berbentuk lonceng.



Rumus umum binomial

Satu jalur dengan k kali ke kanan berpeluang $p^k(1-p)^{n-k}$, dan ada C(n, k) jalur seperti itu.

Kalikan keduanya!

n baris, peluang ke kanan p:

$P(X = k) = C(n, k) \cdot p^k(1-p)^{n-k}$

Langkah 5. Secara umum, dengan n baris dan peluang ke kanan p: satu jalur dengan k kali ke kanan berpeluang $p^k(1-p)^{n-k}$, dan ada $\binom{n}{k}$ jalur seperti itu. Itulah rumus binomial!

RUMUS PELUANG BINOMIAL

Jika $X \sim B(n, p)$, maka untuk $k = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dengan $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ dari Bab 32. Dalam kata-kata: *banyak urutan* × *peluang satu urutan*.

Mengapa rumusnya begitu? (bukti singkat)

Tulis hasil n percobaan sebagai untaian huruf S (sukses) dan G (gagal), misalnya SGSSG. Karena percobaan saling bebas, peluang satu untaian dengan tepat k huruf S adalah hasil kali peluangnya: p sebanyak k kali dan $1-p$ sebanyak $n-k$ kali, yaitu $p^k(1-p)^{n-k}$.

Ada berapa untaian seperti itu? Sama dengan banyak cara memilih k posisi untuk huruf S dari n posisi: $\binom{n}{k}$. Untaian-untaian itu saling lepas (tidak mungkin terjadi bersamaan), jadi peluangnya dijumlahkan: $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Bonus: menurut Teorema Binomial, jumlah semua peluang itu $\big(p+(1-p)\big)^n = 1^n = 1$, persis seperti syarat distribusi peluang.

RUMUS HIDUP

Peluang binomial

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k}$$

Hitung banyak urutan yang memuat tepat k sukses, lalu kalikan dengan peluang satu urutan: p dipangkatkan banyak sukses, dikali (1 − p) dipangkatkan banyak gagal.

- n Banyak percobaan
- k Banyak sukses
- p Peluang sukses
- P Peluang

PELUANG

0,2461

🏆 **inilah banyak sukses yang paling mungkin (modus)**

Ada **252** urutan berbeda yang memuat tepat **5** sukses dari **10** percobaan. Satu urutan seperti itu berpeluang **9,766 × 10⁻⁴**. Hasil kalinya: P(X = **5**) = **0,2461**, atau sekitar **24,609** %.

Cek satuan: Peluang tidak bersatuan dan selalu di antara 0 dan 1.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINOMIAL-PELUANG

CONTOH **Menebak soal pilihan ganda**

Ayu kehabisan waktu dan menebak 5 soal pilihan ganda terakhir. Setiap soal punya 4 pilihan dengan tepat satu jawaban benar. Berapa peluang Ayu menebak benar tepat 2 soal?

1. Cek syarat: 5 soal (tetap), benar/salah (dua hasil), peluang benar $\frac{1}{4}$ (sama), tebakan saling bebas. Jadi $X \sim B(5, \frac{1}{4})$.

2. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{16} \times \frac{27}{64}$.

3. $= \frac{270}{1024} \approx 0{,}264$.

Sekitar 26,4%. Coba sendiri di Rumus Hidup: dengan $n = 5$ dan $p = 0{,}25$, banyak benar yang paling mungkin adalah 1, bukan 2.

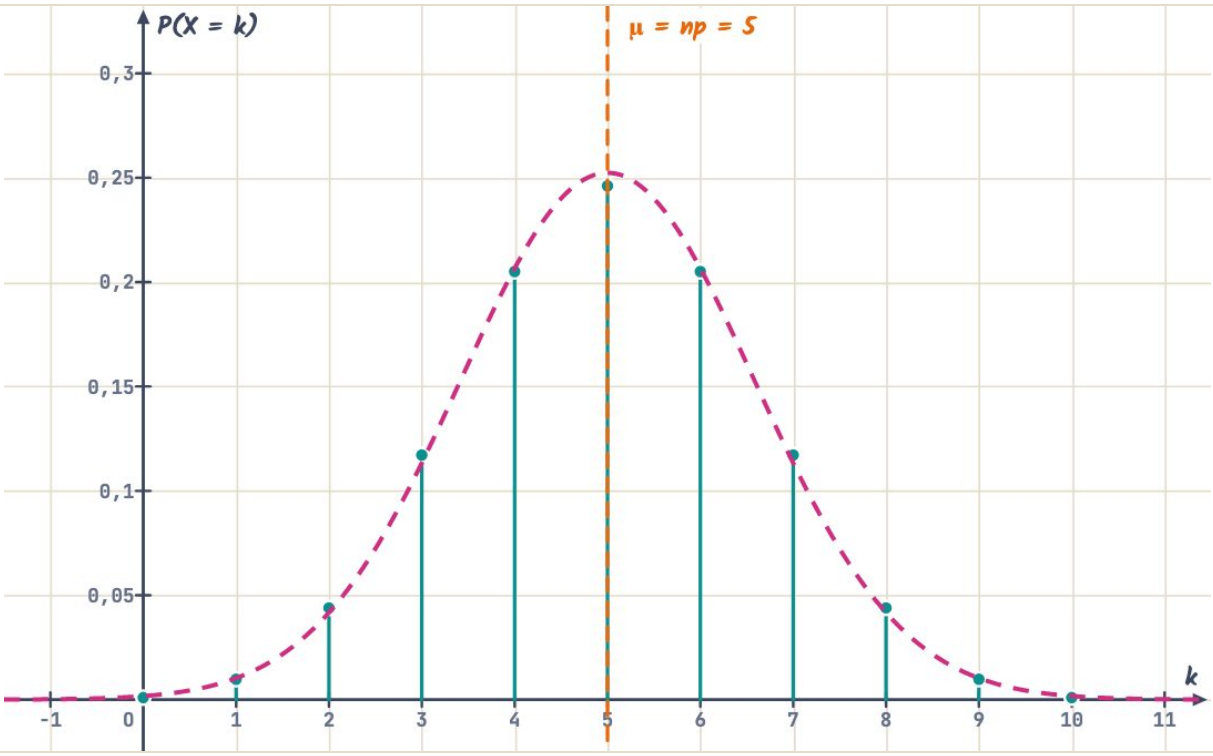
GRAFIK HIDUP

Histogram binomial hidup: geser n dan p

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-34

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$X \sim B(10;\ 0{,}5), \quad \mu = np = 5, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 1{,}58$$



☑ np ≥ 5 dan n(1 – p) ≥ 5: kurva normal sudah pas

p = 0,5: simetris sempurna

μ = np	σ	k paling mungkin	peluangnya
5	1,581	5	0,2461

Batang tegak (hijau toska) adalah $P(X = k)$; garis putus-putus magenta adalah kurva normal dengan rataan dan simpangan baku yang sama. Geser n dan p, atau tekan ▶ **Jalankan** agar n bertambah sendiri. Kapan histogramnya miring? Kapan ia mulai pas dengan lonceng?

TAMU DARI MASA LALU

Percobaan sukses-gagal yang diulang disebut juga **percobaan Bernoulli**, untuk menghormati Jacob Bernoulli (1655–1705) dari Swiss. Dalam bukunya *Ars Conjectandi* ("Seni Menduga"), yang baru terbit pada 1713 setelah ia wafat, Bernoulli membuktikan bahwa jika percobaan diulang sangat banyak, persentase sukses akan mendekati p. Hasil ini kini dikenal sebagai *hukum bilangan besar*, fondasi semua survei dan asuransi modern.

34.3 Rataan dan varians binomial

Kalau 100 benih cabai masing-masing tumbuh dengan peluang 0,9, berapa yang kamu tebak akan tumbuh? Tentu sekitar 90. Tebakan alami itu adalah $np = 100 \times 0{,}9$. Tetapi hasil nyata jarang tepat 90; kadang 87, kadang 93. Seberapa lebar "kadang-kadang" itu diukur oleh simpangan baku.

RATAAN DAN VARIANS BINOMIAL

Jika $X \sim B(n, p)$, maka

$$E(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p), \qquad \sigma =$$

Varians paling besar saat $p = \frac{1}{2}$ (paling tak terduga) dan nol saat $p = 0$ atau $p = 1$ (hasilnya sudah pasti).

Bahasa sederhana · Gampangnya: rata-rata banyak sukses = banyak percobaan × peluang sukses. Lempar koin 20 kali, rata-ratanya $20 \times \frac{1}{2} = 10$ angka. Tanam 50 benih dengan peluang tumbuh 0,8, rata-ratanya $50 \times 0{,}8 = 40$ benih tumbuh.

RUMUS HIDUP

Rataan & simpangan baku binomial

$$\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

Rata-rata banyak sukses adalah n kali p. Sebarannya diukur oleh simpangan baku: akar dari n kali p kali (1 − p).

- n Banyak percobaan (pemegang tiket)
- p Peluang sukses (datang)
- σ Simpangan baku `orang`

SIMPANGAN BAKU

3,74

orang

Rata-rata μ = np = **174,8** orang datang. Hasil nyata biasanya menyimpang sekitar σ = **3,74** orang dari rata-rata itu. Bila histogramnya mirip lonceng, sekitar 95% hari banyak penumpangnya berada di antara **167,321** dan **182,279** (μ ± 2σ).

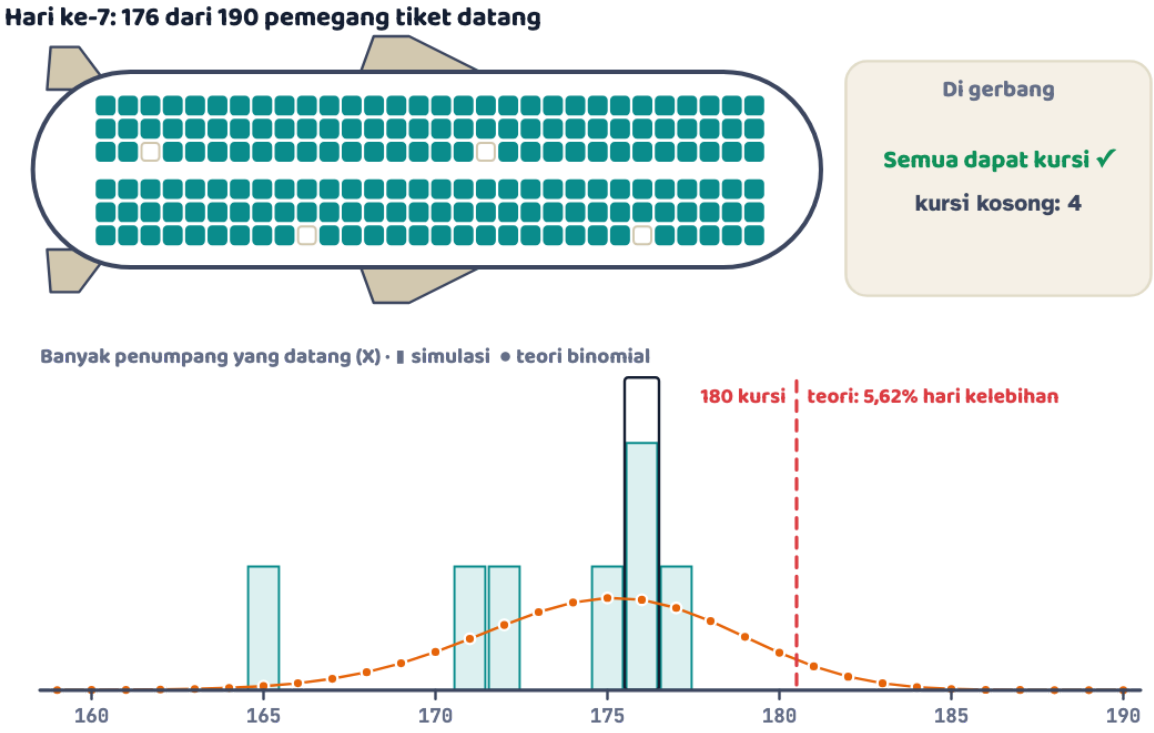
Cek satuan: σ bersatuan sama dengan X (di sini: orang). Varians σ^2 bersatuan orang^2.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINOMIAL-SEBARAN

LAB MINI

Overbooking: berapa tiket yang aman dijual?

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-34



Hari terbang	Hari kelebihan penumpang	Teori P(X > 180)	Rata-rata datang (np)
7	0%	5,62%	174,8

Pesawat ini berkursi 180. Setiap hari, tiap pemegang tiket datang atau batal secara acak (angka ilustrasi). Tekan ▶ **Jalankan** untuk menerbangkan pesawat hari demi hari, atau tombol ⚡ untuk ratusan hari sekaligus. Batang merah adalah hari ketika ada penumpang yang tidak kebagian kursi. Berapa tiket paling banyak yang boleh dijual agar risikonya di bawah 5%?

Dengan peluang datang 0,92, menjual 189 tiket memberi risiko kelebihan penumpang sekitar 3%, tetapi 190 tiket sudah sekitar 5,6%, dan 192 tiket melonjak menjadi sekitar 15%. Satu tiket tambahan bisa mengubah risiko secara drastis, karena kita berada di "ekor" distribusi.

KERJAKAN BERSAMA **Pesawat perintis kelebihan penumpang**

Pesawat perintis di pedalaman Papua berkursi 10. Maskapai menjual 12 tiket karena biasanya ada yang batal. Anggap setiap pemegang tiket datang dengan peluang 0,8, saling bebas (angka ilustrasi). Berapa peluang ada penumpang yang datang tetapi tidak kebagian kursi?

1. Misalkan X = banyak penumpang yang datang. Maka $X \sim B(12;\ 0{,}8)$. Ada yang tidak kebagian kursi jika $X \geq 11$.
2. $P(X = 11) = \binom{12}{11}(0{,}8)^{11}(0{,}2) = 12 \times 0{,}08590 \times 0{,}2 \approx 0{,}2062.$
3. $P(X = 12) = (0{,}8)^{12} \approx 0{,}0687.$
4. $P(X \geq 11) \approx 0{,}2062 + 0{,}0687 = 0{,}2749.$

Sekitar 27,5%, lebih dari 1 di antara 4 penerbangan! Jika hanya 11 tiket dijual, risikonya turun menjadi $P(X = 11) = 0{,}8^{11} \approx 8{,}6\%$. Rataannya pun masuk akal: $np = 9{,}6$ penumpang untuk 12 tiket.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

LINEARITAS NILAI HARAPAN: SENJATA RAHASIA

Mengapa $E(X) = np$? Tulis $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, dengan $I_j = 1$ jika percobaan ke-j sukses dan 0 jika gagal. Setiap $E(I_j) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$. Karena nilai harapan bersifat **linear**, $E(X) = E(I_1) + \cdots + E(I_n) = np$. Hebatnya, sifat $E(A + B) = E(A) + E(B)$ berlaku *bahkan jika A dan B tidak saling bebas*.

Contoh olimpiade: pada acara tukar kado, 30 siswa memasukkan kado ke sebuah kotak, lalu masing-masing mengambil satu kado secara acak. Berapa nilai harapan banyak siswa yang mendapat kadonya sendiri? Siswa ke-j mendapat kadonya sendiri dengan peluang $\frac{1}{30}$, jadi jawabannya $30 \times \frac{1}{30} = 1$. Ajaibnya, jawabannya tetap 1 untuk 5 siswa maupun 5 juta siswa! (Untuk varians binomial $np(1-p)$, kita juga memakai kebebasan: varians dari jumlah variabel yang saling bebas sama dengan jumlah variansnya.)

34.4 Distribusi normal: si kurva lonceng

Kembali ke tinggi badan. Bayangkan histogram tinggi seluruh siswa SMA di sebuah provinsi, dengan kelas-kelas selebar 1 cm, lalu 0,5 cm, lalu makin sempit lagi. Puncak-puncak batangnya makin rapat, dan akhirnya menyatu menjadi **kurva mulus** berbentuk lonceng. Untuk variabel kontinu seperti ini, peluang tidak lagi dibaca dari tinggi batang, melainkan dari **luas daerah di bawah kurva**.

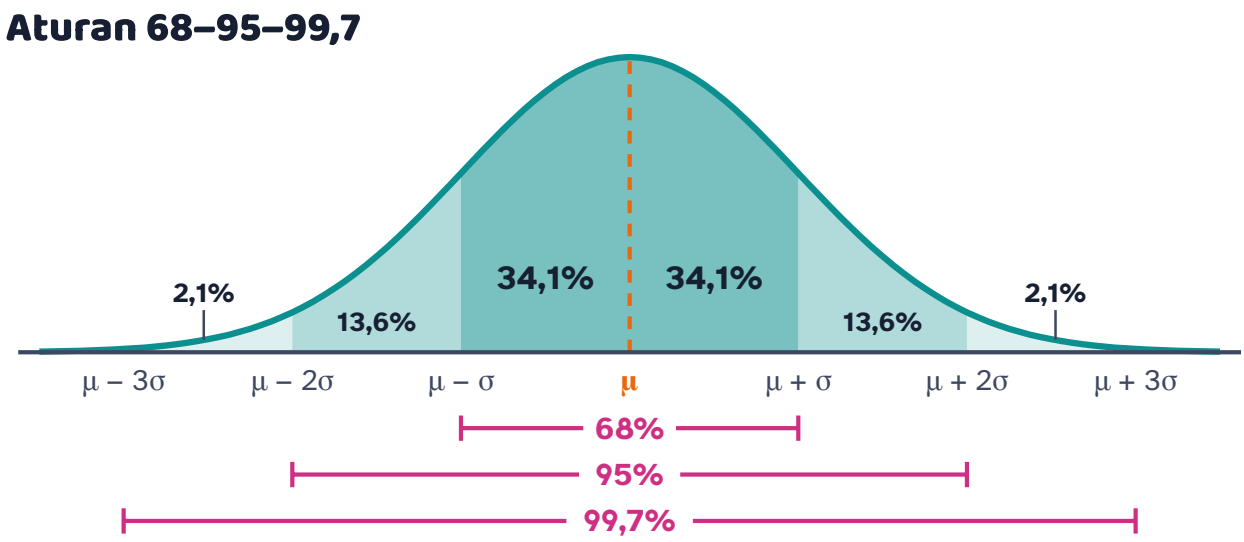
DEFINISI · DISTRIBUSI NORMAL

Variabel acak kontinu X berdistribusi **distribusi normal** dengan rataan μ dan simpangan baku σ, ditulis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, jika grafik kepadatannya berbentuk lonceng dengan sifat:

- simetris terhadap garis $x = \mu$, sehingga rataan = median = modus;
- makin jauh dari μ, kurva makin rendah tetapi tidak pernah menyentuh sumbu;
- luas seluruh daerah di bawah kurva adalah 1, dan $P(a < X < b)$ = luas di antara $x = a$ dan $x = b$.

Persamaan kurvanya adalah $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Perhatikan: di dalamnya ada π dan e, dua bilangan paling terkenal dalam matematika, bekerja sama menggambar sebuah lonceng.

Bahasa sederhana · Gampangnya: kurva normal itu seperti **bukit yang simetris**. Puncaknya ada di rata-rata. Kebanyakan data berkumpul dekat puncak, dan makin ke pinggir makin sedikit. Makin besar simpangan baku, bukitnya makin landai dan lebar.



Contoh: jika tinggi siswa berdistribusi $N(160,\ 8^2)$ dalam cm, sekitar 68% siswa bertinggi 152–168 cm, 95% bertinggi 144–176 cm, dan hampir semuanya (99,7%) bertinggi 136–184 cm.

ATURAN EMPIRIS (68–95–99,7)

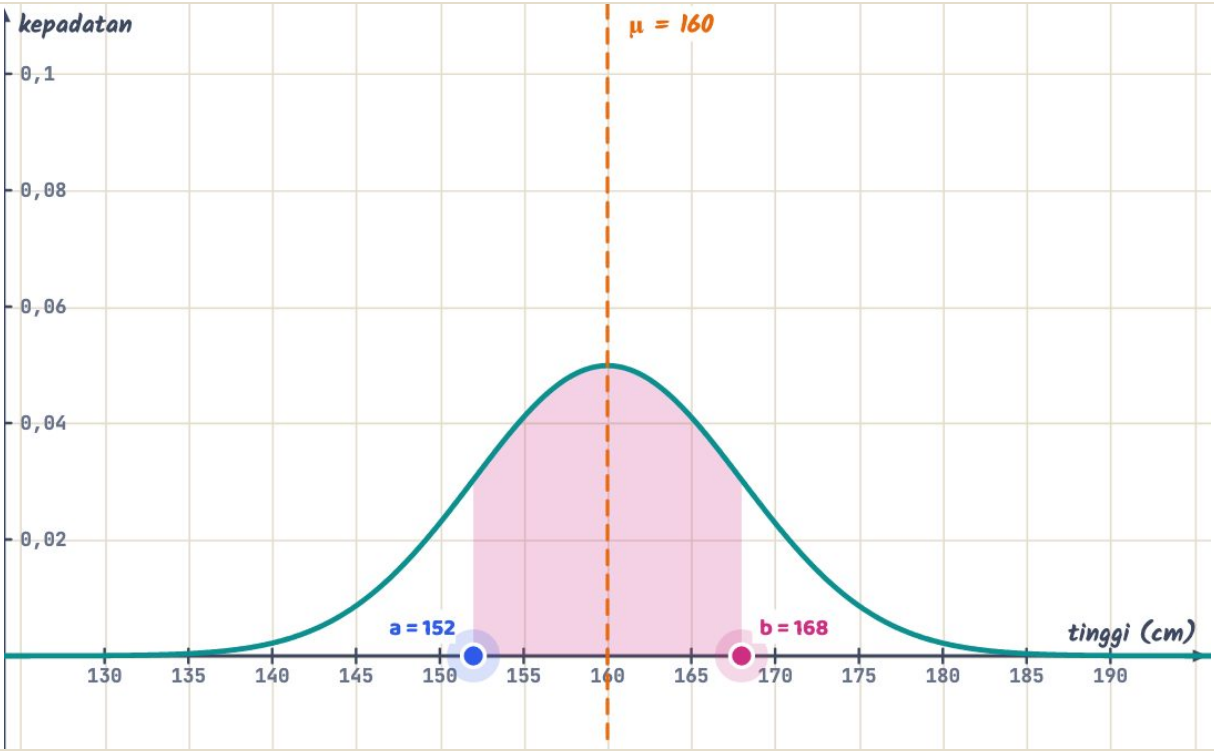
Untuk setiap distribusi normal, sekitar **68%** data berada dalam jarak σ dari rataan, sekitar **95%** dalam jarak 2σ, dan sekitar **99,7%** dalam jarak 3σ. Aturan ini juga disebut **aturan empiris**.

GRAFIK HIDUP **Kurva normal tinggi badan: arsir peluangnya**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-34

$$P(a < X < b) = \text{luas daerah di bawah kurva dari } a \text{ sampa}$$

$$P(152 < X < 168) = P\left(-1 < Z < 1\right) \approx 0{,}6827$$



μ ± σ: sekitar 68%

z untuk a	z untuk b	P(a < X < b) = luas arsiran
-1	1	0,6827

Seret titik a dan b di sumbu mendatar (data tinggi badan ini ilustrasi). Mulai dari $a = \mu - \sigma$ dan $b = \mu + \sigma$: luasnya sekitar 0,68. Sekarang ubah σ. Kurvanya makin runcing atau makin landai, tetapi luas totalnya selalu 1. Mengapa puncaknya harus naik saat σ mengecil?

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Pada penulisan $N(\mu, \sigma^2)$, angka kedua adalah **varians**, bukan simpangan baku. Jadi $X \sim N(160, 64)$ berarti $\sigma = \sqrt{64} = 8$ cm, bukan 64 cm. Beberapa buku dan kalkulator meminta σ, bukan σ^2; bacalah dengan teliti.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Untuk variabel kontinu, peluang satu nilai tepat selalu 0: $P(X = 160) = 0$, karena "luas" sebuah garis adalah nol. Yang bermakna adalah peluang suatu **rentang**, misalnya $P(159{,}5 < X < 160{,}5)$. Akibatnya, $P(X < 160)$ dan $P(X \leq 160)$ sama saja.

🕰️ **TAMU DARI MASA LALU**

Kurva lonceng pertama kali muncul pada 1733 dalam karya Abraham de Moivre, matematikawan kelahiran Prancis yang tinggal di London. Ia sedang menghitung peluang banyak angka dari ratusan lemparan koin, dan menemukan bahwa histogram binomial mendekati sebuah kurva mulus. Sekitar 1809, Carl Friedrich Gauss memakai kurva yang sama untuk menjelaskan galat pengukuran posisi benda langit. Itulah sebabnya kurva normal juga disebut **kurva Gauss**.

MITOS

"Semua data di dunia nyata berdistribusi normal."

FAKTA

Banyak yang tidak. Pendapatan penduduk, harga rumah, dan waktu menunggu angkot condong ke kanan: sebagian kecil nilainya sangat besar. Selalu periksa histogramnya dulu sebelum memakai kurva normal.

MITOS

"Koin sudah lima kali muncul angka, jadi lemparan berikutnya pasti gambar."

FAKTA

Koin tidak punya ingatan. Setiap lemparan saling bebas dan peluangnya tetap ½. Keyakinan keliru ini disebut *kekeliruan penjudi* (*gambler's fallacy*).

MITOS

"Koinnya adil, jadi peluang tepat 5 angka dari 10 lemparan adalah ½."

FAKTA

Hanya sekitar 24,6%. Yang bernilai ½ adalah peluang satu lemparan. Hasil "tepat setengah" memang yang paling mungkin, tetapi tetap hanya satu dari sebelas kemungkinan.

34.5 Skor z dan tabel normal baku

Ada tak hingga banyak kurva normal: rataan dan simpangan bakunya bisa apa saja. Untungnya, semua kurva itu bisa "diseragamkan" menjadi satu kurva baku dengan rataan 0 dan simpangan baku 1. Caranya: ukur setiap nilai

dengan **berapa simpangan baku** ia berada dari rata-rata.

SKOR Z DAN NORMAL BAKU

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Bilangan $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ disebut **skor z** (nilai baku), dan $N(0, 1)$ disebut distribusi **normal baku**. Peluangnya ditulis $\Phi(z) = P(Z < z)$. Karena simetris, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, sehingga

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

z	$\Phi(z) = P(Z < z)$	**Arti**
0	0,5000	tepat setengah data di bawah rata-rata
0,5	0,6915	
1	0,8413	$P(-1 < Z < 1) \approx 0{,}6827$: aturan 68%
1,25	0,8944	
1,5	0,9332	
1,645	0,9500	batas 5% teratas
1,96	0,9750	$P(-1{,}96 < Z < 1{,}96) = 0{,}95$: dipakai survei dan hitung cepat
2	0,9772	$P(-2 < Z < 2) \approx 0{,}9545$: aturan 95%
2,5	0,9938	
3	0,9987	$P(-3 < Z < 3) \approx 0{,}9973$: aturan 99,7%

RUMUS HIDUP

Skor z (nilai baku)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Skor z menjawab satu pertanyaan: nilai ini berjarak berapa simpangan baku dari rata-rata, dan ke arah mana?

- x Nilai data (tinggi badan) cm
- μ Rata-rata cm
- σ Simpangan baku cm
- z Skor z

SKOR Z

1,5

Tinggi **172** cm berjarak **1,5** simpangan baku di **atas** rata-rata **160** cm. Jika tinggi badan berdistribusi normal, kira-kira **93,3%** siswa lebih pendek darinya.

Cek satuan: x, μ, dan σ bersatuan sama (cm), sehingga satuannya saling menghapus: skor z tidak bersatuan. Karena itu skor z bisa membandingkan hal yang satuannya berbeda.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SKOR-Z

TRIK KAK LINTANG

Gambar, arsir, hitung. Sebelum menyentuh kalkulator, sketsa lonceng kecil, tandai μ, lalu arsir daerah yang ditanyakan. Sketsa itu langsung memberi tahu apakah jawabanmu harus lebih dari atau kurang dari 0,5. Untuk z negatif, pakai cermin: $\Phi(-1{,}25) = 1 - \Phi(1{,}25)$.

KERJAKAN BERSAMA

Beras kemasan yang kurang isi

Mesin mengisi beras berlabel 5 kg. Isi kemasan berdistribusi normal dengan rataan 5,05 kg dan simpangan baku 0,04 kg (angka ilustrasi). Berapa persen kemasan yang isinya kurang dari 5 kg? Gunakan $\Phi(1{,}25) = 0{,}8944$.

1. Skor z untuk 5 kg: $z = \dfrac{5 - 5{,}05}{0{,}04} = \dfrac{-0{,}05}{0{,}04} = -1{,}25.$
2. Sketsa: daerah di kiri $z = -1{,}25$, jadi jawabannya pasti kurang dari 0,5.
3. $P(X < 5) = \Phi(-1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$

Sekitar 10,6% kemasan kurang dari 5 kg, kira-kira 1 dari 10. Terlalu banyak untuk pabrik yang jujur!

COBA SENDIRI

Menyetel mesin agar jujur

Pabrik pada contoh sebelumnya ingin hanya 2% kemasan yang berisi kurang dari 5 kg, dengan simpangan baku tetap 0,04 kg. Berapa rataan isi yang harus disetel? Gunakan $\Phi(2{,}054) \approx 0{,}98$.

1. Syaratnya $P(X < 5) = 0{,}02$. Karena $\Phi(-2{,}054) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$, skor z untuk 5 kg harus $-2{,}054$.
2. $\dfrac{5 - \mu}{0{,}04} = -2{,}054 \implies \mu = 5 + 2{,}054 \times 0{,}04 \approx 5{,}082.$
3. Cek: $z = \dfrac{5 - 5{,}082}{0{,}04} = -2{,}05$, dan $\Phi(-2{,}05) \approx 0{,}02$. ✓

Rataan harus disetel sekitar 5,082 kg, yaitu 82 gram di atas label. Cara lain yang lebih hemat beras: perbaiki mesin agar simpangan bakunya lebih kecil. Inilah normal invers: dari peluang mundur ke nilai.

ADU CEPAT **Skor z kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-34

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi dengan rata-rata, lalu bagi dengan simpangan baku. Contoh: μ = 160, σ = 8, x = 172 ⇒ z = 12/8 = 1,5.

ID **MATEMATIKA NUSANTARA**

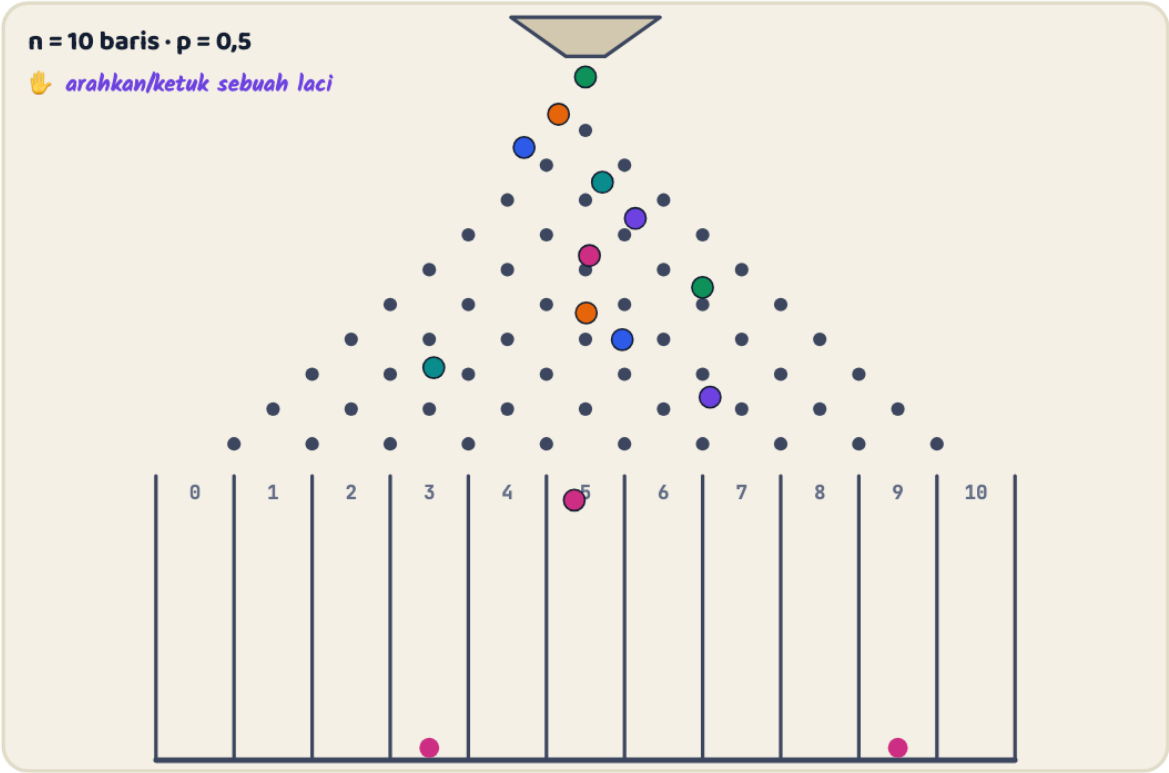
Skor z kemungkinan sudah "mengukurmu" sejak balita! Grafik pertumbuhan anak di Buku KIA yang dibawa ke posyandu memuat garis-garis lengkung. Garis-garis itu menandai skor z menurut standar WHO: garis tengah adalah median anak sehat seusiamu ($z = 0$), lalu $z = \pm 2$ dan $z = \pm 3$. Balita yang tinggi badan menurut umurnya berada di bawah garis $z = -2$ dikategorikan **pendek** (*stunting*), sehingga perlu perhatian gizi. Survei gizi nasional memakai patokan yang sama untuk menghitung angka stunting setiap provinsi.

34.6 Aproksimasi normal dan papan Galton

Sekarang kita bisa menjawab pertanyaan Dimas di komik. Papan Galton adalah **mesin binomial**: setiap kelereng melewati n baris paku, dan nomor lacinya adalah banyak pantulan ke kanan, $X \sim B(n, p)$. Jika banyak baris cukup besar, tumpukan kelereng membentuk lonceng normal. Saatnya mencoba sendiri!

LAB MINI **Papan Galton: hujan kelereng membentuk lonceng**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-34



Kelereng di laci	Rata-rata nomor laci	Teori np	Simpangan baku	Teori √(np(1–p))
2	6	5	3	1,58

Tekan ▶ **Jalankan** dan saksikan kelereng berjatuhan, lalu tekan ⚡ untuk menambah ratusan kelereng sekaligus. Nyalakan **Tampilkan teori**: apakah tumpukannya mengikuti titik-titik binomial (oranye) dan kurva normal (magenta)? Ubah peluang ke kanan menjadi 0,8. Ke mana puncaknya pindah? Arahkan kursor ke sebuah laci (atau ketuk) untuk melihat isinya.

☆ **APROKSIMASI NORMAL UNTUK BINOMIAL (DE MOIVRE–LAPLACE)**

Jika $X \sim B(n, p)$ dengan $np \geq 5$ dan $n(1-p) \geq 5$ (patokan praktis), maka X kira-kira berdistribusi normal:

$$X \approx Y \sim N\big(np,\ np(1-p)\big)$$

Karena X hanya bernilai bulat, pakai **koreksi kontinuitas**: batang $X = k$ dianggap menempati selang $k - 0{,}5$ sampai $k + 0{,}5$. Contohnya, $P(X \geq k) \approx P(Y > k - 0{,}5)$ dan $P(X \leq k) \approx P(Y < k + 0{,}5)$.

COBA SENDIRI

Seratus lemparan koin

Sebuah koin adil dilempar 100 kali. Perkirakan peluang muncul paling sedikit 60 angka. Gunakan $\Phi(1{,}9) = 0{,}9713$.

1. $X \sim B(100;\ 0{,}5)$, $\mu = 50$, $\sigma = \sqrt{100 \times 0{,}5 \times 0{,}5} = 5$. Syarat $np = n(1-p) = 50 \geq 5$ terpenuhi.
2. Koreksi kontinuitas: $P(X \geq 60) \approx P(Y > 59{,}5)$.
3. $z = \dfrac{59{,}5 - 50}{5} = 1{,}9$, jadi $P \approx 1 - \Phi(1{,}9) = 1 - 0{,}9713 = 0{,}0287$.

Sekitar 2,9%. Nilai eksaknya (dengan komputer) 0,0284, jadi aproksimasinya sangat baik. Kalau seseorang mendapat 60 angka atau lebih dari 100 lemparan, wajar kita mulai curiga koinnya berat sebelah.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TEOREMA LIMIT PUSAT: MENGAPA LONCENG ADA DI MANA-MANA

Papan Galton menjumlahkan n "pantulan" kecil yang acak dan saling bebas. **Teorema Limit Pusat** menyatakan sesuatu yang jauh lebih umum: jumlah (atau rata-rata) dari banyak variabel acak saling bebas yang berdistribusi sama dengan varians berhingga akan mendekati distribusi normal, *apa pun* bentuk distribusi asalnya. Tinggi badan dipengaruhi ratusan gen dan banyak faktor lingkungan yang efeknya kira-kira menjumlah, sehingga hasilnya mendekati normal. Rata-rata nilai ujian, galat timbangan, dan hasil hitung cepat pemilu juga begitu. Bonus kalkulus: luas total di bawah kurva normal bernilai 1 karena integral Gauss $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

TAMU DARI MASA LALU

Papan berpaku ini diciptakan oleh Francis Galton (1822–1911), ilmuwan Inggris dan kerabat Charles Darwin. Ia menamainya *quincunx*, dari pola paku yang tersusun selang-seling, dan memakainya untuk memperagakan bagaimana banyak pengaruh kecil yang acak menghasilkan kurva lonceng. Galton juga meneliti tinggi badan orang tua dan anak-anaknya, persis pertanyaan Dimas di ruang UKS.



Overbooking maskapai

Maskapai memodelkan banyak penumpang yang benar-benar datang dengan distribusi binomial, lalu memilih banyak tiket yang risikonya kecil.



Beras kemasan

Pabrik menyetel rataan isi sedikit di atas label dan memakai skor z agar hanya sebagian kecil kemasan yang kurang dari beratnya.



Grafik tumbuh posyandu

Tinggi dan berat balita dibandingkan dengan anak seusianya memakai skor z. Di bawah $z = -2$ menjadi tanda risiko stunting.



Hitung cepat pemilu

Lembaga survei memakai aproksimasi normal untuk binomial agar bisa menyatakan *margin of error*, misalnya ±1% dengan tingkat kepercayaan 95%.



Pengendalian mutu

Pabrik lampu atau obat menguji sampel; banyak barang cacat dalam sampel dimodelkan dengan binomial untuk memutuskan apakah satu kiriman diterima.

Cek Cepat

Jika $X \sim B(20;\ 0{,}3)$, nilai harapan X adalah...

- 0,3
- 14
- 6
- 4,2

Tinggi siswa berdistribusi $N(160, 64)$ dalam cm. Skor z untuk tinggi 176 cm adalah...

- 2
- 16
- 0,25
- −2

Manakah yang tidak dapat dimodelkan dengan distribusi binomial?

- Banyak angka dalam 10 lemparan koin.
- Banyak benih yang tumbuh dari 20 benih, masing-masing tumbuh dengan peluang 0,9 secara bebas.
- Banyak jawaban benar saat menebak 10 soal pilihan ganda.
- Banyak lemparan dadu sampai mata 6 muncul pertama kali.

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: papan Galton dari sepuluh koin

Bahan: 10 uang koin (atau 10 tutup botol yang satu sisinya diberi tanda), kertas berpetak, pensil.

1. Lempar 10 koin sekaligus, lalu hitung banyak koin yang menunjukkan angka (0 sampai 10).
2. Ulangi 50 kali. Catat hasilnya dengan turus.
3. Gambarlah diagram batang: sumbu mendatar banyak angka, sumbu tegak frekuensi.
4. Hitung frekuensi harapan $50 \times P(X = k)$ dengan Rumus Hidup. Misalnya untuk $k = 5$: $50 \times 0{,}246 \approx 12{,}3$ kali.
5. Gabungkan datamu dengan data beberapa teman (misalnya 10 orang × 50 lemparan = 500 lemparan) lalu gambar ulang.

Pertanyaan: Seberapa mirip diagrammu dengan lonceng? Apakah rata-rata banyak angka mendekati $np = 5$? Mengapa diagram gabungan sekelas tampak lebih mulus daripada diagrammu sendiri?

RINGKASAN KILAT **Bab 34 dalam 3 menit**

☑ **Kamu sekarang bisa...**

- menjelaskan **variabel acak diskret**, menyusun tabel distribusi peluangnya, dan menghitung **nilai harapan** serta varians
- mengenali **percobaan binomial** dan menghitung $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- menghitung **rataan** np dan **simpangan baku** $\sqrt{np(1-p)}$ distribusi binomial
- membaca **kurva normal**, memakai aturan 68–95–99,7, dan mengubah data menjadi **skor z** untuk menghitung peluang
- menjelaskan mengapa papan Galton dan binomial dengan n besar menghasilkan kurva lonceng (**aproksimasi normal**)

🔑 Istilah kunci

distribusi peluang · variabel acak · Nilai harapan · distribusi binomial · distribusi normal · aturan empiris · skor z · normal baku · koreksi kontinuitas

🧮 Rumus penting

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$

Peluang binomial. Hitung banyak urutan yang memuat tepat k sukses, lalu kalikan dengan peluang satu urutan: p dipangkatkan banyak sukses, dikali (1 – p) dipangkatkan banyak gagal.

$$\sigma = \sqrt{n \, p \, (1-p)}$$

Rataan & simpangan baku binomial. Rata-rata banyak sukses adalah n kali p. Sebarannya diukur oleh simpangan baku: akar dari n kali p kali (1 – p).

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Skor z (nilai baku). Skor z menjawab satu pertanyaan: nilai ini berjarak berapa simpangan baku dari rata-rata, dan ke arah mana?

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Nilai harapan tidak harus berupa nilai yang bisa muncul.
- Pada penulisan $N(\mu, \sigma^2)$, angka kedua adalah varians, bukan simpangan baku.
- Untuk variabel kontinu, peluang satu nilai tepat selalu 0: $P(X = 160) = 0$, karena "luas" sebuah garis adalah nol.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=34

Teka-teki untuk Bab 35

Dimas berseru, "Kalau data berdistribusi normal, histogramnya pasti simetris. Jadi kalau histogramnya simetris, datanya pasti normal!" Ayu menggeleng. Menurutnya, kalimat Dimas sama anehnya dengan "Semua kucing berkaki empat, jadi semua yang berkaki empat adalah kucing." Siapa yang benar? Bolehkah sebuah pernyataan "jika … maka …" dibalik begitu saja?

▼ Intip petunjuk

Cari contoh yang simetris tetapi bukan lonceng: hasil satu lemparan dadu (mata 1 sampai 6 sama peluangnya) histogramnya simetris tetapi datar. Pernyataan "jika P maka Q" tidak otomatis berarti "jika Q maka P". Bab 35 membahas implikasi, konvers, kontraposisi, dan cara membuktikan sesuatu dengan sah.

35 Logika & Pembuktian: Menjadi Detektif Matematika

Iklan berkata "dipakai para juara". Kalau kamu memakainya, apakah kamu pasti juara? Detektif menangkap pelaku tanpa melihat kejadiannya. Bab ini memberimu senjata rahasia keduanya: penalaran yang tidak bisa dibantah.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menentukan nilai kebenaran **pernyataan majemuk** (negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi) dengan tabel kebenaran;
- membedakan **implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi**, serta mengenali penalaran yang menyesatkan;
- memakai **kuantor** "semua" dan "ada", menyusun ingkarannya, dan membantah klaim dengan **contoh penyangkal**;
- menyusun **bukti langsung**, bukti dengan kontraposisi, dan **bukti dengan kontradiksi** (misalnya $\sqrt{2}$ irasional);
- membuktikan rumus dengan **induksi matematika**, si efek domino.

KASUS TIMUN YANG HILANG

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Teka-teki dari Bab 34: "Semua kucing berkaki empat." Ancil juga berkaki empat. Apa yang dapat disimpulkan?

- Ancil pasti kucing.
- Ancil pasti bukan kucing.
- Tidak ada yang bisa disimpulkan: Ancil mungkin kucing, mungkin bukan.
- Kalimat "semua kucing berkaki empat" pasti salah.

Jawabannya: tidak bisa disimpulkan. Kalimat itu hanya berkata "*jika* kucing, *maka* berkaki empat". Kebalikannya, "jika berkaki empat, maka kucing", adalah kalimat lain yang disebut **konvers**, dan konvers ini salah (kambing, kancil, dan meja pun berkaki empat). Membedakan keduanya adalah langkah pertama menjadi detektif matematika.

35.1 Pernyataan dan tabel kebenaran

Detektif tidak bekerja dengan perasaan, tetapi dengan kalimat yang bisa diuji. Dalam matematika, kalimat seperti itu disebut **pernyataan**.

DEFINISI

Pernyataan (proposisi) adalah kalimat yang bernilai **benar** (B) atau **salah** (S), tetapi tidak keduanya. Contoh: "Danau Toba berada di Sumatra Utara" (B) dan "7 adalah bilangan genap" (S). Kalimat seperti $x + 2 = 5$ disebut **kalimat terbuka**: nilainya baru jelas setelah x diganti bilangan.

Bahasa sederhana · Gampangnya: pernyataan adalah kalimat yang bisa kamu jawab "betul" atau "keliru". Pertanyaan ("Sudah makan?"), perintah ("Tutup pintunya!"), dan harapan ("Semoga cerah") tidak bisa dijawab begitu, jadi **bukan** pernyataan. Kalimat yang salah tetap pernyataan!

