

Mathpedia

Matematika Itu Asyik!

Buku matematika interaktif untuk anak Indonesia: SD, SMP, SMA,
IGCSE, IB, sampai olimpiade.



dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD

Editor: Abdullah Hanif Hidayat

Didukung oleh Aurumgen Academy

Tentang buku ini

Ini adalah Jilid 3 dari versi cetak Mathpedia. Bagian yang di layar dapat digeser dan dimainkan (Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, animasi langkah) ditampilkan sebagai gambar, sedangkan latihan lengkap ada di PDF Bank Soal dan LKPD.

Mathpedia • Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026).

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD**

Editor: **Abdullah Hanif Hidayat**

Didukung oleh Aurumgen Academy.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Dokumen ini boleh dicetak dan diperbanyak untuk keperluan pembelajaran nonkomersial dengan tetap mencantumkan sumber.

Semua soal dan LKPD adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.

Versi interaktif dengan komik bergerak, Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, Adu Cepat, dan latihan berskor:
aurumgen.my.id/mathpedia

Daftar isi

BAGIAN F • DATA & PELUANG

31	Statistika: Bercerita dengan Data	4
32	Kaidah Pencacahan	34
33	Peluang	63
34	Distribusi Peluang: Binomial & Normal	90

BAGIAN G • MATEMATIKA LANJUT & OLIMPIADE

35	Logika & Pembuktian	116
36	Matriks	143
37	Bilangan Kompleks	171
38	Teori Bilangan Olimpiade	197
39	Strategi Olimpiade: Kombinatorika & Ketaksamaan	225

LAMPIRAN

Peta Rumus: semua Rumus Hidup	253
Penutup, glosarium & panduan guru	270

31

BAB 31 • DATA & PELUANG

Statistika: Bercerita dengan Data

Rata-rata kelas 70, tetapi tidak ada satu pun siswa yang nilainya dekat dengan 70. Kok bisa? Di bab ini kamu belajar membuat angka bercerita dengan jujur, dan menangkap basah angka yang "berbohong".

Setelah bab ini, kamu bisa

- menyajikan data dengan **tabel turus**, **diagram batang**, **diagram lingkaran**, dan **histogram**;
- menghitung dan memilih ukuran pemusatan yang tepat: **rata-rata**, **median**, atau **modus**;
- meringkas sebaran data dengan **jangkauan**, **kuartil**, **box plot**, dan **simpangan baku**, serta mengenali **pencilan**;
- membaca **diagram pencar**, **korelasi**, dan **garis regresi** tanpa terjebak "korelasi = sebab-akibat";
- menjadi **detektif grafik** yang tidak mudah tertipu.

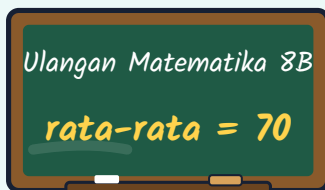
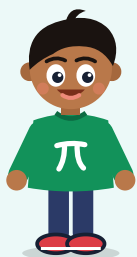
RATA-RATA YANG MENIPU

KOMIK • 4 PANEL

Senin pagi, nilai ulangan dibagikan

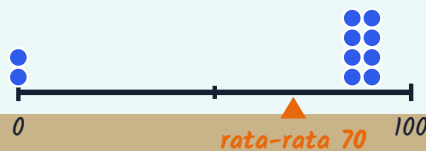
DIMAS

Rata-rata kelas kita 70! Berarti kebanyakan anak dapat sekitar 70, kan? Aku dapat 85, jadi aku di atas rata-rata... sedikit.



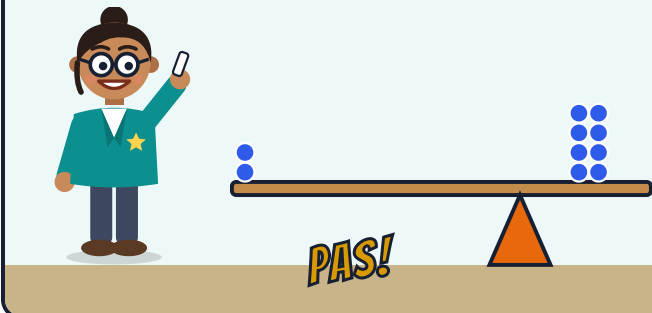
AYU

Coba lihat datanya. Delapan anak dapat 85 atau 90. Dua anak dapat 0 karena sakit dan belum ikut ulangan susulan.



KAK LINTANG

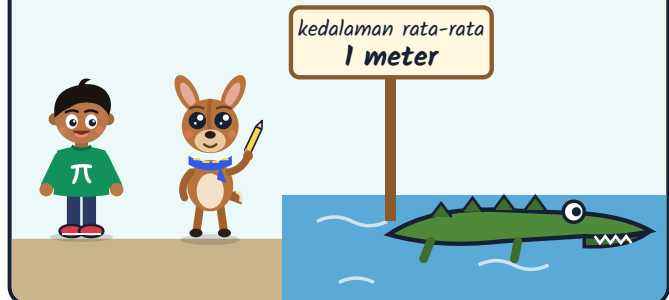
Rata-rata itu titik seimbang jungkat-jungkit. Dua nilai 0 di ujung kiri menarik titik seimbangnya jauh ke kiri, ke 70, padahal tak ada yang mendapat 70.

**Sorenya, di tepi sungai...****ANCIL**

Makanya, kalau papan bilang "kedalaman rata-rata 1 meter", aku tetap waspada. Bisa saja ada lubang 3 meter... tempat buaya menunggu!

DIMAS

Jadi angka mana yang jujur?

**Tebak Dulu!**

Sepuluh orang di sebuah warung masing-masing membawa uang saku sekitar Rp20.000. Lalu datang seorang pengusaha yang membawa Rp1.000.000 dan ikut duduk. Apa yang terjadi pada uang saku "khas" di warung itu?

Rata-rata dan median sama-sama melonjak.

Rata-rata hampir tidak berubah, tetapi median melonjak.

Rata-rata melonjak menjadi sekitar Rp109.000, sedangkan median hampir tidak berubah.

Tidak ada yang berubah karena hanya satu orang yang datang.

Jawabannya: rata-rata melonjak, median tetap. Jumlah uangnya menjadi sekitar $\text{Rp}200.000 + \text{Rp}1.000.000 = \text{Rp}1.200.000$ untuk 11 orang, jadi rata-ratanya sekitar $\text{Rp}109.000$. Padahal sepuluh dari sebelas orang hanya membawa sekitar $\text{Rp}20.000$! Median, yaitu nilai tengah setelah data diurutkan, hanya bergeser satu posisi dan tetap sekitar $\text{Rp}20.000$. Itulah sebabnya laporan pendapatan sering memakai **median**.

31.1 Data: dari turus sampai histogram

Setiap hari kita dikelilingi angka: nilai rapor, curah hujan, harga cabai di pasar, jumlah penonton video. Kumpulan angka atau keterangan seperti itu disebut **data**. **Statistika** adalah ilmu mengumpulkan, merapikan, menyajikan, dan menafsirkan data, sehingga kumpulan angka yang bisu bisa **bercerita**.

Bahasa sederhana • Bayangkan kamu bertanya kepada teman sekelas, "Jajanan kantin apa yang paling kamu suka?" Semua jawaban mereka adalah data. Kalau setiap jawaban kamu catat dengan satu garis kecil (namanya **turus**), lalu garis-garis itu kamu ubah menjadi batang, kamu langsung bisa melihat jajanan mana yang paling laris.



DEFINISI

- **Populasi** adalah seluruh objek yang ingin kita ketahui, misalnya semua siswa SMP di satu kota.
- **Sampel** adalah sebagian populasi yang benar-benar didata, misalnya 200 siswa yang dipilih secara acak dari kota itu.
- **Data kategorik** berupa nama atau kelompok (jajanan favorit, golongan darah). **Data numerik** berupa bilangan: *diskret* bila diperoleh dengan membilang (banyak saudara), *kontinu* bila diperoleh dengan mengukur (tinggi badan, curah hujan).

Data mentah biasanya dirapikan dulu dalam **tabel turus**: setiap jawaban dicatat dengan satu garis, dan setiap garis kelima dibuat mencoret empat garis sebelumnya agar mudah dihitung per lima. Banyaknya garis disebut **frekuensi**. Dari tabel itu kita bisa membuat **diagram batang** (membandingkan banyak) atau **diagram lingkaran** (membandingkan bagian dari keseluruhan).

LAB MINI Survei jajan kantin: turus, batang, dan lingkaran sekaligus

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31



Banyak responden
30

Modus
Cilok

Sudut juring terpilih
Cilok: 108°

Data awal: 30 siswa (data ilustratif). Klik baris tabel atau batang untuk menambah satu suara, lalu lihat ketiga sajian berubah bersama. Klik sebuah juring untuk melihat cara menghitung sudutnya. Tantangan: bisakah kamu membuat juring Onde-onde tepat 90° ?



ATURAN SUDUT JURING

Pada diagram lingkaran, setiap kategori mendapat bagian lingkaran yang sebanding dengan frekuensinya:

$$\text{sudut juring} = \frac{\text{frekuensi}}{\text{jumlah data}} \times 360^\circ, \quad \text{perse}$$

CONTOH Juring bakwan

Dari 40 siswa, 14 orang memilih bakwan sebagai jajanan favorit. Berapa besar sudut juring bakwan pada diagram lingkaran, dan berapa persen siswa yang memilihnya?

1 Bagian bakwan dari seluruh siswa: $\frac{14}{40} = 0,35$.

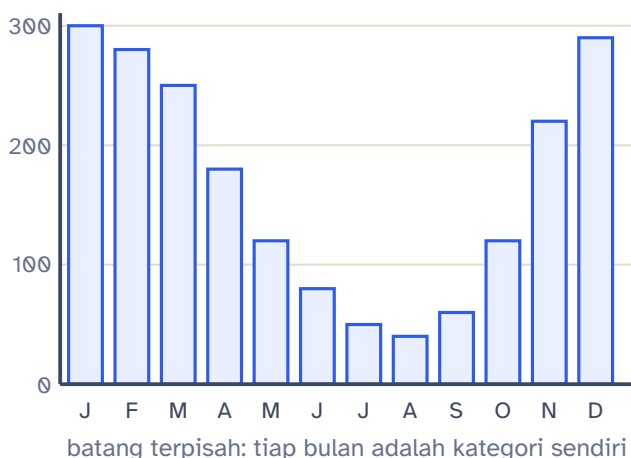
2 Sudut juring: $0,35 \times 360^\circ = 126^\circ$.

3 Persentase: $0,35 \times 100\% = 35\%$.

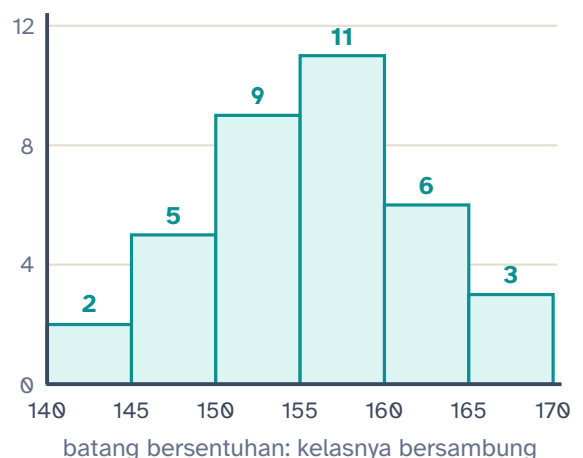
Juring bakwan besarnya 126° , mewakili 35% siswa. Cek cepat: 35% sedikit lebih dari sepertiga lingkaran (120°), cocok!

Untuk data numerik yang kontinu, seperti tinggi badan, data dikelompokkan ke dalam **kelas** yang bersambung, misalnya 150–155 cm, 155–160 cm, dan seterusnya. Sajiannya disebut **histogram**: batang-batangnya **bersentuhan** karena tidak ada celah di antara kelas-kelasnya.

Curah hujan bulanan (mm, ilustratif)



Histogram tinggi 36 siswa (cm)



Kiri: diagram batang curah hujan bulanan sebuah kota di Jawa (data ilustratif); pola musim hujan dan kemarau langsung terlihat. Kanan: histogram tinggi badan 36 siswa yang dikelompokkan per 5 cm.



BATANG ATAU HISTOGRAM?

Diagram batang dipakai untuk kategori (jajanan, bulan, nama kota), jadi batangnya boleh berjarak dan urutannya boleh ditukar. Histogram dipakai untuk data kontinu yang dikelompokkan, jadi batangnya bersentuhan dan urutannya tidak boleh ditukar.



TAMU DARI MASA LALU

Pada tahun 1850-an, perawat Inggris **Florence Nightingale** mencatat penyebab kematian tentara dalam Perang Krimea. Ia menyajikannya dalam diagram berbentuk kelopak bunga (diagram area kutub) yang menunjukkan bahwa jauh lebih banyak tentara meninggal karena penyakit yang bisa dicegah daripada karena luka perang. Grafik itu ikut meyakinkan pemerintah untuk memperbaiki kebersihan rumah sakit. Nightingale juga tercatat sebagai perempuan pertama yang menjadi anggota perhimpunan statistika kerajaan Inggris (1858). Grafik yang baik bisa menyelamatkan nyawa!

31.2 Pusat data: rata-rata, median, modus

Kalau kamu hanya boleh memakai **satu** angka untuk mewakili seluruh data, angka mana yang kamu pilih? Ada tiga calon utama, dan masing-masing punya kelebihan.



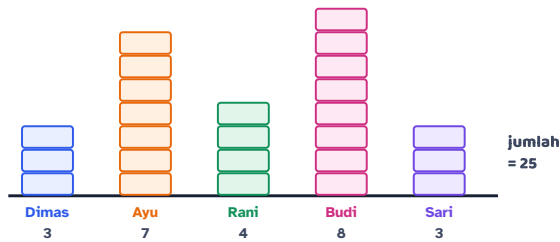
DEFINISI: TIGA UKURAN PEMUSATAN

Untuk data $x_1, x_2, \dots, x_n$:

- **Rata-rata** (*mean*): $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$.
- **Median**: nilai tengah setelah data **diurutkan**. Jika n ganjil, median adalah data ke- $\frac{n+1}{2}$; jika n genap, median adalah rata-rata dua data di tengah.
- **Modus**: nilai yang paling sering muncul. Data bisa punya satu modus, beberapa modus, atau tidak punya modus.

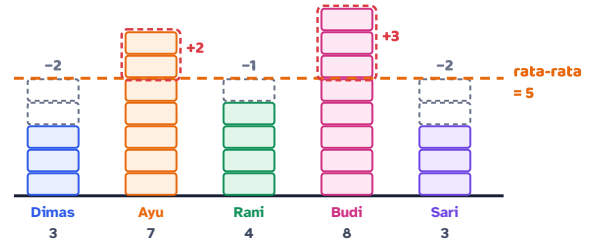
Bahasa sederhana • Rata-rata itu seperti **membagi rata**. Kalau lima sahabat membawa buku dengan jumlah berbeda-beda lalu semua buku dikumpulkan dan dibagi sama banyak, setiap orang mendapat "rata-rata" buku. Perhatikan animasi berikut.

Lima sahabat membawa buku untuk taman baca: 3, 7, 4, 8, 3.



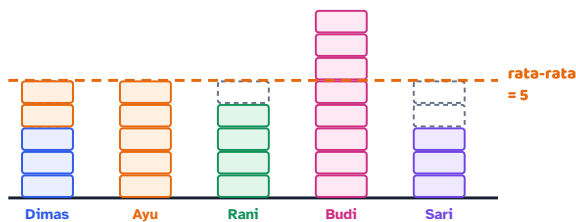
Langkah 1. Lima sahabat membawa buku: Dimas 3, Ayu 7, Rani 4, Budi 8, Sari 3. Jumlahnya 25 buku. Kalau dibagi rata, masing-masing mendapat berapa?

Garis jingga = tinggi bila dibagi rata. Lebih 5 buku, kurang 5 buku.



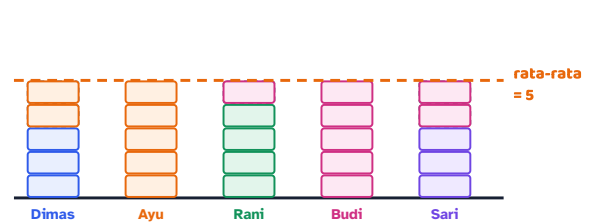
Langkah 2. Bayangkan garis setinggi 5 buku. Bagian di atas garis (kelebihan) ada $2 + 3 = 5$ buku; lubang di bawah garis (kekurangan) ada $2 + 1 + 2 = 5$ buku. Kelebihan **sama persis** dengan kekurangan!

Ayu memberikan 2 bukunya yang berlebih kepada Dimas.



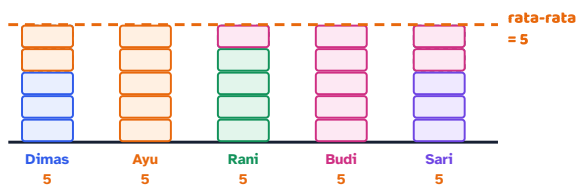
Langkah 3. Ayu memindahkan 2 buku teratasnya ke tumpukan Dimas.

Budi memberikan 1 buku kepada Rani dan 2 buku kepada Sari.



Langkah 4. Budi memindahkan 1 buku ke Rani dan 2 buku ke Sari. Tidak ada buku yang hilang atau bertambah.

Semua punya 5 buku: $(3 + 7 + 4 + 8 + 3) : 5 = 25 : 5 = 5$.



Langkah 5. Sekarang semua tumpukan setinggi 5. Inilah arti rata-rata: **jumlah semua data dibagi banyak data**, $\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$.



SIFAT TITIK SEIMBANG

Jumlah simpangan semua data terhadap rata-ratanya selalu nol:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Artinya, total "kelebihan" di atas rata-rata sama dengan total "kekurangan" di bawahnya. Kalau data diletakkan sebagai beban di sebuah papan, papan itu **seimbang tepat di titik rata-rata**.

▼ Bukti singkat

$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - n \cdot \frac{\sum x_i}{n} = \sum x_i - \sum x_i = 0$. Dalam bahasa fisika: momen gaya di kiri titik tumpu sama dengan momen gaya di kanannya, jadi papan seimbang.

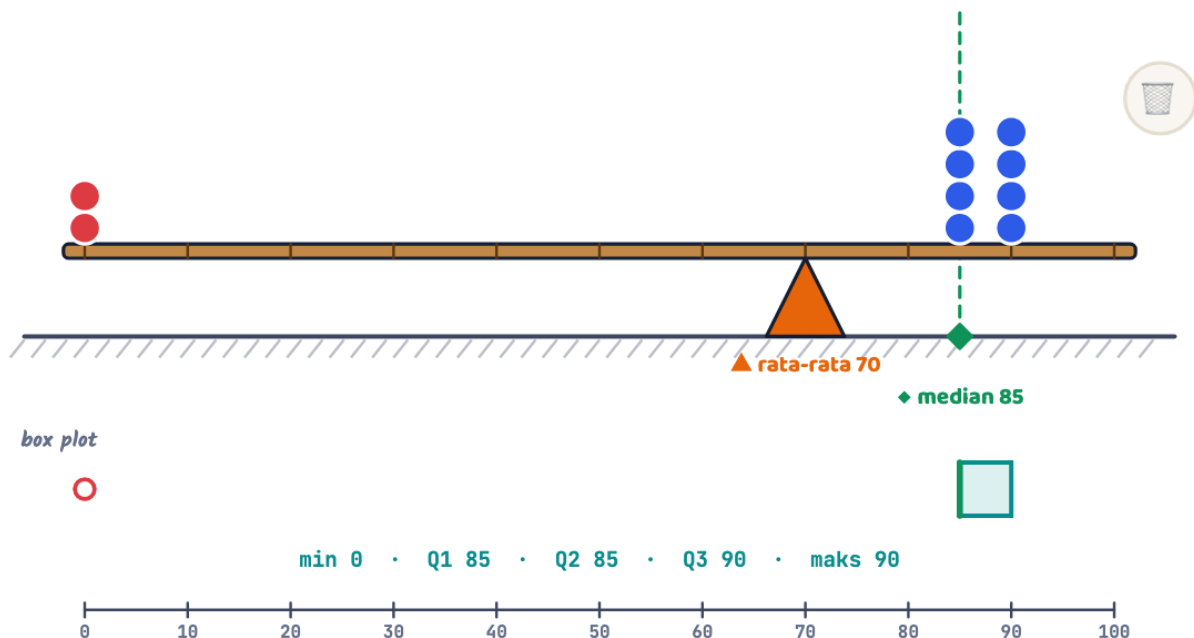
Sekarang coba sendiri. Lab berikut memakai data komik di awal bab. Setiap titik adalah satu nilai ulangan yang duduk di atas papan jungkat-jungkit.

LAB MINI Jungkat-jungkit data: rata-rata vs median

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31

 titik seimbang = rata-rata = 70

Σ jarak kiri 140 = Σ jarak kanan 140



Banyak data
10

Rata-rata
70

Median
85

Modus
85 & 90 (4×)

Jangkauan antarkuartil
5

Simpangan baku σ
35,07

Seret titik biru ke kiri atau ke kanan. Klik tempat kosong di atas papan untuk menambah titik; seret titik ke  untuk membuangnya. Perhatikan: segitiga jingga (rata-rata) selalu berlari mengejar setiap titik, sedangkan garis hijau (median) sering diam saja. Lalu tekan  **Tambah pencilan**. Siapa yang lebih "tahan banting"? Nyalakan **Aku pasang tumpuan sendiri** untuk menebak titik seimbangnya. Kotak di bagian bawah adalah **box plot** yang akan kita bedah di 31.3.



AWAS JEBAKAN

Median adalah data tengah setelah **diurutkan**, bukan data yang kebetulan berada di tengah daftar. Untuk data 7, 3, 9, 5, 4, angka di tengah daftar adalah 9, tetapi setelah diurutkan (3, 4, 5, 7, 9) mediannya 5.

CONTOH Nilai rapor Ayu

Nilai rapor Ayu pada tujuh mata pelajaran: 85, 90, 78, 92, 85, 88, 80. Tentukan rata-rata, median, dan modusnya.

1 Rata-rata: $\frac{85 + 90 + 78 + 92 + 85 + 88 + 80}{7} = \frac{598}{7} \approx 85,43.$

2 Urutkan: 78, 80, 85, **85**, 88, 90, 92. Ada 7 data, jadi median adalah data ke-4, yaitu 85.

3 Nilai 85 muncul dua kali, yang lain sekali. Modusnya 85.

Rata-rata $\approx 85,43$, median 85, modus 85. Ketiganya berdekatan karena datanya tidak punya pencilan.



TRIK KAK LINTANG: RATA-RATA TEBAKAN

Mau menghitung rata-rata 78, 82, 85, 79, 81 di kepala? Tebak saja 80, lalu hitung selisih tiap data dari tebakan: $-2, +2, +5, -1, +1$. Jumlah selisihnya 5, dan $5 : 5 = 1$. Jadi rata-ratanya $80 + 1 = 81$. Angka kecil jauh lebih ramah daripada angka besar!



ADU CEPAT

Rata-rata kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-31)

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pakai trik rata-rata tebakan: pilih angka di tengah, rata-ratakan selisihnya. Atau jumlahkan semua, lalu bagi 4.

ADU CEPAT Median kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-31

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Urutkan dulu! Median lima data adalah data ke-3 setelah diurutkan.

Bagaimana jika dua kelompok digabung? Misalkan kelas 9A punya 30 siswa dengan rata-rata 78, dan kelas 9B punya 20 siswa dengan rata-rata 83. Rata-rata gabungannya **bukan** $\frac{78+83}{2}$, karena kelas 9A lebih besar dan suaranya lebih banyak.

RUMUS HIDUP Rata-rata gabungan

$$\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Jumlahkan dulu semua nilai (banyak anggota $\times$ rata-rata) dari kedua kelompok, baru bagi dengan banyak anggota seluruhnya.

n_1 Banyak siswa kelas A siswa

$\bar{x}_1$ Rata-rata kelas A

n_2 Banyak siswa kelas B siswa

$\bar{x}_2$ Rata-rata kelas B

$\bar{x}_{\text{gab}}$ Rata-rata gabungan

RATA-RATA GABUNGAN

80

kelas yang lebih besar menarik hasil ke arahnya

Jumlah nilai kelas A = $30 \times 78 = 2.340$, kelas B = $20 \times 83 = 1.660$. Semuanya **4.000** dibagi **50** siswa = **80**. Kalau kamu keliru merata-ratakan kedua rata-rata, hasilnya **80,5**, meleset **0,5**.