Pernyataan tunggal bisa dirangkai dengan kata penghubung menjadi **pernyataan majemuk**. Kita memakai huruf kecil p, q, r sebagai nama pernyataan.

LIMA PENGHUBUNG LOGIKA

- **Negasi** (ingkaran) $\neg p$: "tidak p". Nilainya selalu kebalikan p.
- **Konjungsi** $p \wedge q$: "p **dan** q". Benar hanya jika keduanya benar.
- **Disjungsi** $p \vee q$: "p **atau** q". Salah hanya jika keduanya salah.
- **Implikasi** $p \Rightarrow q$: "**jika** p, **maka** q". Salah hanya jika p benar dan q salah.
- **Biimplikasi** $p \Leftrightarrow q$: "p **jika dan hanya jika** q". Benar jika nilai keduanya sama.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

CATATAN NOTASI

Banyak buku SMA di Indonesia menulis negasi sebagai $\sim p$. Buku berbahasa Inggris sering memakai $p \rightarrow q$ dan $p \leftrightarrow q$ untuk implikasi dan biimplikasi. Artinya sama persis.

LAB MINI Saklar logika: nyalakan lampu kebenaran

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35



p ⇒ q: Juara tetapi tidak ditraktir: janji DIINGKARI!

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q	p ⇒ q	p ⇔ q
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Baris tabel
ke-2 (B, S)

Nilai p ⇒ q
S (salah)

Ketuk saklar p dan q (atau baris tabel di bawahnya). Lima lampu menyala jika pernyataannya benar. Ganti kalimatnya menjadi "Janji Kak Lintang": pada baris mana janji itu diingkari? Hanya ada **satu** baris!

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Dalam matematika, "atau" berarti **salah satu atau keduanya** (inklusif). Pernyataan "7 prima atau 7 ganjil" benar, padahal kedua bagiannya benar. Dalam bahasa sehari-hari, "teh atau kopi?" sering berarti pilih satu saja; itu disebut "atau eksklusif" dan bukan arti $\vee$.

CONTOH **Menentukan nilai kebenaran**

Misalkan p: "Danau Toba berada di Sumatra Utara" dan q: "$2+2=5$". Tentukan nilai kebenaran $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg q$, dan $p \Rightarrow q$.

1. p benar, q salah. Jadi kita memakai baris kedua tabel (B, S).
2. $p \wedge q$: "dan" butuh keduanya benar, jadi **salah**. $p \vee q$: cukup satu yang benar, jadi **benar**.
3. $\neg q$: "$2+2 \neq 5$", jadi **benar**. $p \Rightarrow q$: syarat benar tetapi akibat salah, jadi **salah**.

$p \wedge q$ = S, $p \vee q$ = B, $\neg q$ = B, $p \Rightarrow q$ = S.

Berapa baris yang dibutuhkan tabel kebenaran? Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan, B atau S. Satu pernyataan baru **menggandakan** banyak baris.

RUMUS HIDUP **Banyak baris tabel kebenaran**

$$B = 2^n$$

Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan nilai, jadi setiap pernyataan baru menggandakan banyak baris tabel.

n Banyak pernyataan tunggal

B Banyak baris `baris`

BANYAK BARIS

8

baris

masih muat di satu halaman buku tulis

Dengan **3** pernyataan tunggal, tabel kebenarannya punya **8** baris. Jika kamu mengisi satu baris per detik tanpa istirahat, perlu sekitar **0,133** menit.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LOGIKA-BARIS

HUKUM DE MORGAN

Untuk pernyataan apa pun p dan q:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge -$$

Tanda $\equiv$ berarti **setara**: nilai kebenarannya selalu sama di setiap baris. Contoh: ingkaran "Dimas membawa SIM dan STNK" adalah "Dimas tidak membawa SIM **atau** tidak membawa STNK". Polisi cukup menemukan satu yang tidak dibawa!

Bukti dengan tabel kebenaran

Bandingkan kolom $\neg(p \wedge q)$ dan $\neg p \vee \neg q$ untuk keempat baris (B,B), (B,S), (S,B), (S,S):

$p \wedge q$ = B, S, S, S, sehingga $\neg(p \wedge q)$ = S, B, B, B. Sementara $\neg p$ = S, S, B, B dan $\neg q$ = S, B, S, B, sehingga $\neg p \vee \neg q$ = S, B, B, B. Kedua kolom sama di setiap baris, jadi keduanya setara. Hukum kedua dibuktikan dengan cara yang sama.

TAMU DARI MASA LALU

Aristoteles (384–322 SM) dari Yunani menyusun aturan penalaran yang disebut *silogisme*: "Semua manusia fana; Sokrates manusia; jadi Sokrates fana." Lebih dari dua ribu tahun kemudian, George Boole (1815–1864) dari Inggris mengubah logika menjadi aljabar yang hanya memakai dua nilai, 1 (benar) dan 0 (salah). Sekitar tahun 1937, Claude Shannon menunjukkan bahwa aljabar Boole dapat dipakai untuk merancang rangkaian saklar listrik. Dari situlah lahir setiap komputer dan HP di sakumu.

35.2 Implikasi: janji, konvers, dan kontraposisi

Implikasi $p \Rightarrow q$ paling sering membuat orang tersandung. Cara termudah memahaminya: anggaplah implikasi sebagai **janji**. Kak Lintang berkata, "Jika kamu juara kelas, maka Kakak mentraktirmu bakso."

- Juara dan ditraktir: janji ditepati (B).
- Juara tetapi **tidak** ditraktir: janji diingkari (S).
- Tidak juara tetapi tetap ditraktir: Kakak sedang baik hati; janjinya tidak dilanggar (B).
- Tidak juara dan tidak ditraktir: janjinya juga tidak dilanggar (B).

Bahasa sederhana · Jadi kalimat "jika… maka…" hanya **salah** dalam satu keadaan: syaratnya terjadi, tetapi akibatnya tidak terjadi. Dalam semua keadaan lain, kalimat itu dianggap benar.

TRIK KAK LINTANG

Implikasi = janji. Janji hanya bisa diingkari kalau syaratnya dipenuhi. Untuk kontraposisi, ingat dua kata: **"tukar, lalu ingkari"**. Dari "jika hujan, maka jalan basah" menjadi "jika jalan tidak basah, maka tidak hujan".

Dari satu implikasi $p \Rightarrow q$ kita bisa membuat tiga "kerabat".

DEFINISI

Untuk implikasi $p \Rightarrow q$: **konvers**-nya $q \Rightarrow p$, **invers**-nya $\neg p \Rightarrow \neg q$, dan **kontraposisi**-nya $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Nama	Bentuk	Contoh	Benar?
Implikasi	$p \Rightarrow q$	Jika n habis dibagi 4, maka n genap.	✓ benar
Konvers	$q \Rightarrow p$	Jika n genap, maka n habis dibagi 4.	× salah ($n = 6$)
Invers	$\neg p \Rightarrow \neg q$	Jika n tidak habis dibagi 4, maka n tidak genap.	× salah ($n = 6$)
Kontraposisi	$\neg q \Rightarrow \neg p$	Jika n tidak genap, maka n tidak habis dibagi 4.	✓ benar

SIFAT KONTRAPOSISI

Implikasi selalu setara dengan kontraposisinya, dan konvers selalu setara dengan invers:

$$p \Rightarrow q \;\equiv\; \neg q \Rightarrow \neg p$$

Tetapi implikasi **tidak** setara dengan konversnya. Inilah jawaban teka-teki kucing: "semua kucing berkaki empat" benar, konversnya salah.

Bukti dengan tabel kebenaran

Untuk baris (B,B), (B,S), (S,B), (S,S): $p \Rightarrow q$ = B, S, B, B. Kontraposisi $\neg q \Rightarrow \neg p$ memakai $\neg q$ = S, B, S, B dan $\neg p$ = S, S, B, B, sehingga nilainya B, S, B, B. Sama persis!

Konvers $q \Rightarrow p$ = B, B, S, B. Berbeda pada baris kedua dan ketiga, jadi konvers tidak setara dengan implikasi.

Tebak Dulu!

Aturan: "Jika seseorang mengendarai motor, maka ia wajib memakai helm." Dari kejauhan, polisi hanya tahu sebagian keadaan empat orang: A sedang mengendarai motor, B sedang berjalan kaki, C memakai helm, D tidak memakai helm. Siapa saja yang perlu didekati untuk memastikan tidak ada pelanggaran?

A dan C.

A saja.

A dan D.

Keempat orang itu.

Jawabannya: A dan D. Pelanggaran hanya terjadi pada baris "p benar, q salah": bermotor tetapi tanpa helm. A bermotor, jadi perlu dicek helmnya. D tanpa helm, jadi perlu dicek apakah ia bermotor (itulah kontraposisi!). C sudah berhelm, jadi apa pun kendaraannya, aturan tidak dilanggar. Ahli psikologi menemukan bahwa banyak orang dewasa keliru memilih C pada teka-teki semacam ini.

Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ berarti implikasi berlaku **dua arah**: $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Contoh: "Sebuah segitiga sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya 60°." Setiap definisi yang baik sebenarnya biimplikasi.

TIGA ATURAN MENARIK KESIMPULAN YANG SAH

- **Modus ponens**: dari $p \Rightarrow q$ dan p, simpulkan q.
- **Modus tollens**: dari $p \Rightarrow q$ dan $\neg q$, simpulkan $\neg p$.
- **Silogisme**: dari $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow r$, simpulkan $p \Rightarrow r$.

Alibi Ancil di komik adalah modus ponens: "jika di hutan, maka tidak di kebun" dan "aku di hutan", jadi "aku tidak di kebun".

AWAS JEBAKAN

Dari $p \Rightarrow q$ dan q, kita **tidak boleh** menyimpulkan p. Kesalahan ini disebut *menegaskan akibat*, dan inilah trik favorit iklan. "Para juara memakai sepatu ini" tidak berarti "pemakai sepatu ini pasti juara". Begitu pula dari $p \Rightarrow q$ dan $\neg p$, kita tidak boleh menyimpulkan $\neg q$.

CONTOH **Membongkar iklan yang menyesatkan**

Iklan: "Para juara bulu tangkis minum susu merek X." Seorang ibu berpikir, "Kalau anakku minum susu X, ia akan menjadi juara." Sahkah penalaran itu?

1. Misalkan p: "seseorang juara bulu tangkis", q: "ia minum susu X". Klaim iklan berbentuk $p \Rightarrow q$.
2. Kesimpulan sang ibu berbentuk $q \Rightarrow p$. Itu **konvers**, yang tidak setara dengan klaim iklan.
3. Yang setara dengan klaim iklan hanyalah kontraposisinya: "Jika seseorang tidak minum susu X, maka ia bukan juara bulu tangkis".

Penalaran sang ibu tidak sah. Iklan "menyelundupkan" konvers agar kita mengambil kesimpulan yang tidak pernah benar-benar dikatakan.

35.3 Kuantor: "semua" dan "ada"

Kalimat terbuka $x^2 \geq 0$ belum bernilai benar atau salah. Selain mengganti x dengan bilangan, kita bisa memberi **kuantor** di depannya.

DEFINISI

Kuantor universal $\forall x$ dibaca "untuk setiap x" atau "semua x". **Kuantor eksistensial** $\exists x$ dibaca "ada x" atau "terdapat paling sedikit satu x".

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ bernilai benar.
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$ bernilai salah (tidak ada bilangan real yang kuadratnya negatif).
- "Ada bilangan prima yang genap" bernilai benar: bilangan 2.

INGKARAN KUANTOR

$$\neg\big(\forall x,\ P(x)\big) \equiv \exists x,\ \neg P(x) \qquad \neg\big(\exists x,\ P(x$$

Untuk membantah "semua", cukup tunjukkan **satu** yang tidak memenuhi. Satu contoh seperti itu disebut **contoh penyangkal**.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Ingkaran "Semua siswa hadir" adalah "**Ada** siswa yang tidak hadir", bukan "Semua siswa tidak hadir". Kalau hanya satu siswa yang absen, kalimat pertama sudah salah, padahal kelas masih hampir penuh.

Bahasa sederhana · Bayangkan kalimat "semua" sebagai gembok besar. Satu contoh penyangkal sudah cukup untuk membukanya. Tetapi untuk menunjukkan bahwa gembok itu kuat, kamu tidak bisa sekadar mencoba seribu kunci: kamu butuh **bukti**.

Tebak Dulu!

Rumus $n^2 + n + 41$ menghasilkan bilangan prima untuk $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$: empat puluh kali berturut-turut! Apakah hasilnya selalu prima untuk setiap bilangan cacah n?

Ya, 40 contoh sudah cukup sebagai bukti.

Ya, karena 41 adalah bilangan prima.

Tidak, ada n yang membuatnya bukan prima.

Tidak ada yang bisa mengetahuinya.

Jawabannya: tidak. Untuk $n = 40$: $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 1681$. Satu contoh penyangkal menggugurkan klaim "untuk setiap", walaupun 40 kasus sebelumnya benar. Rumus ini dikenal sejak Euler (abad ke-18) sebagai contoh pola yang menipu.

LAB MINI

Pemburu contoh penyangkal: pola yang menipu

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35

Dugaan: $n^2 + n + 41$ selalu prima ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

n=0 41	n=1 43	n=2 47	n=3 53	n=4 61	n=5 71	n=6 83	n=7 97	n=8 ?	n=9 ?	n=10 ?	n=11 ?
n=12 ?	n=13 ?	n=14 ?	n=15 ?	n=16 ?	n=17 ?	n=18 ?	n=19 ?	n=20 ?	n=21 ?	n=22 ?	n=23 ?
n=24 ?	n=25 ?	n=26 ?	n=27 ?	n=28 ?	n=29 ?	n=30 ?	n=31 ?	n=32 ?	n=33 ?	n=34 ?	n=35 ?
n=36 ?	n=37 ?	n=38 ?	n=39 ?	n=40 ?	n=41 ?	n=42 ?	n=43 ?	n=44 ?	n=45 ?	n=46 ?	n=47 ?

$n = 7$: $7^2 + 7 + 41 = 97$ → prima ✓

Sudah 8 kasus dicek dan semuanya prima. Terbukti? Belum! Contoh bukan bukti.

Kasus dicek	Status dugaan
8 dari 48	belum terbantah

Pilih sebuah dugaan, lalu tekan ▶ **Jalankan**. Kotak hijau = prima, kotak merah = contoh penyangkal. Lab berhenti di contoh penyangkal pertama; tekan ▶ lagi untuk melanjutkan atau ketuk kotak mana pun. Berapa kasus benar yang muncul sebelum dugaan gugur?

GRAFIK HIDUP

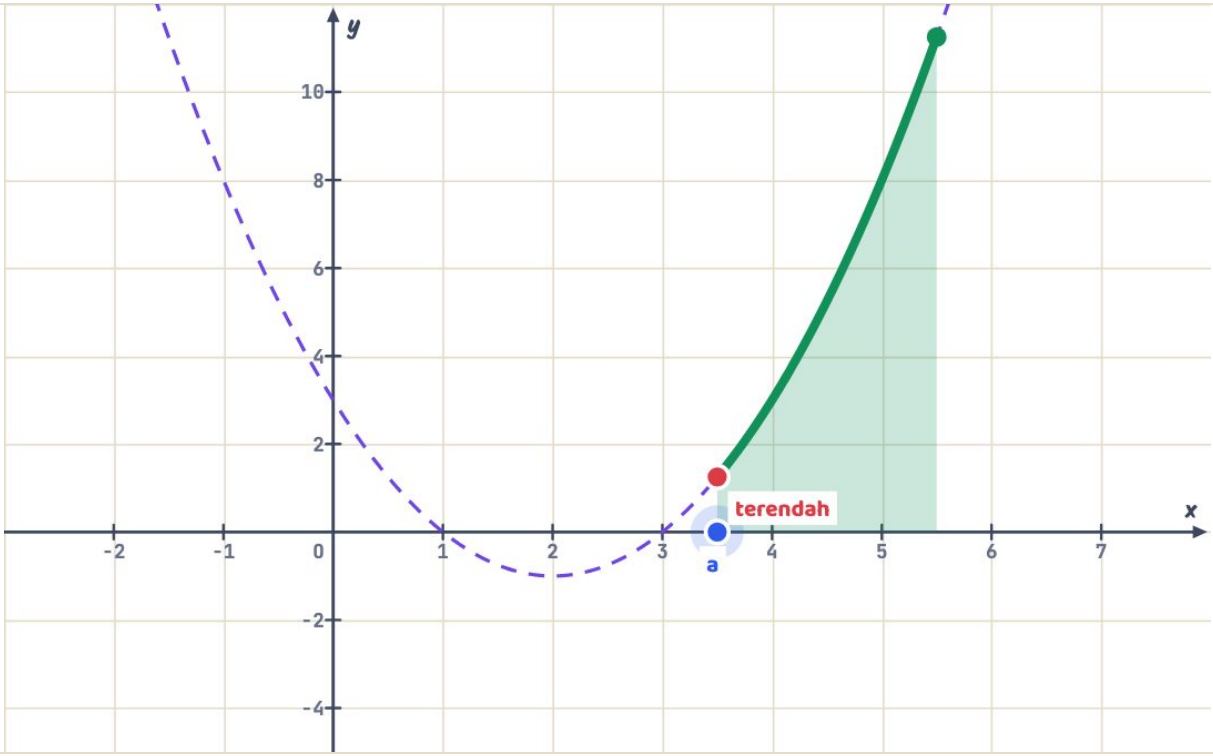
Kuantor di grafik: untuk semua, atau ada?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35

$$\forall x \in [a,\, b] :\; x^2 - 4x + c > 0$$

$$\forall x \in [3{,}5;\; 5{,}5] :\; x^2 - 4x + 3 > 0$$

Bagian hijau adalah grafik pada interval. Pernyataan benar jika seluruh bagian hijau berada di atas sumbu-x.



✓ **BENAR: seluruh bagian hijau di atas sumbu-x**

b = a + L	x terendah di interval	f(x) terkecil
5,5	3,5	1,25

Seret titik biru a ke kiri atau ubah c. Kapan pernyataan "untuk semua x di interval" runtuh? Perhatikan: cukup **satu** titik merah di bawah sumbu-x.

URUTAN KUANTOR ITU PENTING

"Untuk setiap siswa, ada kursi yang ia duduki" ($\forall s\, \exists k$) benar di kelas biasa. "Ada kursi yang diduduki setiap siswa" ($\exists k\, \forall s$) berarti semua siswa berdesakan di satu kursi! Menukar urutan kuantor mengubah arti kalimat.

MITOS

"Kalau sudah dicek pada banyak contoh dan benar semua, berarti sudah terbukti."

FAKTA

Contoh hanya menumbuhkan keyakinan, bukan kepastian. Rumus $n^2 + n + 41$ lolos 40 kali lalu gagal. Pernyataan "untuk semua" butuh bukti umum.

MITOS

"Kalau 'jika p maka q' benar, 'jika q maka p' juga benar."

FAKTA

Itu konvers, dan belum tentu benar. Semua kucing berkaki empat, tetapi kambing berkaki empat bukan kucing. Yang pasti setara hanyalah kontraposisi.

MITOS

"Kalimat 'Jika 2 + 2 = 5, maka bulan terbuat dari keju' pasti salah."

FAKTA

Dalam logika, implikasi dengan syarat salah selalu bernilai benar. Janji "jika..." tidak bisa diingkari kalau syaratnya tidak pernah terjadi.

MITOS

"Pembuktian hanya urusan ilmuwan matematika."

FAKTA

Hakim, dokter, pemrogram, dan pemeriksa fakta memakainya setiap hari. Kamu juga, setiap kali berkata "tidak mungkin, karena...".

35.4 Bukti langsung dan logika detektif

Sebuah **bukti** adalah rantai alasan: dimulai dari hal yang sudah diketahui, lalu setiap mata rantai mengikuti aturan yang sah, sampai tiba di kesimpulan. Pada **bukti langsung**, kita mulai dari syarat p dan melangkah maju sampai q.

DEFINISI

Bilangan bulat n disebut **genap** jika $n = 2k$ dan **ganjil** jika $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Definisi yang tepat adalah "alat sidik jari" seorang detektif matematika.

KERJAKAN BERSAMA **Bukti langsung: ganjil + ganjil = genap**

Buktikan bahwa jumlah dua bilangan ganjil selalu genap.

1. Ambil dua bilangan ganjil **sembarang**: $m = 2a + 1$ dan $n = 2b + 1$, dengan a, b bilangan bulat. (Jangan memakai contoh angka!)
2. Jumlahkan: $m + n = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$.
3. Karena $a + b + 1$ bilangan bulat, $m + n$ berbentuk $2k$, jadi genap. ∎

Terbukti untuk semua pasangan bilangan ganjil sekaligus, tanpa perlu mencoba satu per satu. Tanda ∎ berarti "selesai dibuktikan".

Kadang jalan maju terasa buntu. Detektif lalu memakai jalan memutar: membuktikan **kontraposisinya**, yang setara dengan pernyataan aslinya.

TEOREMA (KUADRAT GENAP)

Untuk setiap bilangan bulat n: jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti dengan kontraposisi

Kontraposisinya: jika n **tidak** genap (ganjil), maka n^2 tidak genap (ganjil). Ambil $n = 2k + 1$. Maka $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, yang berbentuk $2m + 1$, jadi ganjil. Karena kontraposisinya benar, pernyataan aslinya juga benar. ∎ (Teorema ini akan kita pakai di 35.5.)

Sekarang kembali ke kebun Pak Tani. Kancil sudah punya alibi. Tersangka tinggal tiga: Ayam, Kambing, dan Monyet.

COBA SENDIRI **Siapa pencuri timun?**

Pencurinya tepat satu di antara Ayam, Kambing, dan Monyet. Mereka bersaksi: Ayam: "Kambing pelakunya." Kambing: "Ayam berbohong." Monyet: "Bukan aku pelakunya." Ternyata hanya satu di antara mereka yang berkata jujur. Siapa pencurinya?

1. Perhatikan kesaksian Ayam dan Kambing: yang satu adalah ingkaran yang lain. Jadi **tepat satu** di antara keduanya jujur.
2. Karena hanya satu saksi yang jujur, "jatah jujur" sudah habis dipakai Ayam atau Kambing. Jadi Monyet berbohong.
3. Monyet berbohong saat berkata "bukan aku pelakunya", jadi pencurinya Monyet.
4. Cek: jika Monyet pelakunya, Ayam berbohong, Kambing jujur, Monyet berbohong. Tepat satu yang jujur. ✓

Pencurinya Monyet (ingat ekor yang menjuntai dari pohon di panel terakhir komik?). Detektif tidak perlu melihat kejadiannya; cukup penalaran yang rapi.

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Strategi detektif: **andaikan** satu kemungkinan, telusuri akibatnya, lalu coret kemungkinan yang menabrak fakta. Kalau kemungkinannya sedikit, periksa semuanya seperti mengisi tabel kebenaran.

LAB MINI

Pulau Jujur-Bohong: siapa yang berbohong?

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35



Pernyataan cocok	Status
1 dari 2	masih ada yang janggal

Di pulau ini, warga **Jujur** selalu berkata benar dan warga **Bohong** selalu berbohong. Ketuk lencana setiap warga untuk menebak jenisnya. Tebakanmu benar jika semua pernyataan "cocok". Nyalakan **Tampilkan semua kemungkinan** untuk melihat tabel kebenarannya. Perhatikan kasus 4: apa gunanya berkata "Aku jujur"?

Aturan lalu lintas

"Jika lampu merah, kendaraan berhenti" adalah implikasi. Pelanggaran hanya terjadi pada satu baris tabel: lampu merah, tetapi kendaraan jalan terus.

Iklan yang menyesatkan

"Dipakai para juara" tidak berarti "memakainya membuatmu juara". Waspadai konvers yang diselundupkan ke dalam iklan.

Pemrograman

Perintah *if*, *and*, *or*, dan *not* di aplikasi ojek daring dan gim adalah logika proposisi yang dijalankan jutaan kali per detik.

Saklar lampu tangga

Dua saklar seri bekerja seperti "dan", dua saklar paralel seperti "atau". Lampu tangga yang bisa dinyalakan dari atas dan bawah memakai "atau eksklusif".

Mesin pencari & perpustakaan

Kata kunci "batik AND Pekalongan" mempersempit hasil pencarian, sedangkan "batik OR tenun" memperluasnya.

Ruang sidang

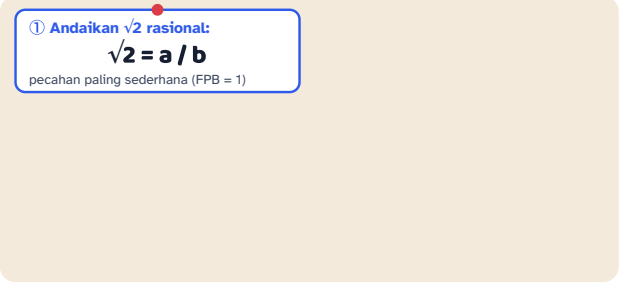
Terdakwa dianggap tidak bersalah sampai kesalahannya dibuktikan. Alibi ("saat itu aku di tempat lain") adalah bukti dengan kontradiksi.

35.5 Bukti dengan kontradiksi: $\sqrt{2}$ irasional

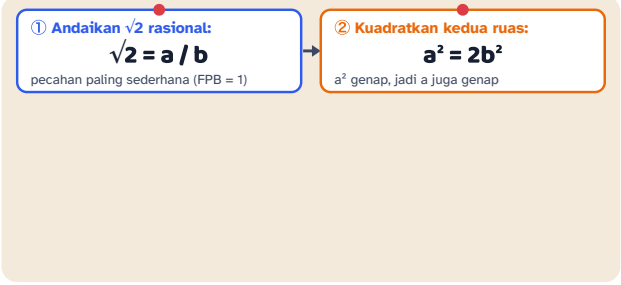
Ini senjata paling dramatis seorang detektif: **andaikan kebalikannya benar**, lalu tunjukkan bahwa andaian itu membawa ke hal yang mustahil. Karena kenyataan tidak boleh mustahil, andaiannya pasti salah. Cara ini disebut **bukti dengan kontradiksi** (*reductio ad absurdum*).

TEOREMA

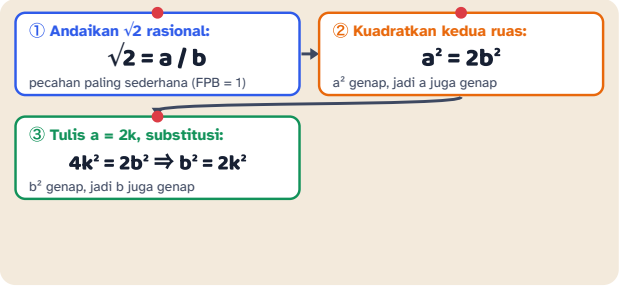
$\sqrt{2}$ adalah bilangan **irasional**: tidak dapat ditulis sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan bulat dan $b \neq 0$.



Langkah 1. Detektif memulai dengan sebuah **andaian**: misalkan 2 rasional, yaitu $2 = \frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan asli dan pecahannya sudah paling sederhana (tidak bisa disederhanakan lagi).



Langkah 2. Kuadratkan: $2 = \frac{a^2}{b^2}$, jadi $a^2 = 2b^2$. Artinya a^2 genap. Menurut teorema di 35.4, jika a^2 genap, maka a genap.



Langkah 3. Karena a genap, tulis $a = 2k$. Maka $4k^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2k^2$. Sekarang b^2 genap, jadi b juga genap.



Langkah 4. Periksa barang bukti: a genap dan b genap. Berarti pembilang dan penyebut $\frac{a}{b}$ masih bisa dibagi 2.



Langkah 5. Ini bertentangan dengan langkah 1 (pecahan sudah paling sederhana). Andaian membawa kita ke hal yang mustahil, jadi andaian itu salah: 2 **irasional**. ∎

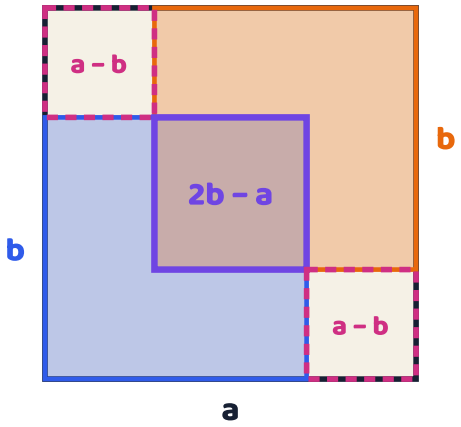
TAMU DARI MASA LALU

Konon, Hippasus dari Metapontum, anggota kelompok Pythagoras (±abad ke-5 SM), menemukan bahwa diagonal persegi tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat terhadap sisinya. Penemuan itu mengguncang keyakinan kelompoknya bahwa "segala sesuatu adalah bilangan (bulat)". Ada legenda bahwa ia ditenggelamkan di laut, tetapi sejarawan meragukan kisah ini. Bukti genap-ganjil seperti di atas sudah disinggung Aristoteles sekitar 2.300 tahun yang lalu.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BUKTI TANPA KATA ALA TENNENBAUM

Andaikan $a^2 = 2b^2$ dengan a, b bilangan asli **sekecil mungkin**. Letakkan dua persegi bersisi b di dua pojok persegi bersisi a. Luas dua persegi kecil sama dengan luas persegi besar, jadi bagian yang **tertutup dua kali** (tengah) harus sama luasnya dengan bagian yang **tidak tertutup** (dua pojok):



Luas biru + luas oranye = luas persegi a

⇒ luas tumpang tindih (ungu)
= luas dua pojok kosong (merah muda):

$$(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$$

Solusi bulat yang LEBIH KECIL!

Bertentangan dengan "sekecil mungkin".

Karena $b < a < 2b$, bilangan $2b - a$ dan $a - b$ adalah bilangan asli dengan $2b - a < a$. Kita mendapat solusi yang lebih kecil, padahal a sudah yang terkecil. Kontradiksi!

COBA SENDIRI

Coba sendiri: logaritma yang irasional

Buktikan bahwa $\log_2 3$ irasional. (Ingat Bab 14: $\log_2 3 = x$ berarti $2^x = 3$.)

1. Andaikan $\log_2 3 = \frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan asli (nilainya positif karena $3 > 1$).
2. Maka $2^{a/b} = 3$. Pangkatkan kedua ruas dengan b: $2^a = 3^b$.
3. Ruas kiri genap (karena $a \geq 1$), sedangkan ruas kanan ganjil (hasil kali bilangan ganjil). Bilangan genap tidak mungkin sama dengan bilangan ganjil. Kontradiksi!

Jadi $\log_2 3$ irasional. Bukti dengan kontradiksi sering selesai dengan "argumen genap-ganjil" sesingkat ini.

Bukti dengan kontradiksi juga melahirkan prinsip yang tampak sepele tetapi sangat kuat. Jika 13 merpati masuk ke 12 sarang, pasti ada sarang yang dihuni lebih dari satu merpati. Mengapa? Andaikan tidak; maka setiap sarang berisi paling banyak 1 merpati, totalnya paling banyak 12. Kontradiksi dengan 13!

PRINSIP SARANG MERPATI

Jika n benda dimasukkan ke dalam k kotak, maka ada kotak yang berisi paling sedikit $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ benda. ($\lceil x \rceil$ berarti x dibulatkan ke atas.)

RUMUS HIDUP

Prinsip sarang merpati

$$m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

Jika n merpati masuk ke k sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit n/k merpati, dibulatkan ke atas.

n Banyak merpati (benda) ekor

k Banyak sarang (kotak) sarang

m Isi sarang terpadat (paling sedikit) ekor

ISI SARANG TERPADAT (PALING SEDIKIT)

2

ekor

13 anak, 12 bulan: pasti ada 2 yang lahir di bulan sama

13 merpati di **12** sarang: sebaik apa pun dibagi, pasti ada sarang berisi paling sedikit **2** merpati. Andaikan setiap sarang berisi paling banyak **1**; totalnya paling banyak **12**, kurang dari **13**. Kontradiksi!

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MERPATI-PENGANTAR

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BILANGAN PRIMA ADA TAK HINGGA BANYAKNYA

Sekitar 300 SM, Euklides memberi bukti yang masih dikagumi hingga kini. Andaikan bilangan prima hanya ada berhingga: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Bentuk $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Bilangan $N > 1$ pasti punya faktor prima p, dan p harus salah satu dari daftar itu. Tetapi N dibagi prima mana pun dalam daftar selalu bersisa 1, jadi p tidak membagi N. Kontradiksi! Jadi daftar bilangan prima tidak pernah selesai. (Hati-hati: N sendiri belum tentu prima. Misalnya $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.)

35.6 Induksi matematika: efek domino

Bagaimana membuktikan sesuatu untuk **tak hingga** banyak bilangan, $n = 1, 2, 3, \ldots$, tanpa mencoba satu per satu? Bayangkan barisan domino yang tak berujung. Semua domino pasti roboh asalkan dua syarat dipenuhi: domino pertama didorong, dan setiap domino yang roboh pasti merobohkan domino sesudahnya.

PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan tentang bilangan asli n. Jika

1. **kasus dasar**: $P(1)$ benar, dan
2. **langkah induktif**: untuk setiap $k \geq 1$, jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk **semua** bilangan asli n. Anggapan "$P(k)$ benar" pada langkah 2 disebut **hipotesis induksi**.

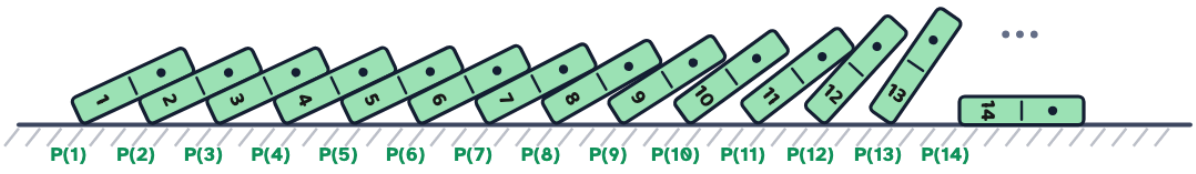
Bahasa sederhana · Gampangnya: buktikan bahwa domino pertama roboh, lalu buktikan bahwa setiap domino pasti menjatuhkan tetangganya. Kalau dua hal itu beres, semua domino roboh, sejauh apa pun barisannya.

LAB MINI **Domino induksi: robohkan semuanya!**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35

① Kasus dasar: domino ke-1 didorong ✓

② Langkah induktif: jika domino ke-k roboh, domino ke-(k+1) ikut roboh ✓



Domino berjatuhan...

Domino roboh
14 dari 14

Kesimpulan
...

Tekan ▶ **Jalankan**. Lalu rusak syaratnya: matikan kasus dasar, atau matikan langkah induktif sehingga muncul celah. Coba juga mengetuk sebuah domino di tengah: domino mana saja yang roboh? Itulah induksi yang dimulai dari $n = n_0$.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Induksi butuh **kedua** syarat; satu saja tidak cukup. Pernyataan palsu "$n = n + 1$" lolos langkah induktif (jika $k = k + 1$, tambahkan 1 ke kedua ruas: $k + 1 = k + 2$), tetapi kasus dasarnya gagal ($1 \neq 2$). Sebaliknya, kasus dasar saja hanyalah satu contoh, bukan bukti.

KERJAKAN BERSAMA **Kerjakan bersama: rumus Gauss dengan induksi**

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ untuk setiap bilangan asli n.

1. **Kasus dasar** $n = 1$: ruas kiri 1, ruas kanan $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Sama. ✓
2. **Hipotesis induksi**: andaikan $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ untuk suatu $k \geq 1$.
3. **Langkah induktif**: $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Inilah rumus untuk $n = k + 1$. ✓
4. **Kesimpulan**: menurut prinsip induksi matematika, rumus berlaku untuk semua bilangan asli n. ∎

Rumus terbukti untuk tak hingga banyak n hanya dengan dua langkah. Perhatikan bahwa langkah 3 memakai hipotesis induksi; itulah ciri bukti induksi yang benar.

RUMUS HIDUP

Jumlah n bilangan asli pertama

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pasangkan suku pertama dengan suku terakhir: setiap pasangan berjumlah n + 1, dan ada n/2 pasangan.

n Bilangan terakhir n

S_n Jumlah

JUMLAH

5.050

🎓 **soal legendaris Gauss kecil: 5.050**

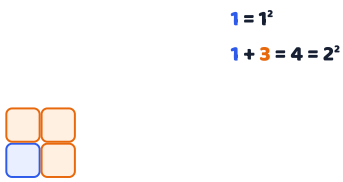
1 + 2 + … + **100** = **100** × **101** : 2 = **5.050**. Dijumlah satu per satu oleh komputer: **5.050**. Sama persis, seperti yang dijamin induksi!

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-INDUKSI-GAUSS

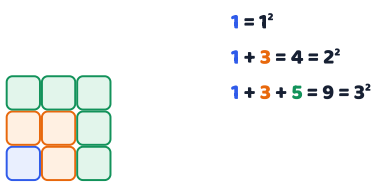
Induksi juga bisa dilihat dengan mata. Tumpuk bilangan ganjil sebagai potongan berbentuk huruf L:



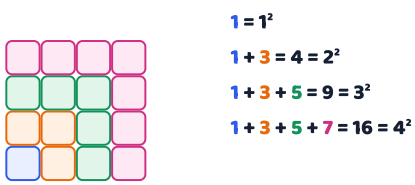
Langkah 1. Mulai dari 1 kotak: $1 = 1^2$. Inilah kasus dasar.



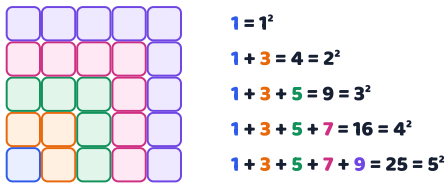
Langkah 2. Tambahkan potongan L berisi 3 kotak (oranye): terbentuk persegi 2×2. Jadi $1 + 3 = 2^2$.



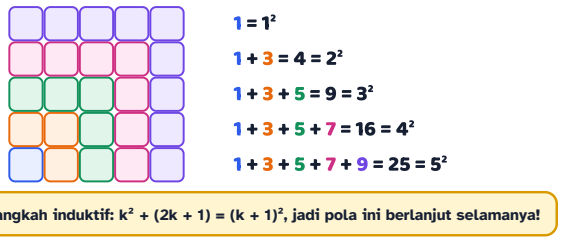
Langkah 3. Tambahkan potongan L berisi 5 kotak: persegi 3×3, jadi $1 + 3 + 5 = 3^2$.



Langkah 4. Potongan L berikutnya berisi 7 kotak: persegi 4×4.



Langkah 5. Potongan L berisi 9 kotak: persegi 5×5. Bilangan ganjil ke-n adalah $2n - 1$.



Langkah 6. Inilah langkah induktif dalam gambar: persegi $k \times k$ ditambah potongan L berisi $2k + 1$ kotak selalu menjadi persegi $(k + 1) \times (k + 1)$, karena $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Jadi $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ untuk semua n.

ADU CEPAT

Jumlah kilat hasil induksi

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Untuk 1 + 2 + … + n, pakai n(n + 1)/2. Untuk 1 + 3 + 5 + … + (2n − 1), jawabannya n^2. Cari dulu banyak sukunya!

MATEMATIKA NUSANTARA

Dalam dongeng **Kancil dan Buaya**, Kancil ingin menyeberangi sungai yang penuh buaya. Ia mengaku diutus raja untuk menghitung buaya, lalu meminta mereka berbaris dari tepi ke tepi. Sambil berseru "satu, dua, tiga...", Kancil melompat dari punggung ke punggung. Itulah induksi! Kancil pasti sampai di seberang karena (1) ia bisa melompat dari tepi ke buaya pertama (kasus dasar), dan (2) dari setiap buaya ia bisa melompat ke buaya berikutnya (langkah induktif).

LANJUT · IB & OLIMPIADE

"BUKTI" BAHWA SEMUA KUDA SEWARNA: DI MANA SALAHNYA?

Klaim: dalam setiap kelompok berisi n kuda, semua kudanya sewarna. Kasus dasar $n = 1$ jelas benar. Langkah: dari $k + 1$ kuda, singkirkan kuda pertama; sisa k kuda sewarna (hipotesis). Singkirkan kuda terakhir; sisa k kuda juga sewarna. Kedua kelompok "beririsan", jadi semua $k + 1$ kuda sewarna. Di mana salahnya? Langkah dari $k = 1$ ke $k + 1 = 2$: kedua kelompok berisi satu kuda dan **tidak beririsan** sama sekali. Satu domino rusak di awal, dan seluruh barisan berhenti. Pelajaran olimpiade: periksa bahwa langkah induktif berlaku untuk **setiap** k, termasuk yang terkecil.

Cek Cepat

Jika p benar dan q salah, pernyataan manakah yang bernilai benar?

- $p \wedge q$
- $p \Rightarrow q$
- $p \vee q$
- $p \Leftrightarrow q$

Kontraposisi dari "Jika hujan, maka Ayu membawa payung" adalah...

- Jika Ayu tidak membawa payung, maka tidak hujan.
- Jika Ayu membawa payung, maka hujan.
- Jika tidak hujan, maka Ayu tidak membawa payung.
- Hujan dan Ayu tidak membawa payung.

Dalam bukti dengan induksi, setelah membuktikan $P(1)$, langkah berikutnya adalah...

mencoba $P(2)$, $P(3)$, dan $P(4)$ satu per satu

membuktikan $P(k)$ untuk semua k sekaligus

menganggap $P(k+1)$ benar lalu membuktikan $P(k)$

menganggap $P(k)$ benar lalu membuktikan $P(k+1)$

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: detektif iklan

Bahan: koran, majalah, brosur, spanduk, atau iklan di TV/HP; buku catatan; pulpen dua warna.

1. Kumpulkan lima slogan iklan atau kalimat promosi (boleh dari spanduk di pinggir jalan).
2. Tulis setiap slogan dalam bentuk "Jika p, maka q". Contoh: "Juara memakai sepatu ini" menjadi "Jika seseorang juara, maka ia memakai sepatu ini".
3. Tulis konvers dan kontraposisi setiap kalimat.
4. Garis bawahi dengan warna biru kalimat yang *benar-benar dikatakan* iklan, dan dengan warna merah kalimat yang *ingin dipercaya* pembuat iklan.
5. Diskusikan dengan keluargamu: apakah iklan itu menyelundupkan konvers?

Pertanyaan: Dari lima iklan, berapa yang mengandalkan kesalahan konvers? Tulis ulang satu slogan agar jujur secara logika, tetapi tetap menarik.

RINGKASAN KILAT

Bab 35 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menentukan nilai kebenaran **pernyataan majemuk** (negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi) dengan tabel kebenaran
- membedakan **implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi**, serta mengenali penalaran yang menyesatkan
- memakai **kuantor** "semua" dan "ada", menyusun ingkarannya, dan membantah klaim dengan **contoh penyangkal**
- menyusun **bukti langsung**, bukti dengan kontraposisi, dan **bukti dengan kontradiksi** (misalnya $\sqrt{2}$ irasional)
- membuktikan rumus dengan **induksi matematika**, si efek domino

Istilah kunci

pernyataan | Pernyataan | kalimat terbuka | pernyataan majemuk | Negasi | Konjungsi | Disjungsi | Implikasi | Biimplikasi | konvers | invers | kontraposisi | kuantor | Kuantor universal | Kuantor eksistensial | contoh penyangkal

Rumus penting

$$B = 2^n$$

Banyak baris tabel kebenaran. Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan nilai, jadi setiap pernyataan baru menggandakan banyak baris tabel.

$$m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

Prinsip sarang merpati. Jika n merpati masuk ke k sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit n/k merpati, dibulatkan ke atas.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Jumlah n bilangan asli pertama. Pasangkan suku pertama dengan suku terakhir: setiap pasangan berjumlah n + 1, dan ada n/2 pasangan.

Jangan sampai terjebak

- Dalam matematika, "atau" berarti salah satu atau keduanya (inklusif).
- Dari $p \Rightarrow q$ dan q, kita tidak boleh menyimpulkan p.
- Ingkaran "Semua siswa hadir" adalah "Ada siswa yang tidak hadir", bukan "Semua siswa tidak hadir".

Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=35

Teka-teki untuk Bab 36

Warung Bu Sri punya dua cabang. Hari ini cabang Pasar menjual 20 porsi nasi uduk dan 15 porsi lontong sayur, sedangkan cabang Stasiun menjual 10 porsi nasi uduk dan 25 porsi lontong sayur. Harga nasi uduk Rp8.000 dan lontong sayur Rp6.000. Berapa pendapatan tiap cabang? Bisakah kamu menuliskan semua angka itu sebagai dua tabel yang "dikalikan" sekaligus?

▼ Intip petunjuk

Pasar: $20 \times 8.000 + 15 \times 6.000 =$ Rp250.000. Stasiun: $10 \times 8.000 + 25 \times 6.000 =$ Rp230.000. Pola "baris kali kolom" ini adalah perkalian **matriks**, tabel angka yang bisa dihitung seperti bilangan. Itulah Bab 36!

36 Matriks: Tabel Ajaib yang Bisa Berhitung

Catatan stok warung, harga paket nasi, karakter game yang berputar, sampai pesan rahasia: semuanya bisa ditulis sebagai kotak berisi angka. Begitu angka-angka itu disusun rapi, kotak itu ternyata bisa dijumlah, dikali, bahkan "dibalik".