Cek satuan: Rata-rata gabungan selalu berada di antara kedua rata-rata kelompok.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RATA-GABUNGAN

Kelas 9A (30 siswa) memiliki rata-rata 78 dan kelas 9B (20 siswa) memiliki rata-rata 83. Berapa rata-rata seluruh 50 siswa?

1 Jumlah nilai 9A: $30 \times 78 = 2340$. Jumlah nilai 9B: $20 \times 83 = 1660$.

2 Jumlah seluruhnya: $2340 + 1660 = 4000$ untuk $30 + 20 = 50$ siswa.

3 $\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{4000}{50} = 80$.

Rata-rata gabungannya 80, bukan 80,5. Hasilnya lebih dekat ke 78 karena kelas 9A lebih besar.



AWAS JEBAKAN

Rata-rata gabungan bukan rata-rata dari rata-rata, kecuali banyak anggota kedua kelompok sama. Selalu kembali ke **jumlah**: jumlah = banyak data $\times$ rata-rata.

Untuk data dalam **tabel frekuensi**, nilai x_i yang muncul f_i kali cukup dikalikan dengan frekuensinya: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$. Jika datanya dikelompokkan dalam kelas (seperti histogram), pakai **titik tengah** tiap kelas sebagai x_i ; hasilnya adalah *taksiran* rata-rata.

Ukuran	Kelebihan	Kelemahan	Cocok untuk
Rata-rata	memakai semua data; bisa digabung antarkelompok	mudah tertarik oleh pencilan	data yang cukup simetris: nilai ulangan, tinggi badan
Median	tahan terhadap pencilan	tidak memakai besar setiap data	data yang miring atau berpencilan: pendapatan, harga rumah, waktu tempuh
Modus	satu-satunya yang bisa dipakai untuk data kategorik	bisa tidak ada atau lebih dari satu	jajanan terlaris, ukuran sepatu yang paling banyak dicari

31.3 Sebaran: jangkauan, kuartil, dan box plot

Kelas 7A dan 7B sama-sama punya rata-rata 75. Di 7A semua nilai berada di antara 70 dan 80, sedangkan di 7B separuh kelas mendapat 100 dan separuh lagi mendapat 50. Rata-ratanya sama, ceritanya sangat berbeda! Selain pusat, kita perlu mengukur **sebaran**.



DEFINISI: UKURAN SEBARAN BERBASIS URUTAN

Setelah data diurutkan:

- **Jangkauan** = data terbesar – data terkecil.
- **Kuartil** membagi data terurut menjadi empat bagian yang kira-kira sama banyak: Q_1 (kuartil bawah), Q_2 = median, dan Q_3 (kuartil atas).
- **Jangkauan antarkuartil** (*interquartile range*): $IQR = Q_3 - Q_1$, lebar "separuh data yang di tengah".
- Sebuah data disebut **pencilan** bila letaknya di bawah $Q_1 - 1,5 \times IQR$ atau di atas $Q_3 + 1,5 \times IQR$.



CARA MENGHITUNG KUARTIL DI BUKU INI

Kita memakai cara "median dari setengah data": Q_1 adalah median setengah data bawah dan Q_3 adalah median setengah data atas. Bila banyak data ganjil, median tidak ikut ke setengah mana pun. Cara ini dipakai kalkulator grafik dan banyak soal IB. Buku lain kadang memakai rumus letak $\frac{n+1}{4}$ dengan interpolasi; untuk banyak data ganjil kedua cara memberi hasil yang sama, tetapi untuk banyak data genap hasilnya bisa sedikit berbeda.

Lima angka (terkecil, Q_1 , median, Q_3 , terbesar) disebut **ringkasan lima angka**. Gambarnya adalah **box plot** (diagram kotak-garis): sebuah kotak dari Q_1 ke Q_3 , sebuah garis di median, dan dua "kumis" yang menjulur ke data terkecil dan terbesar yang bukan pencilan.

Uang jajan harian 11 siswa (ribu rupiah, ilustratif)



Langkah 1. Data mentah: uang jajan harian 11 siswa (dalam ribu rupiah). Titik-titik di garis bilangan menunjukkan sebarannya.

Uang jajan harian 11 siswa (ribu rupiah, ilustratif)



Langkah 2. Langkah pertama selalu sama: **urutkan** dari kecil ke besar.

Uang jajan harian 11 siswa (ribu rupiah, ilustratif)



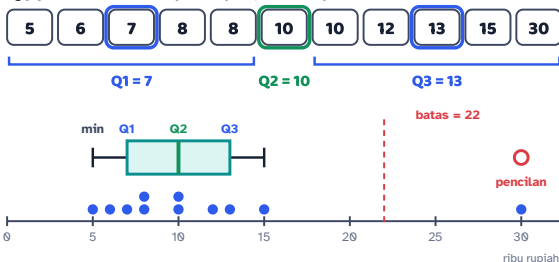
Langkah 3. Median Q_2 adalah data ke- $\frac{11+1}{2} = 6$, yaitu 10. Ada 5 data di kirinya dan 5 data di kanannya.

Uang jajan harian 11 siswa (ribu rupiah, ilustratif)



Langkah 4. Kuartil bawah $Q_1 =$ median setengah bawah (5, 6, 7, 8, 8) = 7. Kuartil atas $Q_3 =$ median setengah atas (10, 12, 13, 15, 30) = 13. Jadi $IQR = 13 - 7 = 6$.

Uang jajan harian 11 siswa (ribu rupiah, ilustratif)



Langkah 5. Gambar kotak dari Q_1 ke Q_3 dengan garis di median. Batas pencilan atas = $13 + 1,5 \times 6 = 22$, jadi 30 adalah **pencilan** (lingkaran merah). Kumis kanan berhenti di data terbesar yang bukan pencilan, yaitu 15. Batas bawah $7 - 9 = -2$, jadi kumis kiri sampai ke data terkecil, 5.

Curah hujan harian (mm) selama 11 hari di sebuah stasiun pengamatan (data ilustratif): 0, 2, 5, 8, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 64. Tentukan ringkasan lima angka, IQR, dan periksa apakah ada pencilan.

- 1 Data sudah terurut, $n = 11$. Median = data ke-6 = 15.
- 2 Q_1 = median dari 0, 2, 5, 8, 12 = 5. Q_3 = median dari 18, 20, 25, 30, 64 = 25. $IQR = 25 - 5 = 20$.
- 3 Batas atas = $25 + 1,5 \times 20 = 55$; batas bawah = $5 - 30 = -25$. Hanya 64 yang melewati batas.

Ringkasan lima angka: 0, 5, 15, 25, 64. IQR = 20 mm, dan 64 mm adalah pencilan: hari hujan sangat lebat. Rata-ratanya $199 : 11 \approx 18,1$ mm, lebih besar daripada median 15 mm karena tertarik oleh hari hujan lebat itu.

Box plot juga memperlihatkan **bentuk** sebaran. Jika kotak dan kumisnya hampir simetris terhadap median, datanya **simetris** dan rata-rata $\approx$ median. Jika kumis kanan jauh lebih panjang, datanya **miring ke kanan** (*positively skewed*) dan biasanya rata-rata $>$ median, seperti curah hujan dan pendapatan. Jika kumis kiri yang panjang, datanya miring ke kiri dan biasanya rata-rata $<$ median.



AWAS JEBAKAN

Bagian box plot yang lebih panjang tidak berarti datanya lebih banyak. Setiap bagian (kumis kiri, dua bagian kotak, kumis kanan) memuat kira-kira seperempat data; bagian yang panjang hanya berarti datanya lebih **renggang** di situ.



TAMU DARI MASA LALU

Box plot diperkenalkan oleh ahli statistika Amerika **John Tukey** pada tahun 1970-an sebagai bagian dari "analisis data eksploratif": melihat data dengan gambar sederhana sebelum menghitung macam-macam. Tukey juga dikenal sebagai pencipta istilah *bit* untuk satuan informasi digital. Box plot buatan Tukey bisa digambar dengan pensil dalam dua menit, tetapi sampai sekarang dipakai ilmuwan di seluruh dunia.

31.4

Simpangan baku: seberapa jauh dari rata-rata?

IQR hanya melihat separuh data di tengah. Ukuran sebaran yang memakai **setiap** data adalah simpangan baku. Idennya: ukur jarak setiap data dari rata-rata, lalu cari "jarak khas"-nya.

Bahasa sederhana • Bayangkan dua pemain basket yang sama-sama rata-rata mencetak 10 poin. Pemain pertama selalu mencetak 9, 10, atau 11 poin. Pemain kedua kadang 0, kadang 20. Pemain pertama lebih bisa diandalkan karena poinnya **tidak menyebar jauh** dari rata-rata. Simpangan baku adalah angka yang mengukur seberapa jauh data menyebar dari rata-ratanya: makin kecil, makin seragam.



Tebak Dulu!

Keempat kelompok data berikut sama-sama punya rata-rata 5. Mana yang simpangan bakunya paling besar?

1, 3, 5, 7, 9 (berjarak sama)

4, 5, 5, 5, 6

1, 1, 5, 9, 9

5, 5, 5, 5, 5

Jawabannya: 1, 1, 5, 9, 9. Jangkauannya sama dengan 1, 3, 5, 7, 9 (yaitu 8), tetapi empat datanya menumpuk di ujung, sejauh 4 dari rata-rata. Jumlah kuadrat simpangannya $16 + 16 + 0 + 16 + 16 = 64$, dibandingkan $16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$. Data 5, 5, 5, 5, 5 sama sekali tidak menyebar: simpangan bakunya 0.



DEFINISI: VARIANS DAN SIMPANGAN BAKU

Untuk data $x_1, \dots, x_n$ dengan rata-rata $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

σ^2 disebut **varians** (rata-rata kuadrat simpangan) dan σ disebut **simpangan baku**. Satuan σ sama dengan satuan data.



POPULASI ATAU SAMPEL? PEMBAGI n ATAU $n - 1$?

Rumus di atas (pembagi n) memberi simpangan baku **populasi** σ . Pakai rumus ini bila datamu adalah seluruh kelompok yang ingin kamu gambarkan, misalnya semua nilai di kelasmu. Bila datamu hanya **sampel** dan kamu ingin **menaksir** simpangan baku populasi, pakai pembagi $n - 1$:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Di bab ini, bila tidak disebut lain, "simpangan baku" berarti σ dengan pembagi n . Kalkulator ilmiah biasanya menampilkan keduanya: σ_x (pembagi n) dan s_x (pembagi $n - 1$). Di IB, σ dipakai untuk menggambarkan data, sedangkan s_{n-1} dipakai sebagai taksiran tak bias bagi varians populasi. Selalu baca soal: populasi atau sampel?

Mari menghitungnya selangkah demi selangkah untuk data 4, 6, 7, 9, 14. Rata-ratanya $\bar{x} = 40 : 5 = 8$.

x_i	4	6	7	9	14	Jumlah
$x_i - \bar{x}$	-4	-2	-1	1	6	0 (selalu!)
$(x_i - \bar{x})^2$	16	4	1	1	36	58

Varians populasi $\sigma^2 = 58 : 5 = 11,6$, jadi $\sigma = \sqrt{11,6} \approx 3,41$. Jika kelima data itu sampel, $s^2 = 58 : 4 = 14,5$ dan $s \approx 3,81$. Mengapa dikuadratkan? Karena jumlah simpangan biasa selalu nol (sifat titik seimbang!), jadi tanda negatifnya harus dihilangkan dulu.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5}}$$

Ukur jarak tiap data dari rata-rata, kuadratkan, rata-ratakan, lalu tarik akarnya: itulah jarak khas data dari pusatnya.

x_1 Data ke-1

x_2 Data ke-2

x_3 Data ke-3

x_4 Data ke-4

x_5 Data ke-5

σ Simpangan baku (pembagi n)

SIMPANGAN BAKU (PEMBAGI N)

10

Rata-rata = **75**. Simpangan tiap data: **-15; -5; 0; 5; 15** (jumlahnya selalu 0). Varians $\sigma^2 = 100$, jadi $\sigma = 10$. Bila kelima data ini hanya sampel, simpangan baku sampel $s = 11,18$.

Cek satuan: Simpangan baku bersatuan sama dengan datanya (poin, cm, menit), sedangkan varians bersatuan kuadrat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SIMPANGAN-BAKU

Hasil lima kali lompat jauh (meter). Dimas: 4,0; 4,5; 3,5; 5,0; 3,0. Ayu: 4,1; 3,9; 4,0; 4,2; 3,8. Pelatih ingin mengirim atlet yang lebih konsisten. Siapa yang dipilih?

- 1 Rata-rata keduanya sama: $20,0 : 5 = 4,0$ m. Rata-rata saja tidak bisa memutuskan.
- 2 Dimas: simpangan 0; 0,5; -0,5; 1; -1. Kuadratnya berjumlah $0 + 0,25 + 0,25 + 1 + 1 = 2,5$, jadi $\sigma^2 = 0,5$ dan $\sigma \approx 0,71$ m.
- 3 Ayu: simpangan 0,1; -0,1; 0; 0,2; -0,2. Kuadratnya berjumlah 0,1, jadi $\sigma^2 = 0,02$ dan $\sigma \approx 0,14$ m.

Simpangan baku Ayu ($\pm 0,14$ m) jauh lebih kecil daripada Dimas ($\pm 0,71$ m). Rata-rata sama, tetapi Ayu jauh lebih konsisten, jadi Ayu yang dipilih.



RUMUS CEPAT VARIANS

Varians sama dengan "rata-rata kuadrat dikurangi kuadrat rata-rata":

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2.$$

Rumus ini praktis untuk data dalam tabel frekuensi dan untuk menggabungkan dua kelompok.

▼ Bukti dengan menjabarkan kuadrat

$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$. Bagi kedua ruas dengan n . Cek dengan data 4, 6, 7, 9, 14: $\sum x_i^2 = 16 + 36 + 49 + 81 + 196 = 378$, dan $378 : 5 - 8^2 = 75,6 - 64 = 11,6$. Cocok!

Apa yang terjadi pada rata-rata dan simpangan baku jika **setiap** data diubah dengan cara yang sama, misalnya suhu diubah dari Celsius ke Fahrenheit dengan $F = 1,8C + 32$?

$$\bar{y} = a \bar{x} + b$$

$$\sigma_y = |a| \sigma_x$$

Mengalikan data dengan a mengalikan rata-rata dan simpangan bakunya; menambah b hanya menggeser rata-rata, sebarannya tidak berubah.

 $\bar{x}$

Rata-rata data awal

 σ_x

Simpangan baku awal

 a Pengali a b Penambah b σ_y

Simpangan baku baru

SIMPANGAN BAKU BARU

4,5



ini rumus Celsius → Fahrenheit

Rata-rata baru = $1,8 \times 28 + (32) = 82,4$. Simpangan baku baru = $|1,8| \times 2,5 = 4,5$. Geser slider b : rata-rata ikut bergeser, tetapi simpangan baku sama sekali tidak berubah!

Cek satuan: Simpangan baku tidak pernah negatif; itulah sebabnya pengalinya $|a|$, bukan a .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRANSFORMASI-DATA



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA DIBAGI $n - 1$?

Rata-rata sampel $\bar{x}$ adalah titik yang paling dekat dengan data sampel itu sendiri (lihat kotak Lanjut di 31.6: $\bar{x}$ meminimumkan jumlah kuadrat simpangan). Akibatnya, simpangan terhadap $\bar{x}$ cenderung **lebih kecil** daripada simpangan terhadap rata-rata populasi μ yang sebenarnya, sehingga pembagi n membuat varians sampel terlalu kecil. Secara tepat dapat dibuktikan bahwa $E[\sum (x_i - \bar{x})^2] = (n - 1)\sigma^2$, jadi membagi dengan $n - 1$ menghasilkan taksiran yang tepat sasaran rata-rata (*tak bias*). Cara lain memandangnya: karena $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$, hanya $n - 1$ simpangan yang "bebas"; simpangan terakhir sudah ditentukan oleh yang lain. Inilah yang disebut **derajat kebebasan**.

31.5 Diagram pencar, korelasi, dan garis regresi

Sejauh ini setiap data hanya berupa satu angka. Sering kali kita punya **pasangan** angka untuk setiap objek, misalnya jam belajar dan nilai ulangan setiap siswa. Pasangan (x, y) itu digambar sebagai titik pada **diagram pencar** (*scatter diagram*). Pola titik-titiknya bercerita tentang hubungan kedua besaran.



Tebak Dulu!

Data sebuah kota menunjukkan bahwa pada bulan-bulan ketika penjualan es teh tinggi, penjualan kipas angin juga tinggi. Kesimpulan mana yang paling masuk akal?

Minum es teh membuat orang ingin membeli kipas angin.

Kipas angin membuat orang haus sehingga membeli es teh.

Keduanya mungkin sama-sama dipengaruhi faktor ketiga, yaitu cuaca panas.

Data itu pasti salah karena es teh dan kipas angin tidak berhubungan.

Jawabannya: ada faktor ketiga. Cuaca panas membuat orang membeli es teh *dan* kipas angin. Kedua penjualan naik-turun bersama (berkorelasi), tetapi yang satu tidak menyebabkan yang lain. Faktor tersembunyi seperti ini disebut **variabel perancu**. Ingat semboyan para statistikawan: *korelasi bukan sebab-akibat*.

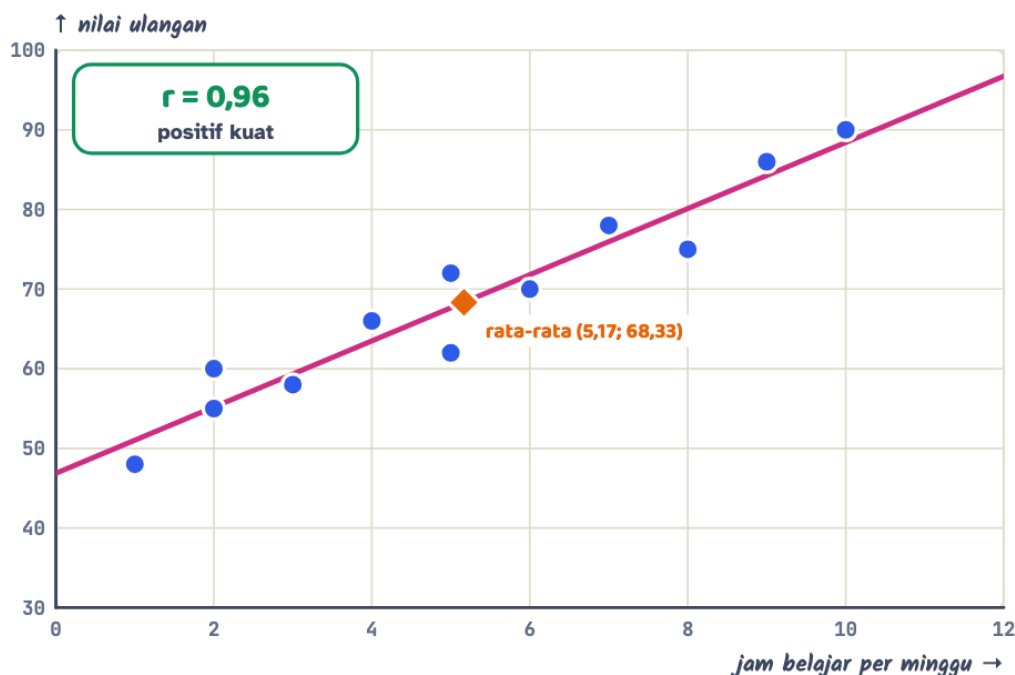


DEFINISI: KORELASI

Korelasi menyatakan seberapa kuat titik-titik pada diagram pencar mengikuti sebuah garis lurus. Korelasi **positif**: y cenderung naik ketika x naik. Korelasi **negatif**: y cenderung turun ketika x naik. Kekuatannya diukur dengan **koefisien korelasi** Pearson r , dengan $-1 \leq r \leq 1$:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

$r = 1$ atau $r = -1$ berarti semua titik tepat segaris; $r \approx 0$ berarti tidak ada hubungan **linear**. Patokan kasar: $|r| \geq 0,8$ kuat, $0,5 \leq |r| < 0,8$ sedang, $0,2 \leq |r| < 0,5$ lemah.



👉 klik = tambah titik • seret ke 🗑️ = buang

Banyak titik

12

Koefisien korelasi r

0,962

Garis regresi

 $\hat{y} = 46,86 + 4,157x$

Korelasi

positif kuat

Pilih kumpulan data (semuanya ilustratif). Seret titik dan lihat garis regresi serta nilai r berubah. Klik tempat kosong untuk menambah titik, seret titik ke 🗑️ untuk membuangnya. Arahkan kursor di dalam grafik untuk menaksir y dari garis. Coba: tambahkan **satu** titik jauh di pojok kanan bawah data "jam belajar". Seberapa besar satu titik bisa mengubah r ?



GARIS REGRESI (METODE KUADRAT TERKECIL)

Garis lurus $\hat{y} = a + bx$ yang paling cocok dengan data adalah garis yang membuat **jumlah kuadrat sisa** $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ sekecil mungkin. Koefisiennya:

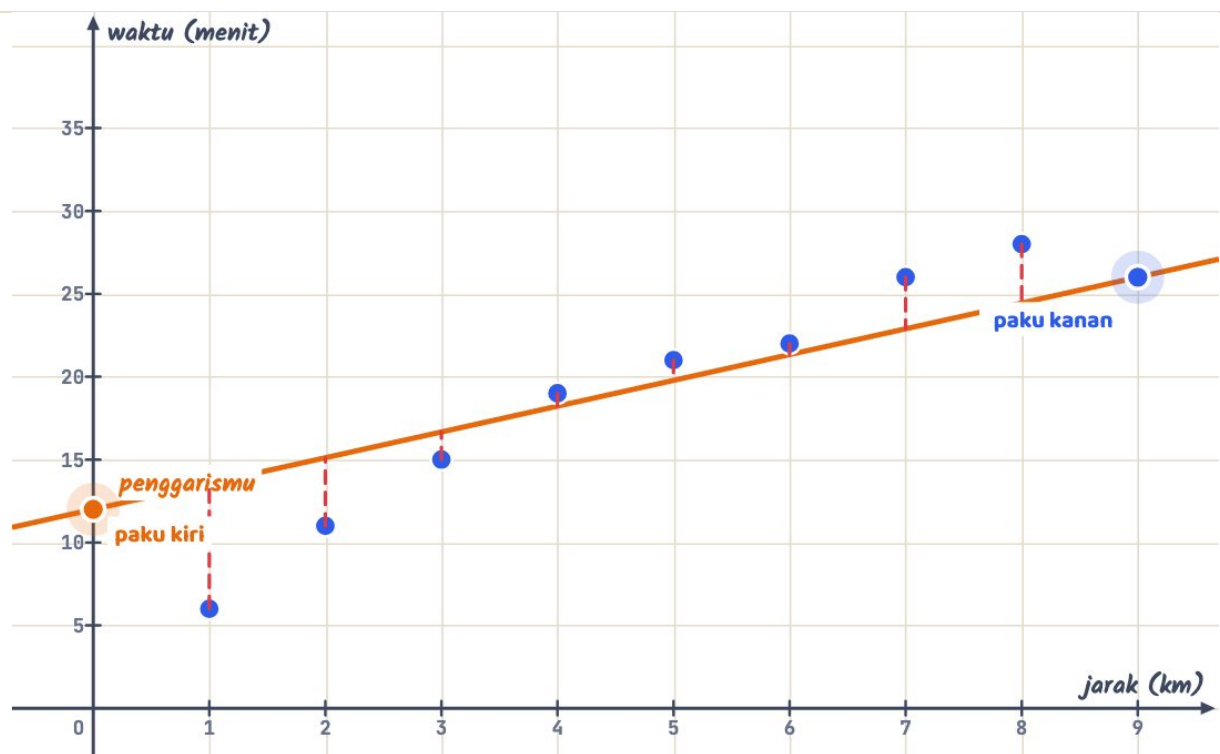
$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

Karena $a = \bar{y} - b\bar{x}$, garis regresi **selalu melalui titik** $(\bar{x}, \bar{y})$. Lambang $\hat{y}$ ("y topi") berarti nilai *taksiran*, bukan nilai sebenarnya.

$$\hat{y} = p + \frac{q - p}{9} x$$

$$\hat{y} \approx 12 + 1,56 x \quad \text{JKS} \approx 101,63$$

Delapan siswa mencatat jarak rumah (km) dan waktu tempuh ke sekolah (menit), data ilustratif. Seret dua paku untuk memasang penggaris. Garis merah putus-putus adalah sisa (selisih data dengan garis). Garis terbaik membuat jumlah kuadrat sisa (JKS) sekecil mungkin.