Setelah bab ini, kamu bisa

- membaca **matriks** sebagai tabel: ordo, baris, kolom, dan elemen a_{ij};
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan skalar, dan **mengalikan dua matriks** dengan aturan baris × kolom;
- menghitung **determinan** dan **invers** matriks 2 × 2, serta memaknai determinan sebagai faktor pengali luas;
- menyelesaikan **sistem persamaan linear** dua variabel dengan invers matriks;
- memakai matriks untuk **rotasi, refleksi, dilatasi**, menemukan pola pangkat matriks, dan membuat **sandi rahasia**.

PESAN RAHASIA DI WARUNG BU SARI

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

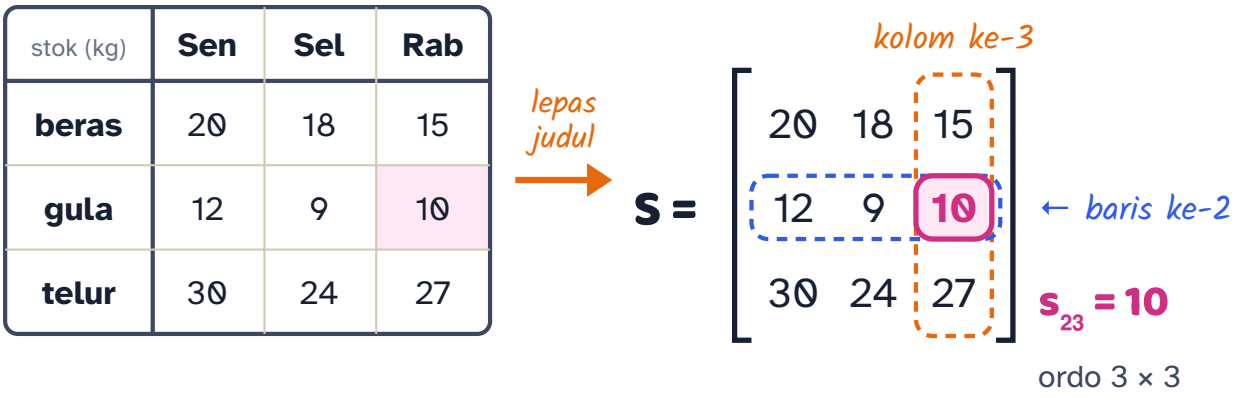
Dimas memutar gambar kancil 90° (berlawanan arah jarum jam, pusat O), lalu mencerminkannya terhadap sumbu-x. Ayu melakukan dua langkah yang sama dengan urutan terbalik: cermin dulu, baru putar. Bagaimana hasil akhir mereka?

- Pasti sama persis, karena langkah-langkahnya sama.
- Bentuk dan letaknya sama, hanya warnanya yang tertukar.
- Berbeda: kedua kancil menghadap ke arah yang berlawanan.
- Tidak bisa dibandingkan, karena cermin dan putar tidak bisa digabung.

Jawabannya: berbeda. Urutan Dimas sama saja dengan mencerminkan terhadap garis $y = -x$, sedangkan urutan Ayu sama dengan mencerminkan terhadap garis $y = x$. Di bab ini kamu akan melihat sebabnya: setiap transformasi adalah sebuah matriks, dan pada perkalian matriks, **urutan menentukan hasil**. Buktikan sendiri di Grafik Hidup subbab 36.6!

36.1 Matriks: tabel tanpa judul yang bisa berhitung

Di akhir Bab 35 kamu ditantang menyusun data penjualan dalam tabel. Ayu sudah melakukannya di komik: baris untuk barang, kolom untuk hari. Sekarang tambahkan satu langkah lagi. Lepaskan judul baris dan kolomnya, lalu kurung angka-angkanya. Jadilah sebuah **matriks**.



Angka 10 di baris gula, kolom Rabu menjadi elemen s_{23}: **baris dulu, baru kolom**.

DEFINISI

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom, lalu ditulis di dalam kurung. Setiap bilangan di dalamnya disebut **elemen** (entri). Matriks dengan m baris dan n kolom dikatakan berordo $m \times n$ (dibaca "m kali n"). Elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j ditulis a_{ij}. Matriks biasanya diberi nama huruf kapital: A, B, S.

Bahasa sederhana · Gampangnya, matriks itu seperti tabel di buku catatan warung yang judulnya sudah kita hafal. Angka 10 di baris gula, kolom Rabu, artinya stok gula hari Rabu 10 kg. Yang penting: **baris dulu, baru kolom**, seperti alamat "Gang 2, Rumah nomor 3".

Beberapa matriks punya nama khusus:

- **Matriks persegi**: banyak baris sama dengan banyak kolom, misalnya ordo 2 × 2 atau 3 × 3 seperti S.
- **Matriks baris** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan **matriks kolom** $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$: hanya punya satu baris atau satu kolom.
- **Matriks nol** O: semua elemennya 0.
- **Matriks identitas** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: angka 1 di diagonal utama dan 0 di tempat lain. Ia berperan seperti angka 1 pada perkalian bilangan.

Dua matriks dikatakan **sama** jika ordonya sama dan setiap elemen yang seletak juga sama. Jadi $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ langsung memberi $x = 7$ dan $y = -2$.

CONTOH **Membaca catatan stok**

Dari matriks stok S di atas: (a) berapa ordonya? (b) Berapa s_{31}, dan apa artinya? (c) Hari apa stok beras paling sedikit?

1. Ada 3 baris (beras, gula, telur) dan 3 kolom (Senin, Selasa, Rabu), jadi ordonya 3×3.
2. s_{31} ada di baris 3 (telur), kolom 1 (Senin): nilainya 30. Artinya stok telur hari Senin 30 kg.
3. Beras ada di baris 1: 20, 18, 15. Yang terkecil 15, di kolom 3 (Rabu).

(a) 3×3; (b) $s_{31} = 30$; (c) Rabu. Ingat urutan alamat elemen: baris dulu, baru kolom.

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 2.000 tahun lalu, kitab Tiongkok *Sembilan Bab tentang Seni Matematika* (*Jiuzhang Suanshu*) sudah menyusun koefisien sistem persamaan dalam kotak-kotak batang hitung, lalu menghilangkan variabel baris demi baris. Cara itu kini kita kenal sebagai eliminasi Gauss. Istilah *matrix* sendiri baru dipakai James Joseph Sylvester sekitar tahun 1850. Kata Latin itu berarti "rahim" atau "induk": Sylvester melihat matriks sebagai induk tempat determinan-determinan "lahir". Lalu Arthur Cayley (1858) memperlakukan matriks seperti bilangan yang bisa dijumlah, dikali, dan dibalik.

36.2 Operasi matriks: jumlah, selisih, skalar, transpos

Bu Sari mencatat beras dan gula yang **masuk** (kg) pada Senin dan Selasa, untuk minggu lalu dan minggu ini. Bentuk tabelnya sama persis. Total dua minggu didapat dengan menjumlahkan angka yang **seletak**:

$$\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 25 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

ATURAN OPERASI DASAR

- **Penjumlahan dan pengurangan** hanya untuk matriks berordo sama: jumlahkan (kurangkan) elemen yang seletak, $(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- **Perkalian skalar** kA: setiap elemen dikali k, yaitu $(kA)_{ij} = k\,a_{ij}$.
- **Transpos** A^T: baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Matriks $m \times n$ menjadi $n \times m$.

Penjumlahan matriks bersifat komutatif ($A + B = B + A$) dan asosiatif, karena di setiap sel kita hanya menjumlahkan bilangan biasa.

CONTOH **Harga naik 10 persen**

Daftar harga (ribu rupiah) ditulis $H = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, dengan baris: ayam, ikan dan kolom: warung A, warung B. Semua harga naik 10%. Tentukan matriks harga baru dan transposnya.

1. Naik 10% berarti dikali 1,1: $1{,}1H = \begin{pmatrix} 13{,}2 & 16{,}5 \\ 8{,}8 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Transposnya menukar baris dan kolom: $(1{,}1H)^T = \begin{pmatrix} 13{,}2 & 8{,}8 \\ 16{,}5 & 11 \end{pmatrix}$. Sekarang baris = warung dan kolom = lauk.

Harga ayam di warung A menjadi Rp13.200, ikan di warung B Rp11.000, dan seterusnya. Transpos tidak mengubah datanya, hanya cara menatanya.

AWAS JEBAKAN

Matriks berordo berbeda tidak bisa dijumlahkan atau dikurangkan. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bukan $\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$: penjumlahan itu memang **tidak terdefinisi**, sama seperti menjumlahkan dua tabel stok yang bentuknya berbeda.

36.3 Perkalian matriks: baris kali kolom

Dimas dan Ayu memesan nasi, ayam, dan es teh. Harga di warung Bu Sari dan warung Pak Jono berbeda. Berapa total belanja masing-masing di tiap warung? Untuk setiap pasangan (pembeli, warung), kita mengalikan **banyak pesanan** dengan **harga** tiap menu, lalu menjumlahkannya. Pola "kalikan lalu jumlahkan" inilah perkalian matriks.



Langkah 1. Matriks pesanan A berordo 2 × 3 (2 pembeli, 3 menu) dan matriks harga B berordo 3 × 2 (3 menu, 2 warung). Banyak kolom A sama dengan banyak baris B, jadi AB ada dan berordo 2 × 2.



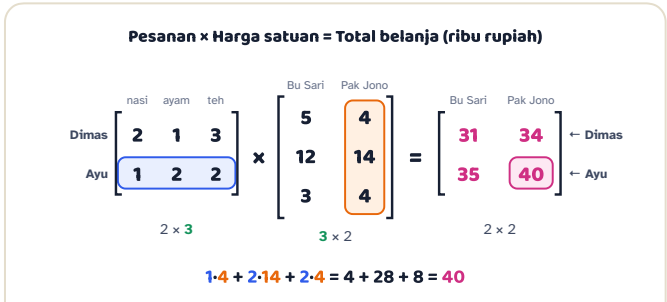
Langkah 2. Elemen baris 1, kolom 1: telusuri **baris 1** A (pesanan Dimas) dan **kolom 1** B (harga di Bu Sari). Kalikan pasangan yang bersesuaian, lalu jumlahkan: $2 \cdot 5 + 1 \cdot 12 + 3 \cdot 3 = 31$.



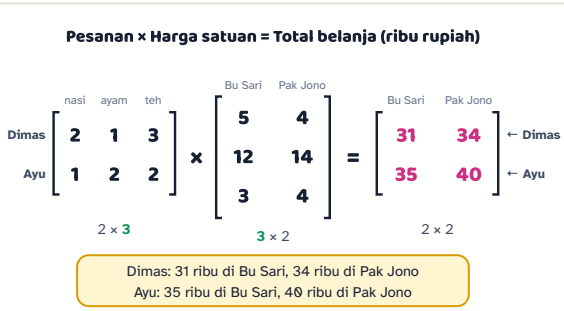
Langkah 3. Baris 1 × kolom 2: pesanan Dimas dengan harga di Pak Jono, $2 \cdot 4 + 1 \cdot 14 + 3 \cdot 4 = 34$.



Langkah 4. Baris 2 × kolom 1: pesanan Ayu dengan harga di Bu Sari, $1 \cdot 5 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 35$.



Langkah 5. Baris 2 × kolom 2: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 14 + 2 \cdot 4 = 40$. Matriks hasilnya sudah lengkap.



Langkah 6. Baca hasilnya: elemen c_{ij} adalah total belanja pembeli ke-i di warung ke-j. Dimas dan Ayu sama-sama lebih hemat di warung Bu Sari.

PERKALIAN MATRIKS (BARIS × KOLOM)

Jika A berordo $m \times n$ dan B berordo $n \times p$, hasil kali AB berordo $m \times p$, dengan

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

yaitu baris ke-i matriks A "dikalikan" dengan kolom ke-j matriks B. Syaratnya: banyak kolom A = banyak baris B. Perkalian matriks bersifat asosiatif, $(AB)C = A(BC)$, distributif, $A(B + C) = AB + AC$, dan $AI = IA = A$. Tetapi pada umumnya $AB \neq BA$.

Bahasa sederhana · Cara gampang: telunjuk kiri berjalan **mendatar** di sepanjang baris matriks kiri, telunjuk kanan berjalan **turun** di sepanjang kolom matriks kanan. Setiap kali kedua telunjuk melangkah, kalikan dua angka yang ditunjuk. Terakhir, jumlahkan semua hasilnya.

✏️ **TRIK KAK LINTANG: CEK ORDO SEPERTI DOMINO**

Tulis ordonya berdampingan: $(2 \times 3)(3 \times 2)$. Angka yang bersentuhan di tengah harus sama, seperti sisi domino yang ditempel. Angka di kedua ujung adalah ordo hasilnya: 2×2. Kalau angka tengahnya beda, misalnya $(2 \times 3)(2 \times 3)$, dominonya tidak bisa ditempel: perkalian tidak terdefinisi.

⏱ ADU CEPAT **Baris × kolom kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pasangkan yang pertama dengan yang pertama, yang kedua dengan yang kedua, kalikan, lalu jumlahkan: ac + bd.

KERJAKAN BERSAMA **AB dan BA, kembar atau bukan?**

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **dan** $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$**. Hitung** AB **dan** BA**.**

1 $AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2 $BA = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

$AB \neq BA$**. Bahkan untuk matriks 2 × 2 yang sederhana, menukar urutan perkalian mengubah hasilnya.**

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Perkalian matriks bukan perkalian elemen yang seletak, dan urutannya penting: pada umumnya $AB \neq BA$. Akibatnya rumus aljabar biasa tidak selalu berlaku: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, bukan $A^2 + 2AB + B^2$.

36.4 Determinan: faktor pengali luas

Setiap matriks persegi menyimpan satu bilangan istimewa yang disebut **determinan**. Untuk matriks 2 × 2 rumusnya pendek sekali. Namun maknanya jauh lebih menarik daripada rumusnya: determinan adalah **faktor**

pengali luas.

DEFINISI

Determinan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah bilangan

$$\det A = |A| = ad - bc$$

yaitu hasil kali diagonal utama dikurangi hasil kali diagonal samping.

Mengapa disebut faktor luas? Matriks A dapat dibaca sebagai mesin yang memindahkan setiap titik: $(x, y) \mapsto (ax + by,\ cx + dy)$. Titik $(1, 0)$ pergi ke (a, c), yaitu **kolom pertama**, dan titik $(0, 1)$ pergi ke (b, d), yaitu **kolom kedua**. Akibatnya, persegi satuan berubah menjadi jajargenjang yang dibentuk oleh kedua kolom itu.

Tebak Dulu!

Matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mengubah persegi satuan (luas 1) menjadi sebuah jajargenjang. Berapa luas jajargenjang itu?

- 7, jumlah semua elemennya.
- 6, hasil kali diagonal utama.
- 5.
- Tidak bisa dihitung tanpa penggaris.

Jawabannya: 5. Luasnya $|\det| = |2 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = 5$. Diagonal samping "mencuri" luas karena kedua kolom saling condong. Lihat buktinya di animasi di bawah, lalu bermainlah dengan Grafik Hidup.

GRAFIK HIDUP

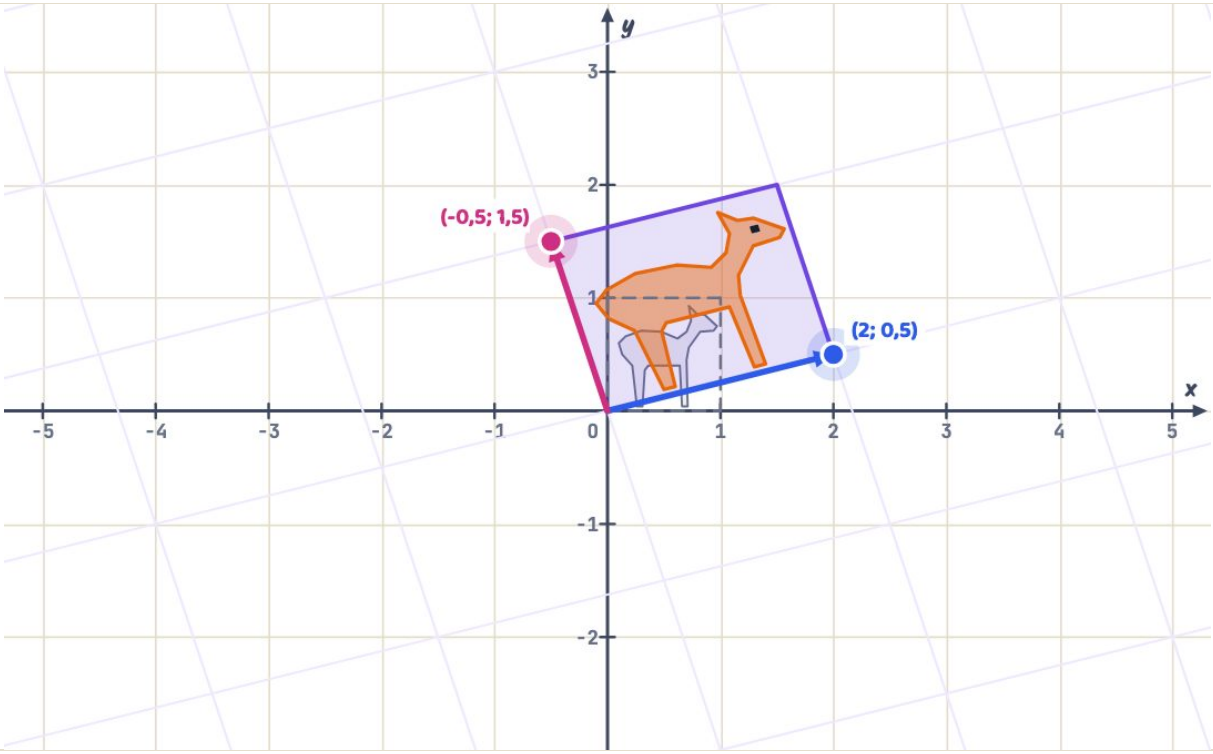
Mesin transformasi: persegi satuan dan si kancil

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

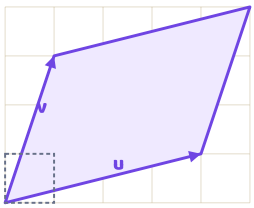
$$\begin{aligned} \det A &= (2)(1{,}5) - (-0{,}5)(0{,}5) \\ &= 3{,}25 \\ \text{luas baru} &= 3{,}25 \times \text{luas lama} \end{aligned}$$

Kolom biru adalah tujuan titik (1, 0); kolom magenta adalah tujuan titik (0, 1). Seluruh bidang ikut terbawa, dan setiap luas dikali |det A|.



det A = ad − bc	Luas bayangan persegi	Luas kancil: asal → bayangan
3,25	3,25	0,252 → 0,82

Seret titik biru (tujuan titik (1, 0)) dan titik magenta (tujuan titik (0, 1)), atau geser slider. Coba buat: rotasi 90° ($a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$), cermin terhadap sumbu-y, dilatasi 2 kali, dan kancil yang gepeng menjadi garis (det = 0). Perhatikan: luas kancil selalu dikali $|\det A|$.



Kolom-kolom matriks A:

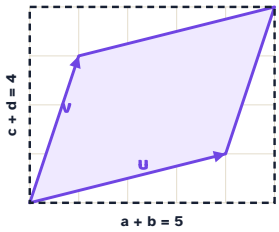
kolom 1: u = (4, 1)

kolom 2: v = (1, 3)

Persegi satuan (putus-putus) menjadi jajargenjang ungu.

Berapa luasnya?

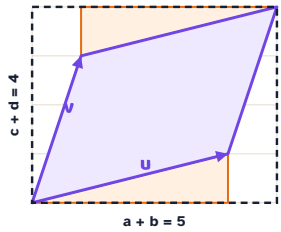
Langkah 1. Matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ membawa titik (1, 0) ke $u = (4, 1)$ dan titik (0, 1) ke $v = (1, 3)$. Persegi satuan (luas 1) berubah menjadi jajargenjang ungu.



Bungkus dengan kotak besar:

(a + b)(c + d) = 5 × 4 = 20

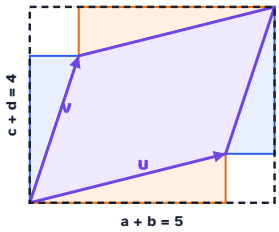
Langkah 2. Bungkus jajargenjang dengan persegi panjang bersisi $a + b = 5$ dan $c + d = 4$. Luasnya $5 \times 4 = 20$.



Buang 2 segitiga oranye:

2 × ½ · a · c = ac = 4 × 1 = 4

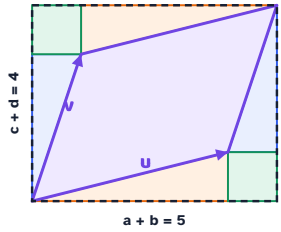
Langkah 3. Di bawah dan di atas ada dua segitiga siku-siku oranye dengan kaki a dan c. Luas keduanya $2 \times \frac{1}{2}ac = ac = 4$.



Buang 2 segitiga biru:

2 × ½ · b · d = bd = 1 × 3 = 3

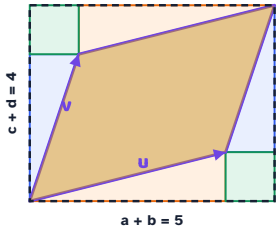
Langkah 4. Di kiri dan kanan ada dua segitiga biru dengan kaki b dan d. Luas keduanya $bd = 3$.



Buang 2 persegi panjang hijau:

2 × b · c = 2 × 1 × 1 = 2

Langkah 5. Di dua pojok tersisa persegi panjang hijau berukuran $b \times c$. Luas keduanya $2bc = 2$.



sisa = 20 − 4 − 3 − 2 = 11

ad − bc = 4·3 − 1·1 = 11 ✓

luas = ad − bc

Langkah 6. Luas jajargenjang $= (a+b)(c+d) - ac - bd - 2bc = ad - bc$. Di sini $20 - 4 - 3 - 2 = 11 = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1$. Determinan memang faktor pengali luas!

RUMUS HIDUP

Determinan matriks 2 × 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$$

Kalikan diagonal utama, kurangi dengan hasil kali diagonal samping. Angkanya memberi tahu berapa kali lipat luas berubah, dan tandanya memberi tahu apakah gambar terbalik.

- a Elemen a (kiri atas)
- b Elemen b (kanan atas)
- c Elemen c (kiri bawah)
- d Elemen d (kanan bawah)
- $\det A$ Determinan



Diagonal utama: **4 × 3 = 12**. Diagonal samping: **1 × 1 = 1**. Selisihnya **11**. Persegi satuan (luas 1) berubah menjadi jajargenjang dengan luas |det| = **11**. **Tanda positif: arah putar gambar tetap.**

Cek satuan: determinan tidak bersatuan: ia adalah faktor pengali. Jika luas asal dalam cm², luas bayangan juga dalam cm².

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MAT-DETERMINAN

SIFAT DETERMINAN (MATRIKS 2 × 2)

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$: melakukan dua transformasi berarti mengalikan dua faktor luas.
- $\det(kA) = k^2 \det A$, $\det(A^T) = \det A$, dan $\det I = 1$.
- Jika $\det A = 0$, bidang digepengkan menjadi garis atau titik.

Bukti $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ dengan aljabar

Misalkan $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Maka $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ dan

$$\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg).$$

Setelah dikalikan, suku $acef$ dan $bdgh$ saling menghapus, sehingga tersisa $adeh + bcfg - adfg - bceh = ad(eh-fg) - bc(eh-fg) = (ad-bc)(eh-fg)$. Terbukti.

AWAS JEBAKAN

Untuk matriks 2 × 2, $\det(kA) = k^2 \det A$, bukan $k \det A$. Mengalikan matriks dengan k meregangkan bidang k kali ke arah mendatar **dan** k kali ke arah tegak, jadi luasnya dikali k^2. Contoh: $\det(3I) = 9$, bukan 3.

ADU CEPAT **Determinan kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Diagonal utama dikurangi diagonal samping: ad – bc. Hati-hati dengan tanda: dikurangi bilangan negatif sama dengan ditambah.

36.5 Invers matriks dan sistem persamaan linear

Pada bilangan, 5 punya "pasangan pembatal" $\frac{1}{5}$, karena $5 \times \frac{1}{5} = 1$. Pada matriks, peran angka 1 dimainkan matriks identitas I. Matriks A^{-1} yang memenuhi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ disebut **invers** dari A. Ia membatalkan kerja A: kalau A memutar kancil 30°, maka A^{-1} memutarnya kembali 30° ke arah sebaliknya.

INVERS MATRIKS 2 × 2

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $\det A = ad - bc \neq 0$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Jika $\det A = 0$, matriks A tidak punya invers dan disebut **matriks singular**.

Bukti: kalikan saja!

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (ad - bc)\, I$. Jadi jika kedua ruas dibagi $ad - bc$ (boleh, asalkan tidak nol), hasilnya I.

Mengapa matriks singular tidak punya invers? Jika ada A^{-1}, maka $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$, padahal $0 \times$ bilangan apa pun $= 0$. Secara geometri: A menggepengkan bidang menjadi garis, sehingga banyak titik berbeda jatuh ke tempat yang sama, dan tidak ada cara mengembalikannya.

TRIK KAK LINTANG: TUKAR–NEGASI–BAGI

Tukar posisi a dan d (diagonal utama). **Negasi**-kan b dan c (diagonal samping) tanpa memindahkannya. **Bagi** semuanya dengan determinan. Setelah itu, cek dengan mengalikan: hasilnya harus I.

KERJAKAN BERSAMA **Invers yang bilangan bulat**

Tentukan invers $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dan periksa jawabanmu.

1. $\det A = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1$.
2. Tukar–Negasi–Bagi: $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Cek: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-14 & -10+10 \\ 21-21 & -14+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$. **Karena $\det A = 1$, inversnya berisi bilangan bulat.**

RUMUS HIDUP **Invers matriks 2 × 2**

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tukar a dan d, beri tanda negatif pada b dan c, lalu bagi semuanya dengan determinan. Kalau determinannya nol, tidak ada yang bisa dibagi: matriksnya tidak punya invers.

a Elemen a | b Elemen b | c Elemen c | d Elemen d | $\frac{1}{\det A}$ Faktor pengali 1/det

FAKTOR PENGALI 1/DET

1

✨ **det = ±1: invers berisi bilangan bulat**

det = **1**, jadi faktor pengalinya **1**. Baris 1 invers: (**1**; **-3**). Baris 2 invers: (**-1**; **4**). Cek elemen kiri atas $A \cdot A^{-1}$: **4**·(**1**) + **3**·(**-1**) = **1**. Jika muncul '—', determinannya 0 sehingga invers tidak ada.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MAT-INVERS

Sekarang kekuatan invers terlihat. Sistem persamaan linear dua variabel (Bab 10)

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

bisa ditulis sebagai **satu** persamaan matriks $AX = B$, dengan

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{B}$$

Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} **dari kiri**: $A^{-1}AX = A^{-1}B$, jadi $IX = A^{-1}B$, atau

$$X = A^{-1}B$$

COBA SENDIRI **Menebak harga dari dua paket nasi**

Warung Bu Sari menjual Paket Hemat (2 porsi nasi + 1 ayam goreng) seharga Rp24.000 dan Paket Keluarga (3 porsi nasi + 4 ayam goreng) seharga Rp66.000. Berapa harga satu porsi nasi dan satu ayam goreng?

1. Misalkan x = harga nasi dan y = harga ayam (ribu rupiah): $2x + y = 24$ dan $3x + 4y = 66$. Jadi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 66 \end{pmatrix}$.
2. $\det A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$, sehingga $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \cdot 24 - 1 \cdot 66 \\ -3 \cdot 24 + 2 \cdot 66 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.
4. Cek: $2 \cdot 6 + 12 = 24$ ✓ dan $3 \cdot 6 + 4 \cdot 12 = 18 + 48 = 66$ ✓.

Satu porsi nasi Rp6.000 dan satu ayam goreng Rp12.000. Ubah isi paketnya di Rumus Hidup berikut!

RUMUS HIDUP

SPL dengan invers matriks

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Sistem $ax + by = p$ dan $cx + dy = q$ ditulis $AX = B$. Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kiri, maka $X = A^{-1}B$.

- a Nasi di paket 1 porsi
- b Ayam di paket 1 potong
- c Nasi di paket 2 porsi
- d Ayam di paket 2 potong
- p Harga paket 1 ribu Rp
- q Harga paket 2 ribu Rp
- x Harga 1 porsi nasi ribu Rp

HARGA 1 PORSI NASI

6

ribu Rp

✨ **kedua harga bulat**

det = **2·4 − 1·3 = 5**. Harga nasi x = (**4·24 − 1·66**) : **5 = 6**; harga ayam y = (**2·66 − 3·24**) : **5 = 12**. **Kedua harga positif: data paketnya masuk akal.**

Cek satuan: a, b, c, d adalah banyak porsi (tanpa rupiah), sedangkan p dan q dalam ribu rupiah. Jadi x dan y juga dalam ribu rupiah per porsi.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MAT-SPL

DETERMINAN NOL DAN DUA GARIS

Di Bab 10, setiap persamaan linear dua variabel adalah sebuah garis. Jika $\det A \neq 0$, kedua garis berpotongan di tepat satu titik: SPL punya penyelesaian tunggal $X = A^{-1}B$. Jika $\det A = 0$, kedua garis sejajar (tidak ada penyelesaian) atau berimpit (tak hingga banyak penyelesaian).

AWAS JEBAKAN

Dari $AX = B$ diperoleh $X = A^{-1}B$, bukan $X = BA^{-1}$. Karena perkalian matriks tidak komutatif, invers harus dikalikan dari sisi yang sama dengan letak A. Di sini BA^{-1} bahkan tidak terdefinisi, karena B berordo 2 × 1.

MITOS

"Dua matriks bisa dikalikan asalkan ordonya sama."

FAKTA

Syaratnya: banyak kolom matriks kiri sama dengan banyak baris matriks kanan. Matriks 2 × 3 tidak bisa dikali matriks 2 × 3, tetapi bisa dikali matriks 3 × 4 (hasilnya 2 × 4).

MITOS

"AB pasti sama dengan BA, seperti 2 × 3 = 3 × 2."

FAKTA

Pada umumnya $AB \neq BA$. Memutar lalu mencerminkan berbeda dengan mencerminkan lalu memutar. Kadang AB ada, tetapi BA malah tidak terdefinisi.

MITOS

"Setiap matriks yang bukan matriks nol pasti punya invers."

FAKTA

Matriks berdeterminan 0 tidak punya invers, misalnya $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Ia menggepengkan bidang menjadi garis, dan informasi yang hilang tidak bisa dikembalikan.

36.6 Matriks transformasi: rotasi, refleksi, dilatasi

Di dalam game, setiap titik pada gambar karakter disimpan sebagai pasangan koordinat (x, y). Untuk memutar, mencerminkan, atau memperbesar karakter, komputer mengalikan setiap titik dengan sebuah **matriks transformasi**. Rahasia untuk menemukan matriksnya cukup satu kalimat.

KOLOM = BAYANGAN

Kolom pertama matriks transformasi adalah bayangan titik $(1,0)$, dan kolom kedua adalah bayangan titik $(0,1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Contoh: rotasi 90° membawa $(1,0)$ ke $(0,1)$ dan $(0,1)$ ke $(-1,0)$, jadi matriksnya $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rotasi sebesar θ membawa $(1,0)$ ke $(\cos\theta, \sin\theta)$ dan $(0,1)$ ke $(-\sin\theta, \cos\theta)$.

Transformasi (pusat O)	Matriks	Bayangan (x,y)	det
Refleksi terhadap sumbu-x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(x,-y)$	–1
Refleksi terhadap sumbu-y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(-x,y)$	–1
Refleksi terhadap garis $y=x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	(y,x)	–1
Refleksi terhadap garis $y=-x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$(-y,-x)$	–1
Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(-y,x)$	1
Rotasi 180°	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(-x,-y)$	1
Rotasi θ	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$(x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$	1
Dilatasi faktor k	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	(kx,ky)	k^2
Gusuran searah sumbu-x	$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(x+ky,y)$	1

Perhatikan kolom det: rotasi dan gusuran tidak mengubah luas (det = 1), refleksi juga tidak mengubah luas tetapi membalik orientasi (det = –1), sedangkan dilatasi mengalikan luas dengan k^2. Untuk transformasi berurutan, kalikan matriksnya: "T_1 dilanjutkan T_2" bermatriks $M_2 M_1$, karena matriks yang **paling kanan bekerja lebih dulu**.

GRAFIK HIDUP

Putar dulu atau cermin dulu?

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

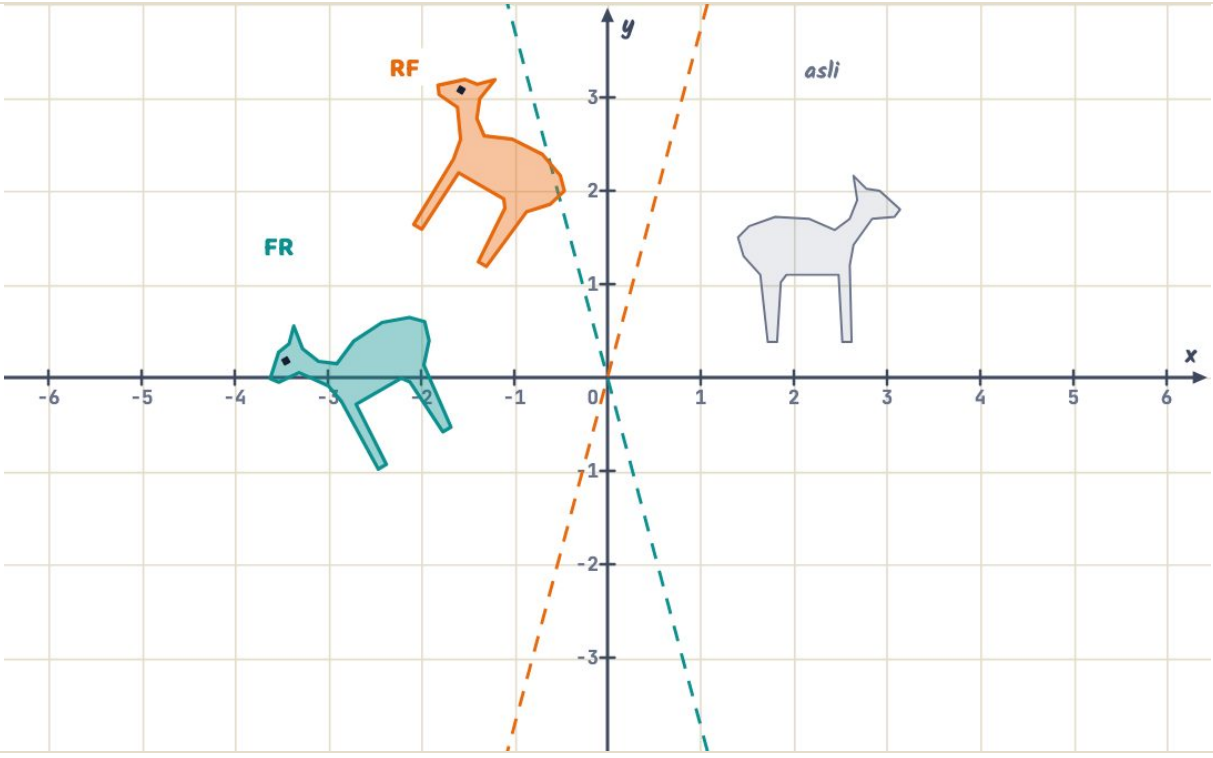
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$RF = \begin{pmatrix} -0{,}87 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}$$

$$FR = \begin{pmatrix} -0{,}87 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}$$

F mencerminkan terhadap sumbu-x, R memutar sejauh θ terhadap O. Pada RF, matriks paling kanan (F) bekerja lebih dulu: cermin dulu, baru putar. Pada FR sebaliknya.



RF ≠ FR: urutan menentukan hasil

θ	Garis cermin RF	Garis cermin FR
150°	75°	-75°

Tekan ▶ **Jalankan** agar sudut θ berputar. Kancil **oranye** = cermin dulu, lalu putar (RF). Kancil **hijau toska** = putar dulu, lalu cermin (FR). Kapan keduanya berimpit? Perhatikan juga: setiap hasil ternyata hanyalah **satu**

pencerminan terhadap garis putus-putus yang warnanya sama.

KERJAKAN BERSAMA **Putar lalu perbesar**

Segitiga dengan titik sudut $P(1,1)$, $Q(4,1)$, $R(1,3)$ dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O, lalu didilatasi dengan faktor 2 (pusat O). Tentukan bayangannya dan luasnya.

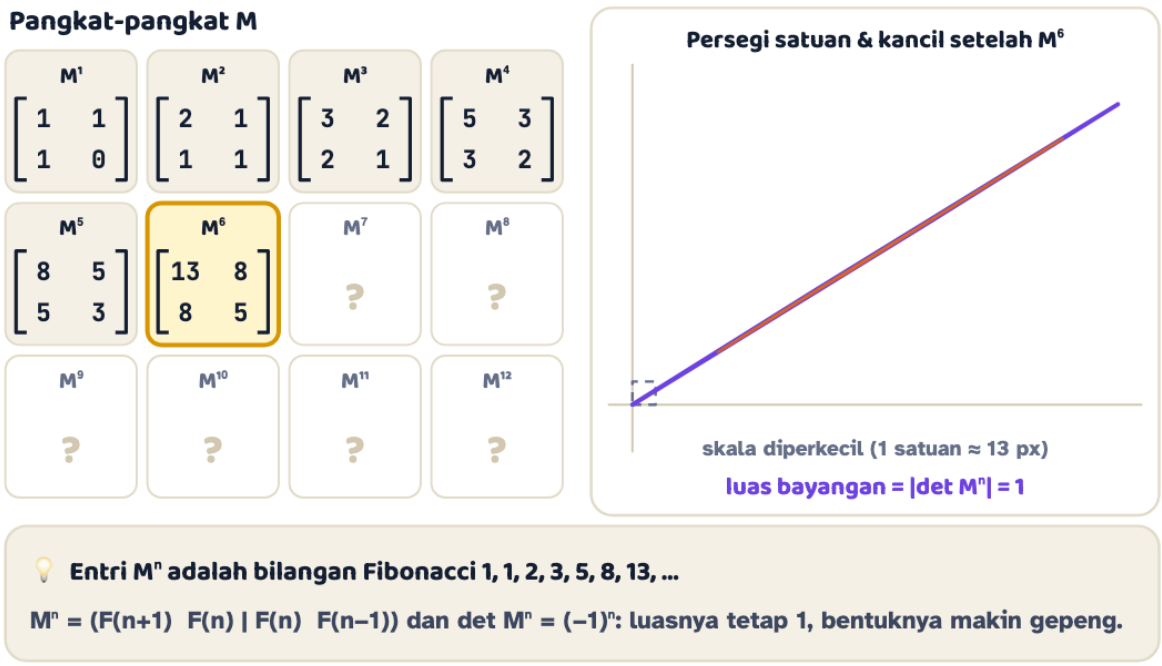
1. Matriks gabungan (rotasi dulu, jadi ditulis paling kanan): $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Bayangan: $P' = (0-2,\ 2+0) = (-2,2)$, $Q' = (0-2,\ 8+0) = (-2,8)$, $R' = (0-6,\ 2+0) = (-6,2)$.
3. Luas asal $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$. Karena $\det M = 0 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 = 4$, luas bayangan $= 4 \times 3 = 12$.

$P'(-2,2)$, $Q'(-2,8)$, $R'(-6,2)$, dengan luas 12. Cek langsung: kaki-kakinya 6 dan 4, jadi luasnya $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ ✓.

Apa yang terjadi jika satu transformasi diulang terus? Itulah **pangkat matriks** $M^n = M \cdot M \cdots M$. Polanya sering mengejutkan, dan soal olimpiade menyukainya.

LAB MINI **Mesin pangkat matriks: cari polanya!**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36



Entri M^n adalah bilangan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

$M^n = (F(n+1)\ \ F(n) \mid F(n)\ \ F(n-1))$ dan $\det M^n = (-1)^n$: luasnya tetap 1, bentuknya makin gepeng.

M^n (baris 1 | baris 2)	det M^n = (det M)^n	Periode ($M^p = I$)
(13 8 | 8 5)	1	tidak ada (tumbuh terus)

Pilih sebuah matriks, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk menghitung $M, M^2, M^3, \ldots$ Kapan hasilnya kembali menjadi I? Matriks mana yang memunculkan bilangan Fibonacci? Ada juga matriks bukan nol yang kuadratnya nol. Temukan!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RAHASIA POLA PANGKAT: TEOREMA CAYLEY–HAMILTON MINI

Untuk setiap matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berlaku

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O.$$

Jadi A^2 selalu bisa ditulis memakai A dan I saja, begitu juga $A^3, A^4, \ldots$ Contoh: matriks Fibonacci $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ punya $a + d = 1$ dan $\det F = -1$, sehingga $F^2 = F + I$, persis aturan Fibonacci! Akibatnya $F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$. Ambil determinan kedua ruas: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (\det F)^n = (-1)^n$. Inilah **identitas Cassini**. Cek $n = 5$: $8 \cdot 3 - 5^2 = -1$ ✓.

36.7 Sandi rahasia: matriks sebagai gembok

Ingat kertas Ancil di komik: **UKGV XAQS RDUW**. Ancil memakai **sandi Hill**. Begini cara kerjanya:

1. Ubah huruf menjadi angka: A = 0, B = 1, …, Z = 25.

2. Kelompokkan pesan berpasangan; setiap pasangan menjadi matriks kolom $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$. Jika banyak hurufnya ganjil, tambahkan huruf X.
3. Kalikan dengan matriks kunci K, lalu ambil **sisa pembagian oleh 26**. Ini aritmetika modulo 26, seperti jam yang angkanya hanya 0 sampai 25. Contoh: $49 \equiv 23 \pmod{26}$, karena $49 = 26 + 23$.
4. Ubah kembali angka menjadi huruf.

Kunci Ancil adalah $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Pasangan KA $= (10, 0)$ disandikan seperti ini:

$$K \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 10 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \to \text{UK}$$

Pasangan NC $= (13, 2)$ menjadi $(32, 21) \equiv (6, 21)$, yaitu GV.

LAB MINI **Mesin sandi Hill: kunci dan gembok matriks**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36



Tulis pesanmu (huruf A–Z, paling banyak 24 huruf), atur kunci K, lalu tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat setiap pasangan disandikan. Tekan 📜 **Pesan Ancil** untuk membuka pesan di komik, lalu 🔁 **Balik arah** untuk menyandikannya lagi. Terakhir, coba 🧨 **Kunci bermasalah**: mengapa pesan dengan kunci itu mustahil dibuka?

Untuk membuka sandi, kita butuh K^{-1} dalam modulo 26. Masalahnya, "membagi dengan $\det K = 5$" tidak bisa dilakukan seperti biasa. Gantinya, cari bilangan yang jika dikali 5 bersisa 1: $5 \times 21 = 105 = 4 \times 26 + 1$, jadi 21

berperan sebagai "$\frac{1}{5}$". Maka

$$K^{-1} \equiv 21 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & -63 \\ -21 & 42 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

COBA SENDIRI **Membuka pesan Ancil**

Buka dua pasangan pertama pesan Ancil, UK dan GV, dengan $K^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$.

1. UK $= (20, 10)$: $\begin{pmatrix} 6 \cdot 20 + 15 \cdot 10 \\ 5 \cdot 20 + 16 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 260 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, karena $270 = 10 \cdot 26 + 10$ dan $260 = 10 \cdot 26$. Hasilnya KA.

2. GV $= (6, 21)$: $\begin{pmatrix} 36 + 315 \\ 30 + 336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 351 \\ 366 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$, karena $351 = 13 \cdot 26 + 13$ dan $366 = 14 \cdot 26 + 2$. Hasilnya NC.

Pesan dimulai dengan KANC... Selesaikan sisanya dengan tombol 📜 Pesan Ancil di Lab Mini. (Petunjuk: Ancil sedang memuji dirinya sendiri.)

TAMU DARI MASA LALU

Sandi ini diperkenalkan Lester S. Hill, matematikawan Amerika, pada tahun 1929. Sandi Hill termasuk sandi pertama yang memakai aljabar matriks secara terang-terangan. Kelemahannya: jika musuh mengetahui beberapa pasangan teks asli beserta sandinya, kuncinya bisa dihitung balik... dengan invers matriks juga! Sistem keamanan modern memakai matematika yang jauh lebih rumit.

MATEMATIKA NUSANTARA: SANDI PRAMUKA

Dalam kegiatan Pramuka, banyak siswa Indonesia belajar sandi: sandi Morse, semafor, sandi kotak, sandi angka, dan lain-lain. Sebagian besar sandi itu selalu mengganti satu huruf dengan lambang yang sama, sehingga bisa dibongkar dengan menghitung huruf yang paling sering muncul (dalam bahasa Indonesia, huruf A sangat sering muncul). Sandi Hill lebih licik: huruf yang sama bisa berubah menjadi huruf yang berbeda, tergantung pasangannya. Dengan kunci Ancil, KA menjadi UK, tetapi KI menjadi SQ. Huruf K yang sama berubah menjadi U atau S!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

KUNCI YANG SAH: FPB(DET, 26) = 1

Dalam modulo 26, bilangan D punya "kebalikan" (bilangan D' dengan $DD' \equiv 1$) jika dan hanya jika $\gcd(D, 26) = 1$, yaitu D ganjil dan bukan kelipatan 13. Hanya 12 sisa yang memenuhi: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25. Kunci $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ punya det = 2, bukan nol, tetapi tetap tidak sah: MA dan ZA sama-sama tersandikan menjadi YW, jadi penerima tidak mungkin tahu mana yang asli. Dari $26^4 = 456.976$ matriks kunci yang mungkin, hanya 157.248 (sekitar 34%) yang sah.