Kemiringan garismu

1,56 menit/km

JKS garismu

101,63

JKS terkecil yang mungkin

12

Tantangan: buat JKS serendah mungkin hanya dengan menyeret paku. JKS terkecil yang mungkin adalah 12. Setelah berhasil, tafsirlah garisnya: berapa menit tambahan untuk setiap 1 km, dan apa arti angka saat $x = 0$?

Garis regresi data di atas adalah $\hat{y} = 5 + 3x$. Kemiringan 3 berarti setiap tambahan 1 km jarak menambah waktu tempuh sekitar 3 menit (kira-kira 20 km/jam). Titik potong 5 dapat ditafsirkan sebagai waktu "tetap" sekitar 5 menit, misalnya menunggu angkot atau berjalan ke gerbang.

Lima siswa mencatat lama latihan per minggu x (jam) dan skor kuis y (dari 10):

$(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 7), (5, 6)$. Tentukan garis regresi y atas x dan koefisien korelasinya.

1 $\bar{x} = 15 : 5 = 3$ dan $\bar{y} = 25 : 5 = 5$.

2 Simpangan x : $-2, -1, 0, 1, 2$. Simpangan y : $-2, 0, -1, 2, 1$.

3 $S_{xy} = (-2)(-2) + (-1)(0) + 0 \cdot (-1) + (1)(2) + (2)(1) = 8$, $S_{xx} = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$,
 $S_{yy} = 4 + 0 + 1 + 4 + 1 = 10$.

4 $b = 8 : 10 = 0,8$ dan $a = 5 - 0,8 \times 3 = 2,6$. Jadi $\hat{y} = 2,6 + 0,8x$.

5 $r = \frac{8}{\sqrt{10 \times 10}} = 0,8$.

$\hat{y} = 2,6 + 0,8x$ dan $r = 0,8$: korelasi positif yang kuat. Setiap tambahan 1 jam latihan berkaitan dengan kenaikan skor sekitar 0,8 poin. Taksiran untuk 3,5 jam: $2,6 + 0,8 \times 3,5 = 5,4$.



AWAS JEBAKAN

Korelasi yang kuat tidak membuktikan sebab-akibat, dan garis regresi hanya dapat dipercaya di dalam rentang data. Menaksir di dalam rentang data disebut **interpolasi** dan biasanya aman. Menaksir di luar rentang disebut **ekstrapolasi** dan berbahaya: garis "jarak vs waktu" di atas tidak bisa dipakai untuk jarak 50 km, karena di sana mungkin ada jalan tol, kemacetan, atau kamu sudah naik kereta.



TAMU DARI MASA LALU

Kata *regresi* berasal dari ilmuwan Inggris **Francis Galton** (1822–1911). Ia meneliti tinggi badan orang tua dan anak-anaknya, dan menemukan bahwa anak dari orang tua yang sangat tinggi cenderung lebih pendek daripada orang tuanya, sedangkan anak dari orang tua yang sangat pendek cenderung lebih tinggi. Tingginya "kembali" (*regress*) ke arah rata-rata. Muridnya, **Karl Pearson**, kemudian merumuskan koefisien korelasi r yang kita pakai sekarang.

**MENGAPA $-1 \leq R \leq 1$?**

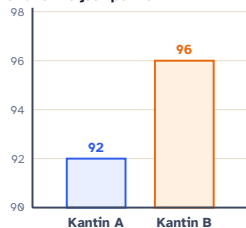
Tulis $u_i = x_i - \bar{x}$ dan $v_i = y_i - \bar{y}$. Maka $r = \frac{\sum u_i v_i}{\sqrt{\sum u_i^2 \sum v_i^2}}$. **Ketaksamaan Cauchy-Schwarz** menyatakan $(\sum u_i v_i)^2 \leq \sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2$, sehingga $r^2 \leq 1$. Buktinya cantik: untuk setiap bilangan real t , $\sum (u_i t - v_i)^2 \geq 0$. Ruas kiri adalah fungsi kuadrat $At^2 - 2Bt + C$ dengan $A = \sum u_i^2$, $B = \sum u_i v_i$, $C = \sum v_i^2$. Fungsi kuadrat yang tidak pernah negatif punya diskriminan ≤ 0 : $4B^2 - 4AC \leq 0$, yaitu $B^2 \leq AC$. Kesamaan terjadi tepat ketika $v_i = t u_i$ untuk semua i , yaitu ketika semua titik segaris.

31.6 Detektif grafik dan statistika di sekitarmu

Grafik bisa menyampaikan kebenaran dengan cepat. Sayangnya, grafik juga bisa **menyesatkan**, baik karena sengaja maupun tidak. Jadilah detektif: periksa tiga kasus berikut sebelum percaya.

Grafik yang menyesatkan

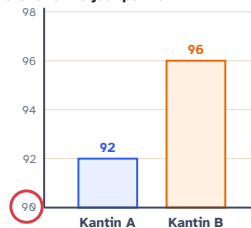
Porsi cilok terjual per hari



Langkah 1. Kasus 1. Kantin B menjual 96 porsi cilok sehari, Kantin A 92 porsi. Pada grafik iklan Kantin B, batangnya tampak tiga kali lebih tinggi. Apakah Kantin B benar-benar tiga kali lebih laris?

Grafik yang menyesatkan

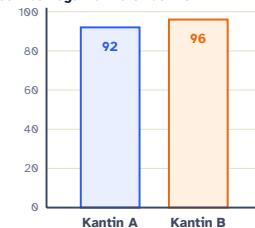
Porsi cilok terjual per hari



sumbu mulai dari 90, bukan 0!

Grafik yang jujur

Sumbu tegak dimulai dari 0



selisih 4 porsi, hanya sekitar 4%

Langkah 2. Tertangkap! Sumbu tegaknya dimulai dari 90, bukan 0, sehingga selisih kecil tampak raksasa. Dengan sumbu dari 0, selisihnya hanya 4 porsi, sekitar $\frac{4}{92} \approx 4\%$.

Grafik yang menyesatkan

Panen padi desa (ilustratif)



Langkah 3. Kasus 2. Panen naik dari 2 ton menjadi 4 ton, yaitu 2 kali. Gambar karungnya dibuat 2 kali lebih tinggi... dan diam-diam juga 2 kali lebih lebar.

Grafik yang menyesatkan

Panen padi desa (ilustratif)



luasnya 4 kali!

Grafik yang jujur

1 karung = 1 ton

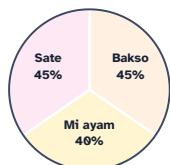


ikon sama besar, banyaknya 2 kali lipat

Langkah 4. Tertangkap! Lebar 2x dan tinggi 2x membuat **luas** gambar 4x, sehingga mata kita membaca kenaikan 4 kali. Piktogram yang jujur memakai ikon berukuran sama dan menambah **banyaknya**.

Grafik yang menyesatkan

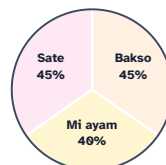
Makanan favorit (boleh pilih > 1)



Langkah 5. Kasus 3. Survei makanan favorit, dan setiap orang boleh memilih lebih dari satu. Hasilnya disajikan sebagai diagram lingkaran yang tampak rapi.

Grafik yang menyesatkan

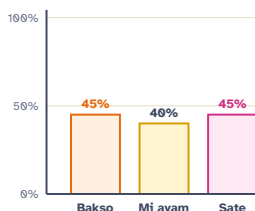
Makanan favorit (boleh pilih > 1)



$45\% + 40\% + 45\% = 130\% ?!$

Grafik yang jujur

Pakai diagram batang



tiap batang berdiri sendiri

Langkah 6. Tertangkap! Persentasenya berjumlah 130%, padahal satu lingkaran utuh harus 100%. Karena satu orang boleh memilih lebih dari satu, pakai diagram batang. **Daftar Periksa detektif:** sumbu mulai dari mana? Ukuran ikon sebanding? Jumlah persen 100%? Siapa pembuat grafik, dan dari mana datanya?

MITOS

"Rata-rata adalah nilai yang dimiliki kebanyakan orang."

FAKTA

Itu

modus

. Rata-rata bisa saja nilai yang tidak dimiliki siapa pun: di komik, rata-rata kelas 70 padahal tidak ada yang mendapat nilai dekat 70.

MITOS

"Kalau dua hal berkorelasi kuat, yang satu pasti menyebabkan yang lain."

FAKTA

Penjualan es teh dan kipas angin berkorelasi kuat, tetapi penyebab keduanya adalah cuaca panas. Untuk membuktikan sebab-akibat diperlukan percobaan yang dirancang dengan baik.

MITOS

"Makin banyak responden, survei pasti makin akurat."

FAKTA

Cara memilih sampel lebih penting. Sepuluh ribu responden dari satu grup obrolan bisa lebih menyesatkan daripada seribu responden yang dipilih

acak

dari seluruh populasi.



MATEMATIKA NUSANTARA

Dalam dongeng **Kancil dan Buaya**, si kancil ingin menyeberang sungai. Ia berkata kepada para buaya bahwa raja memerintahkan agar jumlah buaya dihitung, lalu meminta mereka berbaris dari tepi ke tepi. Sambil melompat dari punggung ke punggung, kancil menghitung, "Satu, dua, tiga...", dan sampailah ia di seberang. Kancil memakai "sensus" sebagai siasat! Sensus sungguhan diselenggarakan Badan Pusat Statistik (BPS) kira-kira setiap sepuluh tahun; Sensus Penduduk 2020 untuk pertama kalinya memadukan pengisian daring dengan wawancara langsung. Saat pemilu, lembaga survei melakukan **quick count** (hitung cepat): dari ratusan ribu TPS, hanya beberapa ribu TPS yang dipilih **secara acak** sebagai sampel, tetapi hasilnya dalam beberapa jam biasanya sudah sangat dekat dengan hasil resmi. Kuncinya adalah sampel yang acak dan mewakili, bukan sampel yang sangat besar.



Curah hujan BMKG

BMKG membandingkan curah hujan suatu bulan dengan rata-rata jangka panjangnya untuk menyebut bulan itu "di atas normal", "normal", atau "di bawah normal".



Nilai rapor

Rata-rata menunjukkan capaian kelas, sedangkan sebaran (jangkauan atau simpangan baku) membantu guru melihat apakah sebagian siswa tertinggal jauh.



Quick count

Sampel acak dari TPS di seluruh Indonesia cukup untuk menaksir hasil pemilu dengan selisih kecil, dilengkapi margin galat (*margin of error*).



Harga cabai

Harga dipantau di banyak pasar. Median membantu agar satu pedagang yang memasang harga sangat tinggi tidak merusak gambaran harga pada umumnya.



Grafik tumbuh posyandu

Grafik pertumbuhan di buku KIA membandingkan berat dan tinggi seorang anak dengan sebaran ukuran anak-anak seusianya.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

SIFAT ISTIMEWA RATA-RATA DAN MEDIAN

Cari bilangan c yang "paling dekat" dengan semua data. Jawabannya bergantung pada cara mengukur kedekatan!

- **Rata-rata meminimumkan jumlah kuadrat jarak.** Untuk setiap c , $\sum (x_i - c)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$ (jabarkan $(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)$ dan pakai sifat titik seimbang). Suku kedua ≥ 0 dan bernilai 0 hanya jika $c = \bar{x}$.
- **Median meminimumkan jumlah jarak mutlak** $\sum |x_i - c|$. Pasangkan data terkecil dengan terbesar, kedua terkecil dengan kedua terbesar, dan seterusnya. Untuk setiap pasangan $x_i \leq x_j$, berlaku $|x_i - c| + |x_j - c| \geq x_j - x_i$, dengan kesamaan bila c terletak di antara keduanya. Median terletak di antara semua pasangan sekaligus!

Akibat menarik: karena $|\bar{x} - m| = \frac{1}{n} |\sum (x_i - m)| \leq \frac{1}{n} \sum |x_i - m| \leq \frac{1}{n} \sum |x_i - \bar{x}|$ dengan m median, jarak rata-rata ke median tidak pernah melebihi rata-rata jarak data ke rata-ratanya, dan (dengan Cauchy-Schwarz) tidak pernah melebihi simpangan baku: $|\bar{x} - m| \leq \sigma$.



Cek Cepat

Data: 2, 3, 4, 5, 100. Ukuran pemusatan yang paling tepat mewakili nilai "khas" data ini adalah...

rata-rata, yaitu 22,8

median, yaitu 4

jangkauan, yaitu 98

nilai terbesar, yaitu 100

Setiap siswa mendapat bonus 10 poin pada nilai ulangnya. Simpangan baku nilai-nilai itu...

bertambah 10

menjadi 10 kali lipat

bertambah $\sqrt{10}$

tidak berubah

Sebuah box plot memiliki $Q_1 = 40$ dan $Q_3 = 60$. Menurut aturan $1,5 \times \text{IQR}$, data manakah yang merupakan pencilan?

95

85

15

50

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A



Tantangan Rumah: survei waktu tempuh ke sekolah

Bahan: buku catatan, pensil, penggaris, HP (opsional, untuk kalkulator).

1. Tanyakan kepada 11 teman atau anggota keluarga: berapa menit waktu tempuh dari rumah ke sekolah atau tempat kerja? (Sebelas orang membuat median dan kuartil mudah dicari.)
2. Catat datanya, lalu urutkan dari yang tercepat sampai yang terlama.
3. Tentukan ringkasan lima angka, IQR, dan rata-ratanya.
4. Periksa pencilan dengan aturan $1,5 \times \text{IQR}$, lalu gambar box plot di atas garis bilangan.
5. Hitung simpangan bakunya (boleh dengan kalkulator) dan tulis apakah datamu "rapat" atau "menyebar".

Pertanyaan: Mana yang lebih mewakili waktu tempuh "khas" di kelompokmu, rata-rata atau median? Apakah ada orang yang rumahnya jauh sekali dan menjadi pencilan? Jelaskan dengan memakai data yang kamu kumpulkan.

⚡ RINGKASAN KILAT Bab 31 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- menyajikan data dengan **tabel turus**, **diagram batang**, **diagram lingkaran**, dan **histogram**
- menghitung dan memilih ukuran pemusatan yang tepat: **rata-rata**, **median**, atau **modus**
- meringkas sebaran data dengan **jangkauan**, **kuartil**, **box plot**, dan **simpangan baku**, serta mengenali **pencilan**
- membaca **diagram pencar**, **korelasi**, dan **garis regresi** tanpa terjebak "korelasi = sebab-akibat"
- menjadi **detektif grafik** yang tidak mudah tertipu

🔑 Istilah kunci

data Statistika Populasi Sampel Data kategorik Data numerik tabel turus
frekuensi histogram Rata-rata Median Modus Jangkauan Kuartil
Jangkauan antarkuartil pencilan

📊 Rumus penting

$$\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Rata-rata gabungan. Jumlahkan dulu semua nilai (banyak anggota $\times$ rata-rata) dari kedua kelompok, baru bagi dengan banyak anggota seluruhnya.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5}}$$

Simpangan baku lima data. Ukur jarak tiap data dari rata-rata, kuadratkan, rata-ratakan, lalu tarik akarnya: itulah jarak khas data dari pusatnya.

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

$$\sigma_y = |a| \sigma_x$$

Mengubah semua data sekaligus. Mengalikan data dengan a mengalikan rata-rata dan simpangan bakunya; menambah b hanya menggeser rata-rata, sebarannya tidak berubah.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Median adalah data tengah setelah diurutkan, bukan data yang kebetulan berada di tengah daftar.
- Rata-rata gabungan bukan rata-rata dari rata-rata, kecuali banyak anggota kedua kelompok sama.
- Bagian box plot yang lebih panjang tidak berarti datanya lebih banyak.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=31

🧩 Teka-teki untuk Bab 32

Ayu punya 4 kerudung, 3 kemeja, dan 2 rok, dan semuanya serasi satu sama lain. Ia ingin tampil dengan setelan yang berbeda setiap hari sekolah. Berapa hari ia bisa bertahan tanpa mengulang setelan yang sama? Bisakah kamu menghitungnya tanpa menuliskan semua setelan satu per satu?

▼ Intip petunjuk

Untuk setiap kerudung ada 3 pilihan kemeja, dan untuk setiap pasangan kerudung–kemeja ada 2 pilihan rok. Gambarlah diagram pohon kecil, lalu perhatikan bagaimana banyak cabangnya bertambah. Bab 32 membahas aturan perkalian ini, sampai ke permutasi dan kombinasi!

32 Kaidah Pencacahan: Menghitung Tanpa Mendaftar

Berapa banyak gaya seragam yang bisa kamu pakai, dan berapa lama pencuri harus menebak PIN ATM-mu? Dengan beberapa kaidah pencacahan yang cerdas, kamu bisa menghitung jutaan kemungkinan tanpa mendaftarnya satu per satu.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **aturan perkalian** dan **aturan penjumlahan** lewat diagram pohon dan kotak pengisian tempat;
- menghitung **faktorial** dan **permutasi**, termasuk permutasi dengan unsur yang sama dan permutasi siklis;
- membedakan **permutasi** (urutan penting) dan **kombinasi** (urutan tidak penting);
- membaca **segitiga Pascal** dan memakainya untuk menjabarkan $(a + b)^n$ dengan **binomial Newton**;
- memakai jurus olimpiade **bintang dan sekat** serta **inklusi-eksklusi**.

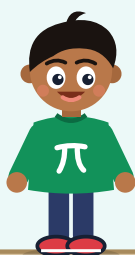
LEMARI SERAGAM DIMAS

KOMIK • 4 PANEL

Senin pagi, pukul 06.15, di depan lemari

DIMAS

Aku cuma punya 3 kemeja dan 2 celana. Jadi gayaku cuma $3 + 2 = 5$. Bosan!

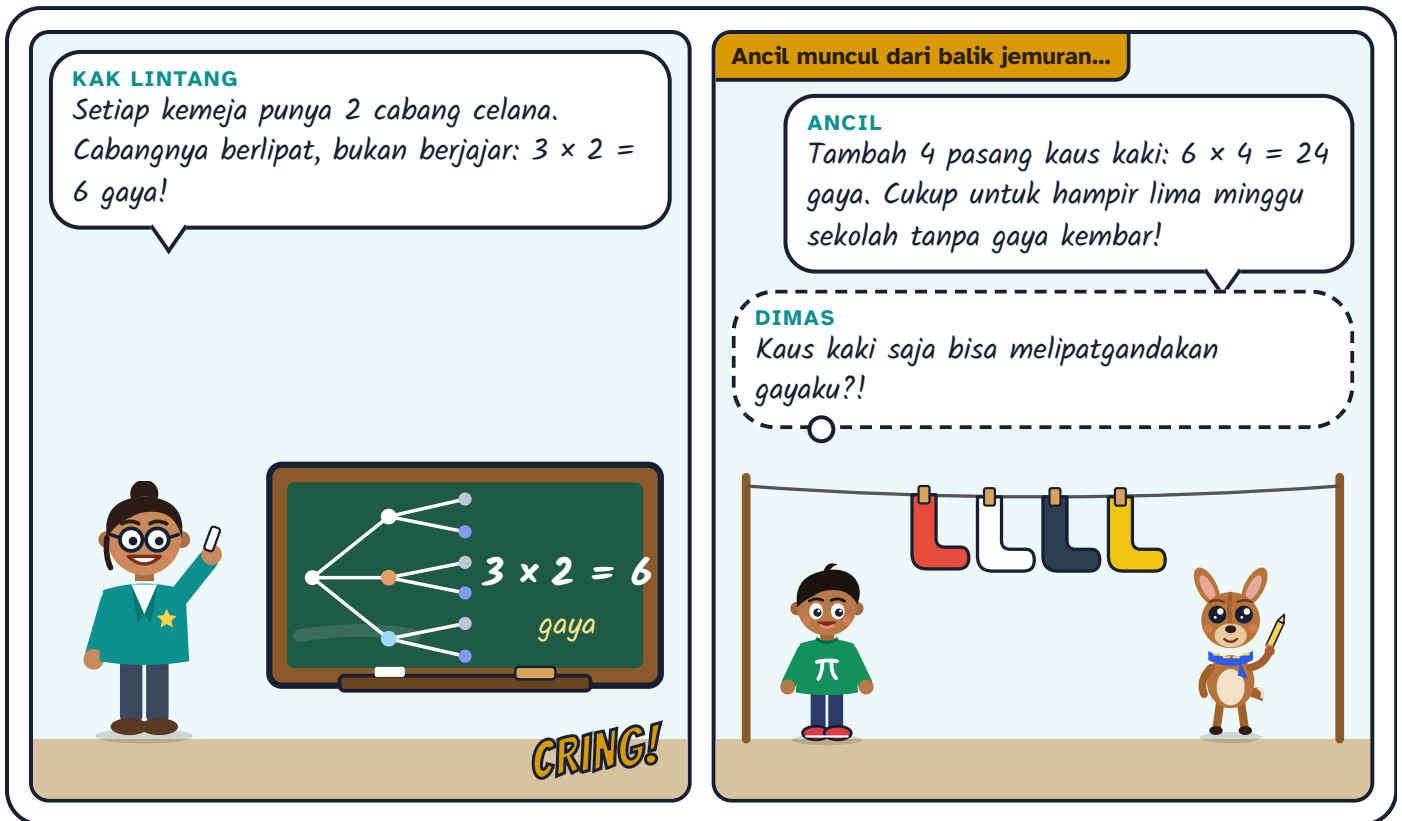


AYU

Tunggu dulu. Kemeja putih saja bisa dipakai dengan celana abu-abu atau biru tua. Itu sudah 2 gaya!

putih + abu-abu ✓
putih + biru tua ✓
batik + abu-abu ✓
batik + biru tua ...





Ingat teka-teki di akhir Bab 31: *berapa banyak cara memakai seragam?* Komik di atas menjawabnya, dan jawabannya jauh lebih besar daripada tebakan Dimas. Bab ini mengajarkanmu **kaidah pencacahan**: cara menghitung banyaknya kemungkinan **tanpa** harus mendaftar semuanya satu per satu.



Tebak Dulu!

PIN ATM terdiri atas 6 angka (0–9), dan angka boleh berulang. Ada berapa banyak PIN berbeda yang mungkin?

Sekitar 60, karena ada 6 kotak dan 10 angka.

Sekitar 1.000, cukup untuk dicoba semalam.

Tepat 1.000.000, dari 000000 sampai 999999.

Tak terhingga banyaknya.

Jawabannya: tepat satu juta. Setiap kotak punya 10 pilihan, dan keenam kotak semuanya diisi, jadi $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$. Pencuri yang menebak satu PIN per detik tanpa henti butuh $\pm 11,6$ hari untuk mencoba semuanya. Itulah sebabnya kartu ATM diblokir setelah 3 kali salah: dengan 3 kali coba, ia hanya punya 3 kesempatan dari sejuta!

32.1 Aturan perkalian dan aturan penjumlahan

Dimas mengira gayanya hanya $3 + 2 = 5$. Padahal **setiap** kemeja bisa dipasangkan dengan **setiap** celana. Cara paling jujur untuk melihatnya adalah menggambar **diagram pohon**: setiap keputusan membuat cabang baru. Bagaimana kalau sepatu juga ikut dipilih?



Dimas

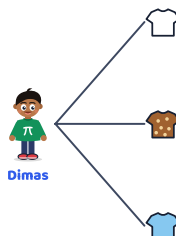
Banyak gaya

?

mulai memilih...

Langkah 1. Dimas berdiri di depan lemari. Ia harus mengambil tiga keputusan berurutan: kemeja, lalu celana, lalu sepatu.

Kemeja (3)



Dimas

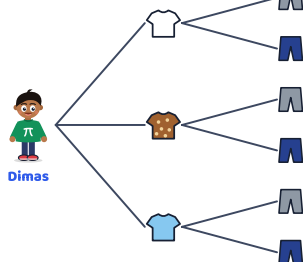
Banyak gaya

3

3

Langkah 2. Keputusan pertama: ada 3 kemeja (putih, batik, biru muda). Pohon bercabang menjadi 3.

Kemeja (3) Celana (2)



Dimas

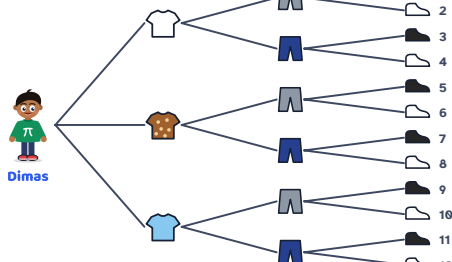
Banyak gaya

6

3×2

Langkah 3. Untuk **setiap** kemeja ada 2 celana (abu-abu, biru tua). Setiap cabang bercabang lagi menjadi 2, sehingga ada $3 \times 2 = 6$ ujung.