Kasir warung

Matriks pesanan dikali matriks harga memberi total belanja setiap pelanggan di setiap warung dalam sekali hitung.

Grafika game

Saat karakter berputar, membesar, atau bercermin, komputer mengalikan koordinat ribuan titiknya dengan matriks, puluhan kali per detik.

Sandi & keamanan data

Sandi Hill memakai matriks sebagai kunci. Pengamanan data modern juga penuh aljabar, walaupun jauh lebih rumit.

Foto digital

Foto di HP adalah matriks raksasa berisi angka kecerahan piksel. Filter "tajam" dan "buram" adalah hitungan pada matriks itu.

Peta rute KRL & angkot

Matriks keterhubungan (1 = ada jalur langsung, 0 = tidak) yang dikuadratkan menghitung banyak rute dua langkah antarstasiun.

Motif batik & tenun

Satu motif kawung diulang dengan geseran, putaran, dan pencerminan. Di aplikasi desain, setiap langkah itu adalah perkalian matriks.

Cek Cepat

Matriks A berordo 2 × 3 dan B berordo 3 × 4. Ordo AB adalah...

- 3 × 3
- 2 × 4
- 4 × 2
- tidak bisa dikalikan

$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \ldots$

- 22
- -2
- 2
- 14

Manakah matriks yang tidak punya invers?

- $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: kirim pesan rahasia ke sahabat

Bahan: kertas, pensil, tabel huruf A = 0 sampai Z = 25, dan seorang teman.

1. Tulis pesan pendek tanpa spasi (paling banyak 8 huruf). Jika banyak hurufnya ganjil, tambahkan X.
2. Ubah huruf menjadi angka, lalu kelompokkan berpasangan.
3. Kalikan setiap pasangan dengan kunci $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, lalu ambil sisa pembagian oleh 26.
4. Ubah kembali menjadi huruf, lalu berikan sandi dan kuncinya kepada temanmu.
5. Temanmu membuka sandi dengan $K^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$. Periksa hasil kalian dengan Lab Mini.

Pertanyaan: Mengapa kunci $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tidak boleh dipakai? Coba sandikan AA dan CZ dengan kunci itu. Apa yang kamu temukan?

⚡ RINGKASAN KILAT — Bab 36 dalam 3 menit

☑️ Kamu sekarang bisa...

- membaca **matriks** sebagai tabel: ordo, baris, kolom, dan elemen a_{ij}
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan skalar, dan **mengalikan dua matriks** dengan aturan baris × kolom
- menghitung **determinan** dan **invers** matriks 2 × 2, serta memaknai determinan sebagai faktor pengali luas
- menyelesaikan **sistem persamaan linear** dua variabel dengan invers matriks
- memakai matriks untuk **rotasi, refleksi, dilatasi**, menemukan pola pangkat matriks, dan membuat **sandi rahasia**

🔑 Istilah kunci

matriks · Matriks · elemen · ordo · Matriks identitas · Transpos · determinan · invers · matriks singular · matriks transformasi · sandi Hill

🧮 Rumus penting

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$$

Determinan matriks 2 × 2. Kalikan diagonal utama, kurangi dengan hasil kali diagonal samping. Angkanya memberi tahu berapa kali lipat luas berubah, dan tandanya memberi tahu apakah gambar terbalik.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Invers matriks 2 × 2. Tukar a dan d, beri tanda negatif pada b dan c, lalu bagi semuanya dengan determinan. Kalau determinannya nol, tidak ada yang bisa dibagi: matriksnya tidak punya invers.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

SPL dengan invers matriks. Sistem ax + by = p dan cx + dy = q ditulis AX = B. Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kiri, maka X = A^{-1}B.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Matriks berordo berbeda tidak bisa dijumlahkan atau dikurangkan.
- Perkalian matriks bukan perkalian elemen yang seletak, dan urutannya penting: pada umumnya $AB \neq BA$.
- Untuk matriks 2 × 2, $\det(kA) = k^2 \det A$, bukan $k \det A$.

🏔️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=36

Teka-teki untuk Bab 37

Matriks $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ memutar setiap titik 90°. Hitunglah J^2. Hasilnya $-I$! Memutar 90° dua kali sama dengan memutar 180°, yaitu mengalikan setiap titik dengan –1. Jadi J adalah semacam "akar dari –1" di dunia matriks. Mungkinkah ada **bilangan** yang kuadratnya –1?

▼ **Intip petunjuk**

Di bilangan real, kuadrat selalu ≥ 0, jadi tidak ada. Para matematikawan lalu "menciptakan" bilangan baru i dengan $i^2 = -1$. Ajaibnya, mengalikan dengan i ternyata sama dengan memutar 90° di bidang, persis seperti matriks J. Bab 37 · Bilangan Kompleks membahasnya!

37 Bilangan Kompleks: Bilangan yang Memutar

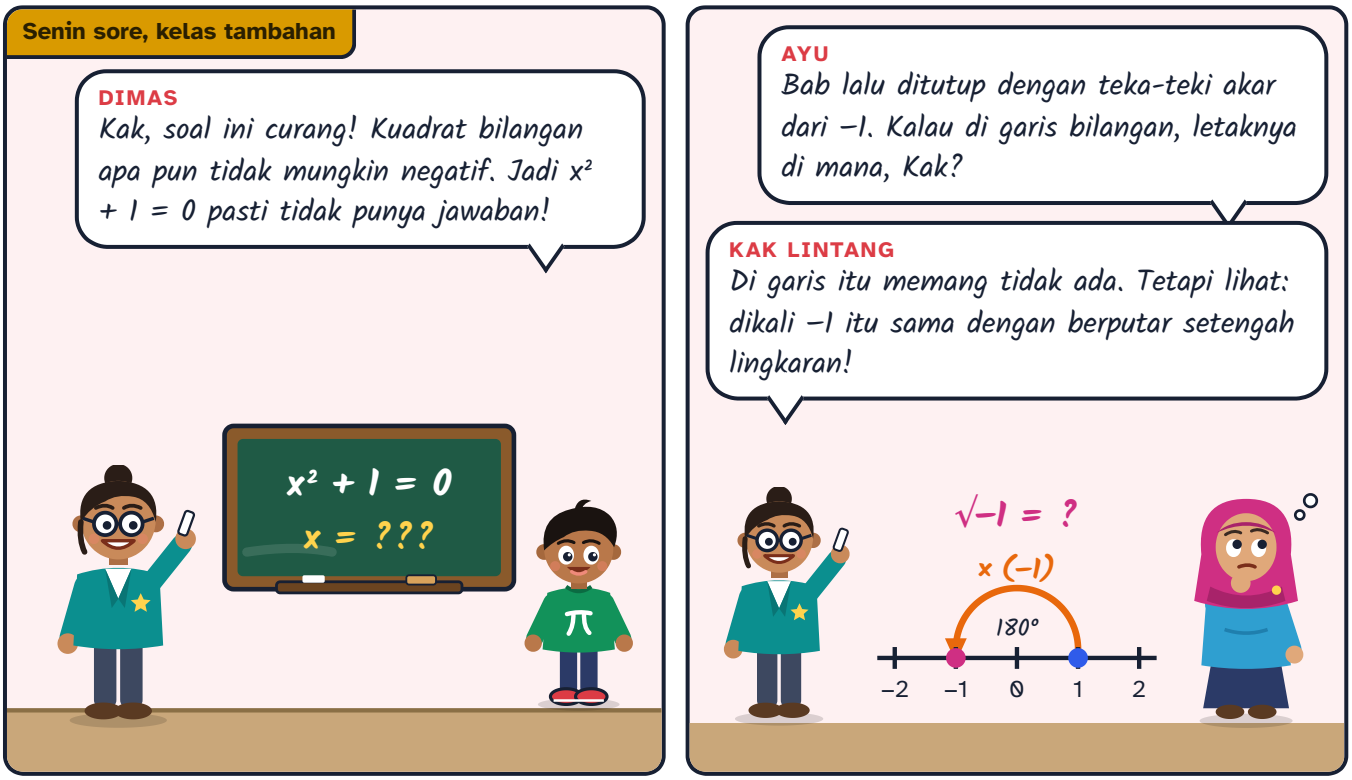
Di garis bilangan, akar dari –1 memang tidak punya tempat. Namun begitu kita berani melangkah keluar dari garis itu, lahirlah bilangan baru yang bisa memutar, meregang, menghitung listrik di rumahmu, dan menggambar fraktal yang tak habis-habis.

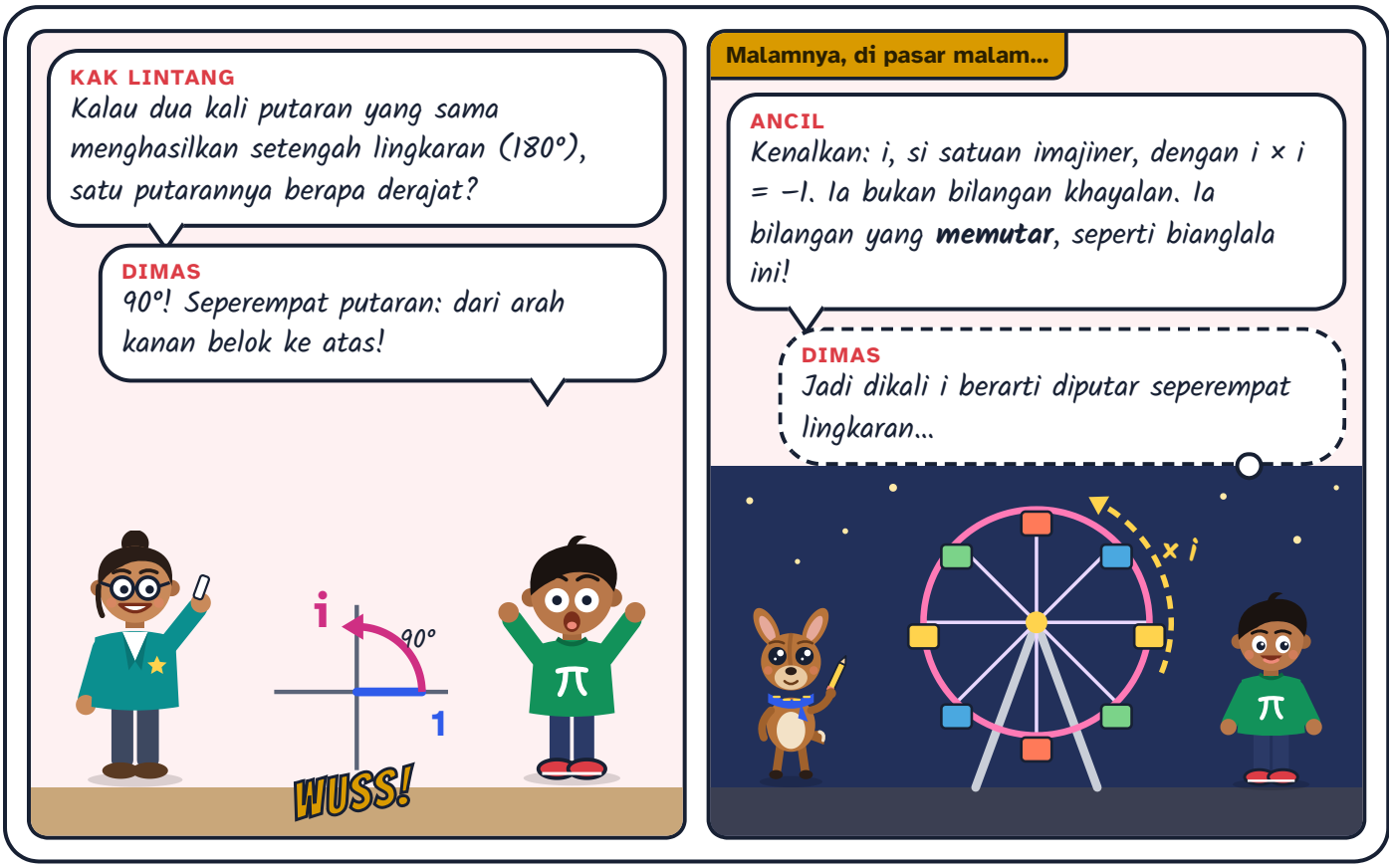
Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan mengapa **satuan imajiner** i dengan $i^2 = -1$ dibutuhkan, dan menghitung pangkat-pangkat i;
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi **bilangan kompleks** $a + bi$ (termasuk memakai sekawan);
- menggambar bilangan kompleks di **bidang Argand** serta menentukan **modulus** dan **argumennya**;
- memakai **bentuk polar** $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ dan memahami perkalian sebagai "putar dan regang";
- memakai **Teorema De Moivre** untuk pangkat dan menemukan **akar-akar kesatuan**.

AKAR DARI MINUS SATU

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Dikali –1 dua kali, sebuah bilangan kembali seperti semula, sebab $(-1)(-1) = 1$. Adakah bilangan x dengan $x \cdot x = -1$?

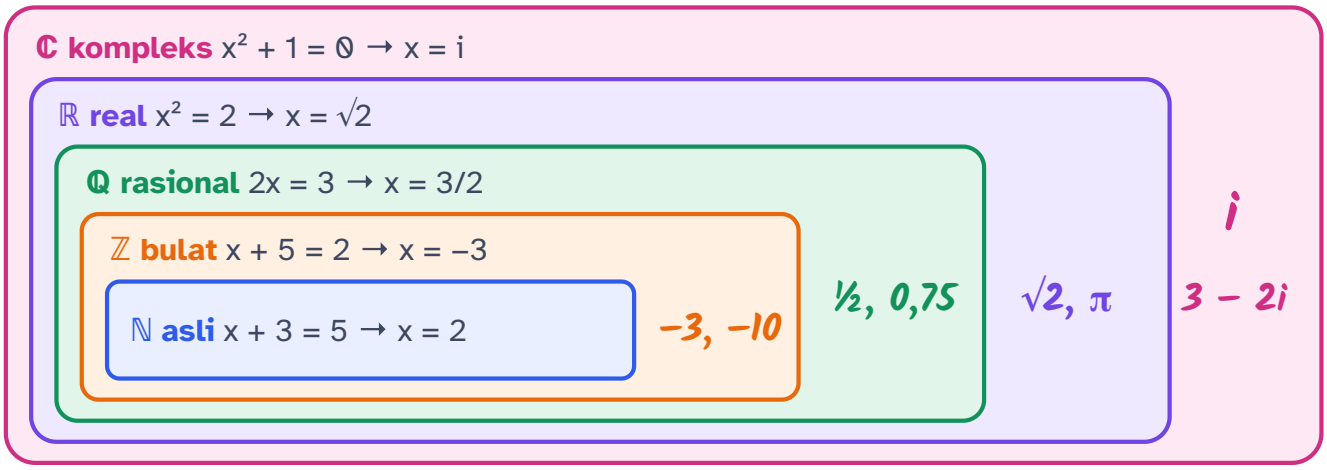
- Ada, yaitu –1, karena "minus kali minus tetap minus".
- Tidak mungkin ada. Kuadrat selalu positif, titik.
- Tidak ada di garis bilangan, tetapi ada jika kita boleh keluar dari garis itu.
- Ada, yaitu $-\frac{1}{2}$, karena $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$.

Jawabannya: tidak ada di garis bilangan, tetapi ada di bidang. Kuadrat bilangan real memang tidak pernah negatif. Namun jika "dikali –1" kita bayangkan sebagai *putaran 180°*, bilangan yang kuadratnya –1 adalah *putaran 90°*: ia menunjuk ke atas, keluar dari garis bilangan. Bilangan itu diberi nama i, dan seluruh bab ini adalah kisahnya.

37.1 Akar dari –1: lahirnya bilangan i

Sejarah bilangan adalah sejarah persamaan yang "macet". Persamaan $x + 5 = 2$ macet di bilangan asli, maka lahirlah bilangan negatif. Persamaan $2x = 3$ macet di bilangan bulat, maka lahirlah pecahan. Persamaan $x^2 = 2$

macet di pecahan, maka lahirlah $\sqrt{2}$. Lalu bagaimana dengan $x^2 = -1$?



Setiap kali ada persamaan yang "tidak bisa diselesaikan", dunia bilangan diperluas. Bilangan kompleks $\mathbb{C}$ adalah perluasan yang menjawab $x^2 + 1 = 0$.

Masalahnya, kuadrat bilangan real tidak pernah negatif: $3^2 = 9$ dan $(-3)^2 = 9$. Jadi di garis bilangan tidak ada tempat untuk $\sqrt{-1}$. Para matematikawan lalu melakukan hal yang berani: **mendefinisikan** sebuah bilangan baru, lalu memeriksa apakah aturan hitungnya tetap konsisten. Ternyata konsisten!

DEFINISI

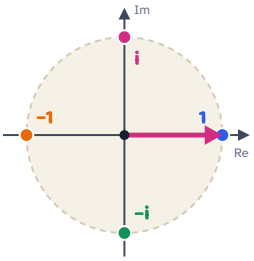
Satuan imajiner i adalah bilangan yang kuadratnya –1:

$$i^2 = -1$$

Dengan i, akar bilangan negatif bisa ditulis: untuk $a > 0$, $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$. Contoh: $\sqrt{-9} = 3i$ dan $\sqrt{-7} = i\sqrt{7}$. Kelipatan real dari i, seperti $3i$ atau $-\frac{1}{2}i$, disebut **bilangan imajiner**.

Bahasa sederhana · Bayangkan garis bilangan sebagai jalan lurus, dan kamu berdiri menghadap ke kanan. Dikali –1 artinya **balik badan** (putar 180°). Nah, i adalah **setengah dari balik badan**: belok kiri 90°. Belok kiri dua kali sama dengan balik badan. Itulah sebabnya $i \times i = -1$.

Pandangan "i = putaran 90°" adalah kunci seluruh bab ini. Ikuti animasinya langkah demi langkah:

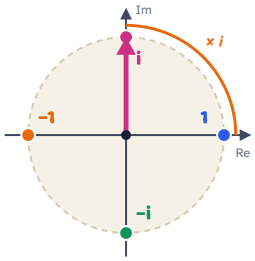


Mulai dari bilangan 1.
Panahnya menunjuk ke kanan, arah positif garis bilangan.

posisi: 1

1

Langkah 1. Mulai dari 1 di garis bilangan. Bayangkan sebuah panah dari titik asal O ke 1.

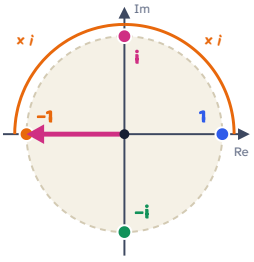


Kalikan dengan i:
panah berputar 90° berlawanan arah jarum jam.

1 · i = i

1 → i

Langkah 2. Kalikan dengan i: panah berputar 90° berlawanan arah jarum jam dan kini menunjuk ke atas. Titik itu adalah i.

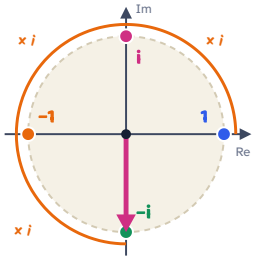


Kalikan lagi dengan i:
dua kali seperempat putaran sama dengan setengah putaran!

i · i = i² = −1

1 → i → −1

Langkah 3. Kalikan lagi dengan i: panah berputar 90° lagi dan menunjuk ke kiri, yaitu ke −1. Jadi $i \cdot i = i^2 = -1$. Teka-teki terjawab!

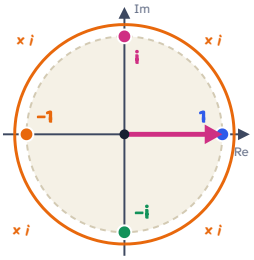


Sekali lagi dikali i:
panah kini menunjuk ke bawah.

i³ = −i

1 → i → −1 → −i

Langkah 4. Kalikan sekali lagi: $i^3 = i^2 \cdot i = -i$. Panah menunjuk ke bawah.



Keempat kalinya:
satu putaran penuh, panah kembali ke posisi awal.

i⁴ = 1

1 → i → −1 → −i → 1

Langkah 5. Kalikan keempat kalinya: $i^4 = (i^2)^2 = 1$. Satu putaran penuh, kembali ke awal. Pangkat i berulang setiap 4 langkah.

Karena empat kali seperempat putaran kembali ke posisi awal, pangkat-pangkat i berulang dengan **siklus 4**:

Sisa n dibagi 4	**1**	**2**	**3**	**0**
i^n	i	-1	$-i$	1
Arah panah	↑ atas	← kiri	↓ bawah	→ kanan
Contoh	$i^5,\ i^9,\ i^{101}$	$i^6,\ i^{10},\ i^{50}$	$i^7,\ i^{11},\ i^{99}$	$i^4,\ i^8,\ i^{100}$

TRIK KAK LINTANG

Untuk menghitung i^n dengan n besar, cukup lihat **dua digit terakhir** n dan cari sisanya bila dibagi 4 (boleh begitu karena 100 habis dibagi 4). Contoh: i^{2027}. Dua digit terakhirnya 27, dan $27 = 6 \times 4 + 3$, sisa 3. Jadi $i^{2027} = -i$.

AWAS JEBAKAN

Aturan $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ **tidak berlaku** bila a dan b sama-sama negatif. Godaannya: $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$. Itu salah! Ubah dulu ke bentuk i: $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$.

TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 1545, Gerolamo Cardano dari Italia menerbitkan rumus penyelesaian persamaan pangkat tiga. Anehnya, untuk persamaan $x^3 = 15x + 4$, yang jelas punya penyelesaian $x = 4$, rumus itu memunculkan $\sqrt{-121}$. Sekitar 1572, Rafael Bombelli berani berhitung dengan "akar negatif" itu seolah-olah bilangan biasa, dan hasilnya tepat 4! René Descartes (1637) menyebut bilangan semacam itu *imajiner* dengan nada mengejek. Leonhard Euler memopulerkan lambang i (sekitar 1777), lalu Caspar Wessel, Jean-Robert Argand, dan Carl Friedrich Gauss (sekitar 1797–1831) menggambarnya sebagai titik pada bidang. Sejak itu "bilangan khayalan" menjadi alat kerja sehari-hari para insinyur.

37.2 Bentuk $a + bi$ dan cara berhitungnya

Begitu i diterima, kita bisa mencampurnya dengan bilangan real biasa. Hasilnya bilangan seperti $3 + 2i$, $-1 - 5i$, atau $\frac{1}{2} + \sqrt{2}\,i$.

DEFINISI

Bilangan kompleks adalah bilangan berbentuk $z = a + bi$ dengan a dan b bilangan real. Bilangan a disebut **bagian real**, ditulis $\mathrm{Re}(z)$, dan b disebut **bagian imajiner**, ditulis $\mathrm{Im}(z)$. Himpunan semua bilangan kompleks ditulis $\mathbb{C}$.

- Dua bilangan kompleks sama jika bagian real **dan** bagian imajinernya sama: $a + bi = c + di \iff a = c$ dan $b = d$.
- **Sekawan** (konjugat) dari $z = a + bi$ adalah $\bar{z} = a - bi$.

Berhitung dengan bilangan kompleks mirip berhitung dengan bentuk aljabar $a + bx$ (Bab 7). Hanya ada satu aturan tambahan: setiap kali muncul i^2, gantilah dengan –1.

ATURAN OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)\,i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\,i$$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \quad \text{(selalu real dan tidak negatif)}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}, \qquad c+di \neq 0$$

Dari mana rumus perkalian itu?

Kalikan seperti mengalikan $(a+bx)(c+dx)$, lalu ganti i^2 dengan –1:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad+bc)i + bd(-1) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Suku bd pindah ke bagian real dan berganti tanda. Semua "keanehan" bilangan kompleks berasal dari pergantian tanda kecil ini.

Tebak Dulu!

Berapakah $(1+i)^2$?

- 2, karena $1^2 + 1^2 = 2$.
- 0, karena $1^2 + i^2 = 1 - 1$.
- $2i$
- $2 + 2i$

Jawabannya: $2i$. $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Bagian realnya lenyap! Jawaban 0 muncul kalau suku tengah $2i$ terlupa. Di subbab 37.5 kamu akan melihat alasannya secara geometris: $1+i$ berarah 45°, sehingga kuadratnya berarah 90°, tepat di sumbu imajiner.

CONTOH **Menjumlah, mengurang, dan mengali**

Diketahui $z = 3 + 2i$ dan $w = 1 - 5i$. Hitung $z + w$, $z - w$, dan zw.

1. Jumlah: bagian real dengan bagian real, bagian imajiner dengan bagian imajiner. $z + w = (3 + 1) + (2 - 5)i = 4 - 3i$.
2. Selisih: $z - w = (3 - 1) + (2 - (-5))i = 2 + 7i$.
3. Hasil kali: $zw = 3 - 15i + 2i - 10i^2 = 3 - 13i + 10 = 13 - 13i$.

$z + w = 4 - 3i$, $z - w = 2 + 7i$, dan $zw = 13 - 13i$. Perhatikan suku $-10i^2$ yang berubah menjadi $+10$.

TRIK KAK LINTANG

Membagi bilangan kompleks mirip merasionalkan penyebut di Bab 6. Kalikan pembilang dan penyebut dengan **sekawan penyebut**. Karena $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$ adalah bilangan real, huruf i lenyap dari penyebut.

KERJAKAN BERSAMA **Membagi dengan bantuan sekawan**

Nyatakan $\dfrac{5 + 5i}{1 + 2i}$ dalam bentuk $a + bi$.

1. Sekawan penyebut adalah $1 - 2i$. Kalikan atas dan bawah dengannya.
2. Pembilang: $(5 + 5i)(1 - 2i) = 5 - 10i + 5i - 10i^2 = 15 - 5i$.
3. Penyebut: $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$.
4. Hasil: $\dfrac{15 - 5i}{5} = 3 - i$. Cek: $(3 - i)(1 + 2i) = 3 + 6i - i - 2i^2 = 5 + 5i$. ✓

$\dfrac{5 + 5i}{1 + 2i} = 3 - i$. Selalu cek pembagian dengan mengalikan balik.

AWAS JEBAKAN

Bagian imajiner adalah bilangan **real**: $\mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$, bukan $-5i$. Huruf i hanyalah "label arah"; yang dicatat sebagai bagian imajiner adalah angka di depannya.

ADU CEPAT **Kali kilat: bagian real atau imajiner?**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Re[(a + bi)(c + di)] = ac − bd (tanda minus muncul karena $i^2 = -1$), sedangkan Im = ad + bc. Contoh: (2 + 3i)(4 − 5i) punya Re = 8 + 15 = 23 dan Im = −10 + 12 = 2.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENJAWAB TANTANGAN CARDANO

Rumus Cardano untuk $x^3 = 15x + 4$ menghasilkan $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$ (karena $\sqrt{-121} = 11i$). Bombelli menebak bahwa $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$. Cek: $(2 + i)^2 = 3 + 4i$, lalu $(2 + i)^3 = (3 + 4i)(2 + i) = 6 + 3i + 8i + 4i^2 = 2 + 11i$. Serupa, $(2 - i)^3 = 2 - 11i$. Jadi $x = (2 + i) + (2 - i) = 4$, dan memang $4^3 = 64 = 15 \cdot 4 + 4$. Bilangan imajiner muncul di tengah jalan, lalu saling menghapus dan meninggalkan jawaban real yang sah. Inilah alasan sejarah pertama mengapa i dianggap serius.

37.3 Bidang Argand: setiap bilangan punya alamat

Bilangan real cukup digambar di satu garis. Bilangan kompleks butuh dua arah: satu untuk bagian real dan satu untuk bagian imajiner. Maka $z = a + bi$ digambar sebagai titik (a, b) di **bidang Argand** (bidang kompleks). Sumbu mendatar adalah **sumbu real**, sumbu tegak adalah **sumbu imajiner**.

Bahasa sederhana · Anggap saja bilangan kompleks seperti alamat rumah di kompleks perumahan: "Jalan 3, Gang 2" berarti 3 langkah ke kanan lalu 2 langkah ke atas. Bilangan $3 + 2i$ tinggal di alamat $(3, 2)$, sedangkan bilangan real biasa tinggal di "jalan utama", yaitu sumbu real.

GRAFIK HIDUP

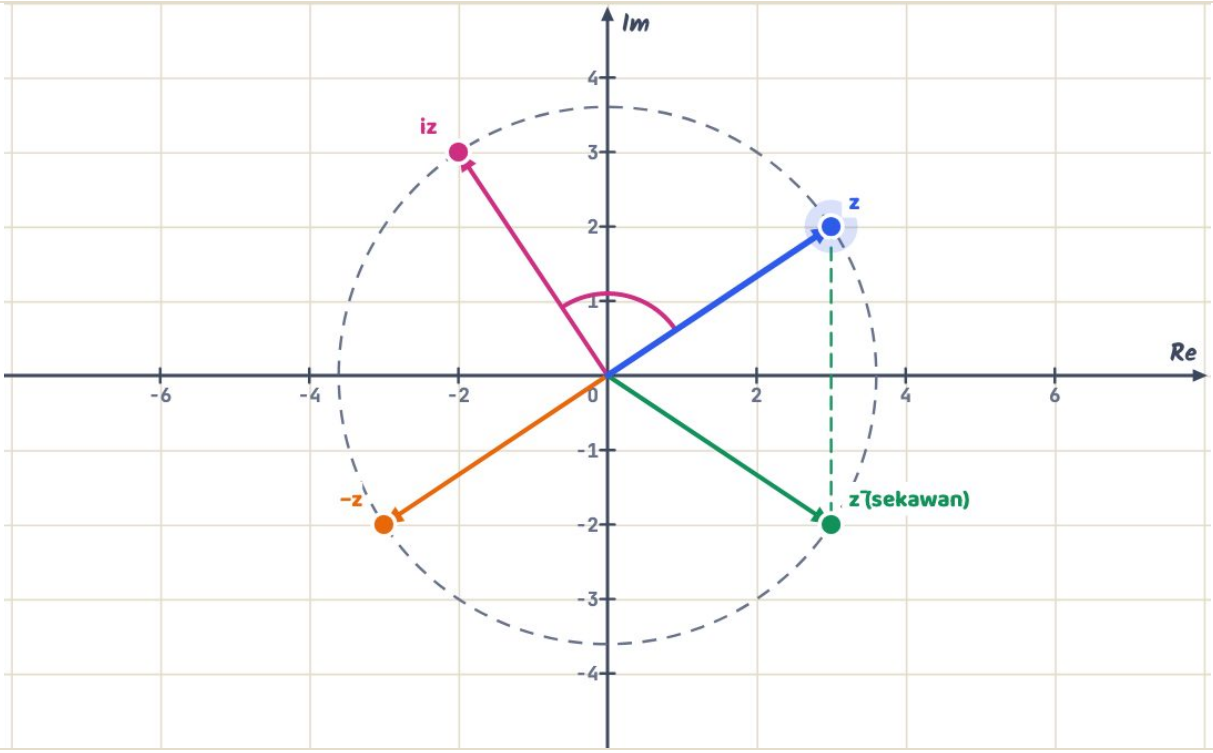
Satu titik, tiga kembaran

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37

$$z = a + bi \longleftrightarrow (a, b)$$

$z = 3 + 2i$ $\bar{z} = 3 - 2i$ $-z = -3 - 2i$ $iz = -2 + 3i$

Sekawan, lawan, dan hasil kali dengan i adalah tiga gerakan geometri yang sederhana.



|z| (sama untuk keempatnya)	arg z	arg(iz)
	3,606	33,7 °	123,7 °

Seret titik biru z. Kembaran mana yang merupakan hasil **cermin** terhadap sumbu real, hasil **putaran 180°**, dan hasil **putaran 90°**? Perhatikan: keempat titik selalu berada di lingkaran putus-putus yang sama.

SIFAT GEOMETRI DI BIDANG ARGAND

- $\bar{z}$ adalah pencerminan z terhadap sumbu real.
- $-z$ adalah putaran z sejauh 180° terhadap O.
- iz adalah putaran z sejauh 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O: titik (a, b) berpindah ke $(-b, a)$, karena $i(a + bi) = -b + ai$.
- $z + w$ adalah ujung diagonal jajargenjang yang dibentuk z dan w, persis seperti menjumlahkan vektor di Bab 23.

SAMBUNGAN DENGAN BAB 36

Matriks rotasi 90° dari Bab 36, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mengirim titik (a, b) ke $(-b, a)$, sama persis dengan perkalian oleh i. Bahkan kuadrat matriks itu adalah $-I$: "versi matriks" dari $i^2 = -1$!

37.4 Modulus dan argumen: jarak dan arah

Alamat (a, b) bisa juga dinyatakan dengan gaya pilot: "terbang sejauh r ke arah θ". Dua bilangan itu adalah modulus dan argumen.

DEFINISI

Untuk $z = a + bi$:

- **Modulus** $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ adalah jarak titik z ke titik asal O.
- **Argumen** $\arg z = \theta$ adalah sudut dari sumbu real positif ke ruas garis Oz, diukur berlawanan arah jarum jam.
- **Argumen utama** dipilih dalam rentang $-180° < \theta \leq 180°$, atau $-\pi < \theta \leq \pi$ dalam radian. Bilangan $z = 0$ tidak punya argumen.

RUMUS HIDUP **Modulus bilangan kompleks**

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Modulus adalah jarak titik a + bi ke titik asal O. Inilah Teorema Pythagoras dari Bab 18 yang sedang menyamar!

a Bagian real a | b Bagian imajiner b | $|z|$ Modulus

MODULUS
5

✨ **modulus bulat: ada tripel Pythagoras tersembunyi!**

z = **3 + 4**i. Jaraknya ke O adalah √(**9** + **16**) = **5**. Argumen utamanya sekitar **53,13°**. Sekawannya, z̄ = **3 − 4**i, punya modulus yang sama.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MODULUS-KOMPLEKS

Untuk mencari argumen, **gambar dulu titiknya** agar tahu kuadrannya. Hitung sudut acuan lancip $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$, lalu sesuaikan:

Letak titik	Kuadran I	Kuadran II	Kuadran III	Kuadran IV
Tanda (a, b)	$(+, +)$	$(-, +)$	$(-, -)$	$(+, -)$
Argumen utama θ	α	$180^\circ - \alpha$	$-(180^\circ - \alpha)$	$-\alpha$

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Tombol $\tan^{-1}$ di kalkulator tidak tahu kuadran. Untuk $z = -1 - i$, $\tan^{-1}\frac{-1}{-1} = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$, padahal titik $(-1, -1)$ ada di kuadran III. Argumen utamanya adalah -135°, bukan 45°.

KERJAKAN BERSAMA **Modulus dan argumen dari −√3 + i**

Tentukan modulus dan argumen utama $z = -\sqrt{3} + i$.

1. Modulus: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$.
2. Titik $(-\sqrt{3}, 1)$ berada di kuadran II (kiri atas).
3. Sudut acuan: $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$.
4. Di kuadran II: $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, atau $\frac{5\pi}{6}$ radian.

$|z| = 2$ dan $\arg z = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$. Sudut 30° dan pasangan $1 : \sqrt{3} : 2$ berasal dari segitiga istimewa di Bab 24.

37.5 Bentuk polar: mengali berarti memutar dan meregang

Dari segitiga siku-siku (Bab 24), titik dengan modulus r dan argumen θ punya $a = r\cos\theta$ dan $b = r\sin\theta$. Jadi setiap bilangan kompleks bisa ditulis dengan "jarak dan arah".

DEFINISI: BENTUK POLAR

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$

Singkatan "cis" berarti **c**os + **i** **s**in. Contoh: $1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$, $i = 1\,\mathrm{cis}\,90^\circ$, dan $-2 = 2\,\mathrm{cis}\,180^\circ$.

Sekarang bagian yang paling ajaib. Kalikan dua bilangan dalam bentuk polar, dan lihat apa yang terjadi pada jarak dan sudutnya.

PERKALIAN DAN PEMBAGIAN BENTUK POLAR

$$r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1 \cdot r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2 = r_1 r_2\,\mathrm{cis}\,(\theta_1 + \theta_2), \qquad \frac{r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1}{r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{cis}\,(\theta_1 - \theta_2)$$

Dalam kata-kata: *modulusnya dikalikan (regang), argumennya dijumlahkan (putar)*. Akibatnya $|zw| = |z|\,|w|$ dan $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ (kadang perlu ditambah atau dikurangi 360° agar kembali ke rentang argumen utama).

Bukti dengan rumus jumlah sudut (Bab 26)

Kalikan bagian "cis"-nya saja, lalu kelompokkan bagian real dan imajiner:

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2).$$

Menurut rumus jumlah sudut, bagian real itu adalah $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ dan bagian imajinernya $\sin(\theta_1 + \theta_2)$. Jadi $\mathrm{cis}\,\theta_1 \cdot \mathrm{cis}\,\theta_2 = \mathrm{cis}(\theta_1 + \theta_2)$. Kalikan dengan $r_1 r_2$, selesai. Rumus pembagian diperoleh dengan cara serupa. ∎

Bahasa sederhana · Bayangkan kamu naik bianglala. Mengalikan posisimu dengan bilangan bermodulus 1, misalnya $\mathrm{cis}\,30^\circ$, sama dengan memutar roda 30°. Mengalikan dengan 2 membuat roda membesar dua kali lipat. Jadi perkalian bilangan kompleks = **putar** + **regang**. Mengalikan dengan i adalah putaran 90° tanpa regangan, karena $|i| = 1$.

GRAFIK HIDUP **Kali = putar & regang**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37

$$z\,w = |z|\,|w|\,\operatorname{cis}(\arg z + \arg w)$$

$$z + w = 4 + 2i \qquad z\,w = 2 + 4i$$



|z|	arg z	|w|	arg w	|zw| = |z|·|w|	arg(zw)
	3,162	18,4 °	1,414	45 °	4,472	63,4 °

Seret z (biru) dan w (oranye). Jajargenjang hijau menunjukkan $z + w$. Panah magenta zw adalah z yang **diputar** sebesar $\arg w$ dan **diregang** $|w|$ kali. Cocokkan bacaan: apakah $\arg z + \arg w = \arg(zw)$? Coba buat $w = i$, lalu $w = -1$.

KERJAKAN BERSAMA **Memutar titik dengan sekali kali**

Titik $P(4,2)$ diputar 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O, lalu jaraknya ke O diperbesar 2 kali. Tentukan bayangannya.

1. "Putar 90° dan regang 2 kali" sama dengan mengalikan dengan $2\,\mathrm{cis}\,90^\circ = 2i$.
2. $(4+2i)(2i) = 8i + 4i^2 = -4 + 8i$.
3. Cek: $|-4+8i| = \sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 2\,|4+2i|$. ✓

Bayangannya $(-4, 8)$. Satu perkalian menggantikan dua transformasi sekaligus.

Listrik di rumahmu adalah arus bolak-balik (AC) 220 volt yang berayun 50 kali per detik, seperti titik yang berputar pada bianglala. Insinyur listrik menghitungnya dengan bilangan kompleks. Mereka menulis j untuk $\sqrt{-1}$, karena huruf i sudah dipakai untuk kuat arus. "Hambatan" sebuah alat pada arus AC disebut **impedansi** $Z = R + Xj$: modulusnya menentukan besar arus, argumennya menentukan seberapa jauh arus tertinggal dari tegangan.

RUMUS HIDUP

Arus listrik AC dan impedansi

$$I = \frac{V}{|R + Xj|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Kuat arus sama dengan tegangan dibagi modulus impedansi. Bagian real R adalah hambatan biasa, bagian imajiner X berasal dari kumparan motor atau trafo.

- V Tegangan efektif V
- R Hambatan R Ω
- X Reaktansi X Ω
- I Kuat arus efektif A

KUAT ARUS EFEKTIF

4,4

A

✨ **|Z| bulat: tripel Pythagoras lagi!**

Impedansi Z = **30** + **40**j ohm. Modulusnya |Z| = **50** ohm dan argumennya **53,13°**. Arus efektifnya **4,4** A dan tertinggal **53,13°** dari tegangan.

Cek satuan: R, X, dan |Z| dalam ohm (Ω). Volt dibagi ohm menghasilkan ampere (A).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-IMPEDANSI-AC

LANJUT · IB & OLIMPIADE

RUMUS EULER DAN PERSAMAAN TERINDAH

Di IB AA HL, bentuk polar juga ditulis sebagai **bentuk eksponen** $z = re^{i\theta}$ (dengan θ dalam radian), berkat rumus Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Alasannya: aturan perkalian polar persis aturan pangkat, $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$. Bukti lengkapnya memakai deret pangkat dari kalkulus lanjut. Dengan $\theta = \pi$ diperoleh

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

satu persamaan yang mempertemukan lima bilangan terpenting: 0, 1, π, e, dan i. Banyak matematikawan menyebutnya rumus paling indah sepanjang masa.

MITOS

"Bilangan imajiner hanya khayalan, tidak ada gunanya di dunia nyata."

FAKTA

Namanya saja warisan ejekan Descartes. Listrik AC, sinyal HP, fisika kuantum, dan pengolahan suara memakai bilangan kompleks setiap hari.

MITOS

"Bilangan kompleks bisa diurutkan: 2i lebih besar daripada i."

FAKTA

Jika $i > 0$, maka $i \cdot i > 0$, artinya $-1 > 0$. Jika $i < 0$, maka $(-i)(-i) > 0$, juga $-1 > 0$. Keduanya mustahil. Yang bisa dibandingkan hanyalah modulusnya.

MITOS

"Kuadrat suatu bilangan pasti tidak negatif."

FAKTA

Itu benar untuk bilangan real saja. $i^2 = -1$, bahkan $(1+i)^2 = 2i$ bukan bilangan real sama sekali. Sifat "kuadrat ≥ 0" hilang begitu kita keluar dari garis bilangan.

37.6 De Moivre dan akar-akar kesatuan

Jika mengalikan berarti memutar, memangkatkan berarti memutar berulang kali. z^2 memutar dua kali, z^3 tiga kali, dan seterusnya. Modulusnya pun ikut dikalikan berulang kali.

TEOREMA DE MOIVRE

Untuk setiap bilangan bulat n:

$$(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^n = r^n\,\mathrm{cis}\,(n\theta)$$

Bukti dengan induksi matematika (efek domino dari Bab 35)

Langkah dasar $n = 1$: $(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^1 = r^1\,\mathrm{cis}\,\theta$. Benar.

Langkah induksi: misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^k = r^k\,\mathrm{cis}\,k\theta$. Maka, memakai aturan perkalian polar,

$$(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^{k+1} = r^k\,\mathrm{cis}\,k\theta \cdot r\,\mathrm{cis}\,\theta = r^{k+1}\,\mathrm{cis}\,(k+1)\theta.$$

Jadi benar untuk semua bilangan asli n. Untuk $n = 0$ jelas benar, dan untuk n negatif gunakan $(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^{-1} = r^{-1}\,\mathrm{cis}(-\theta)$.

RUMUS HIDUP Teorema De Moivre

$$|z^n| = r^n, \qquad \arg(z^n) = n\,\theta$$

Untuk memangkatkan, pangkatkan modulusnya dan kalikan argumennya. Tidak perlu mengalikan (a + bi) berkali-kali!

r Modulus r | θ Argumen θ ° | n Pangkat n | $|z^n|$ Modulus hasil

MODULUS HASIL

64

hasilnya real negatif

z = **2** cis **30°**. Modulusnya dipangkatkan: **2** pangkat **6** = **64**. Argumennya dikalikan: **6** × **30°** = **180°**, setara dengan **180°** setelah dikurangi kelipatan 360°. Jadi z pangkat **6** ≈ **-64** + **0**i.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DE-MOIVRE

COBA SENDIRI

Pangkat enam tanpa enam kali mengali

Hitung $(1+i\sqrt{3})^6$.

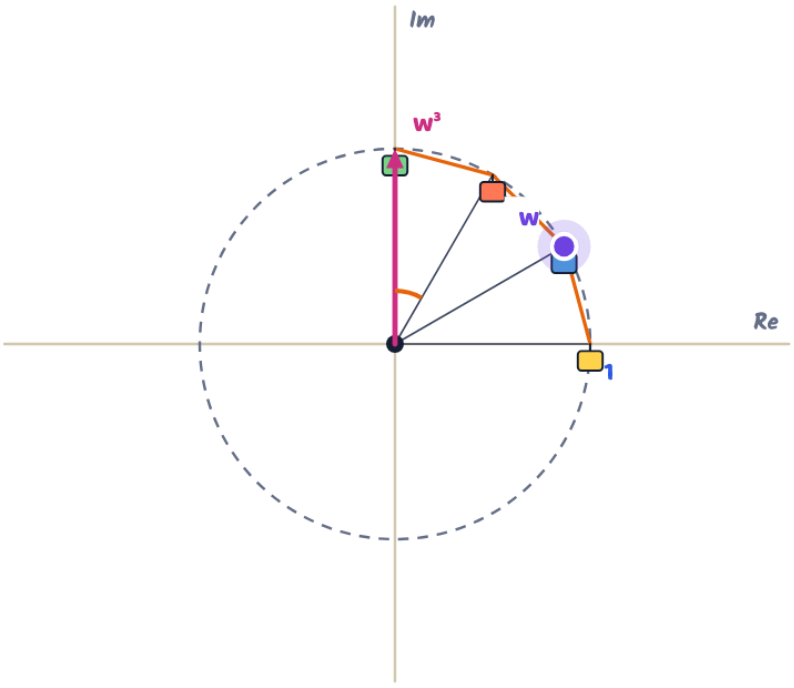
1. Modulus: $r = \sqrt{1+3} = 2$. Argumen: titik $(1, \sqrt{3})$ di kuadran I dengan $\tan\theta = \sqrt{3}$, jadi $\theta = 60^\circ$.
2. De Moivre: $(2\,\mathrm{cis}\,60^\circ)^6 = 2^6\,\mathrm{cis}\,360^\circ$.
3. $\mathrm{cis}\,360^\circ = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1$, jadi hasilnya 64.