Kemeja (3) Celana (2) Sepatu (2)



Dimas

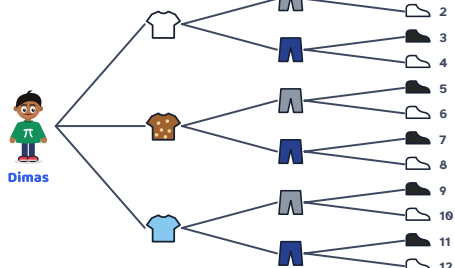
Banyak gaya

12

$3 \times 2 \times 2$

Langkah 4. Untuk setiap pasangan kemeja–celana ada 2 sepatu (hitam, putih). Ujung pohon menjadi $3 \times 2 \times 2 = 12$. Setiap ujung adalah satu gaya yang berbeda.

Kemeja (3) Celana (2) Sepatu (2)



Dimas

Banyak gaya

12

$3 \times 2 \times 2$

$3 \times 2 \times 2$

kemeja celana sepatu

= 12 gaya

Langkah 5. Tidak perlu menggambar pohonnya! Cukup isi tiga kotak dengan banyak pilihan tiap langkah, lalu kalikan: $3 \times 2 \times 2 = 12$. Inilah **aturan perkalian**.



DEFINISI • ATURAN PERKALIAN

Jika sebuah kegiatan terdiri atas beberapa langkah berurutan, langkah pertama dapat dilakukan dengan n_1 cara, langkah kedua dengan n_2 cara (untuk **setiap** hasil langkah pertama), dan seterusnya sampai langkah ke- k dengan n_k cara, maka banyak cara melakukan seluruh kegiatan adalah

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

Menghitung dengan kotak-kotak pilihan seperti ini disebut juga **aturan pengisian tempat**.

Bahasa sederhana • Gampangnya: buat satu kotak untuk setiap keputusan. Tulis banyak pilihan di dalam setiap kotak, lalu kalikan semua angkanya.



ATURAN PENJUMLAHAN

Jika kamu harus memilih **satu** dari kelompok A **atau** kelompok B, dan kedua kelompok tidak punya anggota yang sama, banyak pilihannya $n(A) + n(B)$. Contoh: Ayu hanya boleh meminjam satu buku, dari 6 komik atau 4 buku cerita rakyat. Pilihannya $6 + 4 = 10$, bukan 6×4 .



AWAS JEBAKAN

Kalikan jika kegiatannya terdiri atas beberapa langkah yang **semuanya** dilakukan ("kemeja *dan* celana"). Jumlahkan jika kamu memilih **salah satu** jalan ("komik *atau* cerita rakyat"). Kesalahan Dimas di komik adalah menjumlahkan sesuatu yang seharusnya dikalikan.

CONTOH

Paket hemat warteg

Warteg Bu Sri menawarkan paket hemat: nasi dengan 1 lauk (dari 4 pilihan), 1 sayur (dari 3 pilihan), dan 1 minuman (es teh atau teh hangat). Berapa macam paket yang mungkin?

1 Ada tiga keputusan berurutan: lauk, sayur, minuman. Ketiganya dilakukan, jadi kalikan.

2 Isi kotak pilihan: $\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2}$.

3 $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Ada 24 macam paket. Kalau kamu makan di sana setiap hari sekolah dengan paket yang berbeda, perlu hampir lima minggu untuk mencoba semuanya!

Aturan perkalian ada di mana-mana. Perhatikan betapa cepatnya hasilnya membesar ketika kotaknya bertambah:

Situasi	Kotak pilihan	Banyak kemungkinan
Kode gembok koper 3 angka	$10 \times 10 \times 10$	1.000
PIN ATM 6 angka (boleh berulang)	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	1.000.000
PIN 6 angka, semua angka berbeda	$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$	151.200
Seragam: 3 kemeja, 2 celana, 4 pasang kaus kaki	$3 \times 2 \times 4$	24

Bagaimana jika ada syarat, misalnya "bilangannya harus genap" atau "tidak boleh diawali angka 0"? Kotak-kotaknya tidak lagi sama mudahnya diisi.



TRIK KAK LINTANG

Isi dulu kotak yang **paling rewel**, yaitu kotak yang punya syarat. Setelah si rewel diurus, kotak sisanya biasanya tinggal dihitung mundur. Kalau ada dua syarat yang saling berebut angka yang sama, pecah menjadi beberapa **kasus**, lalu jumlahkan hasilnya.

COBA SENDIRI

Bilangan genap dan angka nol yang rewel

Dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5 akan dibentuk bilangan genap tiga angka dengan angka-angka yang berbeda. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk?

- 1 Ada dua kotak rewel: angka satuan harus genap (0, 2, atau 4), dan angka ratusan tidak boleh 0. Angka 0 muncul di kedua syarat, jadi pisahkan menjadi dua kasus.
- 2 **Kasus 1: satuan = 0.** Ratusan boleh 1–5 (5 pilihan), puluhan dari 4 angka sisanya: $5 \times 4 \times 1 = 20$.
- 3 **Kasus 2: satuan = 2 atau 4** (2 pilihan). Ratusan tidak boleh 0 dan tidak boleh sama dengan satuan: 4 pilihan. Puluhan dari 4 angka sisanya (0 boleh): $4 \times 4 \times 2 = 32$.
- 4 Kedua kasus tidak mungkin terjadi bersamaan, jadi pakai aturan penjumlahan: $20 + 32 = 52$.

Ada 52 bilangan. Perhatikan: aturan perkalian dipakai *di dalam* setiap kasus, sedangkan aturan penjumlahan dipakai *antarkasus*.



MATEMATIKA NUSANTARA

Plat nomor kendaraan di Indonesia umumnya berpola **kode wilayah - angka - huruf seri**, misalnya B 1234 XYZ. Bayangkan satu kode wilayah memakai nomor 1 sampai 9.999 dan tiga huruf seri dari 26 huruf. Aturan perkalian memberi $9.999 \times 26 \times 26 \times 26 = 175.742.424$ nomor! Aturan resminya membatasi beberapa huruf dan susunan, jadi angka sebenarnya lebih kecil, tetapi tetap sangat besar. Itulah sebabnya daerah yang kendaraannya sangat banyak memerlukan huruf seri yang lebih panjang.

32.2 Faktorial: perkalian yang menurun

Lima sahabat (Dimas, Ayu, Ancil, Sari, dan Budi) antre membeli es dawet. Berapa banyak urutan antrean yang mungkin? Kotak pertama punya 5 pilihan, kotak kedua tinggal 4, lalu 3, 2, dan akhirnya 1: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Perkalian menurun seperti ini sangat sering muncul, sehingga diberi nama dan lambang sendiri.



DEFINISI • FAKTORIAL

Untuk bilangan asli n , **faktorial** n ditulis $n!$ (dibaca " n faktorial") dan berarti

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Disepakati pula $0! = 1$. Maknanya: $n!$ adalah banyak cara menyusun n benda berbeda dalam satu baris.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5.040	40.320	362.880	3.628.800

Faktorial tumbuh gila-gilaan: setiap langkah dikalikan dengan bilangan yang makin besar. Hanya sepuluh langkah sudah menembus tiga juta.



FAKTA UNIK DARI ANCIL

10! detik itu **tepat** 6 minggu! Coba cek: $6 \times 7 \times 24 \times 60 \times 60 = 3.628.800 = 10!$. Jadi kalau lima sahabat tadi ditambah lima teman lagi, lalu mereka mencoba satu urutan antrean setiap detik, semua urutan baru selesai dicoba setelah 42 hari tanpa tidur.

▼ Mengapa $0! = 1$, bukan 0?

Perhatikan pola mundur: $4! = 24$, $3! = 24 : 4 = 6$, $2! = 6 : 3 = 2$, $1! = 2 : 2 = 1$. Langkah berikutnya: $0! = 1! : 1 = 1$. Secara umum $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$, dan untuk $n = 0$ hasilnya 1.

Dari sudut pandang menghitung: ada tepat **satu** cara menyusun nol benda, yaitu tidak melakukan apa-apa. Kesepakatan ini juga membuat rumus permutasi dan kombinasi tetap berlaku untuk $r = 0$ dan $r = n$.



TRIK KAK LINTANG

Jangan menghitung faktorial besar lalu membaginya. **Coret dulu!**

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720.$$

Tanpa trik ini kamu harus membagi 3.628.800 dengan 5.040. Capek, dan rawan salah.



TAMU DARI MASA LALU

Tanda seru untuk faktorial diperkenalkan oleh matematikawan Prancis **Christian Kramp** pada tahun 1808. Sebelumnya orang menuliskan perkalian menurun dengan lambang yang berbeda-beda dan merepotkan. Pilihan tanda seru itu terasa pas, karena hasil faktorial memang sering bikin kaget!



LANJUT · IB & OLIMPIADE

FAKTORIAL RAKSASA DAN RUMUS STIRLING

Untuk n besar, faktorial bisa ditaksir dengan rumus Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Untuk $n = 10$ hasilnya $\pm 3.598.696$, meleset kurang dari 1% dari 3.628.800, dan galat relatifnya makin kecil ketika n membesar. Dengan cara serupa diketahui $52! \approx 8,07 \times 10^{67}$: banyak urutan satu set kartu remi. Angka ini begitu besar sehingga setiap kali kartu dikocok benar-benar acak, urutan yang muncul hampir pasti belum pernah ada sepanjang sejarah.

32.3 Permutasi: ketika urutan itu penting

Rapat OSIS akan memilih **ketua, wakil ketua, dan sekretaris** dari 8 calon. Satu orang hanya boleh memegang satu jabatan. Kursi ketua punya 8 calon, kursi wakil tinggal 7, kursi sekretaris tinggal 6: $8 \times 7 \times 6 = 336$ cara.

Perhatikan: "Dimas ketua, Ayu wakil" **berbeda** dengan "Ayu ketua, Dimas wakil". Ketika urutan atau jabatan membuat susunan berbeda, kita sedang menghitung **permutasi**.



DEFINISI • PERMUTASI

Permutasi r unsur dari n unsur berbeda adalah susunan **berurutan** dari r unsur yang diambil dari n unsur itu ($r \leq n$). Banyaknya ditulis $P(n, r)$, ${}_nP_r$, atau P_r^n :

$$P(n, r) = \underbrace{n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1)}_{r \text{ faktor}} = \frac{n!}{(n - r)!}$$

▼ Mengapa perkalian menurun itu sama dengan $n!$ dibagi $(n - r)!$?

Tulis $n!$ lengkap, lalu kelompokkan: $n! = [n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1)] \times (n - r)!$. Bagi kedua ruas dengan $(n - r)!$; yang tersisa tepat r faktor pertama. Contoh: $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$.



LAB MINI

Penyusun antrean: dari loket sampai meja bundar

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

$P(4, 3) = 24$ susunan

susunan ke-2



Dimas

ke-1



Ayu

ke-2



Ancil

ke-3

pilihan →

4

x

3

x

2

belum kebagian tempat:



Lintang

seret untuk bertukar tempat

Banyak susunan
24

Susunan ini
ke-2 dari 24

Hitungan
 $P(4, 3) = 4 \times 3 \times 2$

Seret seorang teman ke tempat lain untuk bertukar posisi, atau tekan ➡ **Berikutnya** untuk melihat susunan satu per satu (▶ **Jalankan** memutar semuanya). Angka oranye di bawah antrean adalah kotak-kotak aturan perkalian. Lalu tekan ⇐ **Putar**: pada antrean lurus nomor susunannya berubah, tetapi pada **meja bundar** nomornya tetap. Mengapa? Coba juga mode gelang dengan tombol ↔ **Balik**.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Ada n calon dan r kursi berlabel. Kursi pertama punya n pilihan, kursi kedua $n - 1$, dan seterusnya: kalikan r bilangan menurun mulai dari n .

n Banyak calon orang

r Banyak kursi berurutan kursi

$P(n, r)$ Banyak susunan cara

BANYAK SUSUNAN

336

cara

Dari **8** calon untuk **3** kursi berurutan: $8 \times 7 \times 6 = 336$. Tanda '-' berarti r lebih besar daripada n , sehingga tidak semua kursi bisa terisi. Sebagai pembandingan, menyusun semua **8** calon ada $n! = 40.320$ cara.