$(1+i\sqrt{3})^6 = 64$, bilangan real! Enam putaran 60° tepat satu lingkaran penuh. Bandingkan dengan menjabarkan $(1+i\sqrt{3})^6$ secara manual.

LAB MINI

Bianglala De Moivre: kalikan terus dengan w

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37



$w^k = r^k\,\mathrm{cis}\,(k\theta)$

$w = 1\,\mathrm{cis}\,30°$

$k = 3$

$|w^k| = 1$

$k\theta = 90°$

0 putaran penuh

r = 1: berputar di lingkaran

kembali ke 1 setelah 12 langkah

seret titik ungu w

pangkat k	$w^k \approx$	$\lvert w^k\rvert = r^k$	arg = kθ
3	0 + 1i	1	90 °

Mulai dari 1, lalu kalikan berulang-ulang dengan $w = r\,\mathrm{cis}\,\theta$: titik w^k melompat sejauh θ setiap langkah. Dengan $|w| = 1$ dan $\theta = 30^\circ$, terbentuklah bianglala 12 kabin. Bagaimana kalau $|w|$ sedikit lebih dari 1? Seret titik ungu w atau pakai tombol.

Tebak Dulu!

Berapa banyak bilangan kompleks z yang memenuhi $z^6 = 1$?

Hanya satu, yaitu $z = 1$.

Dua, yaitu 1 dan -1.

Enam.

Tak hingga banyaknya.

Jawabannya: enam. Selain 1 dan -1, ada empat lagi: $\operatorname{cis} 60^\circ$, $\operatorname{cis} 120^\circ$, $\operatorname{cis} 240^\circ$, dan $\operatorname{cis} 300^\circ$. Masing-masing, jika diputar 6 kali, menempuh kelipatan 360° dan kembali ke 1. Keenam titik itu membentuk segi enam beraturan!

AKAR-AKAR KESATUAN

Persamaan $z^n = 1$ mempunyai tepat n penyelesaian, yang disebut **akar-akar kesatuan** pangkat n:

$$z_k = \operatorname{cis} \frac{360^\circ \cdot k}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dengan $\omega = \operatorname{cis} \frac{360^\circ}{n}$, akar-akarnya adalah $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$: titik-titik sudut **segi-n beraturan** pada lingkaran satuan. Untuk $n \geq 2$, jumlah semuanya nol: $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

Mengapa jumlahnya nol?

Misalkan $S = 1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}$. Kalikan dengan ω: $\omega S = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n$. Karena $\omega^n = 1$, suku-sukunya sama dengan S, hanya urutannya bergeser. Jadi $\omega S = S$, atau $(\omega - 1)S = 0$. Karena $\omega \neq 1$, haruslah $S = 0$.

Secara geometris: memutar segi-n sejauh $\frac{360^\circ}{n}$ menghasilkan segi-n yang sama, sehingga "titik berat" semua akar tidak boleh berpindah ketika diputar. Satu-satunya titik yang tidak bergerak saat diputar adalah O.

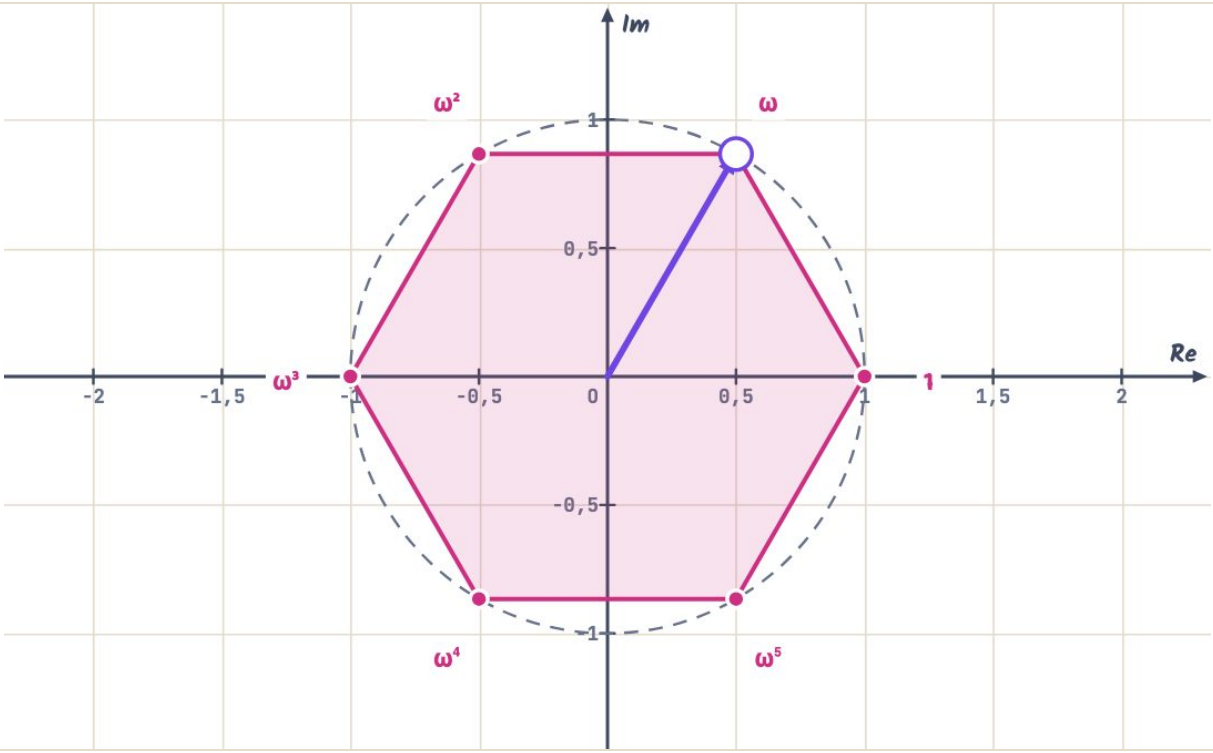
GRAFIK HIDUP

Akar-akar kesatuan: segi-n beraturan

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37

$$z^n = 1 \iff z = \omega^k, \quad \omega = \operatorname{cis}\frac{360^\circ}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$n = 6: \quad \omega = \operatorname{cis} 60^\circ, \qquad \left|1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^5\right| = 0$$



sudut antartitik	pangkat p	p mod n
60 °	1	1

Geser n untuk melihat segi-n beraturan. Tekan ▶ **Jalankan**: panah ungu ω^p melompat satu titik setiap kali dikali ω, dan setelah n lompatan kembali ke 1. Mengapa jumlah semua akar selalu 0?

COBA SENDIRI **Akar pangkat tiga dari 8i**

Selesaikan $z^3 = 8i$.

1. Tulis ruas kanan dalam bentuk polar: $8i = 8\,\mathrm{cis}\,90^\circ$. Karena sudut boleh ditambah kelipatan 360°, $8i = 8\,\mathrm{cis}(90^\circ + 360^\circ k)$.
2. Misalkan $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$. De Moivre: $r^3 = 8$ dan $3\theta = 90^\circ + 360^\circ k$. Jadi $r = 2$ dan $\theta = 30^\circ + 120^\circ k$.
3. $k = 0$: $2\,\mathrm{cis}\,30^\circ = \sqrt{3} + i$. $k = 1$: $2\,\mathrm{cis}\,150^\circ = -\sqrt{3} + i$. $k = 2$: $2\,\mathrm{cis}\,270^\circ = -2i$.
4. Cek satu akar: $(-2i)^3 = -8i^3 = -8(-i) = 8i$. ✓

$z = \sqrt{3} + i$, $z = -\sqrt{3} + i$, atau $z = -2i$. Ketiganya membentuk segitiga sama sisi dan jumlahnya 0.

TRIK KAK LINTANG

Akar-akar dari $z^n = w$ selalu membentuk segi-n beraturan yang berpusat di O. Jadi cukup temukan **satu** akar, lalu putar sejauh $\frac{360^\circ}{n}$ berulang kali untuk mendapatkan sisanya.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

SENJATA OLIMPIADE: SARINGAN AKAR KESATUAN

Misalkan $\omega = \mathrm{cis}\,120^\circ$, sehingga $\omega^3 = 1$ dan $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Akibatnya $1 + \omega^k + \omega^{2k}$ bernilai 3 jika k kelipatan 3, dan 0 jika bukan. Masukkan $x = 1, \omega, \omega^2$ ke $(1+x)^6 = \sum_k \binom{6}{k} x^k$, lalu jumlahkan:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = \frac{(1+1)^6 + (1+\omega)^6 + (1+\omega^2)^6}{3}.$$

Karena $1 + \omega = \mathrm{cis}\,60^\circ$ dan $1 + \omega^2 = \mathrm{cis}(-60^\circ)$, pangkat enam keduanya bernilai 1. Hasilnya $\frac{64+1+1}{3} = 22$. Cek langsung: $1 + 20 + 1 = 22$. ✓ Trik yang sama, dengan $n = 5$, membuktikan $\cos 72^\circ + \cos 144^\circ = -\frac{1}{2}$ dari bagian real $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

37.7 Fraktal dan bilangan kompleks di sekitarmu

Ambil sebuah bilangan kompleks c. Mulai dari $z_0 = 0$, lalu ulangi aturan sederhana $z \to z^2 + c$ berkali-kali. Hanya ada dua kemungkinan nasib: barisan titiknya tetap **terkurung** di dekat O, atau **kabur** menjauh tanpa batas.

DEFINISI

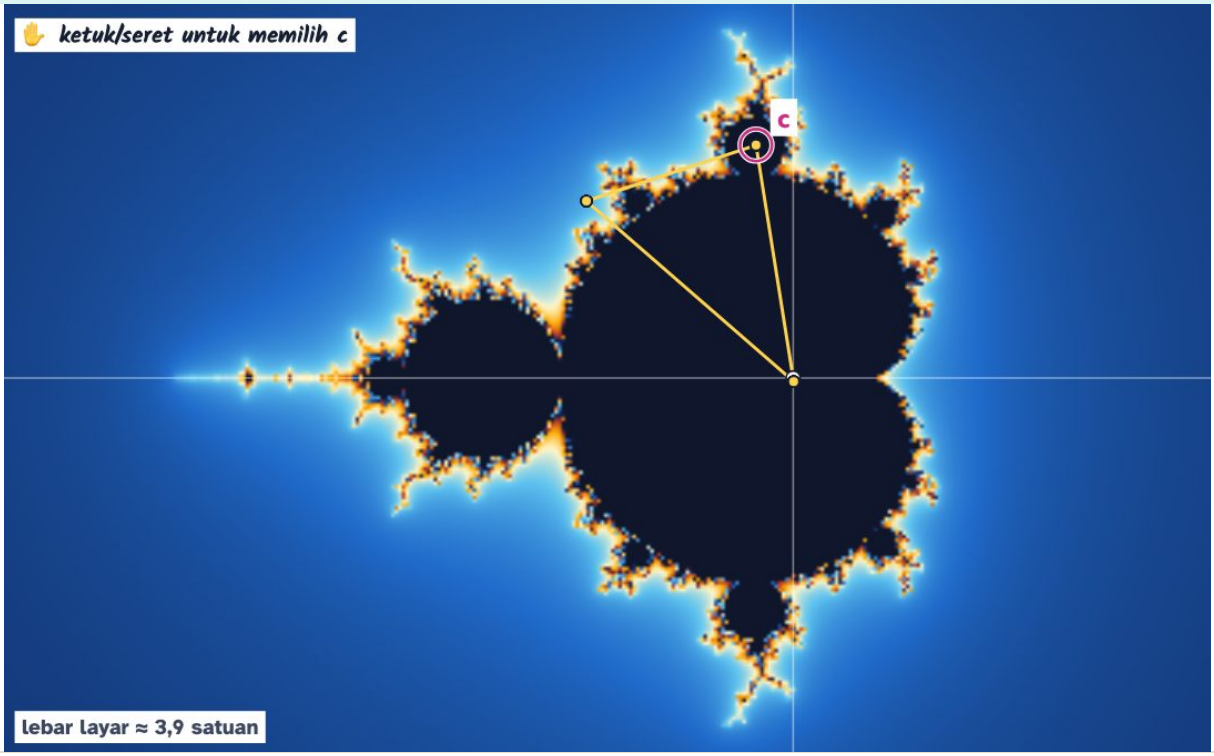
Himpunan Mandelbrot adalah himpunan semua bilangan kompleks c yang barisan $z_0 = 0,\ z_{n+1} = z_n^2 + c$ tetap terbatas (tidak kabur ke tak hingga). Fakta penting: begitu suatu $|z_n| > 2$, barisan itu pasti kabur.

c	**Barisan** $z_1, z_2, z_3, \ldots$	**Nasib**
-1	$-1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \ldots$	terkurung (berayun) ✓ anggota
1	$1,\ 2,\ 5,\ 26,\ 677,\ \ldots$	kabur ✕ bukan anggota
i	$i,\ -1+i,\ -i,\ -1+i,\ -i,\ \ldots$	terkurung (berputar dalam siklus) ✓ anggota

Warnai setiap titik c menurut seberapa cepat barisannya kabur, dan muncullah salah satu gambar paling terkenal dalam matematika modern. Benoît Mandelbrot memotretnya dengan komputer sekitar tahun 1980. Semakin diperbesar, semakin banyak detail baru yang muncul: spiral, "kuda laut", bahkan salinan mini himpunan itu sendiri.

LAB MINI **Penjelajah fraktal Mandelbrot**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37



titik c
`-0,12 + 0,75i`

perbesaran
`×1`

nasib barisan
`terkurung ≥ 100 langkah ⇒ anggota`

Ketuk atau seret di gambar untuk memilih titik c. Garis kuning menunjukkan orbit $0 \to c \to c^2 + c \to \ldots$. Apakah orbitnya terkurung atau kabur? Lalu tekan 🔍 **Perbesar** di dekat tepi himpunan (perbatasan hitam dan warna) dan naikkan iterasi bila gambar mulai kabur.

MATEMATIKA NUSANTARA

Beberapa motif batik memuat pola yang berulang dalam ukuran yang makin kecil, ciri khas **fraktal**. Sekitar tahun 2007, sekelompok peneliti dan desainer muda di Bandung memperkenalkan *batik fraktal*: motif dirancang dengan rumus matematika di komputer, lalu dicanting dan diwarnai oleh perajin batik. Bayangkan sehelai kain batik bermotif "kuda laut" dari himpunan Mandelbrot di atas, lahir dari rumus sependek $z^2 + c$!

Listrik rumah (AC)

Tegangan PLN 220 V berayun 50 kali per detik. Insinyur menghitung arus, daya, dan beda fase dengan bilangan kompleks yang ditulis memakai j.

Sinyal HP & WiFi

Data dikirim sebagai titik-titik di bidang kompleks (diagram konstelasi). Setiap titik mewakili beberapa bit sekaligus.

Grafika game & animasi

Memutar gambar sama dengan mengalikan koordinatnya dengan $\operatorname{cis}\theta$; program grafika memakai ide ini atau saudaranya, matriks rotasi.

Musik & suara

Equalizer di HP memecah suara menjadi gelombang-gelombang dengan transformasi Fourier, yang dibangun dari $\operatorname{cis}\theta$.

Fraktal & desain

Komputer menggambar himpunan Mandelbrot dan Julia dari $z^2 + c$; desainer memakainya untuk motif kain, poster, dan latar film.

Cek Cepat

Nilai i^{2026} adalah...

- 1
- i
- -1
- $-i$

Modulus $-5 + 12i$ adalah...

- 7
- 13
- 17
- $\sqrt{119}$

Di bidang Argand, mengalikan bilangan z dengan i sama dengan...

- mencerminkan z terhadap sumbu real
- menggandakan jarak z ke O
- menggeser z satu satuan ke atas
- memutar z sejauh 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. B · 3. D

Tantangan Rumah: menguji calon anggota himpunan Mandelbrot

Bahan: kertas berpetak, pensil warna, penggaris, kalkulator (boleh kalkulator HP).

1. Gambar bidang Argand di kertas berpetak dari –3 sampai 3 pada kedua sumbu (1 satuan = 2 kotak).
2. Untuk $c = -2$, hitung $z_1 = 0^2 + c$, lalu $z_2 = z_1^2 + c$, terus sampai z_5. Tandai setiap titik dan hubungkan berurutan dengan garis.
3. Ulangi untuk $c = -i$ (ingat $i^2 = -1$!) dan untuk $c = 0{,}5$.
4. Warnai titik c dengan hijau jika barisannya tetap dekat O, atau merah jika suatu saat $|z_n| > 2$.

Pertanyaan: Dua dari tiga nilai c itu anggota himpunan Mandelbrot. Yang mana? Untuk $c = -i$, barisannya membentuk pola apa? Mengapa $c = -2$ "nyaris kabur" tetapi tetap anggota? Cocokkan jawabanmu dengan Lab Mini fraktal.

RINGKASAN KILAT **Bab 37 dalam 3 menit**

☑ **Kamu sekarang bisa...**

- menjelaskan mengapa **satuan imajiner** i dengan $i^2 = -1$ dibutuhkan, dan menghitung pangkat-pangkat i
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi **bilangan kompleks** $a + bi$ (termasuk memakai sekawan)
- menggambar bilangan kompleks di **bidang Argand** serta menentukan **modulus** dan **argumennya**
- memakai **bentuk polar** $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ dan memahami perkalian sebagai "putar dan regang"
- memakai **Teorema De Moivre** untuk pangkat dan menemukan **akar-akar kesatuan**

🔑 Istilah kunci

Satuan imajiner · bilangan imajiner · siklus 4 · Bilangan kompleks · bagian real · bagian imajiner · Sekawan · bidang Argand · Modulus · Argumen · Argumen utama · impedansi · akar-akar kesatuan · Himpunan Mandelbrot

🧮 Rumus penting

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Modulus bilangan kompleks. Modulus adalah jarak titik a + bi ke titik asal O. Inilah Teorema Pythagoras dari Bab 18 yang sedang menyamar!

$$I = \frac{V}{|R + Xj|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Arus listrik AC dan impedansi. Kuat arus sama dengan tegangan dibagi modulus impedansi. Bagian real R adalah hambatan biasa, bagian imajiner X berasal dari kumparan motor atau trafo.

$$|z^n| = r^n, \qquad \arg(z^n) = n\,\theta$$

Teorema De Moivre. Untuk memangkatkan, pangkatkan modulusnya dan kalikan argumennya. Tidak perlu mengalikan (a + bi) berkali-kali!

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Aturan $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ tidak berlaku bila a dan b sama-sama negatif.
- Bagian imajiner adalah bilangan real: $\mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$, bukan $-5i$.
- Tombol $\tan^{-1}$ di kalkulator tidak tahu kuadran.

⛰️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=37

Teka-teki untuk Bab 38

Kamu sudah tahu $i^{2026} = -1$ tanpa melakukan 2026 kali perkalian, karena pangkat i berputar dengan siklus 4. Sekarang tantangan untuk bilangan biasa: **berapakah angka terakhir dari 7^{2026}?** Bilangan itu punya lebih dari 1.700 digit, sehingga kalkulator pun menyerah.

▼ Intip petunjuk

Tulis angka terakhir dari $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \ldots$. Apakah polanya juga "berputar" seperti $i, -1, -i, 1$? Berapa panjang siklusnya, dan di posisi mana pangkat 2026 jatuh? Bab 38 memberi nama pada cara berpikir ini: *aritmetika modular*, matematika jam yang berputar.

BAB 38 · MATEMATIKA LANJUT & OLIMPIADE

38 Teori Bilangan: Ketika Sisa Pembagian Berkuasa

Kalkulator menyerah menghitung 7^{2026}, tetapi sebuah jam dinding bisa menebak angka terakhirnya dalam sepuluh detik. Selamat datang di dunia tempat yang terpenting bukan bilangannya, melainkan **sisanya**.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **algoritma pembagian** dan sifat keterbagian untuk menalar sisa tanpa menghitung bilangan raksasa;
- menghitung FPB dengan **algoritma Euclid** dan menemukan koefisien **Bézout**;
- berhitung dalam **aritmetika modular**: jam, kalender, weton, dan digit cek;
- menentukan angka terakhir pangkat besar lewat **siklus** dan **Teorema Fermat kecil**;
- menyelesaikan **persamaan Diophantine linear**, misalnya membayar pas dengan uang Rp2.000 dan Rp5.000.

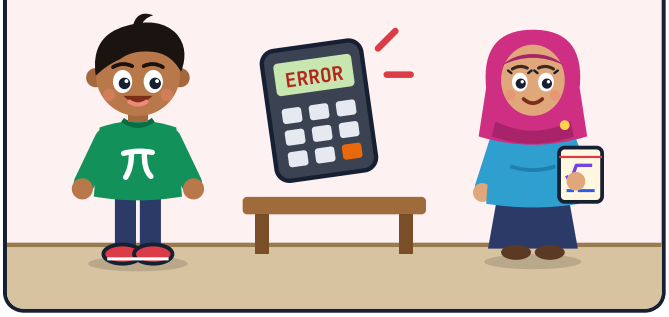
KALKULATOR YANG MENYERAH

KOMIK · 4 PANEL

Kantin sekolah, jam istirahat

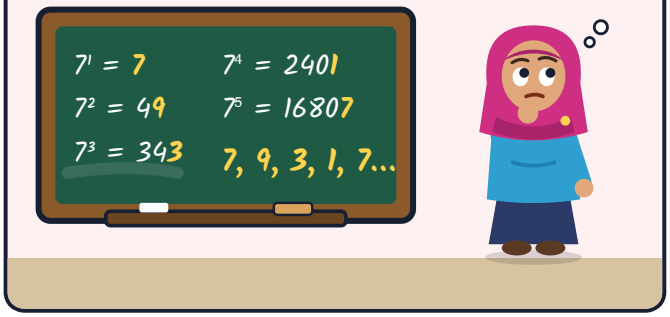
DIMAS
Teka-teki kemarin: angka terakhir 7^{2026} berapa? Kalkulatorku malah bilang ERROR!

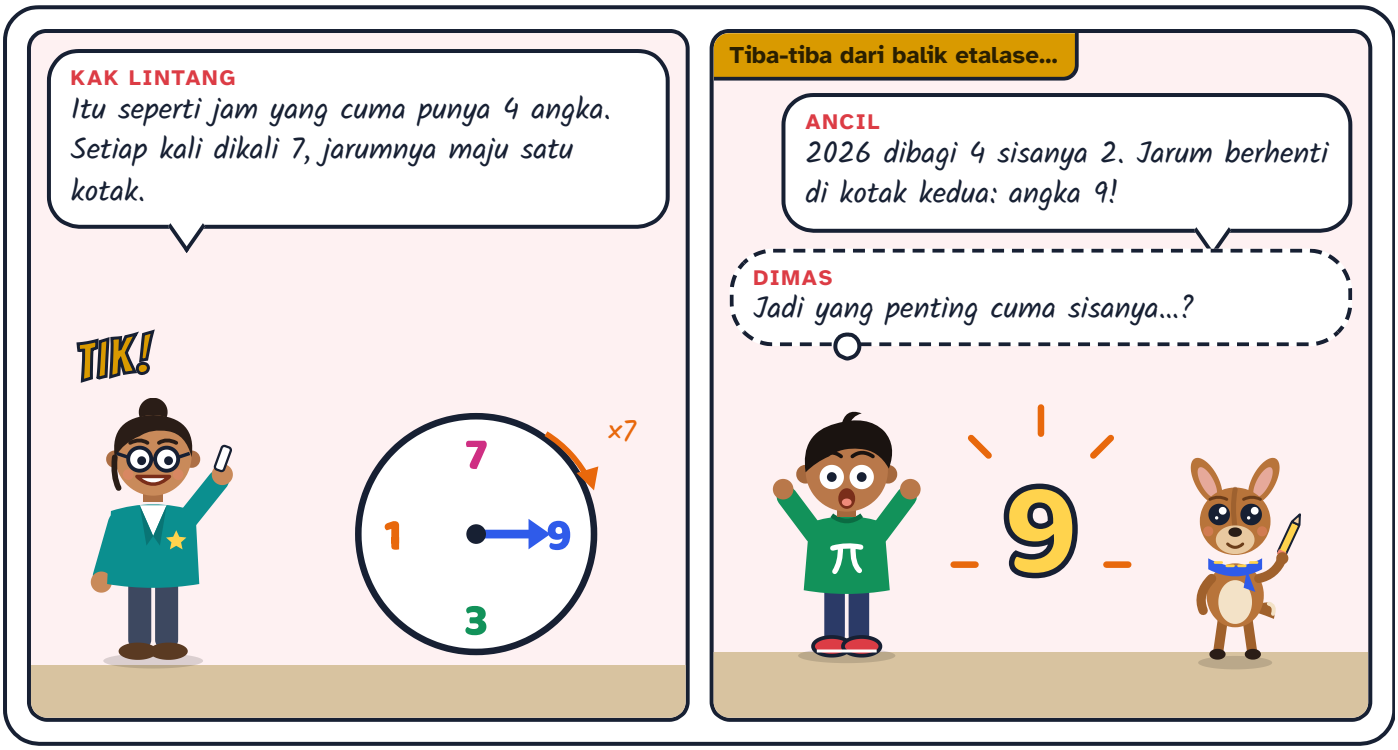
AYU
Pantas. Bilangan itu panjangnya 1.713 angka!



Ayu mulai mencatat

AYU
Lihat angka satuannya saja: 7, 9, 3, 1… lalu 7 lagi! Polanya berulang setiap 4 langkah.





Tebak Dulu!

Hari ini hari Kamis. Hari apakah 1.000 hari lagi?

- Kamis lagi, karena 1.000 adalah bilangan "bulat".
- Senin.
- Rabu.
- Tidak bisa ditentukan tanpa kalender 3 tahun ke depan.

Jawabannya: Rabu. Setiap 7 hari, nama hari kembali sama. Jadi yang penting hanyalah *sisa* 1.000 dibagi 7: $1000 = 142 \times 7 + 6$. Maju 6 hari dari Kamis sama dengan mundur 1 hari: Rabu. Ratusan minggu penuh di dalamnya tidak mengubah apa pun!

38.1 Keterbagian dan algoritma pembagian

Di Bab 4 kamu sudah berkenalan dengan faktor, bilangan prima, FPB, KPK, dan ciri habis dibagi. Bab ini membawa alat-alat itu ke panggung olimpiade. Rahasia pertamanya sederhana: **berhentilah memikirkan bilangannya, pikirkan sisanya.**

DEFINISI

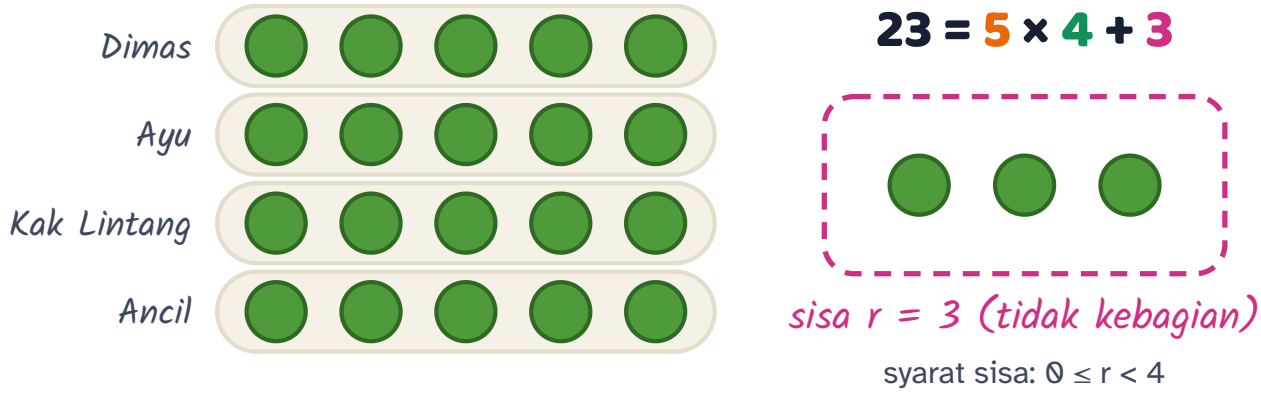
Untuk bilangan bulat $a \neq 0$ dan b, kita katakan a **membagi** b, ditulis $a \mid b$, jika ada bilangan bulat k sehingga $b = ka$. Contoh: $3 \mid 12$ karena $12 = 4 \cdot 3$, sedangkan $5 \nmid 12$. Perhatikan: $a \mid b$ adalah sebuah *pernyataan* (benar atau salah), bukan pecahan seperti a/b.

TEOREMA · ALGORITMA PEMBAGIAN

Untuk setiap bilangan bulat a dan bilangan asli n, ada tepat satu pasangan bilangan bulat q (**hasil bagi**) dan r (**sisa**) sehingga

$$a = q \cdot n + r, \qquad 0 \leq r < n.$$

Contoh: $23 = 5 \cdot 4 + 3$ dan $-17 = (-4) \cdot 5 + 3$.



Algoritma pembagian dalam bentuk kue arisan: 23 klepon dibagi rata kepada 4 orang. Hasil bagi $q = 5$ (kue per orang), sisa $r = 3$. Sisa selalu lebih kecil daripada pembaginya.

Bahasa sederhana · Gampangnya: sisa adalah "kue yang tidak kebagian". Kalau 23 kue dibagi rata kepada 4 orang, tiap orang mendapat 5 kue dan 3 kue tersisa. Sisa selalu lebih kecil daripada banyaknya orang. Kalau sisanya masih 4 atau lebih, setiap orang masih bisa mendapat satu kue lagi!

Tebak Dulu!

Sebuah bilangan habis dibagi 4 dan juga habis dibagi 6. Apakah bilangan itu pasti habis dibagi 24?

Ya, karena 4 × 6 = 24.

Ya, asalkan bilangannya genap.

Tidak; yang pasti hanya habis dibagi 12.

Tidak; bahkan belum tentu habis dibagi 12.

Jawabannya: tidak, cukup 12. Bilangan 12 sendiri habis dibagi 4 dan 6, tetapi tidak habis dibagi 24. Yang dijamin hanyalah $\mathrm{KPK}(4,6)=12$. Aturan "kalikan saja" hanya sah bila kedua bilangan tidak punya faktor persekutuan, misalnya 3 dan 8: habis dibagi 3 dan 8 berarti habis dibagi 24.

SIFAT KETERBAGIAN

Untuk bilangan bulat a, b, c, d:

1. Jika $d \mid a$ dan $d \mid b$, maka $d \mid ax+by$ untuk **semua** bilangan bulat x dan y.
2. Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.
3. Jika $a \mid b$ dan $b \neq 0$, maka $|a| \leq |b|$.

Bukti sifat keterbagian

(1) Tulis $a=dk$ dan $b=dl$. Maka $ax+by=d(kx+ly)$, dan $kx+ly$ bilangan bulat. (2) Tulis $b=ak$ dan $c=bl$; maka $c=a(kl)$. (3) Dari $b=ak$ dengan $k\neq 0$ bulat, $|k|\geq 1$, jadi $|b|=|a|\,|k|\geq|a|$. ∎

CONTOH **Kue arisan dalam kotak**

Bu RT membuat 250 kue untuk arisan dan memasukkannya ke kotak-kotak berisi 12 kue. Berapa kotak yang terisi penuh, dan berapa kue yang tersisa?

1. Cari kelipatan 12 terbesar yang tidak melebihi 250: $12 \times 20 = 240$ (sedangkan $12 \times 21 = 252$ sudah terlalu besar).
2. Sisanya $250 - 240 = 10$, dan memang $0 \le 10 < 12$.
3. Jadi $250 = 20 \cdot 12 + 10$.

Ada 20 kotak penuh dan 10 kue tersisa. Dengan bahasa bab ini: $250 \bmod 12 = 10$.

KERJAKAN BERSAMA **Trik kombinasi ala OSN**

Diketahui a dan b bilangan bulat dengan $13 \mid 2a + 3b$. Buktikan bahwa $13 \mid 5a + b$.

1. Kita ingin "mengubah" $2a + 3b$ menjadi $5a + b$ dengan mengalikan lalu membuang kelipatan 13. Karena $2 \times 9 = 18 = 13 + 5$ dan $3 \times 9 = 27 = 26 + 1$, kalikan dengan 9.
2. $9(2a + 3b) = 18a + 27b = (5a + b) + 13(a + 2b)$.
3. Jadi $5a + b = 9(2a + 3b) - 13(a + 2b)$: kombinasi dua bilangan yang sama-sama habis dibagi 13. Menurut sifat (1), $13 \mid 5a + b$.

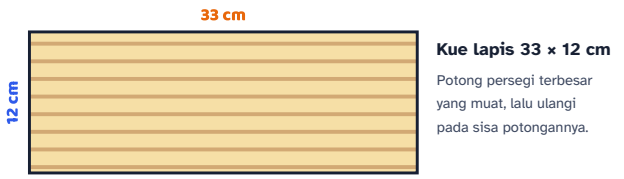
Terbukti. Trik "kalikan, lalu kurangi kelipatan pembagi" ini sangat sering dipakai di soal olimpiade.

⚠ **AWAS JEBAKAN**

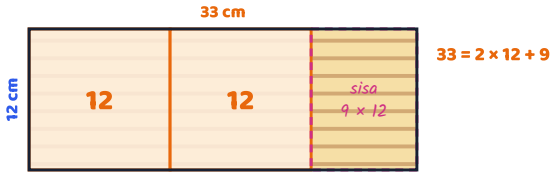
Sisa pembagian tidak pernah negatif: -17 dibagi 5 bersisa 3, bukan -2, karena $-17 = (-4) \cdot 5 + 3$. Banyak kalkulator dan bahasa pemrograman menjawab -2; dalam matematika kita selalu memakai sisa $0 \le r < n$.

38.2 FPB, algoritma Euclid, dan identitas Bézout

Kak Lintang membawa kue lapis berukuran 33 cm × 12 cm. Ia ingin memotongnya menjadi potongan **persegi** yang sama besar, sebesar mungkin, tanpa sisa sedikit pun. Sisi persegi itu harus membagi 33 dan juga membagi 12, jadi yang dicari adalah $\mathrm{FPB}(33, 12)$. Euclid punya cara memotong yang sangat cerdik.



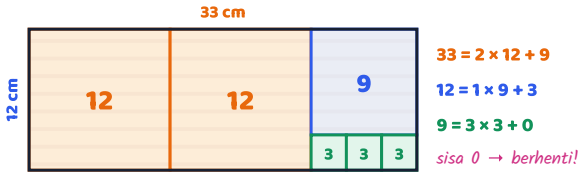
Langkah 1. Kue lapis 33 cm × 12 cm akan dipotong menjadi persegi-persegi **sama besar** yang sebesar mungkin. Strategi Euclid: potong persegi terbesar yang muat, lalu ulangi pada potongan yang tersisa.



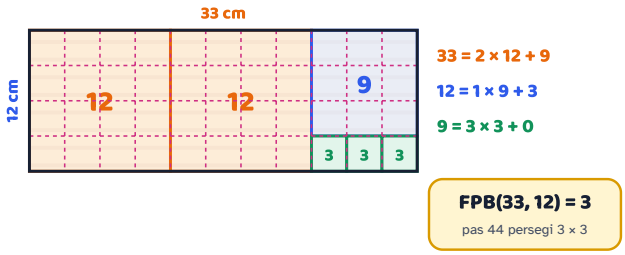
Langkah 2. Persegi terbesar bersisi 12. Muat 2 buah, dan tersisa potongan 9 × 12. Inilah pembagian bersisa $33 = 2 \times 12 + 9$.



Langkah 3. Dari potongan 9 × 12, persegi terbesar bersisi 9. Muat 1 buah, dan tersisa 9 × 3: $12 = 1 \times 9 + 3$.



Langkah 4. Dari potongan 9 × 3, persegi bersisi 3 muat tepat 3 buah tanpa sisa: $9 = 3 \times 3 + 0$. Sisa 0 berarti selesai!



Langkah 5. Persegi terakhir (sisi 3) ternyata menutup **seluruh** kue: $11 \times 4 = 44$ potong. Jadi $\mathrm{FPB}(33, 12) = 3$. Sisi 3 membagi 9, sehingga membagi 12, sehingga membagi 33: semua potongan besar tersusun dari persegi 3 × 3.

Di Bab 4 kamu mencari FPB lewat faktorisasi prima. Cara itu nyaman untuk bilangan kecil, tetapi bayangkan memfaktorkan bilangan 300 angka! Algoritma Euclid sama sekali tidak memerlukan faktorisasi; ia hanya memakai pembagian bersisa berulang-ulang, dan sisanya mengecil dengan cepat.

TEOREMA · ALGORITMA EUCLID

Jika $a = qb + r$, maka

$$\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, r).$$

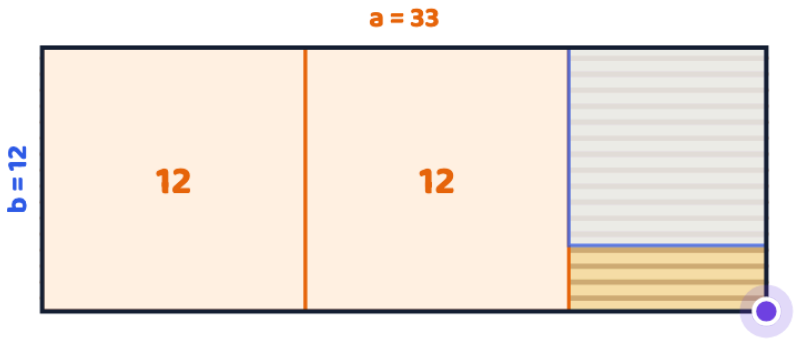
Ulangi pembagian bersisa dengan pasangan baru (b, r) sampai sisanya 0. **Sisa terakhir yang bukan nol** adalah FPB-nya.

Bukti algoritma Euclid

Setiap pembagi persekutuan a dan b juga membagi $r = a - qb$ (sifat 1). Sebaliknya, setiap pembagi persekutuan b dan r juga membagi $a = qb + r$. Jadi pasangan (a, b) dan (b, r) memiliki himpunan pembagi persekutuan yang **sama persis**, sehingga pembagi terbesarnya pun sama. Karena $b > r > r' > \cdots \geq 0$ adalah barisan bilangan cacah yang terus turun, prosesnya pasti berhenti di sisa 0.

LAB MINI **Pemotong kue Euclid**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38



Pembagian bersusun

33 = 2 × 12 + 9

12 = 1 × 9 + 3

✋ *seret titik ungu di pojok kue*

FPB(a, b)	x (Bézout)	y (Bézout)	Persegi terpotong
3	-1	3	2

Atur panjang dan lebar kue (atau seret titik ungu di pojok kanan bawah), lalu tekan ▶ **Jalankan**. Coba tombol **Fibonacci 55 × 34**: mengapa pasangan Fibonacci membuat Euclid bekerja paling lama? Perhatikan baris Bézout yang muncul di akhir.

Euclid menyimpan hadiah tersembunyi. Baca pembagian bersusun pada kue tadi dari bawah ke atas, lalu substitusikan sisanya satu per satu:

$$3 = 12 - 1 \cdot 9 = 12 - 1 \cdot (33 - 2 \cdot 12) = 3 \cdot 12 - 1 \cdot 33$$

Jadi FPB 3 dapat ditulis sebagai kombinasi 33 dan 12 dengan pengali bulat: $33 \cdot (-1) + 12 \cdot 3 = 3$. Ini selalu bisa dilakukan.

TEOREMA · IDENTITAS BÉZOUT

Untuk bilangan bulat a dan b yang tidak keduanya nol, ada bilangan bulat x dan y sehingga

$$ax + by = \mathrm{FPB}(a, b).$$

Lebih kuat lagi: $\mathrm{FPB}(a, b)$ adalah bilangan positif **terkecil** yang berbentuk $ax + by$, dan setiap bilangan berbentuk $ax + by$ adalah kelipatannya.

Bukti identitas Bézout

Misalkan $d = ax_0 + by_0$ adalah bilangan positif terkecil berbentuk $ax + by$ (pasti ada, karena misalnya $a^2 + b^2 > 0$ berbentuk itu). Bagi a dengan d: $a = qd + r$ dengan $0 \le r < d$. Maka $r = a - q(ax_0 + by_0) = a(1 - qx_0) + b(-qy_0)$ juga berbentuk $ax + by$. Karena $r < d$ dan d yang terkecil positif, haruslah $r = 0$, jadi $d \mid a$. Dengan cara sama $d \mid b$. Di sisi lain, setiap pembagi persekutuan a dan b membagi $ax_0 + by_0 = d$, jadi tidak ada pembagi persekutuan yang lebih besar daripada d. Kesimpulannya $d = \mathrm{FPB}(a, b)$.

∎

TRIK KAK LINTANG: TABEL EUCLID DIPERLUAS

Daripada substitusi mundur yang mudah keliru, catat setiap sisa sebagai kombinasi a dan b sambil maju. Baris baru = baris dua di atasnya dikurangi q kali baris tepat di atasnya.

Sisa	q	x	y	Cek: $33x + 12y$
33	—	1	0	33
12	—	0	1	12
9	2	$1 - 2 \cdot 0 = 1$	$0 - 2 \cdot 1 = -2$	$33 - 24 = 9$
3	1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$	$1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$-33 + 36 = 3$

Baris terakhir sebelum sisa 0 langsung memberi koefisien Bézout: $x = -1$, $y = 3$.

KERJAKAN BERSAMA **FPB dan koefisien Bézout**

Tentukan $\mathrm{FPB}(252, 198)$ dengan algoritma Euclid, lalu tuliskan FPB itu dalam bentuk $252x + 198y$.

1. $252 = 1 \cdot 198 + 54$; $198 = 3 \cdot 54 + 36$; $54 = 1 \cdot 36 + 18$; $36 = 2 \cdot 18 + 0$. Jadi FPB = 18.
2. Mundur: $18 = 54 - 36 = 54 - (198 - 3 \cdot 54) = 4 \cdot 54 - 198$.
3. Substitusi $54 = 252 - 198$: $18 = 4(252 - 198) - 198 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198$.

$\mathrm{FPB}(252, 198) = 18 = 252 \cdot 4 + 198 \cdot (-5)$. **Cek:** $1008 - 990 = 18$. ✓

TAMU DARI MASA LALU

Algoritma Euclid tercatat dalam kitab *Elemen* karya Euclid dari Aleksandria (±300 SM), Buku VII, dan sering disebut algoritma tertua yang masih dipakai sampai sekarang. Di sana algoritma ini digambarkan persis seperti memotong ruas garis: "kurangi yang panjang dengan yang pendek berulang-ulang". Identitasnya dinamai Étienne Bézout, matematikawan Prancis abad ke-18, walaupun Claude-Gaspard Bachet sudah menuliskan hasil serupa sekitar seabad sebelumnya.

38.3 Aritmetika modular: berhitung di jam dinding

Jam dinding hanya punya angka 1 sampai 12. Pukul 10 ditambah 5 jam bukan pukul 15, melainkan pukul 3. Jam "melupakan" kelipatan 12 dan hanya mengingat sisanya. Matematikawan menamai dunia seperti ini **aritmetika modular**.

DEFINISI · KONGRUENSI

Untuk bilangan asli n, kita tulis

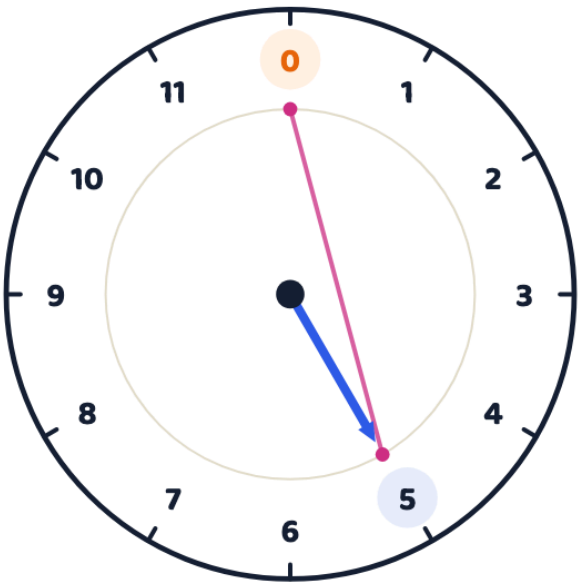
$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a-b),$$

dibaca "a **kongruen** dengan b modulo n". Artinya a dan b bersisa sama jika dibagi n. Bilangan n disebut **modulus**. Contoh: $15 \equiv 3 \pmod{12}$, $100 \equiv 2 \pmod{7}$, dan $-1 \equiv 6 \pmod{7}$. Sisa pembagian a oleh n ditulis $a \bmod n$.

Bahasa sederhana · Bayangkan jam berangka 0 sampai $n-1$. Mulai di angka 0, lalu maju a langkah. Angka tempat jarum berhenti adalah $a \bmod n$. Dua bilangan disebut kongruen kalau jarumnya berhenti di angka yang sama.

LAB MINI **Jam modular: jarum yang melompat**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38



Jam modulo 12

langkah a = 5

lompatan ke-1: maju 1 × 5 = 5

5 = 0 × 12 + 5

posisi = 5 mod 12 = 5

FPB(5, 12) = 1

Tebak dulu: setelah berapa lompatan jarum kembali ke titik awal?

Tekan ▶ untuk melihatnya.

✋ *klik angka di jam = pilih langkah a*

Lompatan ke-	Total maju k·a	Posisi = k·a mod n	FPB(a, n)	Angka dikunjungi
1	5	5	1	2

Pilih modulus n dan langkah a, lalu tekan ▶ **Jalankan**: jarum melompat a angka setiap kali dan meninggalkan jejak berbentuk bintang. Kapan jarum mengunjungi *semua* angka? Bandingkan $n = 12$ dengan $a = 5$ dan $a = 4$. Kamu juga bisa mengeklik angka di jam untuk memilih langkah.

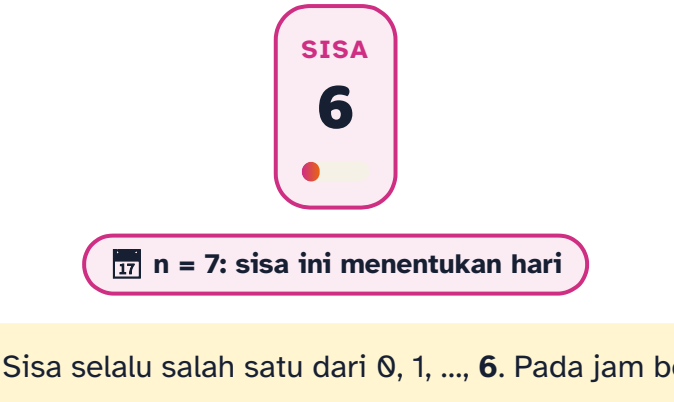
RUMUS HIDUP

Sisa pembagian (a mod n)

$$a = q \cdot n + r, \qquad r = a \bmod n$$

Kurangi a dengan kelipatan n sebanyak mungkin; yang tersisa (antara 0 dan n − 1) adalah a mod n, yaitu tempat jarum jam berhenti.

a Bilangan a n Pembagi n r Sisa



1.000 = **142** × **7** + **6**. Sisa selalu salah satu dari 0, 1, ..., **6**. Pada jam bernomor 0 sampai **6**, bergerak **1.000** langkah dari angka 0 berakhir di angka **6**.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SISA-MODULO

SIFAT OPERASI KONGRUENSI

Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$, maka

$$a + c \equiv b + d, \qquad a - c \equiv b - d, \qquad ac \equiv bd,$$

Artinya, kamu boleh **mengganti bilangan dengan sisanya kapan saja** sebelum menjumlah, mengurangi, mengalikan, atau memangkatkan.

Bukti sifat operasi

Diketahui $n \mid a - b$ dan $n \mid c - d$. Penjumlahan: $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, habis dibagi n. Perkalian: $ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$, kombinasi dua kelipatan n, jadi habis dibagi n. Pangkat: terapkan aturan perkalian k kali.

TRIK KAK LINTANG: PAKAI SISA NEGATIF

Sisa "hampir n" lebih enak ditulis negatif. Karena $6 \equiv -1 \pmod 7$, maka $6^{2026} \equiv (-1)^{2026} = 1 \pmod 7$. Karena $99 \equiv -1 \pmod{100}$, maka 99^{99} berakhiran 99. Hitungan raksasa selesai dalam satu baris!

AWAS JEBAKAN

Dalam kongruensi, kamu **tidak** boleh sembarangan membagi kedua ruas. Contoh: $2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 8 \pmod{10}$ (sebab 6 dan 16 bersisa sama), tetapi $3 \not\equiv 8 \pmod{10}$. Membagi dengan c hanya sah jika $\text{FPB}(c, n) = 1$.

CONTOH **Hari Kemerdekaan tahun depan**

Tanggal 17 Agustus 2026 jatuh pada hari Senin. Hari apakah 17 Agustus 2027?

1. Dari 17 Agustus 2026 sampai 17 Agustus 2027 ada 365 hari (Februari 2027 hanya 28 hari).
2. $365 = 52 \cdot 7 + 1$, jadi $365 \equiv 1 \pmod 7$.
3. Maju 1 hari dari Senin.

17 Agustus 2027 jatuh pada hari Selasa. Itulah sebabnya tanggal ulang tahunmu bergeser satu hari setiap tahun (dua hari bila melewati 29 Februari).

ADU CEPAT **Sisa kilat**

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari kelipatan n terbesar yang tidak melebihi a, lalu hitung selisihnya. Contoh: 100 mod 7 → 98 = 14 × 7, jadi sisanya 2.

MATEMATIKA NUSANTARA

Kalender Jawa memakai dua siklus sekaligus: tujuh hari (Senin sampai Minggu) dan lima hari *pasaran* (Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon). Pasangan keduanya disebut **weton**, misalnya Jumat Kliwon. Karena $\text{KPK}(7, 5) = 35$, weton yang sama berulang setiap 35 hari (satu *selapan*), dan setiap pasangan hari–pasaran muncul tepat sekali dalam 35 hari. Kalender Pawukon di Bali bahkan menjalankan beberapa "minggu" dengan panjang berbeda secara bersamaan dalam siklus 210 hari. Leluhur kita sudah bermain aritmetika modular berabad-abad!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

TEOREMA SISA CINA

Jika $\text{FPB}(m, n) = 1$, sistem $x \equiv a \pmod{m}$, $x \equiv b \pmod{n}$ **selalu** punya penyelesaian, dan penyelesaiannya tunggal modulo mn. Bukti singkat: ambil bilangan $0, 1, \ldots, mn - 1$. Dua bilangan berbeda di antaranya tidak mungkin punya pasangan sisa yang sama, sebab selisihnya akan habis dibagi m dan n, jadi habis dibagi mn, padahal selisihnya kurang dari mn. Ada mn bilangan dan mn pasangan sisa, jadi setiap pasangan muncul tepat sekali. Inilah alasan matematis di balik siklus weton 35 hari.

TAMU DARI MASA LALU

Kitab *Sunzi Suanjing* dari Tiongkok (sekitar abad ke-3 sampai ke-5 M) memuat teka-teki terkenal: ada sejumlah benda; dihitung tiga-tiga sisa 2, dihitung lima-lima sisa 3, dihitung tujuh-tujuh sisa 2. Berapa banyaknya? Jawaban terkecilnya 23, dan dari teka-teki inilah Teorema Sisa Cina mendapat namanya.

COBA SENDIRI **Menanti Jumat Kliwon**

Hari ini Minggu Pon. Paling cepat berapa hari lagi kita bertemu Jumat Kliwon? (Urutan pasaran: Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon.)

1. Dari Minggu ke Jumat maju 5 hari, jadi banyak hari d memenuhi $d \equiv 5 \pmod{7}$.
2. Dari Pon ke Kliwon maju 2 pasaran, jadi $d \equiv 2 \pmod{5}$.
3. Kandidat $d \equiv 5 \pmod{7}$: 5, 12, 19, 26, 33. Yang bersisa 2 jika dibagi 5 adalah 12.

Jumat Kliwon tiba 12 hari lagi, lalu berulang setiap 35 hari: 47, 82, … hari lagi.

38.4 Angka terakhir dan siklus pangkat

Sekarang kita siap menjawab teka-teki komik. Angka satuan sebuah bilangan sama dengan sisanya jika dibagi 10. Menurut sifat perkalian kongruensi, angka satuan 7^{k+1} cukup dihitung dari angka satuan 7^k dikali 7. Jadi angka satuan pangkat-pangkat sebuah bilangan berjalan seperti jarum jam:

Angka satuan a	a^1	a^2	a^3	a^4	Panjang siklus
0, 1, 5, 6	tidak berubah (0, 1, 5, 6)				1
2	2	4	8	6	4

3	3	9	7	1	4
4	4	6	4	6	2
7	**7**	**9**	**3**	**1**	**4**
8	8	4	2	6	4
9	9	1	9	1	2

Untuk 7, siklusnya 7 → 9 → 3 → 1 → 7 → ..., panjangnya 4. Karena $2026 = 4 \times 506 + 2$, pangkat 2026 jatuh di posisi kedua siklus: angka satuan 7^{2026} adalah **9**. Dalam bahasa modular: $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, sehingga

$$7^{2026} = \left(7^4\right)^{506} \cdot 7^2 \equiv 1^{506} \cdot 49 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Bahasa sederhana · Gampangnya: cari pola angka satuan dengan mengalikan beberapa kali, temukan kapan polanya berulang, lalu bagi pangkatnya dengan panjang pola. Sisanya menunjukkan posisi di dalam pola.

MENGAPA SELALU AMAN MAJU 4 PANGKAT?

Untuk **setiap** bilangan bulat a berlaku $a^5 \equiv a \pmod{10}$ (buktinya memakai Teorema Fermat kecil di subbab berikutnya, untuk modulus 2 dan 5). Akibatnya $a^{k+4} \equiv a^k \pmod{10}$ untuk semua $k \geq 1$, walaupun siklus aslinya bisa lebih pendek (1 atau 2).

RUMUS HIDUP **Angka satuan pangkat besar**

$$s = \text{angka satuan dari } a^k$$

Angka satuan a^k hanya bergantung pada angka satuan a dan sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4), karena polanya berulang setiap 4 pangkat.

a Bilangan pokok a

k Pangkat k

s Angka satuan

ANGKA SATUAN

9

teka-teki komik terjawab!

Angka satuan dari **7** adalah **7**. Pangkat **2.026** dibagi 4 bersisa **2**, jadi cukup hitung **7** pangkat **2**, yaitu **49**. Angka satuannya **9**.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SATUAN-PANGKAT

GRAFIK HIDUP

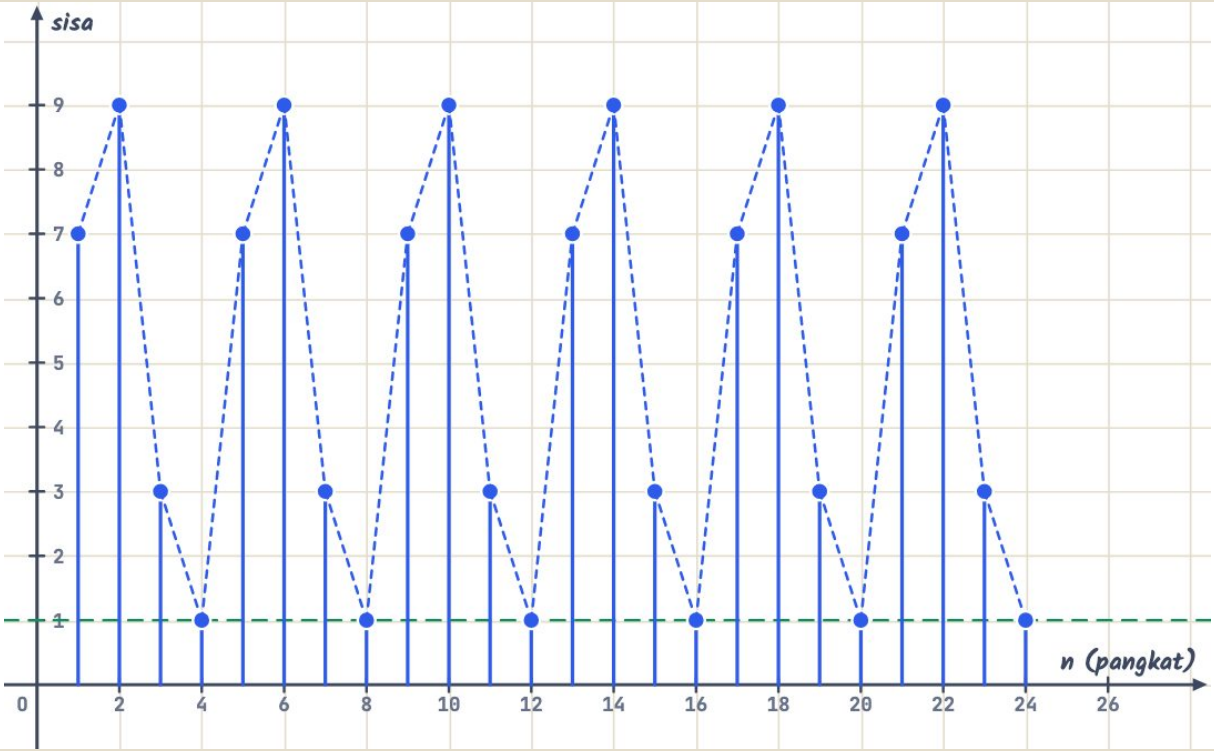
Siklus sisa pangkat

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38

$$y_n = a^{\,n} \bmod m$$

$$y_n = 7^{\,n} \bmod 10$$

Titik ke-n menunjukkan sisa a^n jika dibagi m. Karena sisanya hanya punya m kemungkinan, cepat atau lambat polanya pasti berulang.



m = 10: inilah angka satuan a^n

Panjang siklus	a^(m−1) mod m	a^2026 mod m
4	7	9

Mulai dari $a = 7$, $m = 10$: titik-titik melompat 7, 9, 3, 1 lalu berulang. Sekarang ganti m dengan bilangan prima (5, 7, 11, 13) dan perhatikan garis putus-putus magenta. Apa yang selalu terjadi di sana?

KERJAKAN BERSAMA

Angka satuan sebuah perkalian raksasa

Tentukan angka satuan dari $2^{2026} \times 3^{2027}$.

1. Siklus 2: 2, 4, 8, 6. Karena $2026 \equiv 2 \pmod 4$, angka satuan 2^{2026} adalah 4.
2. Siklus 3: 3, 9, 7, 1. Karena $2027 \equiv 3 \pmod 4$, angka satuan 3^{2027} adalah 7.
3. Kalikan angka satuannya saja: $4 \times 7 = 28$.

Angka satuannya 8, padahal bilangannya sendiri punya lebih dari 1.500 angka.

ADU CEPAT

Angka satuan kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Ambil angka satuan a, lalu sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4). Contoh: 13 pangkat 27 → 3 pangkat 3 = 27 → angka satuannya 7.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

DUA ANGKA TERAKHIR 7^{2026}

Dua angka terakhir adalah sisa pembagian oleh 100. Keberuntungan kecil: $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. Maka $7^{2026} = (7^4)^{506} \cdot 7^2 \equiv 49 \pmod{100}$, jadi 7^{2026} berakhiran **49**. Untuk bilangan pokok lain, siklus modulo 100 bisa lebih panjang (misalnya 20 untuk bilangan pokok 3), tetapi panjangnya selalu membagi 40, seperti yang dijamin Teorema Euler di subbab berikutnya.

38.5 Teorema Fermat kecil: rahasia kalung manik-manik

Di grafik siklus tadi, pilih modulus prima, misalnya $m = 7$, lalu ganti-ganti a. Ada keajaiban: pada pangkat ke-6 sisanya **selalu 1**. Dengan $m = 11$, keajaiban yang sama terjadi pada pangkat ke-10. Ini bukan kebetulan.

TEOREMA FERMAT KECIL

Jika p bilangan prima dan a bilangan bulat yang tidak habis dibagi p, maka

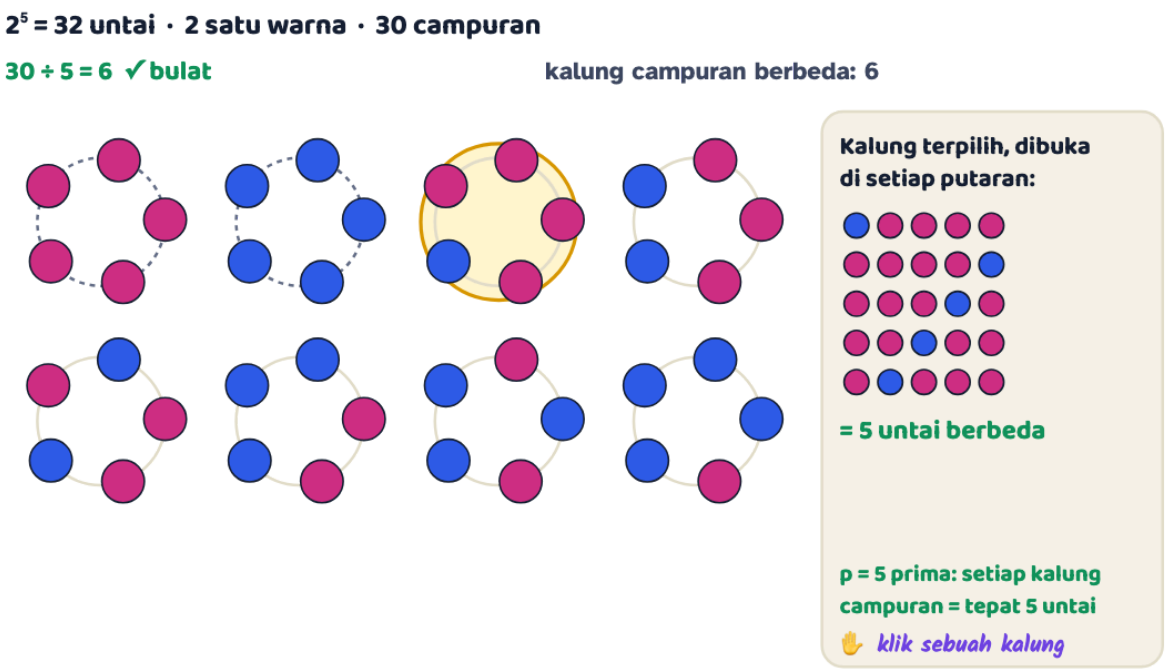
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Bentuk yang setara dan berlaku untuk **semua** bilangan bulat a: $a^p \equiv a \pmod{p}$, yaitu $p \mid a^p - a$.

Mengapa $a^p - a$ selalu habis dibagi p? Bayangkan Ayu merangkai kalung dari p manik dengan a pilihan warna. Sebagai *untaian lurus*, ada a^p kemungkinan. Sebanyak a di antaranya berwarna tunggal. Ketika ujung-ujung untai disambung menjadi kalung, untai-untai yang hanya berbeda karena **diputar** menjadi kalung yang sama. Lab berikut menunjukkan bahwa untuk p prima, setiap kalung campuran berasal dari tepat p untai.

LAB MINI **Kalung manik-manik Fermat**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38



a^p (semua untai)	Untai satu warna	Kalung campuran	$(a^p - a) \div p$
32	2	6	6

Pilih banyak warna a dan banyak manik p. Tekan ▶ **Jalankan** untuk memutar semua kalung, lalu klik sebuah kalung untuk melihat untai-untai yang dikandungnya. Bandingkan $p = 5$ atau 7 (prima) dengan $p = 4$ atau 6. Kapan $(a^p - a) \div p$ bulat?

▾ **Bukti Teorema Fermat kecil dengan kalung**

Kelompokkan $a^p - a$ untai campuran (yang memakai lebih dari satu warna) menurut kalung yang dibentuknya. Memutar sebuah untai sejauh $1, 2, \ldots, p$ posisi menghasilkan untai-untai dalam kelompok yang sama; misalkan untai kembali ke bentuk semula pertama kali setelah s putaran. Maka putaran berulang dengan periode s, dan karena putaran sejauh p jelas mengembalikan untai, $s \mid p$. Untuk p prima, $s = 1$ atau $s = p$. Nilai $s = 1$ berarti untai tidak berubah saat diputar satu posisi, yaitu semua manik berwarna sama, padahal untainya campuran. Jadi $s = p$: setiap kelompok berisi tepat p untai, sehingga $p \mid a^p - a$. Jika $p \nmid a$, bilangan a boleh "dicoret" dari $a(a^{p-1} - 1)$ karena $\mathrm{FPB}(a, p) = 1$, sehingga $p \mid a^{p-1} - 1$.

RUMUS HIDUP

Teorema Fermat kecil

$$a^{p-1} \bmod p = r$$

Jika p prima dan a tidak habis dibagi p, sisa a pangkat (p − 1) dibagi p selalu 1.

a Bilangan a | p Modulus p | r Sisa

SISA

1

☆ **p prima: sisanya pasti 1**

3 pangkat **6** dibagi **7** bersisa **1**. **Modulus prima dan a tidak habis dibagi p, jadi Fermat menjamin sisa 1.**

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-FERMAT-KECIL

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Teorema Fermat hanya berjalan satu arah: "prima ⇒ sisa 1". Kebalikannya salah! Contoh: $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, padahal $341 = 11 \times 31$ bukan prima. Ingat juga syaratnya: jika $p \mid a$, misalnya 7^6 dibagi 7, sisanya 0, bukan 1.

COBA SENDIRI **Sisa pangkat dengan Fermat**

Tentukan sisa pembagian 3^{2026} oleh 11.

1. 11 prima dan tidak membagi 3, jadi $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.
2. $2026 = 10 \cdot 202 + 6$, sehingga $3^{2026} = (3^{10})^{202} \cdot 3^6 \equiv 3^6 \pmod{11}$.
3. $3^5 = 243 = 22 \cdot 11 + 1 \equiv 1$, jadi $3^6 \equiv 3 \pmod{11}$.

Sisanya 3. Bonus: ternyata siklus 3 modulo 11 hanya sepanjang 5, dan 5 membagi $p - 1 = 10$. Panjang siklus selalu membagi $p - 1$.



TAMU DARI MASA LALU

Pierre de Fermat, ahli hukum di Toulouse pada abad ke-17 yang bermatematika sebagai hobi, menuliskan teorema ini dalam sebuah surat tahun 1640 tanpa menyertakan bukti. Gottfried Leibniz menulis buktinya sekitar 1683 tetapi tidak menerbitkannya; bukti pertama yang diterbitkan datang dari Leonhard Euler pada 1736. Bukti dengan kalung yang kamu lihat di atas dipopulerkan Solomon Golomb pada 1956.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

TEOREMA EULER DAN KRIPTOGRAFI RSA

Misalkan $\varphi(n)$ adalah banyaknya bilangan $1, 2, \ldots, n$ yang relatif prima dengan n. Euler membuktikan: jika $\text{FPB}(a, n) = 1$, maka $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Untuk n prima, $\varphi(n) = n - 1$ dan kita mendapat Fermat lagi. Karena $\varphi(10) = 4$ dan $\varphi(100) = 40$, siklus angka satuan selalu membagi 4 dan siklus dua angka terakhir selalu membagi 40 (untuk a yang relatif prima dengan 10). Sistem kriptografi RSA memilih dua prima raksasa p, q, lalu mengenkripsi pesan M menjadi $M^e \bmod pq$. Hanya pemilik $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ yang tahu pangkat d dengan $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}$ untuk membukanya, dan menemukan $\varphi(pq)$ tanpa mengetahui p dan q sangatlah sulit.

MITOS

"Kalau 2^{n-1} bersisa 1 jika dibagi n, pasti n bilangan prima."

FAKTA

Tidak selalu. $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, padahal $341 = 11 \times 31$. Teorema Fermat hanya menjamin arah "prima ⇒ sisa 1", bukan sebaliknya.

MITOS

"Teori bilangan memang indah, tetapi tidak ada gunanya."

FAKTA

Matematikawan G. H. Hardy (1940) pernah bangga bahwa teori bilangan "tak berguna". Kini aritmetika modular mengamankan m-banking, tanda tangan digital, dan digit cek di setiap kartu ATM.

MITOS

"Angka satuan pangkat selalu berulang setiap 4 langkah."

FAKTA

Siklusnya bisa sepanjang 1 (untuk 0, 1, 5, 6), 2 (untuk 4 dan 9), atau 4. Yang selalu benar: maju 4 pangkat tidak mengubah angka satuan, karena $a^5 \equiv a \pmod{10}$.

38.6 Persamaan Diophantine linear: uang pas tanpa kembalian

Tebak Dulu!

Dompet Ayu hanya berisi lembaran Rp2.000 dan Rp5.000 (masing-masing banyak sekali). Ia harus membayar dengan uang pas, tanpa kembalian. Harga manakah yang mustahil ia bayar?

- Rp11.000
- Rp7.000
- Rp3.000
- Rp13.000

Jawabannya: Rp3.000. Rp11.000 = 3 × 2.000 + 5.000, Rp7.000 = 2.000 + 5.000, Rp13.000 = 4 × 2.000 + 5.000. Rp3.000 tidak bisa: satu lembar 5.000 sudah kelebihan, sedangkan lembar 2.000 saja hanya menghasilkan bilangan genap (dalam ribuan). Ternyata di antara kelipatan Rp1.000, hanya Rp1.000 dan Rp3.000 yang mustahil; semua harga mulai Rp4.000 bisa dibayar pas!

Membayar N ribu rupiah dengan x lembar Rp2.000 dan y lembar Rp5.000 berarti mencari bilangan bulat x, y dengan $2x + 5y = N$. Persamaan yang jawabannya harus bilangan bulat seperti ini disebut **persamaan Diophantine**, dinamai Diophantus dari Aleksandria (sekitar abad ke-3 M).

Bahasa sederhana · Coba bayar Rp1.000 kalau penjual boleh memberi kembalian: serahkan tiga lembar Rp2.000 (Rp6.000), lalu terima kembalian satu lembar Rp5.000. Hasilnya kamu membayar $6.000 - 5.000 = 1.000$ rupiah. Kembalian sama dengan y bernilai negatif: $2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 1$.

TEOREMA · PERSAMAAN DIOPHANTINE LINEAR

Misalkan $d = \mathrm{FPB}(a, b)$. Persamaan $ax + by = c$ mempunyai penyelesaian bilangan bulat **jika dan hanya jika** $d \mid c$. Jika (x_0, y_0) satu penyelesaian, maka **semua** penyelesaiannya adalah

$$x = x_0 + \frac{b}{d}\,t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}\,t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Bukti

Syarat perlu: d membagi a dan b, jadi membagi $ax + by = c$. **Syarat cukup:** menurut Bézout ada u, v dengan $au + bv = d$. Jika $c = kd$, maka $x = ku$, $y = kv$ memenuhi $ax + by = c$. **Semua solusi:** jika (x, y) dan (x_0, y_0) sama-sama solusi, maka $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$. Bagi dengan d: $\frac{a}{d}(x - x_0) = -\frac{b}{d}(y - y_0)$. Karena $\frac{a}{d}$ dan $\frac{b}{d}$ relatif prima, $\frac{b}{d} \mid x - x_0$; tulis $x - x_0 = \frac{b}{d}t$, dan substitusi memberi $y - y_0 = -\frac{a}{d}t$.

GRAFIK HIDUP

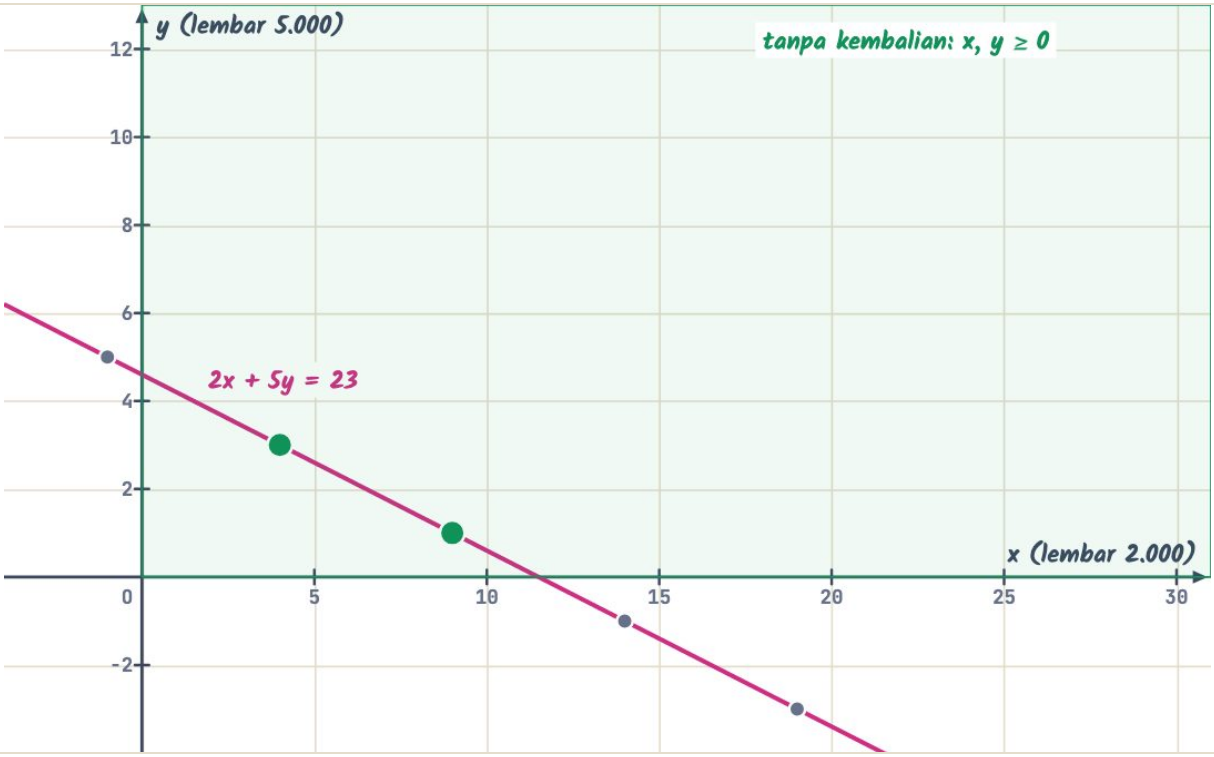
Uang pas dengan lembar 2.000 dan 5.000

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38

$$2x + 5y = N \quad \text{(ribu rupiah)}$$

$$2x + 5y = 23$$

Setiap titik adalah satu cara membayar. Titik hijau: tanpa kembalian (x, y ≥ 0). Titik abu-abu: x atau y negatif, artinya ada lembar yang dikembalikan penjual.



N ≥ 4: selalu bisa dibayar pas

Cara tanpa kembalian	Lembar paling sedikit
2	7

Geser harga N. Semua titik bulat terletak di garis yang sama dan berjarak teratur: maju 5 ke kanan, turun 2. Itulah rumus $x = x_0 + 5t$, $y = y_0 - 2t$. Berapa harga yang hanya punya satu cara bayar tanpa kembalian?

RUMUS HIDUP **Syarat persamaan Diophantine linear**

$$d = \mathrm{FPB}(a, b), \qquad ax + by = c \text{ punya solusi bulat} \iff$$

Hitung FPB kedua koefisien. Persamaan punya solusi bulat tepat ketika ruas kanan c adalah kelipatan FPB itu.

a Koefisien a | b Koefisien b | c Ruas kanan c | d FPB(a, b)

FPB(A, B)

3

✔ ada solusi bulat

FPB(**6**, **15**) = **3**. Bilangan **21 adalah** kelipatan **3**, jadi **6**x + **15**y = **21 punya** solusi bilangan bulat. **Bagi dulu semuanya dengan 3: 2x + 5y = 7.**

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SYARAT-DIOPHANTINE

COBA SENDIRI **Belanja kue arisan**

Kak Lintang membeli kue lapis Rp7.000 per potong dan klepon Rp4.000 per bungkus, masing-masing minimal satu, dengan total tepat Rp100.000. Ada berapa kemungkinan belanjaannya?

1. Model: $7x + 4y = 100$ dengan $x, y \geq 1$. Karena $\mathrm{FPB}(7, 4) = 1$, solusi bulat pasti ada.
2. Bézout: $7 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 1$. Kalikan 100: $x_0 = -100$, $y_0 = 200$.
3. Semua solusi: $x = -100 + 4t$, $y = 200 - 7t$. Syarat $x \geq 1$ memberi $t \geq 26$; syarat $y \geq 1$ memberi $t \leq 28$.
4. $t = 26, 27, 28$ menghasilkan $(x, y) = (4, 18), (8, 11), (12, 4)$.

Ada 3 kemungkinan. Cek salah satunya: $7 \cdot 8 + 4 \cdot 11 = 56 + 44 = 100$. ✓

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BILANGAN FROBENIUS: HARGA YANG MUSTAHIL

Untuk dua bilangan asli $a, b > 1$ yang relatif prima, bilangan terbesar yang **tidak** dapat ditulis sebagai $ax + by$ dengan $x, y \geq 0$ adalah $ab - a - b$, dan banyaknya bilangan yang mustahil tepat $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. Untuk uang 2 dan 5 (ribuan): yang terbesar $10 - 2 - 5 = 3$, dan ada $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2$ harga mustahil, yaitu Rp1.000 dan Rp3.000. Untuk perangko 5 dan 7: yang terbesar 23, dan ada 12 nilai mustahil. Hasil ini sering muncul di OSN dengan cerita koin, perangko, atau kemasan.

Kalender & weton

Menentukan hari 1.000 hari lagi, atau kapan Jumat Kliwon berikutnya, cukup dengan sisa pembagian oleh 7 dan 5.

ISBN & barcode

Angka terakhir ISBN-13 dan barcode produk dipilih agar jumlah berbobot 1 dan 3 habis dibagi 10, sehingga salah ketik satu angka pasti ketahuan.

Nomor kartu ATM

Nomor kartu pembayaran memakai algoritma Luhn (modulo 10) untuk menangkap salah ketik sebelum transaksi diproses.

m-banking & situs aman

Kriptografi RSA mengandalkan pangkat modulo bilangan raksasa dan Teorema Euler, saudara tua Teorema Fermat kecil.

Kode QRIS

Data QRIS diakhiri kode pemeriksa (CRC) yang dihitung dari sisa sebuah pembagian, sehingga kode yang rusak dapat ditolak aplikasi.

Jadwal obat & ronda

Minum obat setiap 8 jam atau giliran ronda bergilir adalah aritmetika modulo 24 dan modulo banyaknya warga.

Cek Cepat

Sisa pembagian 2^{100} oleh 3 adalah...

- 2
- 1
- 0
- Tidak bisa ditentukan tanpa kalkulator

Untuk nilai c manakah persamaan $6x + 15y = c$ mempunyai penyelesaian bilangan bulat?

10

20

21

25

Jarum jam menunjuk pukul 10. Seratus jam kemudian, jarum menunjuk pukul...

2

4

10

8

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: detektif ISBN

Bahan: 3–5 buku yang punya ISBN 13 angka (lihat sampul belakang atau halaman hak cipta), kertas, pensil, kalkulator HP.

1. Tulis 13 angka ISBN sebuah buku (abaikan tanda hubung).
2. Kalikan angka ke-1, 3, 5, ... dengan 1 dan angka ke-2, 4, 6, ... dengan 3, lalu jumlahkan ketiga belas hasilnya.
3. Periksa: apakah jumlahnya habis dibagi 10? Ulangi untuk buku-buku lain.
4. Sekarang pura-pura salah ketik: tukar dua angka yang bersebelahan, lalu hitung ulang jumlahnya.
5. Coba beberapa pertukaran. Kapan kesalahannya tertangkap dan kapan lolos?

Pertanyaan: Jika dua angka bersebelahan u dan v tertukar, jumlah berbobotnya berubah sebesar $2(u - v)$ atau $-2(u - v)$. Kapan perubahan itu tetap kelipatan 10 sehingga kesalahan lolos? (Petunjuk: $10 \mid 2(u - v) \iff 5 \mid u - v$.)

RINGKASAN KILAT **Bab 38 dalam 3 menit**

☑ Kamu sekarang bisa...

- memakai **algoritma pembagian** dan sifat keterbagian untuk menalar sisa tanpa menghitung bilangan raksasa
- menghitung FPB dengan **algoritma Euclid** dan menemukan koefisien **Bézout**
- berhitung dalam **aritmetika modular**: jam, kalender, weton, dan digit cek
- menentukan angka terakhir pangkat besar lewat **siklus** dan **Teorema Fermat kecil**
- menyelesaikan **persamaan Diophantine linear**, misalnya membayar pas dengan uang Rp2.000 dan Rp5.000

🔑 Istilah kunci

membagi · hasil bagi · sisa · aritmetika modular · kongruen · modulus · persamaan Diophantine

🧮 Rumus penting

$$a = q \cdot n + r, \qquad r = a \bmod n$$

Sisa pembagian (a mod n). Kurangi a dengan kelipatan n sebanyak mungkin; yang tersisa (antara 0 dan n – 1) adalah a mod n, yaitu tempat jarum jam berhenti.

$$s = \text{angka satuan dari } a^k$$

Angka satuan pangkat besar. Angka satuan a^k hanya bergantung pada angka satuan a dan sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4), karena polanya berulang setiap 4 pangkat.

$$a^{p-1} \bmod p = r$$

Teorema Fermat kecil. Jika p prima dan a tidak habis dibagi p, sisa a pangkat (p – 1) dibagi p selalu 1.

$$d = \text{FPB}(a, b), \qquad ax + by = c \text{ punya solusi bulat} \iff d \mid c$$

Syarat persamaan Diophantine linear. Hitung FPB kedua koefisien. Persamaan punya solusi bulat tepat ketika ruas kanan c adalah kelipatan FPB itu.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Sisa pembagian tidak pernah negatif: -17 dibagi 5 bersisa 3, bukan -2, karena $-17 = (-4) \cdot 5 + 3$.
- Dalam kongruensi, kamu tidak boleh sembarangan membagi kedua ruas.
- Teorema Fermat hanya berjalan satu arah: "prima ⇒ sisa 1".

⛰ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=38

Teka-teki untuk Bab 39

Di sebuah kelas ada 13 siswa. Benarkah pasti ada dua siswa yang lahir pada bulan yang sama, tanpa perlu menanyai mereka satu per satu? Versi teori bilangannya lebih mengejutkan: ambil 13 bilangan bulat *sembarang*. Pasti ada dua di antaranya yang selisihnya habis dibagi 12. Mengapa?

▼ **Intip petunjuk**

Hanya ada 12 bulan, dan hanya ada 12 kemungkinan sisa pembagian oleh 12 (0 sampai 11). Kalau 13 benda dimasukkan ke 12 kotak, pasti ada kotak yang berisi dua. Bab 39 menamai trik sederhana namun sakti ini **prinsip sarang merpati**.

39 Strategi Olimpiade: Merpati, Papan Catur, dan Rahasia AM-GM

Bagaimana kamu bisa yakin ada dua teman sekelas yang lahir di bulan yang sama tanpa bertanya kepada siapa pun? Mengapa 31 domino tidak akan pernah bisa menutup papan catur yang dua pojoknya dipotong? Di bab terakhir ini kamu mengisi kotak perkakas para juara: berpikir cerdik, bukan menghitung semuanya.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **prinsip sarang merpati** (bentuk dasar dan bentuk umum) untuk membuktikan bahwa sesuatu *pasti ada*;
- menemukan **invarian** dan **monovarian** untuk menjawab pertanyaan "mungkinkah?";
- memakai **pewarnaan** untuk membuktikan bahwa sebuah pengubinan mustahil;
- membuktikan dan memakai ketaksamaan **AM-GM** serta **Cauchy-Schwarz** untuk mencari nilai maksimum dan minimum;
- menerapkan **heuristik Pólya**: kasus kecil, bekerja mundur, simetri, dan prinsip ekstrem.

TIGA BELAS MERPATI

KOMIK · 4 PANEL





Tebak Dulu!

Dalam kotak yang gelap ada 10 kaus kaki merah dan 10 kaus kaki biru, bercampur. Paling sedikit berapa kaus kaki yang harus kamu ambil tanpa melihat agar pasti mendapat sepasang yang warnanya sama?

- 11, lebih dari separuh isi kotak.
- 2, karena sepasang terdiri atas dua kaus kaki.
- 3 saja.
- 21, karena kotaknya hanya berisi 20.

Jawabannya: 3. Hanya ada dua warna, jadi dua "sarang". Dengan nasib paling sial, dua kaus kaki pertama berbeda warna. Kaus kaki ketiga *pasti* sewarna dengan salah satunya. Angka 11 adalah jebakan; pertanyaan "agar pasti mendapat dua kaus kaki **merah**" pun jawabannya bukan 11, melainkan 12 (sial terburuk: 10 biru dulu).

39.1 Prinsip sarang merpati: pasti ada, walau tak tahu yang mana

Soal olimpiade sering berbunyi "buktikan bahwa *pasti ada*...". Kita tidak diminta menunjuk siapa atau yang mana, cukup memastikan bahwa ia ada. Senjata paling sederhana untuk soal seperti ini terdengar seperti lelucon, tetapi dipakai sampai di tingkat olimpiade internasional.

Bahasa sederhana · Bayangkan ada 5 kursi dan 6 anak yang semuanya harus duduk. Seberapa pun pintarnya mereka mengatur diri, pasti ada satu kursi yang dipakai berdua. Itu saja isinya!

PRINSIP SARANG MERPATI (PIGEONHOLE PRINCIPLE)

Bentuk dasar. Jika $n+1$ ekor merpati (atau lebih) masuk ke n sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit 2 merpati.

Bentuk umum. Jika N benda dimasukkan ke k kotak, pasti ada kotak yang berisi paling sedikit $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ benda.

$$\text{isi kotak terpenuh} \;\geq\; \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Lambang $\lceil x \rceil$ berarti x **dibulatkan ke atas**: $\lceil 2{,}1 \rceil = 3$, $\lceil 4 \rceil = 4$.

Bukti (dengan kontradiksi, seperti di Bab 35)

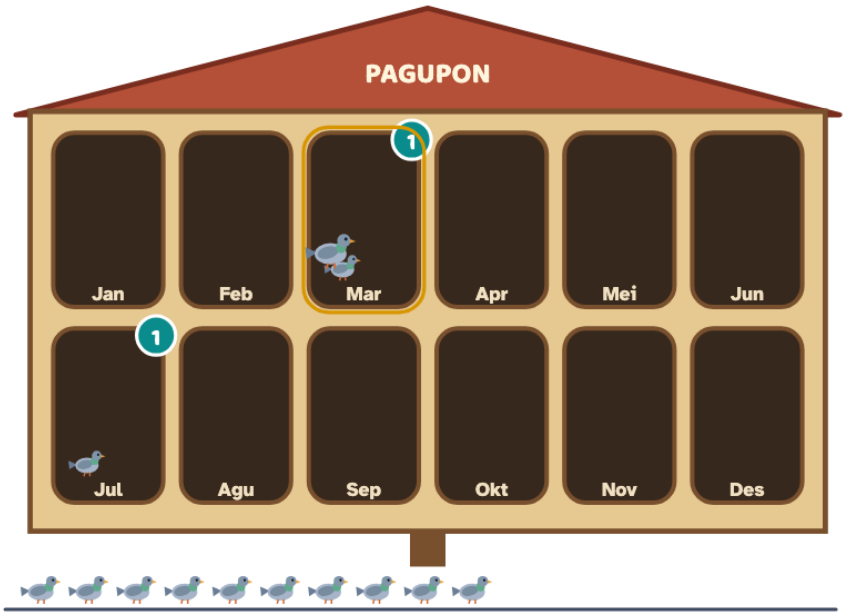
Andaikan setiap kotak berisi paling banyak $\lceil N/k \rceil - 1$ benda. Karena $\lceil N/k \rceil - 1 < N/k$, jumlah seluruh benda paling banyak

$$k\left(\left\lceil \tfrac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k \cdot \tfrac{N}{k} = N,$$

padahal bendanya ada N. Kontradiksi! Jadi ada kotak dengan paling sedikit $\lceil N/k \rceil$ benda. Bentuk dasar adalah kasus $N = n+1$, $k = n$: $\lceil (n+1)/n \rceil = 2$.

LAB MINI Pagupon Pak RT: masukkan merpatinya!

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-39



N = 13 merpati

k = 12 sarang

N : k = 1,08

⌈N/k⌉ = 2

Janji: pasti ada sarang berisi ≥ 2 ekor

sarang terpenuh: 1 ekor

✋ *ketuk lubang*

Merpati di sarang	Isi sarang terpenuh	Jaminan ⌈N/k⌉	Keadaan
2	1	2	11 merpati menunggu

Ketuk sebuah lubang untuk menerbangkan merpati berikutnya ke sana, atau tekan ▶ **Jalankan**. Pilih cara terbang **"paling merata"**: merpati berusaha keras tidak berbagi sarang. Tetap saja, adakah sarang yang berisi $\lceil N/k \rceil$ ekor? Coba 13 merpati di 12 sarang, lalu 25 merpati di 12 sarang.

RUMUS HIDUP

Sarang merpati bentuk umum

$$m = \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Bagikan N merpati ke k sarang serata mungkin. Tetap saja ada sarang yang isinya paling sedikit N/k, dibulatkan ke atas.

- N Banyak merpati ekor
- k Banyak sarang sarang
- m Isi minimal sarang terpenuh ekor

ISI MINIMAL SARANG TERPENUH

2

ekor

🕊️🕊️ **pasti ada sarang yang dihuni bersama**

13 merpati di **12** sarang: rata-rata **1,083** ekor per sarang. Karena isi sarang selalu bilangan bulat, pasti ada sarang berisi paling sedikit **2** ekor.

Cek satuan: merpati dan sarang hanyalah nama samaran. Tanyakan selalu: siapa merpatinya, apa sarangnya?

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SARANG-MERPATI

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Kalau soal berbunyi "buktikan pasti ada dua yang...", curigai sarang merpati. Ajukan dua pertanyaan: **siapa merpatinya?** dan **apa sarangnya?** Seni olimpiadenya ada pada memilih sarang yang cerdik: kadang bulan lahir, kadang sisa pembagian, kadang pasangan bilangan, kadang potongan persegi.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

Prinsip sarang merpati hanya menjamin **ada** sarang yang berisi dua; ia tidak memberi tahu sarang *yang mana*, dan tidak menjamin *semua* sarang terisi. Hati-hati pula menghitung sarang: skor 0 sampai 10 itu 11 kemungkinan, bukan 10.

CONTOH

Kembaran ulang tahun di sekolah

Sebuah sekolah memiliki 370 siswa. Buktikan bahwa ada dua siswa yang berulang tahun pada tanggal dan bulan yang sama.

1. Merpati: 370 siswa. Sarang: semua kemungkinan tanggal ulang tahun dalam setahun.
2. Termasuk 29 Februari, banyaknya tanggal hanya 366.
3. $370 > 366$, jadi menurut prinsip sarang merpati ada tanggal yang dimiliki paling sedikit dua siswa.

Terbukti, tanpa membuka satu pun data siswa. Bahkan menurut bentuk umum, ada tanggal yang dimiliki $\lceil 370/366 \rceil = 2$ siswa, dan dengan 733 siswa dijamin ada tiga.

KERJAKAN BERSAMA

Sarang berupa pasangan

Enam bilangan berbeda dipilih dari 1, 2, ..., 10. Buktikan bahwa selalu ada dua bilangan terpilih yang jumlahnya 11.

1. Kuncinya memilih sarang. Pasangkan bilangan yang jumlahnya 11: $\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}$. Ada 5 sarang yang mencakup semua bilangan 1–10.
2. Enam bilangan terpilih adalah merpatinya. Karena $6 > 5$, dua bilangan terpilih berada di sarang yang sama.
3. Dua bilangan sesarang adalah pasangan berjumlah 11.

Selalu ada pasangan berjumlah 11. Lima bilangan belum cukup: pilihan 1, 2, 3, 4, 5 tidak punya pasangan berjumlah 11.

ADU CEPAT

Sarang merpati kilat

ADU CEPAT · MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-39

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bagi N dengan k, lalu bulatkan ke atas. Contoh: 25 merpati, 12 sarang → 25 : 12 ≈ 2,08 → 3.

TAMU DARI MASA LALU

Prinsip ini sering dinamai menurut Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), matematikawan Jerman yang memakainya dalam teori bilangan sekitar tahun 1834. Ia menyebutnya *Schubfachprinzip*, "prinsip laci": benda yang terlalu banyak untuk laci yang terlalu sedikit. Idenya bahkan lebih tua: sebuah buku Prancis dari sekitar tahun 1622 sudah memakainya untuk menyimpulkan bahwa pasti ada dua orang dengan jumlah helai rambut yang sama persis!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

SATU MEMBAGI YANG LAIN

Pilih $n+1$ bilangan dari $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Buktikan bahwa ada dua bilangan terpilih yang salah satunya membagi yang lain.

Ide: tulis setiap bilangan sebagai $2^k \cdot m$ dengan m ganjil (misalnya $12 = 2^2 \cdot 3$). Bagian ganjil m hanya bisa $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$: ada n sarang. Karena ada $n+1$ merpati, dua bilangan punya bagian ganjil yang sama, misalnya $2^i m$ dan $2^j m$ dengan $i < j$. Yang kecil membagi yang besar! Untuk $n = 5$, pilihan 6, 7, 8, 9, 10 gagal karena hanya lima bilangan; bilangan keenam dari 1–10 pasti membuat pasangan "membagi".

39.2 Invarian dan monovarian: yang tetap di tengah perubahan

Banyak soal olimpiade berupa *proses*: ada keadaan awal, ada langkah yang diizinkan, lalu muncul pertanyaan "mungkinkah sampai ke keadaan ini?" atau "apa hasil akhirnya?". Mencoba semua kemungkinan bisa memakan waktu seumur hidup. Jalan pintasnya: cari sesuatu yang **tidak berubah**.

DEFINISI

Sebuah **invarian** adalah besaran yang nilainya tidak berubah oleh setiap langkah yang diizinkan (misalnya jumlah, paritas, atau sisa pembagian). Sebuah **monovarian** adalah besaran yang hanya bergerak ke satu arah: selalu naik atau selalu turun.

Jika keadaan akhir yang diminta punya nilai invarian yang berbeda dari keadaan awal, keadaan itu **mustahil** dicapai. Jika sebuah monovarian bilangan asli terus turun, prosesnya **pasti berhenti**.

LAB MINI **Papan tulis ajaib Kak Lintang**

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-39



Yang berubah

banyak bilangan: 9

Yang TIDAK berubah

jumlah sekarang = 43

GANJIL

Jumlahnya berubah, tetapi selalu berkurang sebanyak bilangan genap. Paritasnya tetap!

✋ *ketuk dua bilangan*

Bilangan tersisa	Jumlah semua bilangan	Invarian	Keadaan
9	43	jumlah ganjil	berjalan

Ketuk dua bilangan di papan. Keduanya dihapus dan diganti sesuai aturan. Ulangi sampai tersisa satu bilangan, atau tekan ▶ **Jalankan** agar Ancil memilih secara acak. Ulangi berkali-kali: apakah hasil akhirnya berubah-ubah? Lihat panel kanan: apa yang **tidak pernah** berubah?

Pada aturan "tulis $|a-b|$", jumlahnya berubah, tetapi berubahnya selalu sebanyak bilangan genap ($-2\min(a,b)$). Jadi **paritas jumlah** adalah invarian. Untuk bilangan 1 sampai 10, jumlah awalnya 55 (ganjil), sehingga bilangan terakhir pasti ganjil, apa pun urutan pilihanmu.

CONTOH **Mematahkan cokelat batang**

Cokelat batang berukuran 6 × 8 kotak. Setiap kali dipatahkan, satu potong dibelah menjadi dua potong sepanjang garis kotak. Paling sedikit berapa patahan yang diperlukan agar semua 48 kotak terpisah?

1. Perhatikan besaran $\text{banyak potong} - \text{banyak patahan}$. Awalnya $1 - 0 = 1$.
2. Setiap patahan menambah tepat satu potong, jadi besaran itu tetap 1: invarian!
3. Di akhir ada 48 potong, jadi banyak patahan $= 48 - 1 = 47$.

Tepat 47 patahan, tidak lebih dan tidak kurang, apa pun caranya. Strategi pintar tidak bisa menghematnya, dan strategi asal-asalan tidak memboroskannya.

KERJAKAN BERSAMA

Monovarian: proses yang pasti berhenti

Ancil menulis sebuah bilangan asli $n > 1$. Setiap langkah: jika bilangannya genap, ia membaginya dengan 2; jika ganjil, ia menambahkan 1. Buktikan bahwa proses ini selalu sampai di 1.

1. Jika n genap, langkah berikutnya $n/2 < n$: bilangan turun.
2. Jika $n > 1$ ganjil, dua langkah berikutnya memberi $n + 1$ lalu $\frac{n+1}{2}$. Karena $n > 1$, berlaku $\frac{n+1}{2} < n$: setelah dua langkah bilangan juga turun.
3. Jadi paling lambat setiap dua langkah, bilangannya turun. Barisan bilangan asli yang terus turun tidak mungkin berlangsung selamanya.

Bilangan itu adalah monovarian, sehingga proses pasti sampai di 1. (Sepupu terkenalnya, soal Collatz "kalikan 3 tambah 1", sampai sekarang belum terpecahkan!)

⚠ **AWAS JEBAKAN**

Invarian ampuh untuk membuktikan sesuatu **mustahil**, tetapi tidak otomatis membuktikan sesuatu **mungkin**. Kalau nilai invarian keadaan tujuan cocok, kamu masih harus menunjukkan langkah-langkah yang benar-benar mencapainya.

MATEMATIKA NUSANTARA

Papan **congklak** (dakon) punya 14 lubang kecil dan 2 lubang besar yang disebut rumah. Pada aturan yang umum, setiap lubang kecil diisi 7 biji, jadi ada 98 biji. Biji berpindah-pindah sepanjang permainan, tetapi jumlah totalnya tetap 98: invarian paling sederhana. Pemain jago memakai invarian lain. Saat menabur, seorang pemain melewati 7 lubangnya, rumahnya sendiri, dan 7 lubang lawan, tetapi melompati rumah lawan. Jadi satu putaran terdiri atas 15 tempat, dan menabur 15 biji membuat biji terakhir jatuh kembali ke lubang asal. Inilah aritmetika modulo 15 dari Bab 38!

39.3 Pewarnaan: bukti dengan pensil warna

Tebak Dulu!

Dua pojok papan catur 8 × 8 yang berseberangan dipotong, sehingga tersisa 62 petak. Bisakah 62 petak itu ditutup rapat oleh 31 domino (setiap domino menutup dua petak bersebelahan)?

Bisa, karena 62 bilangan genap.

Bisa, asalkan sebagian domino dipasang tegak dan sebagian mendatar.

Tidak bisa, bagaimanapun cara memasangnya.

Hanya bisa jika domino boleh saling menumpuk.

Jawabannya: tidak bisa. Dua pojok yang berseberangan berwarna sama, misalnya hitam. Tersisa 30 petak hitam dan 32 petak putih. Setiap domino selalu menutup **satu hitam dan satu putih**, jadi 31 domino memerlukan 31 hitam dan 31 putih. Petak hitamnya kurang! "Genap" ternyata belum cukup.

Teka-teki di atas menunjukkan kekuatan **pewarnaan**: memberi warna pada petak-petak supaya setiap kepingan (domino, tromino, ubin) **selalu menutup warna yang sama banyak**. Lalu kita cukup menghitung warna. Warna hitam-putih papan catur adalah invarian yang menyamar!

Bahasa sederhana · Coba bayangkan setiap domino sebagai sepasang sepatu: satu kiri (hitam) dan satu kanan (putih). Kalau di rak ada 30 sepatu kiri dan 32 sepatu kanan, kamu tidak mungkin membuat 31 pasang. Dua sepatu kanan pasti tersisa.

SIFAT PEWARNAAN PAPAN CATUR

Pada papan berwarna catur, setiap domino menutup tepat **satu petak hitam dan satu petak putih**. Akibatnya, sebuah daerah hanya bisa ditutup penuh oleh domino jika banyak petak hitamnya **sama dengan** banyak petak putihnya.

Bukti: papan catur terpotong tidak dapat ditutup

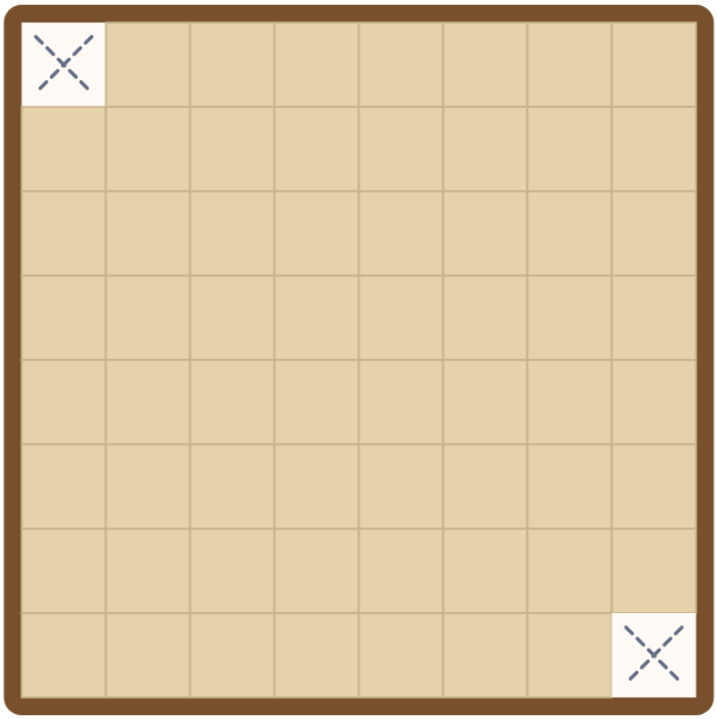
Dua petak yang berbagi sisi berbeda baris atau berbeda kolom sejauh satu, sehingga jumlah nomor baris dan kolomnya berbeda paritas: satu hitam dan satu putih. Jadi d domino menutup tepat d petak hitam dan d petak putih.

Papan 8 × 8 punya 32 petak hitam dan 32 putih. Dua pojok berseberangan, misalnya a1 dan h8, sama-sama hitam. Setelah dipotong tersisa 30 hitam dan 32 putih. Andaikan 31 domino menutupnya: mereka menutup 31 petak hitam, padahal hanya ada 30. Kontradiksi.

LAB MINI

Papan catur terpotong: pasang dominomu

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-39



Hitungan petak

hitam: ?

putih: ?

domino: 0 kosong: 62

Bisakah 31 domino menutup semua petak? Coba dulu, lalu nyalakan "Tampilkan warna".

🖐 Seret ke petak sebelah untuk memasang domino. Ketuk domino untuk melepas.

Petak hitam	Petak putih	Domino terpasang	Petak kosong
?	?	0	62

Mula-mula warna papan disembunyikan. Seret dari satu petak ke petak sebelahnya (atau ketuk dua petak berurutan) untuk memasang domino; ketuk domino untuk melepasnya. Bisakah kamu menutup semuanya? Setelah menyerah, nyalakan **Tampilkan warna**. Lalu tekan ✂ **Satu hitam + satu putih**: kini selalu bisa! Tekan 🤖 **Isi otomatis** untuk melihat jumlah domino terbanyak.

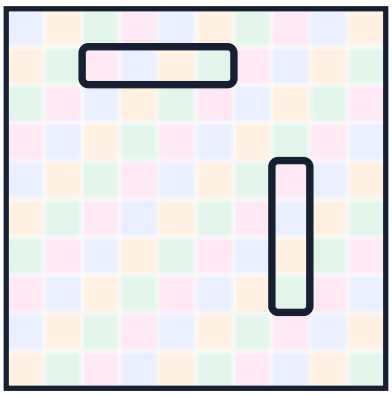
KEBALIKANNYA JUGA INDAH

Bagaimana jika yang dipotong adalah satu petak hitam dan satu petak putih, di mana pun letaknya? Ralph Gomory membuktikan bahwa papan catur 8 × 8 yang dipotong seperti itu **selalu** dapat ditutup 31 domino. Idenya: semua 64 petak dapat dilalui oleh satu jalur tertutup yang warnanya berselang-seling. Dua potongan memutus jalur menjadi dua ruas yang panjangnya genap, dan setiap ruas genap mudah ditutup domino satu per satu.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

UBIN 1 × 4 DAN EMPAT WARNA

Bisakah papan 10 × 10 ditutup oleh 25 ubin berukuran 1 × 4? Luasnya cocok ($25 \times 4 = 100$), dan dua warna pun tidak menolong. Pakailah **empat warna**: petak di baris i dan kolom j (mulai dari 0) diberi warna $(i + j) \bmod 4$. Ubin 1 × 4, mendatar maupun tegak, selalu menutup empat petak berurutan sehingga menutup tepat **satu petak dari setiap warna**. Jadi 25 ubin memerlukan tepat 25 petak dari setiap warna. Padahal hitungannya 25, 26, 25, dan 24. Mustahil!



Warna (i + j) mod 4 pada papan 10 × 10

- warna 0: 25 petak
- warna 1: **26** petak
- warna 2: 25 petak
- warna 3: **24** petak

Setiap ubin 1 × 4 (garis tebal) menutup tepat satu petak dari setiap warna, jadi 25 ubin butuh 25 + 25 + 25

$26 \neq 25 \neq 24 \Rightarrow$ mustahil!

Pewarnaan diagonal empat warna: ubin mendatar maupun tegak selalu menutup keempat warna sekali, tetapi banyak petak per warna tidak sama.

39.4 Ketaksamaan AM-GM: rata-rata yang selalu menang

Tebak Dulu!

Pak RT punya pagar bambu sepanjang 40 m untuk membuat kandang persegi panjang. Ukuran manakah yang memberi luas terbesar?

- 18 m × 2 m, karena sisinya paling panjang.
- 15 m × 5 m.
- 10 m × 10 m.
- Semuanya sama luasnya, karena kelilingnya sama-sama 40 m.

Jawabannya: 10 m × 10 m. Luasnya berturut-turut 36, 75, dan 100 m². Keliling yang sama *tidak* menjamin luas yang sama. Persegi selalu menang, dan alasannya adalah ketaksamaan paling terkenal di olimpiade: AM-GM.

Untuk dua bilangan tak negatif a dan b ada dua cara merata-ratakan. **Rata-rata aritmetika** (AM, *arithmetic mean*) adalah $\frac{a+b}{2}$: bagi rata jumlahnya. **Rata-rata geometri** (GM, *geometric mean*) adalah $\sqrt{ab}$: sisi persegi yang luasnya sama dengan persegi panjang $a \times b$.

Bahasa sederhana · Contoh: untuk 4 dan 9, AM $= \frac{4+9}{2} = 6{,}5$ dan GM $= \sqrt{36} = 6$. AM menang tipis. Coba pasangan lain sesukamu: AM tidak pernah kalah!

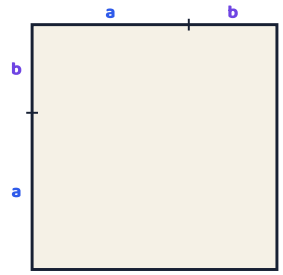
KETAKSAMAAN AM-GM (DUA BILANGAN)

Untuk semua bilangan real $a, b \geq 0$,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

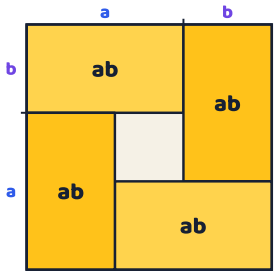
dan kesamaan terjadi **jika dan hanya jika** $a = b$. Akibatnya: jika **jumlah** dua bilangan tetap, **hasil kalinya** terbesar saat keduanya sama; jika hasil kalinya tetap, jumlahnya terkecil saat keduanya sama.

Inilah buktinya tanpa kata. Kita akan menunjukkan $(a+b)^2 \geq 4ab$ hanya dengan menyusun empat persegi panjang.



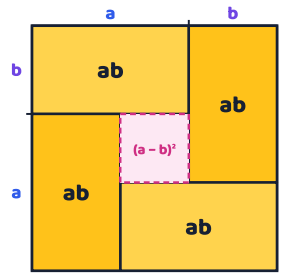
Persegi besar bersisi a + b.
Luasnya $(a + b)^2$.

Langkah 1. Buat persegi besar bersisi $a + b$. Luasnya $(a + b)^2$.



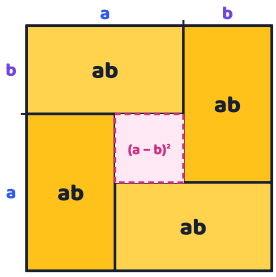
Pasang 4 persegi panjang a × b
seperti baling-baling kincir angin.
Luas keempatnya: 4ab.

Langkah 2. Susun empat persegi panjang berukuran $a \times b$ di dalamnya seperti baling-baling kincir angin. Luas keempatnya $4ab$.



Di tengah tersisa lubang persegi
bersisi a – b, luasnya $(a - b)^2$.
Luas tidak pernah negatif!

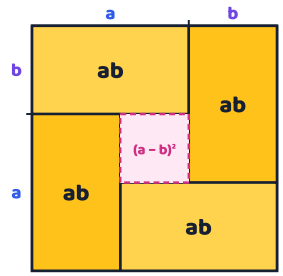
Langkah 3. Di tengah tersisa sebuah lubang persegi bersisi $a - b$, dengan luas $(a - b)^2$. Luas tidak mungkin negatif.



Di tengah tersisa lubang persegi
bersisi a – b, luasnya $(a - b)^2$.
Luas tidak pernah negatif!

$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$
$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

Langkah 4. Luas persegi besar = luas empat persegi panjang + luas lubang: $(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2 \geq 4ab$.

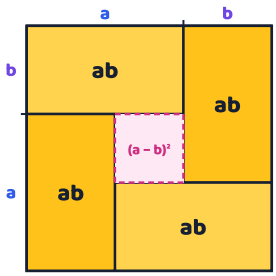


Di tengah tersisa lubang persegi
bersisi a – b, luasnya $(a - b)^2$.
Luas tidak pernah negatif!

$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$
$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

$a + b \geq 2\sqrt{(ab)}$
$(a + b)/2 \geq \sqrt{(ab)}$

Langkah 5. Tarik akar kedua ruas (semuanya tak negatif): $a + b \geq 2 \quad ab$. Bagi dengan 2: $\frac{a+b}{2} \geq \quad ab$. Terbukti!





Jika a = b, lubangnya lenyap: $(a + b)^2 = 4ab$.
AM = GM tepat!

$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$
$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

$a + b \geq 2\sqrt{(ab)}$
$(a + b)/2 \geq \sqrt{(ab)}$

Langkah 6. Kapan sama persis? Saat lubangnya lenyap, yaitu $a - b = 0$. Jadi AM = GM tepat ketika $a = b$.

Bukti aljabar dalam satu baris

Untuk $a, b \geq 0$: $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$, dan bernilai 0 tepat ketika $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, yaitu $a = b$.

RUMUS HIDUP

AM ≥ GM untuk dua bilangan

$$s = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

Selisih rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri selalu berupa bilangan kuadrat yang dibagi dua, jadi tidak pernah negatif.

- a Bilangan a
- b Bilangan b
- s Selisih AM – GM

SELISIH AM – GM

0,5

GM bulat: a × b bilangan kuadrat

AM = (**4** + **9**)/2 = **6,5** dan GM = $\sqrt{(\mathbf{4} \cdot \mathbf{9})}$ = **6**. Selisihnya **0,5**, sama dengan ($\sqrt{\mathbf{4}} - \sqrt{\mathbf{9}}$)²/2 = **0,5**. Tidak pernah negatif!

Cek satuan: jika a dan b dalam meter, AM dan GM juga dalam meter, sehingga keduanya bisa dibandingkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-AM-GM

GRAFIK HIDUP

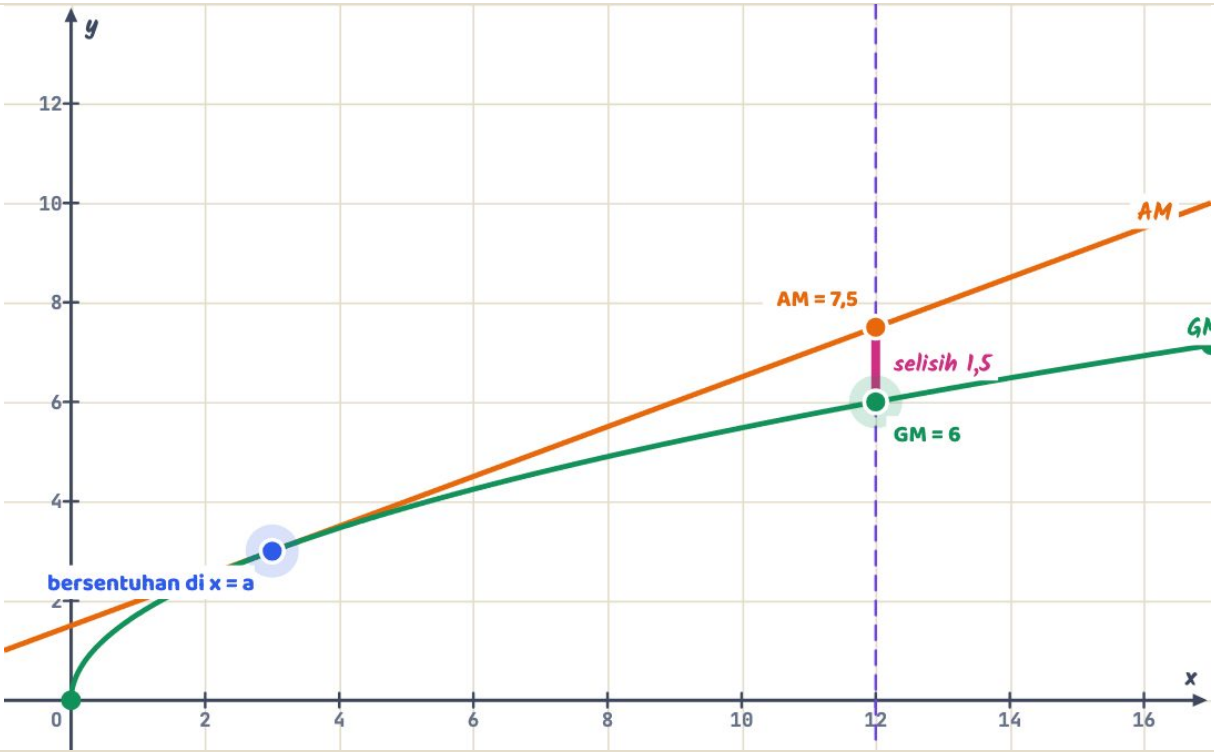
AM dan GM berlomba

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-39

$$\frac{a+x}{2} \geq \sqrt{a\,x}$$

$$x = 12: \quad \frac{3+12}{2} = 7{,}5 \geq \sqrt{3 \cdot 12} = 6$$

Garis oranye (AM) selalu berada di atas kurva hijau (GM) atau menyentuhnya. Keduanya bersentuhan tepat di x = a.



b ≠ a: AM > GM

AM	GM	AM – GM
7,5	6	1,5

Seret titik hijau di sepanjang kurva, atau titik biru untuk mengubah a. Ruas magenta adalah selisih AM – GM. Bisakah kamu membuatnya negatif? Perhatikan juga: garis AM adalah **garis singgung** kurva GM di $x = a$.

GRAFIK HIDUP

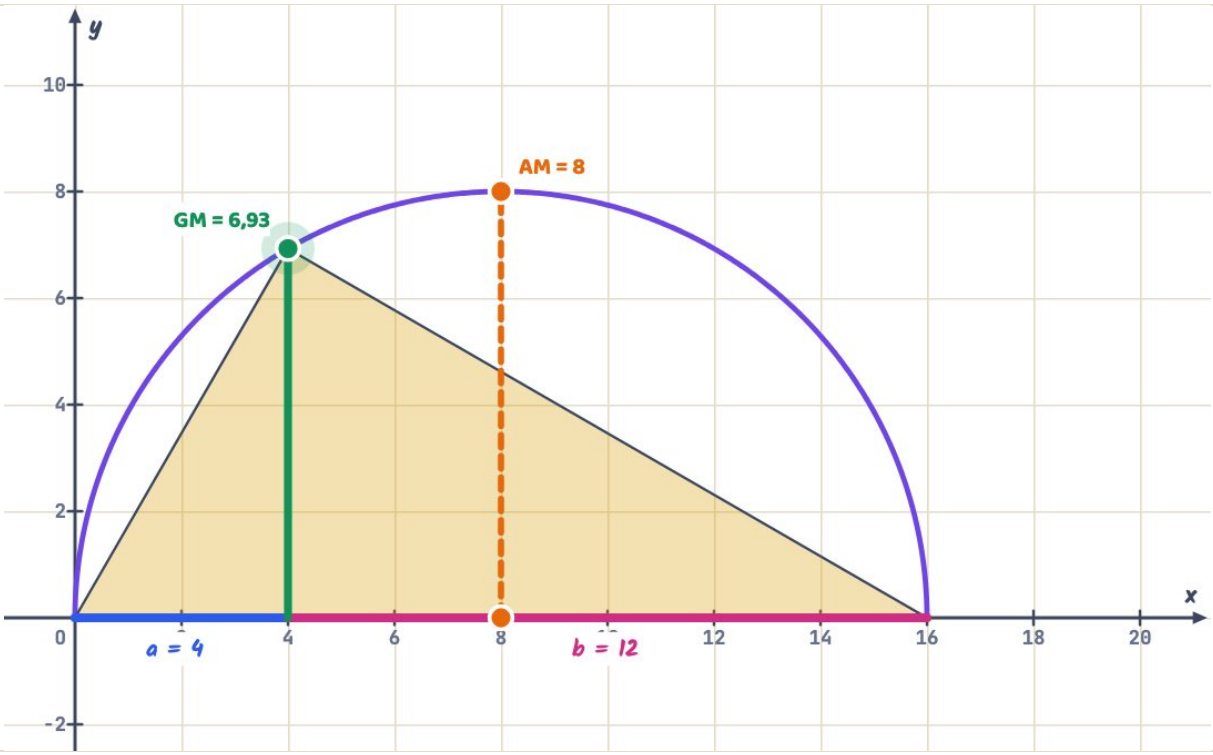
Setengah lingkaran Euclid

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-39

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{4 \cdot 12} = 6{,}93 \le \frac{16}{2} = 8$$

Diameter dibagi menjadi a dan b. Tinggi tegak dari titik pembagi ke busur adalah GM, sedangkan jari-jari adalah AM.



b = (a + b) − a	GM = √(ab)	AM = (a + b)/2
12	6,928	8

Segitiga kuning siku-siku di titik hijau (Teorema Thales, Bab 20). Dari kesebangunan, tinggi ruas hijau memenuhi $t^2 = ab$, jadi $t = \sqrt{ab}$. Ruas hijau adalah setengah tali busur, dan tidak mungkin lebih tinggi daripada jari-jari oranye. Seret titik hijau: kapan keduanya sama tinggi?

CONTOH **Pagar Pak RT**

Dengan pagar 40 m, Pak RT membuat kandang persegi panjang berukuran $p \times l$. Berapa luas terbesarnya?

1. Keliling 40 m, jadi $p + l = 20$.
2. AM-GM: $\sqrt{pl} \leq \frac{p+l}{2} = 10$, sehingga $pl \leq 100$.
3. Kesamaan saat $p = l = 10$.

Luas terbesar 100 m², dicapai oleh kandang persegi 10 m × 10 m.

KERJAKAN BERSAMA **Minimum yang bersembunyi**

Tentukan nilai minimum $x + \dfrac{16}{x}$ untuk $x > 0$.

1. Kedua suku positif dan hasil kalinya tetap: $x \cdot \frac{16}{x} = 16$. Ini tanda untuk memakai AM-GM.
2. $x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 2\sqrt{16} = 8$.
3. Kesamaan saat $x = \frac{16}{x}$, yaitu $x = 4$. Cek: $4 + 4 = 8$ ✓.

Nilai minimumnya 8, dicapai di $x = 4$. Tanpa turunan, tanpa grafik!

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Pecah sukunya sampai hasil kalinya konstan. Untuk mencari minimum $x^2 + \frac{16}{x}$ (dengan $x > 0$), pecah $\frac{16}{x} = \frac{8}{x} + \frac{8}{x}$. Hasil kali $x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x} = 64$ konstan, sehingga AM-GM tiga bilangan memberi $x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{64} = 12$, dicapai saat $x^2 = \frac{8}{x}$, yaitu $x = 2$.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

AM-GM hanya berlaku untuk bilangan **tak negatif**: untuk $a = -4$ dan $b = -1$, AM $= -2{,}5$ tetapi $\sqrt{ab} = 2$. Selain itu, minimum hanya tercapai jika **kesamaan bisa terjadi**. Untuk $x \geq 3$, memang $x + \frac{1}{x} \geq 2$, tetapi minimumnya bukan 2 karena $x = 1$ tidak diizinkan; minimum sebenarnya $3 + \frac{1}{3}$.

LANJUT · IB & OLIMPIADE

AM-GM UNTUK N BILANGAN

Untuk $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

dengan kesamaan tepat ketika semua a_i sama. Contoh: jika $a + b + c = 12$ dengan $a, b, c \geq 0$, maka $abc \leq \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64$. Inilah alasan kubus adalah kotak dengan volume terbesar untuk jumlah rusuk yang sama. Cauchy membuktikan versi umum ini dengan induksi "maju-mundur": dari 2 ke 4, 8, 16, ..., lalu turun ke semua n.

TAMU DARI MASA LALU

Setengah lingkaran pada Grafik Hidup di atas berasal dari kitab *Elemen* karya Euclid (±300 SM). Euclid memakainya untuk membuat ruas yang panjangnya "pertengahan sebanding" dua ruas lain, yaitu $\sqrt{ab}$. Lebih dari dua ribu tahun kemudian, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) menuliskan bukti AM-GM untuk n bilangan dalam buku kalkulusnya tahun 1821. Nama Cauchy akan kamu temui lagi di subbab berikutnya.

39.5 Cauchy-Schwarz: ketaksamaan para vektor

Kalau AM-GM membandingkan jumlah dengan hasil kali, ketaksamaan **Cauchy-Schwarz** membandingkan "jumlah hasil kali" dengan "hasil kali jumlah kuadrat". Bentuknya tampak rumit, tetapi maknanya sederhana: hasil kali titik dua vektor tidak pernah melebihi hasil kali panjangnya.

KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ

Untuk semua bilangan real a_1, a_2, b_1, b_2,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dengan kesamaan tepat ketika (a_1, a_2) dan (b_1, b_2) **sebanding**. Bentuk yang sama berlaku untuk n pasang bilangan: $\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$.

Bukti dengan identitas Lagrange (dan arti geometrisnya)

Jabarkan dan kurangkan: $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$. Selisihnya nol tepat ketika $a_1 b_2 = a_2 b_1$, yaitu kedua pasangan sebanding.

Secara geometris, untuk vektor $\vec{u} = (a_1, a_2)$ dan $\vec{v} = (b_1, b_2)$ berlaku $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$. Karena $|\cos\theta| \leq 1$, kuadrat hasil kali titik tidak melebihi $|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$.

RUMUS HIDUP

Cauchy-Schwarz lewat identitas Lagrange

$$D = ({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1 b_2 -$$

Ruas kanan Cauchy-Schwarz dikurangi ruas kirinya selalu sama dengan sebuah bilangan kuadrat, jadi tidak pernah negatif.

a_1 a₁ · a_2 a₂ · b_1 b₁ · b_2 b₂ · D Selisih kedua ruas

SELISIH KEDUA RUAS

4

Ruas besar: (**1** + **4**)(**9** + **16**) = **125**. Ruas kecil: (**11**)^2 = **121**. Selisihnya **4**, tidak pernah negatif.

Cek satuan: semua bilangan tak bersatuan; D selalu bilangan kuadrat sempurna bila inputnya bulat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-CAUCHY-SCHWARZ

KERJAKAN BERSAMA

Titik terdekat ke sebuah garis

Bilangan real x dan y memenuhi $3x + 4y = 25$. Tentukan nilai minimum $x^2 + y^2$.

1. Pasangkan $(3, 4)$ dengan (x, y): $(3x + 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2)$.
2. $625 \le 25(x^2 + y^2)$, jadi $x^2 + y^2 \ge 25$.
3. Kesamaan saat $(x, y) = k(3, 4)$: $25k = 25$, $k = 1$, titiknya $(3, 4)$. Cek: $9 + 16 = 25$ ✓.

Minimumnya 25. Artinya, titik pada garis $3x + 4y = 25$ yang paling dekat ke titik asal adalah $(3, 4)$, dengan jarak $\sqrt{25} = 5$. Tripel 3–4–5 dari Bab 18 muncul lagi!

LANJUT · IB & OLIMPIADE

BENTUK ENGEL (LEMMA TITU)

Untuk $x, y > 0$, Cauchy-Schwarz dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Bentuk ini sangat praktis untuk pecahan. Contoh: jika $x + y = 2$ dan $x, y > 0$, maka $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1^2}{x} + \frac{3^2}{y} \geq \frac{(1+3)^2}{2} = 8$, dengan kesamaan saat $\frac{1}{x} = \frac{3}{y}$, yaitu $x = \frac{1}{2}$ dan $y = \frac{3}{2}$.

39.6 Kotak perkakas Pólya: heuristik pemecahan masalah

Di Bab 1 kamu berkenalan dengan empat langkah Pólya: **pahami** masalahnya, **rencanakan**, **laksanakan**, dan **periksa kembali**. Langkah kedua paling sulit, karena di situlah ide harus muncul. Para juara tidak menunggu ilham jatuh dari langit; mereka membuka kotak perkakas berisi **heuristik**, yaitu strategi coba-coba yang terarah.

Strategi	Pertanyaan pemicu	Contoh mini
Kasus kecil	Bagaimana jika angkanya 1, 2, 3, bukan 2026?	n orang saling berjabat tangan: 1, 3, 6, 10, … ⇒ $\frac{n(n-1)}{2}$.
Bekerja mundur	Dari keadaan akhir, langkah apa yang membawaku ke sana?	Permainan ambil biji: posisi kalah 0, 4, 8, … (animasi di bawah).
Simetri	Apa yang tetap jika aku menukar, membalik, atau memasangkan?	Gauss: $1 + 2 + \cdots + 100$ = 50 pasang × 101 = 5050.
Prinsip ekstrem	Bagaimana dengan yang terbesar, terkecil, terdekat, terjauh?	Perang balon air (Contoh "Coba sendiri" di bawah).
Invarian & paritas	Apa yang tidak berubah oleh setiap langkah?	Papan tulis ajaib, cokelat batang.
Sarang merpati	Apakah bendanya lebih banyak daripada kotaknya?	13 siswa, 12 bulan.
Pewarnaan	Bisakah kuberi warna agar setiap kepingan menutup warna yang sama banyak?	Papan catur terpotong, ubin 1 × 4.

Mari lihat **bekerja mundur** beraksi. Dimas dan Ayu bermain dengan 21 biji congklak. Bergiliran, setiap pemain mengambil 1, 2, atau 3 biji. Yang mengambil biji terakhir menang. Dimas mulai. Bagaimana caranya pasti menang?



Langkah 1. Bekerja mundur: mulailah dari keadaan paling akhir, yaitu ketika biji hampir habis.



Langkah 2. Dengan 0 biji di giliranmu, lawan sudah mengambil biji terakhir. Itu posisi **kalah** (K).



Langkah 3. Dengan 1, 2, atau 3 biji, ambil semuanya. Itu posisi **menang** (M).



Langkah 4. Dengan 4 biji, langkah apa pun memberi lawan posisi M. Jadi 4 adalah posisi K.



Langkah 5. 5, 6, dan 7 adalah M (sisakan 4 untuk lawan), sedangkan 8 kembali menjadi K.



Langkah 6. Polanya: kelipatan 4 adalah K. Karena $21 = 4 \times 5 + 1$, Dimas mengambil 1 biji dan selalu menyisakan kelipatan 4.

KERJAKAN BERSAMA

Simetri: menjumlah tanpa menjumlah

Semua bilangan empat angka yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4 (setiap angka dipakai tepat sekali) dijumlahkan. Berapa hasilnya?

1. Banyak bilangannya $4! = 24$. Menjumlahkan satu per satu melelahkan; cari simetri.
2. Pasangkan setiap bilangan dengan "cerminannya": ganti setiap angka d dengan $5 - d$. Contoh: $1234 \leftrightarrow 4321$, $2143 \leftrightarrow 3412$. Setiap pasangan berjumlah 5555.
3. Ada $24 : 2 = 12$ pasangan, jadi jumlahnya $12 \times 5555 = 66.660$.

Jumlahnya 66.660. Cara lain: setiap angka muncul 6 kali di setiap posisi, sehingga jumlahnya $6 \times (1 + 2 + 3 + 4) \times 1111 = 66.660$. Dua jalan, satu jawaban: tanda bahwa kita benar!

COBA SENDIRI **Perang balon air (prinsip ekstrem)**

Lima anak berdiri di lapangan sehingga jarak setiap dua anak berbeda-beda. Pada aba-aba, setiap anak melempar balon air tepat ke anak yang paling dekat dengannya. Buktikan bahwa ada anak yang tetap kering.

1. **Prinsip ekstrem:** ambil pasangan dengan jarak terkecil, misalnya A dan B. Masing-masing adalah yang terdekat bagi yang lain, jadi A dan B saling lempar.

2. **Kasus 1:** ada anak lain (C, D, atau E) yang melempar ke A atau B. Ketiga anak itu hanya punya 3 balon, dan paling sedikit satu "terbuang" ke A atau B. Jadi paling banyak 2 balon mendarat pada C, D, E: ada yang kering.

3. **Kasus 2:** tidak ada yang melempar ke A atau B. Ulangi idenya untuk C, D, E: pasangan terdekat di antara mereka, misalnya C dan D, saling lempar, dan E melempar ke C atau D. Tidak ada yang melempar ke E.

Dalam kedua kasus ada anak yang kering. Dengan induksi (Bab 35), cara yang sama berlaku untuk banyak anak ganjil berapa pun. Untuk banyak anak genap, coba cari contoh semua anak basah!

✏️ **TRIK KAK LINTANG**

Buntu dengan angka besar seperti 2026? **Kecilkan dulu.** Ganti dengan 1, 2, 3, 4, kerjakan dengan tangan, catat dalam tabel, lalu tebak polanya. Setelah itu, jangan lupa langkah terpenting: **buktikan** polanya.

⚠️ **AWAS JEBAKAN**

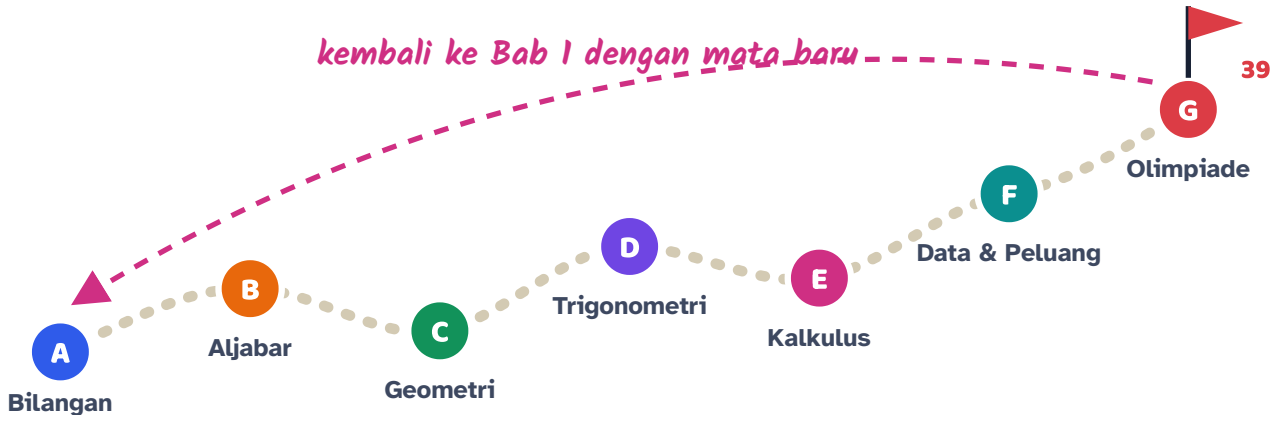
Pola dari kasus kecil bisa menipu. Letakkan n titik pada lingkaran dan hubungkan setiap pasang titik dengan tali busur. Banyak daerah maksimumnya untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$ adalah 1, 2, 4, 8, 16, tampak seperti pangkat dua. Namun untuk $n = 6$ hasilnya **31**, bukan 32! Rumus sebenarnya $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$. Tebakan baru menjadi kebenaran setelah dibuktikan.

🕰️ **TAMU DARI MASA LALU**

George Pólya (1887–1985), matematikawan kelahiran Hongaria yang lama mengajar di Swiss dan Amerika Serikat, menulis buku *How to Solve It* (1945). Buku tipis itu terjual lebih dari satu juta eksemplar dan diterjemahkan ke banyak bahasa. Pólya percaya bahwa memecahkan masalah adalah keterampilan praktis, seperti berenang: kamu mempelajarinya dengan meniru dan berlatih, bukan hanya dengan membaca.

39.7 Akhir yang menjadi awal

Selamat! Kamu sudah sampai di bab terakhir Mathpedia. Perjalananmu dimulai dari pola batik kawung dan sarang lebah, melewati bilangan, aljabar, geometri, trigonometri, kalkulus, serta data dan peluang, sampai akhirnya tiba di puncak: strategi olimpiade. Coba tengok ke belakang. Hampir setiap ide di bab ini sudah kamu temui dalam bentuk lain: invarian di congklak, soal pagar di puncak parabola, Cauchy-Schwarz di vektor, sarang merpati di kalender.



Tujuh bagian, 39 bab. Puncak gunung bukan tempat berhenti, melainkan tempat melihat jalan-jalan baru.

SURAT DARI KAK LINTANG

Untuk kamu yang sudah sampai di halaman ini,
Matematika bukan lomba siapa yang paling cepat menghitung. Matematika adalah keberanian untuk bertanya **"mengapa?"** dan kesabaran untuk mencari jawabannya sampai tuntas. Bawalah empat kebiasaan ini ke mana pun kamu pergi:

1. **Bermainlah dulu.** Coba kasus kecil, gambar, dan tebak dengan berani seperti Dimas.
2. **Tuntut bukti.** Tanyakan "apakah selalu benar?" seperti Ayu.
3. **Cari jalan cerdik.** Seperti Ancil, cari invarian, simetri, atau sarang merpati sebelum menghitung keras.
4. **Jangan takut salah.** Setiap kesalahan adalah petunjuk. Juara olimpiade pun mencoret-coret ratusan halaman sebelum menemukan satu ide yang indah.

Salam hangat dari kami berempat: Kak Lintang, Ayu, Dimas, dan Ancil.

PETA JALAN OLIMPIADE

Di Indonesia, **Olimpiade Sains Nasional (OSN)** untuk SD, SMP, dan SMA diselenggarakan berjenjang, mulai dari tingkat kabupaten/kota, provinsi, hingga nasional. Peraih medali terbaik tingkat SMA dibina lebih lanjut untuk memilih tim Indonesia ke **International Mathematical Olympiad (IMO)**, lomba matematika pelajar tertua di dunia yang pertama kali digelar di Rumania pada tahun 1959. Ada pula banyak lomba lain, misalnya olimpiade yang diadakan kampus-kampus seperti OMITS dan kompetisi daring. Latihan terbaik untuk semuanya sama: soal Lv 5–6 di setiap bab buku ini.

MITOS

"Juara olimpiade itu jenius sejak lahir."

FAKTA

Kebanyakan juara berlatih bertahun-tahun, mengerjakan ratusan soal, dan sering gagal. Mereka hafal **strategi** seperti di bab ini, bukan sekadar rumus. Rasa ingin tahu dan kegigihan jauh lebih penting daripada bakat.

MITOS

"Sudah dicoba seratus kali dan selalu gagal, berarti mustahil."

FAKTA

Seratus kegagalan belum menjadi bukti. Kemustahilan dibuktikan dengan argumen yang berlaku untuk **semua** cara, misalnya hitungan warna pada papan catur terpotong atau sebuah invarian.

MITOS

"Soal olimpiade butuh rumus rahasia yang rumit."

FAKTA

Banyak soal OSN selesai dengan ide sederhana: sarang merpati, paritas, pewarnaan, atau AM-GM dua bilangan. Yang sulit adalah **melihat** ide itu, dan kemampuan melihat tumbuh lewat latihan.



Kompresi berkas

Sarang merpati membuktikan tidak ada program yang bisa memperkecil *setiap* berkas tanpa kehilangan data: berkas panjang lebih banyak daripada berkas pendek.



Sidik jari digital

Kode cek (*hash*) yang pendek pasti punya "tabrakan" karena masukannya jauh lebih banyak. Para ahli keamanan merancang agar tabrakan itu sangat sulit ditemukan.



Kemasan hemat

AM-GM menunjukkan kotak yang mendekati kubus memakai bahan paling sedikit untuk volume tertentu, penting bagi UMKM yang mengirim keripik dan kopi.



Jadwal ujian dan liga

Pewarnaan graf menyusun jadwal agar mata ujian yang diikuti siswa yang sama tidak bentrok, dan pertandingan liga tidak tumpang-tindih.



Frekuensi menara seluler

Menara yang berdekatan diberi "warna" frekuensi berbeda agar sinyalnya tidak saling mengganggu. Ini juga soal pewarnaan.



Kecerdasan buatan permainan

Program catur dan permainan strategi menilai posisi dengan bekerja mundur dari akhir permainan, persis seperti tabel M dan K tadi.

Cek Cepat

Ada 20 siswa. Pasti ada paling sedikit berapa siswa yang lahir pada hari yang sama (Senin sampai Minggu)?

- 2
- 3
- 4
- 7

Nilai minimum $x + \frac{4}{x}$ untuk $x > 0$ adalah...

- 2
- 5
- 4
- 8

Papan 4 × 4 dipotong dua pojoknya yang berseberangan. Paling banyak berapa domino yang dapat dipasang tanpa tumpang-tindih?

6

7

8

5

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: papan catur kertas

Bahan: buku tulis berpetak (kotak-kotak), pensil warna, gunting, dan kertas bekas untuk dipotong menjadi "domino" 2 × 1 petak.

1. Gambar papan 6 × 6 di buku berpetak, lalu warnai seperti papan catur.
2. Coret dua pojok yang berseberangan. Gunting 17 domino kertas seukuran dua petak.
3. Coba tutup 34 petak sisanya dengan 17 domino. Catat berapa domino yang berhasil dipasang.
4. Gambar papan baru. Kali ini coret satu petak hitam dan satu petak putih sesukamu, lalu coba lagi.
5. Ajak anggota keluarga mencoba percobaan pertama tanpa memberi tahu rahasia warnanya.

Pertanyaan: Mengapa percobaan pertama selalu gagal, sedangkan percobaan kedua selalu berhasil? Jelaskan percobaan pertama dengan menghitung petak hitam dan putih, dengan kalimatmu sendiri.

RINGKASAN KILAT

Bab 39 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- memakai **prinsip sarang merpati** (bentuk dasar dan bentuk umum) untuk membuktikan bahwa sesuatu *pasti ada*
- menemukan **invarian** dan **monovarian** untuk menjawab pertanyaan "mungkinkah?"
- memakai **pewarnaan** untuk membuktikan bahwa sebuah pengubinan mustahil
- membuktikan dan memakai ketaksamaan **AM-GM** serta **Cauchy-Schwarz** untuk mencari nilai maksimum dan minimum
- menerapkan **heuristik Pólya**: kasus kecil, bekerja mundur, simetri, dan prinsip ekstrem

Istilah kunci

dibulatkan ke atas · invarian · monovarian · pewarnaan · Rata-rata aritmetika

Rata-rata geometri | Cauchy-Schwarz | heuristik

Rumus penting

$$m = \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Sarang merpati bentuk umum. Bagikan N merpati ke k sarang serata mungkin. Tetap saja ada sarang yang isinya paling sedikit N/k, dibulatkan ke atas.

$$s = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

AM ≥ GM untuk dua bilangan. Selisih rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri selalu berupa bilangan kuadrat yang dibagi dua, jadi tidak pernah negatif.

$$D = (a_1{}^2 + a_2{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

Cauchy-Schwarz lewat identitas Lagrange. Ruas kanan Cauchy-Schwarz dikurangi ruas kirinya selalu sama dengan sebuah bilangan kuadrat, jadi tidak pernah negatif.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Prinsip sarang merpati hanya menjamin ada sarang yang berisi dua; ia tidak memberi tahu sarang yang mana, dan tidak menjamin semua sarang terisi.
- Invarian ampuh untuk membuktikan sesuatu mustahil, tetapi tidak otomatis membuktikan sesuatu mungkin.
- AM-GM hanya berlaku untuk bilangan tak negatif: untuk $a = -4$ dan $b = -1$, AM $= -2{,}5$ tetapi $\sqrt{ab} = 2$.

⛰ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=39

Teka-teki untuk perjalanan berikutnya: kembali ke Bab 1

Di Bab 1 kamu menebak dari pola bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Waktu itu kamu baru *menebak*. Sekarang kamu punya kotak perkakas lengkap. Bisakah kamu **membuktikannya dengan tiga cara berbeda**: dengan gambar tanpa kata, dengan induksi, dan dengan trik simetri Gauss? Setelah itu, buka Bank Soal, tekan 🏆 **Tantangan Olimpiade**, dan taklukkan soal-soal tersulit dari 39 bab. Perjalananmu baru saja dimulai!

▼ **Intip petunjuk**

Gambar: susun titik-titik menjadi persegi $n \times n$; setiap bilangan ganjil adalah satu "siku" berbentuk huruf L yang membungkus persegi sebelumnya. **Induksi:** jika jumlahnya n^2, tambahkan suku berikutnya $2n+1$ sehingga $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. **Simetri:** tulis deretnya maju dan mundur, lalu jumlahkan per kolom: setiap kolom berjumlah $2n$, ada n kolom, jadi dua kali jumlahnya $2n^2$.

ALAT BELAJAR

Peta Rumus & Koleksi Kartu

Semua Rumus Hidup di buku ini, dikelompokkan per bagian. Rumus yang sudah kamu taklukkan berubah menjadi kartu koleksi berwarna.

TRIK KAK LINTANG

Rumus bukan mantra untuk dihafal. Setiap rumus adalah **kalimat** tentang pola. Coba baca kalimat di bawah setiap kartu dengan suara keras. Kalau kamu bisa menceritakan rumusnya dengan bahasamu sendiri, kamu sudah paham.

Koleksimu: **0/132** kartu rumus. Buka bab, mainkan Rumus Hidup, lalu jawab "🎯 Tantang aku" untuk mendapatkan kartunya.

Bagian A · Bilangan

Bab 1 · #1

Bilangan segitiga

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dua tangga yang sama membentuk persegi panjang n × (n + 1). Satu tangga = setengahnya.

Bab 1 · #2

Rumus Binet: Fibonacci dari akar 5

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

ϕ = (1 + √5)/2 dan ψ = (1 − √5)/2 dipangkatkan n, dikurangkan, lalu dibagi √5. Hasilnya selalu bilangan Fibonacci yang bulat.

Bab 1 · #3

Jumlah n bilangan ganjil pertama

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = S_n = n^2$$

Setiap bilangan ganjil adalah satu sabuk L yang memperbesar persegi satu ukuran. n sabuk = persegi n × n.

Bab 1 · #4

Jangkauan tebak angka

$$N = 2^k - 1$$

Setiap tebakan di tengah membuang separuh kemungkinan. Jadi satu tebakan tambahan menggandakan jangkauanmu, lalu ditambah satu.

Bab 2 · #5

Suhu akhir

$$T = T_0 + \Delta T$$

Suhu akhir sama dengan suhu awal ditambah perubahannya. Suhu naik berarti perubahannya positif; suhu turun berarti perubahannya negatif.

Bab 2 · #6

Jarak dua titik di garis bilangan

$$d = |a - b|$$

Kurangkan kedua bilangan, lalu buang tandanya. Jarak tidak pernah negatif.

Bab 2 · #7

Jumlah bilangan bulat berurutan

$$S = \frac{(m + n) \times (n - m + 1)}{2}$$

Jumlahkan suku pertama dan suku terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua. Bilangan negatif ikut dihitung!

Bab 3 · #8

Penjumlah pecahan

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$$

Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru jumlahkan banyak potongannya (pembilang).

Bab 3 · #9

Harga setelah diskon

$$H = H_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Diskon p% artinya kamu hanya membayar (100 – p)% dari harga awal.

Bab 3 · #10

Persen perubahan

$$P = \frac{B - L}{L} \times 100\%$$

Selisih nilai baru dan nilai lama, dibandingkan dengan nilai LAMA, lalu dijadikan persen.

Bab 3 · #11

Persen balik: harga sebelum diskon

$$H_0 = \frac{H}{1 - \frac{p}{100}}$$

Harga setelah diskon adalah (100 – p)% dari harga awal. Bagi dengan faktor pengalinya untuk kembali ke 100%.

Bab 4 · #12

Batas uji bilangan prima

$$d_{\max} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

Untuk memeriksa apakah n prima, cukup coba bagi n dengan bilangan prima yang tidak lebih dari akar n. Kalau tidak ada yang membagi habis, n pasti prima.

Bab 4 · #13

Banyak faktor dari faktorisasi prima

$$\tau(n) = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Untuk n = $2^a \times 3^b \times 5^c$: tambahkan 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan semuanya. Itulah banyak faktor n, tanpa perlu mendaftarnya satu per satu.

Bab 4 · #14

KPK dari FPB (dua lampu kedip)

$$\mathrm{KPK}(a, b) = \frac{a \times b}{\mathrm{FPB}(a, b)}$$

Kalikan kedua bilangan, lalu bagi dengan FPB-nya. Hasilnya adalah KPK: waktu tunggu sampai dua lampu menyala bersamaan lagi.

Bab 4 · #15

Bilangan Euclid: kalikan prima, tambah 1

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$$

Kalikan k bilangan prima pertama, lalu tambahkan 1. Hasilnya tidak habis dibagi satu pun prima di dalam daftar itu.

Bab 5 · #16

Membagi menurut rasio

$$A = \frac{a}{a+b} \times T$$

Jumlahkan suku-suku rasio untuk mendapat banyak bagian, bagi totalnya, lalu kalikan dengan suku milikmu.

Bab 5 · #17

Dari peta ke jarak sebenarnya

$$J = \frac{p \times n}{100.000}$$

Kalikan jarak di peta dengan penyebut skala untuk mendapat jarak sebenarnya dalam cm, lalu bagi 100.000 untuk mengubahnya menjadi km.

Bab 5 · #18

Waktu kerja berbalik nilai

$$t = \frac{k}{n}$$

Waktu selesai sama dengan beban kerja dibagi banyak pekerja. Pekerjanya dikali dua, waktunya tinggal separuh.

Bab 5 · #19

Waktu tempuh

$$t = \frac{s}{v} \times 60$$

Jarak dibagi kecepatan menghasilkan waktu dalam jam; kalikan dengan 60 untuk mendapat menit.

Bab 6 · #20

Tebal kertas terlipat

$$t = t_0 \cdot 2^n$$

Setiap lipatan menggandakan tebal. Jadi tebal awal dikalikan 2 sebanyak n kali.

Bab 6 · #21

Mengalikan pangkat sebasis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Basisnya sama? Pangkatnya tinggal dijumlahkan, karena semua faktornya digabung dalam satu barisan.

Bab 6 · #22

Pangkat pecahan = akar lalu pangkat

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Penyebut pecahan menjadi akarnya, pembilang menjadi pangkatnya. Ambil akarnya dulu supaya angkanya kecil.

Bab 6 · #23

Waktu tempuh cahaya

$$t = \frac{m \times 10^k \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

Cahaya menempuh 300.000 km setiap detik. Bagi angka depan jarak dengan 3, lalu kurangkan pangkat sepuluhnya dengan 5.

Bab 7 · #1

Ongkos ojek daring

$$T = d + p \times k$$

Ongkos ojek = biaya dasar (dibayar sekali di awal) ditambah tarif per kilometer dikali jarak tempuh.

Bab 7 · #2

Model luas (a + b)²

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Persegi bersisi a + b terbelah menjadi empat bagian: persegi a^2, persegi b^2, dan DUA persegi panjang ab.

Bab 7 · #3

Perkalian kembar: selisih dua kuadrat

$$(m+d)(m-d) = m^2 - d^2$$

Persegi panjang (m + d) × (m − d) luasnya sama dengan persegi m^2 dikurangi persegi kecil d^2. Jadi 52 × 48 = $50^2 - 2^2$.

Bab 8 · #4

Kunci persamaan linear

$$ax + b = c \implies x = \frac{c-b}{a}$$

Buka bungkusnya dari luar ke dalam: kurangi kedua ruas dengan b, lalu bagi kedua ruas dengan a.

Bab 8 · #5

Nilai minimal ulangan berikutnya

$$\frac{n\,R+X}{n+1} \geq T \implies X \geq (n+1)\,T - n\,R$$

Jumlah semua nilai harus mencapai target dikali banyak ulangan. Ulangan berikutnya bertugas menutup kekurangannya.

Bab 8 · #6

Lama parkir maksimal

$$p + q\,(t-1) \leq U \implies t \leq 1 + \frac{U-p}{q}$$

Selama total tarif tidak melebihi uangmu, kamu masih boleh parkir. Ambil bilangan bulat terbesar yang memenuhi.

Bab 9 · #7

Gradien dari dua titik

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien adalah perubahan y dibagi perubahan x: berapa satuan garis naik untuk setiap satu langkah ke kanan.

Bab 9 · #8

Tarif ojek online sebagai fungsi linear

$$T = c + m\,x$$

Tarif = biaya awal + tarif per km × jarak. Biaya awal adalah titik potong sumbu-y, tarif per km adalah gradiennya.

Bab 9 · #9

Rumus Braak: suhu dan ketinggian

$$T = 26{,}3 - 0{,}6 \times \frac{h}{100}$$

Setiap naik 100 meter, suhu udara rata-rata turun sekitar 0,6 °C. Gradiennya −0,6 °C per 100 m, atau −0,006 °C per meter.

Bab 10 · #10

Titik impas dua tarif

$$x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Dua tarif sama mahal pada jarak = selisih biaya buka dibagi selisih tarif per km.

Bab 10 · #11

Ayam dan kambing: rumus peluit Ancil

$$\text{kambing} = \frac{\text{kaki} - 2 \times \text{kepala}}{2}$$

Anggap dulu semua hewan ayam. Kaki yang tersisa, dibagi dua, adalah banyak kambing.

Bab 10 · #12

Aturan Cramer 2 × 2

$$x = \frac{c\,e - b\,f}{a\,e - b\,d}$$

Untuk ax + by = c dan dx + ey = f: x adalah selisih perkalian silang dibagi determinan D = ae − bd.

Bab 11 · #13

Rumus abc

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ambil lawan dari b, tambahkan akar diskriminan, lalu bagi dengan dua kali a. Ganti + dengan − untuk mendapat akar yang lain.

Bab 11 · #14

Diskriminan

$$D = b^2 - 4ac$$

Kuadrat b dikurangi empat kali a kali c. Tandanya meramal jenis akar sebelum kamu menghitungnya.

Bab 11 · #15

Jumlah kuadrat akar, tanpa mencari akar

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

Kuadratkan jumlah akar, lalu kurangi dua kali hasil kalinya. Kamu tidak perlu tahu akarnya satu per satu.

Bab 12 · #16

Sumbu simetri parabola

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

Sumbu simetri berada di x = −b/(2a): lawan dari b, dibagi dua kali a. Nilai c sama sekali tidak ikut menentukan.

Bab 12 · #17

Nilai ekstrem (tinggi puncak)

$$y_p = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nilai terkecil (atau terbesar) sebuah fungsi kuadrat sama dengan minus diskriminan dibagi empat kali a.

Bab 12 · #18

Untung harian penjual tahu bulat

$$U = (h - m)(1800 - h)$$

Untung = untung per biji × banyak yang terjual. Harga naik, untung per biji naik, tetapi pembeli berkurang. Harga terbaik ada di puncak parabola.

Bab 13 · #19

Diskon bertumpuk: dua mesin bersambung

$$H = (V \circ D)(P) = P\left(1 - \tfrac{d}{100}\right) - v$$

Mesin D memotong d persen, lalu mesin V memotong v rupiah. Kalau urutannya ditukar, harga akhirnya berubah!

Bab 13 · #20

Mesin mundur fungsi linear

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

Mesin maju: kali a, lalu tambah b. Mesin mundur: kurangi b dulu, baru bagi a. Langkah terakhir dibatalkan paling awal!

Bab 13 · #21

Transformasi fungsi: mesin di dalam mesin

$$y = a\, f\big(b(x - c)\big) + d, \qquad f(u) = u^2$$

Ikuti x melewati lima mesin kecil: kurangi c, kali b, kuadratkan, kali a, lalu tambah d. Yang di dalam kurung bekerja lebih dulu.

Bab 13 · #22

Tagihan air berjenjang

$$T(v) = \begin{cases} 10.000 + 2.000\, v, & 0 \le v \le 1(\\ 30.000 + 3.500(v - 10), & 10 < v \le \\ 65.000 + 5.000(v - 20), & v > 20 \end{cases}$$

Biaya beban Rp10.000, lalu 10 m³ pertama Rp2.000/m³, 10 m³ berikutnya Rp3.500/m³, dan sisanya Rp5.000/m³. Tiga aturan, satu fungsi.

Bab 14 · #23

Pertumbuhan & peluruhan eksponensial

$$N = N_0 \cdot b^{\,t/T}$$

Mulai dari N_0. Setiap lewat satu periode T, jumlahnya dikali b. Setelah waktu t, sudah lewat t/T periode.

Bab 14 · #24

Bunga majemuk

$$A = P\left(1 + \tfrac{r}{100\,n}\right)^{n\,t}$$

Setiap periode, saldo dikali (1 + r/100n). Dalam t tahun ada n·t periode, jadi pengali itu dipakai n·t kali.

Bab 14 · #25

Logaritma: pangkat yang dicari

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Logaritma menjawab satu pertanyaan: b harus dipangkatkan berapa supaya hasilnya x?

Bab 14 · #26

Perbandingan energi dua gempa

$$\frac{E_B}{E_A} = 10^{\,1{,}5\,(M_B - M_A)}$$

Naik 1 magnitudo, energinya sekitar 32 kali. Naik 2 magnitudo, sekitar 1.000 kali.

Bab 15 · #27

Suku ke-n barisan aritmetika

$$U_n = a + (n-1)\,b$$

Mulai dari suku pertama, lalu tambahkan beda sebanyak n – 1 kali. Hanya ada n – 1 langkah dari suku pertama ke suku ke-n.

Bab 15 · #28

Jumlah deret aritmetika

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$

Banyak suku dikali rata-rata suku pertama dan suku terakhir. Itulah trik Gauss dalam satu baris.

Bab 15 · #29

Jumlah deret geometri

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

Kalikan deret dengan rasionya, kurangkan dari deret semula, dan hampir semua suku saling menghapus.

Bab 15 · #30

Jumlah deret geometri tak hingga

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

Kalau setiap suku menyusut dengan rasio di antara –1 dan 1, jumlah tak hingga banyak suku itu mendekati a dibagi (1 – r).

Bab 15 · #31

Angsuran cicilan (anuitas)

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Angsuran tiap bulan ditentukan oleh besar pinjaman, bunga per bulan, dan lama cicilan. Semakin lama mencicil, angsurannya lebih ringan, tetapi total bunganya lebih besar.

Bab 16 · #32

Volume kotak dari karton

$$V = x\,(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume = tinggi × panjang alas × lebar alas. Tingginya x, sedangkan panjang dan lebar karton masing-masing berkurang 2x karena dipotong di kedua ujungnya.

Bab 16 · #33

Teorema Sisa

$$S = P(a) = a^3 + b\,a^2 + c\,a + d$$

Mau tahu sisa pembagian P(x) oleh (x – a)? Tidak perlu membagi: cukup masukkan x = a ke dalam P(x).

Bab 16 · #34

Vieta: dari akar ke koefisien

$$d = -\,r\,s\,t$$

Untuk $x^3 + bx^2 + cx + d$ dengan akar r, s, t: suku tetapnya adalah hasil kali ketiga akar dengan tanda dibalik. Koefisien b dan c juga bisa dibaca langsung dari akar-akarnya.

Bagian C · Geometri & Pengukuran

Bab 17 · #1

Sudut jarum jam

$$\theta = |30\,j - 5{,}5\,m|$$

Jarum jam berada di 30j + 0,5m derajat, jarum menit di 6m derajat (diukur dari angka 12). Selisihnya adalah sudutnya; kalau lebih dari 180°, ambil 360° dikurangi selisih itu.

Bab 17 · #2

Jumlah sudut dalam segi-n

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$

Potong segi-n menjadi segitiga dari satu titik sudut: hasilnya selalu n – 2 segitiga, dan setiap segitiga menyumbang 180°.

Bab 17 · #3

Sudut dalam segi-n beraturan

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Sudut luar segi-n beraturan adalah 360° dibagi n. Sudut dalamnya adalah pelurusnya: 180° dikurangi sudut luar.

Bab 18 · #4

Teorema Pythagoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Kuadratkan kedua kaki, jumlahkan, lalu tarik akarnya. Itulah panjang sisi miring.

Bab 18 · #5

Pabrik tripel Euclid

$$c = m^2 + n^2$$

Pilih dua bilangan m dan n. Sisi miringnya $m^2 + n^2$, sedangkan kakinya $m^2 - n^2$ dan $2mn$.

Bab 18 · #6

Diagonal ruang kotak

$$d = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Tongkat terpanjang yang muat di kotak = akar dari jumlah kuadrat panjang, lebar, dan tinggi.

Bab 19 · #7

Luas trapesium

$$L = \tfrac{1}{2} \times (a + b) \times t$$

Jumlahkan kedua sisi sejajar, kalikan dengan tinggi, lalu ambil separuhnya. Sama saja dengan rata-rata kedua sisi sejajar dikali tinggi.

Bab 19 · #8

Rumus Heron

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Hitung setengah keliling s. Kurangi s dengan tiap sisi, kalikan keempat bilangan itu, lalu tarik akarnya. Tidak perlu tinggi sama sekali!

Bab 19 · #9

Teorema Pick

$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

Hitung paku di dalam (I) dan paku yang tersentuh karet (B). Luasnya: I ditambah separuh B, lalu dikurangi satu.

Bab 20 · #10

Keliling & luas lingkaran

$$L = \pi\, r^2$$

Luas lingkaran adalah π kali jari-jari kuadrat, sedangkan kelilingnya 2π kali jari-jari.

Bab 20 · #11

Penghitung putaran roda

$$n = \frac{s}{\pi\, d}$$

Satu putaran berarti maju sejauh satu keliling. Jadi banyak putaran sama dengan jarak tempuh dibagi keliling roda.

Bab 20 · #12

Busur, juring, dan tembereng

$$L_{\text{juring}} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi\, r^2$$

Juring adalah pecahan lingkaran. Pecahannya θ/360°, jadi luas juring = pecahan itu dikali luas lingkaran.

Bab 20 · #13

Kelajuan roda dari putaran per menit

$$v = \omega\, r = \frac{2\pi\, n}{60}\, r$$

Satu putaran sama dengan 2π radian. Kalikan banyak putaran per detik dengan 2π untuk mendapat kecepatan sudut ω, lalu kalikan jari-jari untuk mendapat kelajuan tepi roda.

Bab 21 · #14

Volume dan luas permukaan balok

$$V = p \times l \times t$$

Isi balok = banyaknya kubus satuan = panjang × lebar × tinggi. Kulitnya terdiri atas enam persegi panjang yang berpasangan.

Bab 21 · #15

Volume tabung (tandon air)

$$V = \pi r^2 t$$

Luas lingkaran alas dikali tinggi. Bagi dengan 1.000 untuk mengubah cm^3 menjadi liter.

Bab 21 · #16

Volume kerucut (tumpeng)

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 t$$

Sepertiga dari tabung yang alas dan tingginya sama.

Bab 21 · #17

Volume dan luas bola

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Pangkat tiga untuk isi, pangkat dua untuk kulit: L = $4\pi r^2$, empat kali luas lingkaran terbesarnya.

Bab 21 · #18

Perbesaran: luas ×k², volume ×k³

$$V' = k^3 \times V$$

Jika semua panjang dikali k, luas dikali k^2 dan volume dikali k^3.

Bab 22 · #19

Faktor skala bangun sebangun

$$k = \frac{p'}{p}$$

Bagi panjang pada bayangan dengan panjang yang bersesuaian pada bangun asli. Semua pasangan sisi memberi k yang sama.

Bab 22 · #20

Tinggi benda dari bayangannya

$$T = t \times \frac{B}{b}$$

Tinggi benda sama dengan tinggi tongkat dikali berapa kali bayangan benda lebih panjang daripada bayangan tongkat.

Bab 22 · #21

Dilatasi sebuah titik

$$x' = a + k\,(x - a)$$

Ukur jarak titik dari pusat, kalikan dengan k, lalu hitung lagi dari pusat. Koordinat y dihitung dengan cara yang sama.

Bab 23 · #22

Jarak dua titik (bonus: titik tengah)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jarak lurus adalah sisi miring segitiga siku-siku yang kakinya selisih x dan selisih y. Titik tengahnya cukup rata-rata koordinat.

Bab 23 · #23

Pusat & jari-jari dari bentuk umum lingkaran

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{D}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{E}{2}\right)^2 - F}$$

Dari $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$: pusatnya $(-D/2, -E/2)$, dan jari-jarinya akar dari $(D/2)^2 + (E/2)^2 - F$.

Bab 23 · #24

Titik pembagi ruas garis

$$x_P = \frac{n\,x_A + m\,x_B}{m + n}$$

Jika AP : PB = m : n, koordinat A diberi bobot n dan koordinat B diberi bobot m (bersilang), lalu dibagi m + n.

Bab 23 · #25

Hasil kali titik dari panjang & sudut

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

Kalikan kedua panjang, lalu kalikan dengan cos sudut di antaranya. Sudut lancip memberi hasil positif, siku-siku memberi nol, tumpul memberi negatif.

Bab 24 · #1

Tinggi layangan dari panjang tali

$$t = L \sin \alpha$$

Tali yang terentang lurus adalah sisi miring dan tinggi layangan adalah sisi depan sudut. Jadi tinggi = panjang tali × sinus sudutnya.

Bab 24 · #2

Sudut kemiringan ram kursi roda

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{t}{p}\right)$$

Bagi tinggi ram dengan panjang mendatarnya untuk mendapat tan θ, lalu tekan $\tan^{-1}$ untuk mendapat sudutnya.

Bab 24 · #3

Tinggi benda dari sudut elevasi

$$H = d \tan \alpha + h$$

Tinggi benda sama dengan jarak mendatar dikali tangen sudut elevasi, lalu ditambah tinggi mata pengamat.

Bab 25 · #4

Aturan sinus: cari sisi dari dua sudut

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Pasangan lengkap (a, A) memberi 'nilai tukar' a : sin A. Kalikan nilai tukar itu dengan sin B, dan kamu mendapat sisi b.

Bab 25 · #5

Aturan kosinus: Pythagoras plus koreksi

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Hitung dulu versi Pythagoras $a^2 + b^2$, lalu kurangi dengan koreksi 2ab cos C. Tarik akarnya, dan itulah sisi di depan sudut C.

Bab 25 · #6

Luas segitiga: ½ab sin C

$$L = \tfrac{1}{2}\, a\, b \sin C$$

Dua sisi dan sudut yang diapitnya sudah cukup. Tinggi segitiga tersembunyi di dalam b sin C.

Bab 26 · #7

Radian dan panjang busur

$$s = r\,\theta, \qquad \theta = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

Panjang busur sama dengan jari-jari dikali sudut dalam radian. Ubah dulu derajat ke radian dengan mengalikan π/180.

Bab 26 · #8

Model gelombang sinus (pasang surut)

$$y = A \sin\big(B(x - C)\big) + D$$

Tinggi = sumbu tengah D ditambah A kali sinus. B mengatur seberapa cepat gelombang berulang, C mengatur kapan siklus dimulai.

Bab 26 · #9

Sudut rangkap

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

Sinus sudut dua kali lipat bukan dua kali sinusnya, melainkan dua kali sinus dikali kosinus.

Bab 27 · #1

Limit selisih kuadrat (tabel mendekat)

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}, \qquad x = a + h$$

Bentuk 0/0 di x = a ternyata menyembunyikan 2a: makin kecil jaraknya h, makin dekat f(x) ke 2a. Jadi limit $(x^2 - a^2)/(x - a)$ untuk x → a sama dengan 2a.

Bab 27 · #2

Biaya rata-rata pabrik tahu

$$\bar{C} = \frac{F + v\,n}{n} = \frac{F}{n} + v$$

Biaya tetap F dibagi rata ke n potong tahu, lalu ditambah biaya bahan v per potong. Makin banyak tahu dibuat, biaya rata-rata turun mendekati v, tetapi tidak pernah di bawahnya.

Bab 27 · #3

Bunga majemuk menuju e

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

Uang Rp1 dengan bunga khayalan 100% setahun, dibungakan n kali. Makin sering dibungakan, hasilnya mendekati bilangan e ≈ 2,71828, bukan membesar tanpa batas.

Bab 28 · #4

Kemiringan tali busur pada y = x²

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Naik dibagi maju antara dua titik pada parabola. Semakin kecil h, semakin dekat hasilnya ke kemiringan garis singgung, yaitu 2x.

Bab 28 · #5

Aturan pangkat: kemiringan y = a·xⁿ

$$m = a\,n\,x^{\,n-1}$$

Turunkan pangkat n ke depan untuk dikalikan dengan a, lalu kurangi pangkatnya satu. Masukkan nilai x untuk mendapat kemiringan garis singgung di titik itu.

Bab 28 · #6

Laju pertumbuhan penduduk

$$P'(t) = r\,P_0\,e^{rt}$$

Pada pertumbuhan eksponensial, laju bertambahnya penduduk sebanding dengan banyaknya penduduk saat itu.

Bab 29 · #7

Volume kotak dari karton

$$V = x\,(p - 2x)(l - 2x)$$

Gunting persegi x di keempat pojok, lalu lipat: tinggi kotak x, alasnya (p – 2x) kali (l – 2x).

Bab 29 · #8

Kebun berpagar di samping tembok

$$L = x\,(K - 2x)$$

Dua sisi lebar x memakai 2x meter kawat; sisanya, K – 2x, menjadi sisi panjang yang sejajar tembok.

Bab 29 · #9

Bahan kaleng tertutup

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Bahan = tutup dan alas ($2\pi r^2$) ditambah badan ($2\pi rh$). Karena $h = V/(\pi r^2)$, bahan badan sama dengan $2V/r$.

Bab 30 · #10

Jumlah Riemann kanan untuk $y = x^2$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\,b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Jumlahkan n persegi panjang di bawah $y = x^2$ dari 0 sampai b. Makin banyak persegi panjangnya, makin dekat hasilnya ke $b^3/3$.

Bab 30 · #11

Luas di bawah $y = x^n$

$$L = \int_0^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Naikkan pangkatnya satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Daerah di bawah x^n dari 0 sampai b mengisi tepat $1/(n + 1)$ bagian persegi panjang $b \times b^n$ yang membungkusnya.

Bab 30 · #12

Volume tumpeng lewat integral

$$V = \int_0^t \pi \left(\frac{r}{t}\,y\right)^2 dy = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, t$$

Pada jarak y dari puncak, jari-jari irisan tumpeng adalah $(r/t)\cdot y$. Jumlahkan semua cakram tipis dari puncak sampai alas, hasilnya sepertiga volume tabung.

Bagian F · Data & Peluang

Bab 31 · #1

Rata-rata gabungan

$$\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{n_1\,\bar{x}_1 + n_2\,\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Jumlahkan dulu semua nilai (banyak anggota × rata-rata) dari kedua kelompok, baru bagi dengan banyak anggota seluruhnya.

Bab 31 · #2

Simpangan baku lima data

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5}}$$

Ukur jarak tiap data dari rata-rata, kuadratkan, rata-ratakan, lalu tarik akarnya: itulah jarak khas data dari pusatnya.

Bab 31 · #3

Mengubah semua data sekaligus

$$\bar{y} = a\,\bar{x} + b$$
$$\sigma_y = |a|\,\sigma_x$$

Mengalikan data dengan a mengalikan rata-rata dan simpangan bakunya; menambah b hanya menggeser rata-rata, sebarannya tidak berubah.

Bab 32 · #4

Permutasi: menyusun r dari n

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Ada n calon dan r kursi berlabel. Kursi pertama punya n pilihan, kursi kedua n – 1, dan seterusnya: kalikan r bilangan menurun mulai dari n.

Bab 32 · #5

Lampu hias Agustusan

$$S = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

Susun dulu seolah-olah semua lampu berbeda: (a + b + c)! cara. Lalu bagi dengan a!, b!, dan c!, karena menukar dua lampu yang warnanya sama tidak menghasilkan susunan baru.

Bab 32 · #6

Kombinasi: memilih r dari n

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Hitung dulu susunan berurutan P(n, r), lalu bagi dengan r! karena urutan di dalam tim tidak penting.

Bab 32 · #7

Bintang dan sekat

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak kebagian) sama dengan memilih posisi k – 1 sekat di antara n + k – 1 tempat.

Bab 33 · #8

Aturan penjumlahan peluang

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jumlahkan peluang kedua kejadian, lalu kurangi peluang irisannya, karena irisan itu sudah terhitung dua kali.

Bab 33 · #9

Arti hasil tes positif

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{r\,s}{r\,s + (1-r)(1-t)}$$

Dari semua orang yang hasil tesnya positif, berapa bagian yang benar-benar sakit? Bandingkan positif benar dengan seluruh hasil positif (benar ditambah palsu).

Bab 33 · #10

Nilai harapan permainan menang-kalah

$$E = p \cdot a - (1-p) \cdot b$$

Kalikan setiap hasil dengan peluangnya, lalu jumlahkan. Permainan adil jika nilai harapannya nol.

Bab 34 · #11

Peluang binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$$

Hitung banyak urutan yang memuat tepat k sukses, lalu kalikan dengan peluang satu urutan: p dipangkatkan banyak sukses, dikali (1 – p) dipangkatkan banyak gagal.

Bab 34 · #12

Rataan & simpangan baku binomial

$$\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

Rata-rata banyak sukses adalah n kali p. Sebarannya diukur oleh simpangan baku: akar dari n kali p kali (1 – p).

Bab 34 · #13

Skor z (nilai baku)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Skor z menjawab satu pertanyaan: nilai ini berjarak berapa simpangan baku dari rata-rata, dan ke arah mana?

Bagian G · Matematika Lanjut & Olimpiade

Bab 35 · #1

Banyak baris tabel kebenaran

$$B = 2^n$$

Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan nilai, jadi setiap pernyataan baru menggandakan banyak baris tabel.

Bab 35 · #2

Prinsip sarang merpati

$$m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

Jika n merpati masuk ke k sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit n/k merpati, dibulatkan ke atas.

Bab 35 · #3

Jumlah n bilangan asli pertama

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pasangkan suku pertama dengan suku terakhir: setiap pasangan berjumlah n + 1, dan ada n/2 pasangan.

Bab 36 · #4

Determinan matriks 2 × 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$$

Kalikan diagonal utama, kurangi dengan hasil kali diagonal samping. Angkanya memberi tahu berapa kali lipat luas berubah, dan tandanya memberi tahu apakah gambar terbalik.

Bab 36 · #5

Invers matriks 2 × 2

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tukar a dan d, beri tanda negatif pada b dan c, lalu bagi semuanya dengan determinan. Kalau determinannya nol, tidak ada yang bisa dibagi: matriksnya tidak punya invers.

Bab 36 · #6

SPL dengan invers matriks

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Sistem ax + by = p dan cx + dy = q ditulis AX = B. Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kiri, maka X = A^{-1}B.

Bab 37 · #7

Modulus bilangan kompleks

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Modulus adalah jarak titik a + bi ke titik asal O. Inilah Teorema Pythagoras dari Bab 18 yang sedang menyamar!

Bab 37 · #8

Arus listrik AC dan impedansi

$$I = \frac{V}{|R + Xj|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Kuat arus sama dengan tegangan dibagi modulus impedansi. Bagian real R adalah hambatan biasa, bagian imajiner X berasal dari kumparan motor atau trafo.

Bab 37 · #9

Teorema De Moivre

$$|z^n| = r^n, \qquad \arg(z^n) = n\,\theta$$

Untuk memangkatkan, pangkatkan modulusnya dan kalikan argumennya. Tidak perlu mengalikan (a + bi) berkali-kali!

Bab 38 · #10

Sisa pembagian (a mod n)

$$a = q \cdot n + r, \qquad r = a \bmod n$$

Kurangi a dengan kelipatan n sebanyak mungkin; yang tersisa (antara 0 dan n – 1) adalah a mod n, yaitu tempat jarum jam berhenti.

Bab 38 · #11

Angka satuan pangkat besar

$$s = \text{angka satuan dari } a^k$$

Angka satuan a^k hanya bergantung pada angka satuan a dan sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4), karena polanya berulang setiap 4 pangkat.

Bab 38 · #12

Teorema Fermat kecil

$$a^{\,p-1} \bmod p = r$$

Jika p prima dan a tidak habis dibagi p, sisa a pangkat (p – 1) dibagi p selalu 1.

Bab 38 · #13

Syarat persamaan Diophantine linear

$$d = \text{FPB}(a, b), \qquad ax + by = c \text{ punya solusi bulat} \iff d \mid c$$

Hitung FPB kedua koefisien. Persamaan punya solusi bulat tepat ketika ruas kanan c adalah kelipatan FPB itu.

Bab 39 · #14

Sarang merpati bentuk umum

$$m = \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Bagikan N merpati ke k sarang serata mungkin. Tetap saja ada sarang yang isinya paling sedikit N/k, dibulatkan ke atas.

Bab 39 · #15

AM ≥ GM untuk dua bilangan

$$s = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

Selisih rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri selalu berupa bilangan kuadrat yang dibagi dua, jadi tidak pernah negatif.

Bab 39 · #16

Cauchy-Schwarz lewat identitas Lagrange

$$D = (a_1{}^2 + a_2{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

Ruas kanan Cauchy-Schwarz dikurangi ruas kirinya selalu sama dengan sebuah bilangan kuadrat, jadi tidak pernah negatif.

PENUTUP

Sampai jumpa di puncak berikutnya!

Glosarium istilah penting, panduan untuk guru dan orang tua, serta informasi tentang buku ini.

Panduan untuk guru & orang tua

- **Mulai dari tebakan.** Minta anak memilih jawaban "Tebak Dulu" *sebelum* membaca. Tebakan yang keliru lalu dibuktikan sendiri jauh lebih melekat daripada jawaban yang langsung diberikan.
- **Biarkan mereka bermain.** Grafik Hidup, Rumus Hidup, dan Lab Mini sengaja dibuat untuk diutak-atik. Tanyakan: "Kalau nilai ini dijadikan dua kali lipat, apa yang terjadi?" Biarkan mereka menebak, lalu mengecek.
- **Minta penjelasan, bukan hanya jawaban.** Setelah anak menjawab benar, tanyakan "Bagaimana kamu tahu?" Kemampuan menjelaskan adalah tanda paham yang sesungguhnya.
- **Tangga latihan.** Untuk SD–SMP cukup Lv 1–2. Untuk SMA dan TKA, targetkan Lv 3. Lv 4–5 untuk siswa IGCSE/IB, dan Lv 6 untuk peserta olimpiade.
- **Adu Cepat** melatih kelancaran berhitung. Pakai sebagai pemanasan 1 menit di awal pelajaran. Rekor tersimpan di perangkat, jadi anak bisa bersaing dengan dirinya sendiri.
- **Mode Dasar · SMA · Lanjut** di kanan atas menyesuaikan kedalaman bacaan tanpa mengganti buku.
- **Progres** (XP, kartu, soal yang sudah benar) tersimpan di perangkat. Jika dibuka di aurumgen.my.id, hasil latihan juga direkam secara anonim untuk menghitung statistik "berapa persen pembaca menjawab benar".

Glosarium

A · Bilangan

Istilah	Arti singkat
Bilangan bulat	..., −2, −1, 0, 1, 2, ... Bilangan tanpa pecahan, termasuk negatif dan nol.
Bilangan rasional	Bilangan yang dapat ditulis sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p, q bulat dan $q \neq 0$. Desimalnya berhenti atau berulang.
Bilangan prima	Bilangan asli lebih dari 1 yang faktornya hanya 1 dan dirinya sendiri: 2, 3, 5, 7, 11, ...
FPB & KPK	Faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan atau lebih.
Rasio	Perbandingan dua besaran, mis. 2 : 3.
Notasi ilmiah	Cara menulis bilangan sebagai $a \times 10^n$ dengan $1 \leq \lvert a \rvert < 10$.

B · Aljabar & Fungsi

Istilah	Arti singkat
Variabel	Huruf yang mewakili bilangan yang belum diketahui atau dapat berubah.
Persamaan	Kalimat matematika dengan tanda "=" yang benar untuk nilai tertentu dari variabelnya.
Fungsi	Aturan yang memasangkan setiap masukan dengan tepat satu keluaran.
Gradien	Kemiringan garis: perubahan y dibagi perubahan x.
Diskriminan	$D = b^2 - 4ac$ pada persamaan kuadrat; menentukan banyak dan jenis akar.
Logaritma	Pangkat yang dicari: $\log_b x = y$ artinya $b^y = x$.
Barisan & deret	Barisan adalah daftar bilangan berpola; deret adalah jumlah suku-sukunya.

C · Geometri & Pengukuran

Istilah	Arti singkat
Hipotenusa	Sisi terpanjang segitiga siku-siku, di depan sudut siku-siku.
Sebangun	Bentuk sama, ukuran boleh berbeda; sudut bersesuaian sama dan sisi bersesuaian sebanding.
Kongruen	Bentuk dan ukuran sama persis.
π (pi)	Perbandingan keliling lingkaran dengan diameternya, ±3,14159…
Vektor	Besaran yang punya besar dan arah, digambar sebagai panah.

D · Trigonometri

Istilah	Arti singkat
Sinus, kosinus, tangen	Perbandingan sisi segitiga siku-siku: depan/miring, samping/miring, depan/samping.

Radian	Satuan sudut: panjang busur dibagi jari-jari. $180^\circ = \pi$ radian.
Periode	Panjang satu putaran pola yang berulang pada grafik fungsi trigonometri.

E · Kalkulus

Istilah	Arti singkat
Limit	Nilai yang didekati suatu fungsi ketika masukannya mendekati suatu bilangan.
Turunan	Laju perubahan sesaat; kemiringan garis singgung grafik.
Integral	Penjumlahan bagian-bagian yang sangat kecil; luas di bawah grafik.

F · Data & Peluang

Istilah	Arti singkat
Mean, median, modus	Rata-rata, nilai tengah setelah diurutkan, dan nilai yang paling sering muncul.
Simpangan baku	Ukuran seberapa jauh data menyebar dari rata-ratanya.
Permutasi & kombinasi	Banyak cara menyusun (urutan penting) dan memilih (urutan tidak penting).
Peluang	Ukuran kemungkinan suatu kejadian, dari 0 (mustahil) sampai 1 (pasti).

G · Matematika Lanjut & Olimpiade

Istilah	Arti singkat
Implikasi	Pernyataan "jika P maka Q".
Induksi matematika	Cara membuktikan pernyataan untuk semua bilangan asli: buktikan langkah awal dan langkah "domino".
Matriks	Susunan bilangan dalam baris dan kolom.
Bilangan kompleks	Bilangan $a + bi$ dengan $i^2 = -1$.

Modulo	Sisa pembagian; $a \equiv b \pmod{n}$ artinya a dan b bersisa sama bila dibagi n.
Prinsip sarang merpati	Jika $n+1$ merpati masuk ke n sarang, pasti ada sarang berisi minimal dua merpati.

Tentang buku ini

Mathpedia · Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026). Buku matematika interaktif untuk SD, SMP, SMA, IGCSE, IB, dan olimpiade.

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD** · Editor: **Abdullah Hanif Hidayat** · Didukung oleh **Aurumgen Academy**.

Semua soal adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.

RUJUKAN

- Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan (2025). *Capaian Pembelajaran Mata Pelajaran Matematika Fase A–F* (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025).
- Cambridge Assessment International Education. *Cambridge IGCSE Mathematics 0580: Syllabus*.
- International Baccalaureate Organization. *Mathematics: Analysis and Approaches* dan *Mathematics: Applications and Interpretation*, Subject Guide.
- Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets*. Jossey-Bass.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Boleh dipakai untuk pembelajaran nonkomersial dengan menyebut sumbernya.