Cek satuan: Hasilnya berupa banyak susunan (bilangan cacah), jadi selalu bulat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERMUTASI-NPR



KALAU BOLEH BERULANG

Pada permutasi, setiap orang hanya dipakai sekali. Kalau unsur **boleh dipakai berulang** (seperti angka PIN), setiap kotak tetap punya n pilihan, jadi banyaknya n^r . Itu sebabnya PIN 6 angka ada 10^6 , sedangkan PIN tanpa angka kembar hanya $P(10, 6) = 151.200$.

Ada 8 calon pengurus OSIS. Akan dipilih ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara (satu orang satu jabatan). Berapa banyak susunan pengurus yang mungkin? Bagaimana jika Ayu sudah pasti menjadi sekretaris?

- 1 Jabatannya berbeda-beda, jadi urutan penting: permutasi 4 dari 8.
- 2 $P(8, 4) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.680$.
- 3 Jika Ayu pasti menjadi sekretaris, tinggal 3 jabatan untuk 7 calon: $P(7, 3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Ada 1.680 susunan pengurus, dan 210 di antaranya menempatkan Ayu sebagai sekretaris. Cek kewajaran: $1.680 : 8 = 210$. Cocok, karena kedelapan calon sama-sama mungkin duduk di kursi sekretaris.



ADU CEPAT

Permutasi kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan r bilangan menurun mulai dari n . Contoh: $P(7, 3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

32.4 Huruf kembar dan meja bundar

Berapa banyak susunan huruf dari kata **KATA**? Kalau keempat hurufnya berbeda, jawabannya $4! = 24$. Tetapi ada dua huruf A yang kembar. Beri label sementara: A_1 dan A_2 . Susunan KA_1TA_2 dan KA_2TA_1 sama-sama terbaca KATA. Setiap kata terhitung $2! = 2$ kali, sehingga banyak susunan yang benar-benar berbeda adalah $24 : 2 = 12$.



PERMUTASI DENGAN UNSUR YANG SAMA

Banyak susunan n unsur yang terdiri atas k_1 unsur jenis pertama, k_2 unsur jenis kedua, ..., dan k_m unsur jenis ke- m (dengan $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) adalah

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

Pembagi $k_1!$ "menghapus" urutan di antara unsur kembar jenis pertama, dan seterusnya.

Bahasa sederhana • Caranya: hitung dulu seolah-olah semua huruf berbeda. Lalu bagi dengan faktorial banyaknya setiap huruf yang kembar.

RUMUS HIDUP Lampu hias Agustusan

$$S = \frac{(a + b + c)!}{a! b! c!}$$

Susun dulu seolah-olah semua lampu berbeda: $(a + b + c)!$ cara. Lalu bagi dengan $a!$, $b!$, dan $c!$, karena menukar dua lampu yang warnanya sama tidak menghasilkan susunan baru.

a Lampu merah buah

b Lampu kuning buah

c Lampu hijau buah

S Banyak susunan susunan

BANYAK SUSUNAN

210

susunan

Ada **7** lampu (**3** merah, **2** kuning, **2** hijau). Jika semua dianggap berbeda: **7! = 5.040** susunan. Bagi dengan **3! × 2! × 2! = 24**, hasilnya **210** susunan yang benar-benar berbeda.

Cek satuan: Pembilang dan penyebut sama-sama berupa banyak susunan, jadi hasilnya selalu bilangan bulat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERMUTASI-UNSUR-SAMA](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-permutasi-unsur-sama)

Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat dibuat dari semua huruf kata MATEMATIKA?

- 1 Hitung hurufnya: M, A, T, E, M, A, T, I, K, A ada 10 huruf.
- 2 Huruf kembar: A muncul 3 kali, M muncul 2 kali, T muncul 2 kali. E, I, K masing-masing sekali.
- 3 $\frac{10!}{3! 2! 2!} = \frac{3.628.800}{6 \times 2 \times 2} = \frac{3.628.800}{24} = 151.200.$

Ada 151.200 susunan. Lucunya, angka ini sama dengan banyak PIN 6 angka tanpa angka kembar. Kebetulan? Karena $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24 = 4!$, kita dapat $\frac{10!}{4!} = P(10, 6)$. Matematika suka memberi kejutan kecil seperti ini.

Sekarang pindah ke warung bakso. Teman-teman tidak antri lurus, tetapi duduk mengelilingi meja bundar.



Tebak Dulu!

Lima sahabat duduk mengelilingi meja bundar. Dua cara duduk dianggap sama jika yang satu hanya hasil memutar yang lain (setiap orang tetap punya tetangga kiri dan kanan yang sama). Ada berapa cara duduk yang berbeda?

120, sama seperti antrian lurus 5 orang.

60, karena dibagi 2.

24.

5.

Jawabannya: 24. Setiap susunan melingkar bisa dibaca mulai dari 5 kursi yang berbeda, dan kelima cara membaca itu terlihat sebagai 5 antrian lurus yang berbeda. Jadi $120 : 5 = 24 = 4!$. Cara lain: kunci Dimas di satu kursi sebagai patokan, lalu susun 4 orang sisanya: $4! = 24$.



PERMUTASI SIKLIS

Banyak cara menyusun n unsur berbeda secara melingkar (susunan yang hanya berbeda putaran dianggap sama) adalah

$$(n - 1)!$$

Jika susunan yang dicerminkan juga dianggap sama, seperti manik-manik pada gelang yang bisa dibalik, banyaknya $\frac{(n - 1)!}{2}$ untuk $n \geq 3$.

▼ Bukti singkat: mengapa dibagi n ?

Susunan lurus ada $n!$. Setiap susunan melingkar, jika dibaca searah jarum jam mulai dari kursi yang berbeda-beda, menghasilkan tepat n susunan lurus yang berbeda (karena semua unsur berbeda). Jadi setiap susunan melingkar terhitung n kali, dan banyaknya $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$. Pada gelang, setiap susunan dan cerminannya juga terhitung dua kali, sehingga dibagi 2 lagi.



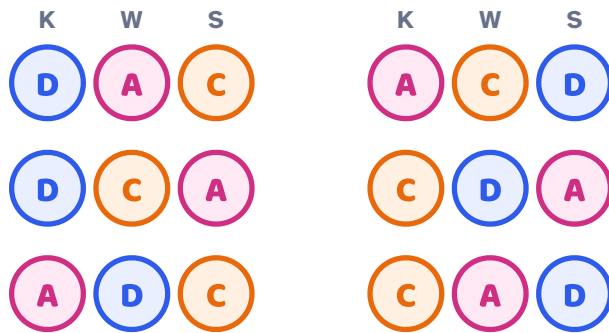
AWAS JEBAKAN

Rumus $(n - 1)!$ hanya berlaku jika kursinya **tidak bernomor** dan yang penting hanyalah posisi relatif (siapa di sebelah siapa). Jika kursi di meja bundar diberi nomor, misalnya kursi 1 yang dekat pintu, memutar susunan menghasilkan susunan baru, sehingga banyaknya kembali $n!$.

32.5 Kombinasi: ketika urutan tidak penting

Kak Lintang perlu mengirim **3 siswa** dari 5 calon (Dimas, Ayu, Ancil, Sari, Budi) ke lomba cerdas cermat. Tidak ada jabatan: tim {Dimas, Ayu, Ancil} sama saja dengan tim {Ancil, Dimas, Ayu}. Kalau kita menghitung dengan permutasi, $P(5, 3) = 60$, setiap tim terhitung berkali-kali. Berapa kali tepatnya?

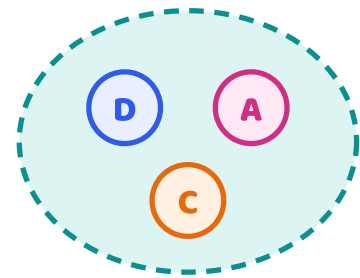
Susunan berjabatan (K - W - S)



6 susunan berbeda

1 tim tanpa jabatan

bagi $3! = 6$



{Dimas, Ayu, Ancil}

Enam susunan berjabatan berisi orang yang sama. Begitu jabatannya dihapus, keenamnya menyatu menjadi satu tim. Jadi banyak tim = banyak susunan dibagi $3! = 6$.

Setiap tim 3 orang muncul sebagai $3! = 6$ susunan berjabatan. Jadi banyak tim adalah $60 : 6 = 10$. Memilih tanpa memperhatikan urutan disebut **kombinasi**.



DEFINISI • KOMBINASI

Kombinasi r unsur dari n unsur berbeda adalah pemilihan r unsur **tanpa memperhatikan urutan**. Banyaknya ditulis $\binom{n}{r}$, $C(n, r)$, ${}_nC_r$, atau C_r^n :

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

▼ Bukti: hitung susunan berjabatan dengan dua cara

Ada dua cara mengisi r jabatan dari n calon. **Cara 1:** langsung, sebanyak $P(n, r)$. **Cara 2:** pilih dulu timnya, $\binom{n}{r}$ cara, lalu bagikan r jabatan kepada anggota tim, $r!$ cara. Kedua cara menghitung hal yang sama, jadi $P(n, r) = \binom{n}{r} \cdot r!$. Bagi dengan $r!$, selesai. Teknik "hitung dua kali" ini adalah senjata favorit di olimpiade.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$

Hitung dulu susunan berurutan $P(n, r)$, lalu bagi dengan $r!$ karena urutan di dalam tim tidak penting.

n Banyak calon orang

r Ukuran tim orang

$\binom{n}{r}$ Banyak tim cara

BANYAK TIM

120

cara

Pilih **3** dari **10**: ada $P(10, 3) = 720$ susunan berurutan, dan setiap tim terhitung $3! = 6$ kali. Jadi banyak tim = $720 : 6 = 120$. Memilih **7** orang yang tidak ikut juga menghasilkan **120** cara: sama persis! Tanda '-' berarti r lebih besar daripada n , jadi tim tidak bisa dibentuk.

Cek satuan: Hasilnya selalu bilangan bulat: $P(n, r)$ pasti habis dibagi $r!$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOMBINASI-NCR



Tebak Dulu!

Di kelas ada 10 siswa. Mana yang lebih banyak: cara memilih tim 3 orang, atau cara memilih tim 7 orang?

Tim 3 orang, karena timnya lebih kecil dan lebih mudah dibentuk.

Tim 7 orang, karena lebih banyak orang yang dipilih.

Sama banyak.

Tidak bisa dibandingkan tanpa daftar nama.

Jawabannya: sama banyak, yaitu 120. Setiap kali kamu memilih 3 orang yang ikut, kamu sekaligus memilih 7 orang yang **tidak** ikut. Pasangannya satu-satu, jadi $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$.



SIFAT SIMETRI

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Memilih r orang yang **ikut** sama dengan memilih $n - r$ orang yang **tidak ikut**.

Contoh: $\binom{30}{28} = \binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$.



TRIK KAK LINTANG: UJI TUKAR

Bingung memilih permutasi atau kombinasi? Ambil satu hasil, lalu **tukar posisi dua orang** di dalamnya. Kalau hasilnya menjadi sesuatu yang berbeda (ketua dan wakil bertukar jabatan), urutan penting: **permutasi**. Kalau hasilnya tetap sama (tim yang sama), urutan tidak penting: **kombinasi**.

	Permutasi	Kombinasi
Apakah urutan atau jabatan penting?	Ya	Tidak
Kata pemicu	menyusun, mengurutkan, jabatan berbeda, antrean, kata sandi	memilih, tim, panitia, kelompok, jabat tangan
Rumus	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
Contoh 3 dari 5 orang	60 susunan ketua-wakil-sekretaris	10 tim lomba

CONTOH Jabat tangan selesai rapat

Selesai rapat, 6 pengurus OSIS saling berjabat tangan. Setiap dua orang berjabat tangan tepat sekali. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi?

- 1 Satu jabat tangan = memilih 2 orang. "Dimas-Ayu" sama dengan "Ayu-Dimas", jadi urutan tidak penting: kombinasi.
- 2 $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2!} = 15$.
- 3 Cek dengan cara lain: setiap orang menjabat 5 tangan, $6 \times 5 = 30$, tetapi setiap jabat tangan terhitung dua kali (sekali oleh setiap orang). $30 : 2 = 15$. ✓

Terjadi 15 jabat tangan.

KERJAKAN BERSAMA Tim cerdas cermat dengan syarat

Dari 7 calon (termasuk Ayu dan Dimas) akan dipilih tim cerdas cermat beranggotakan 3 orang. (a) Berapa banyak tim jika Ayu wajib ikut? (b) Berapa banyak tim jika Ayu wajib ikut, tetapi Dimas berhalangan?

- 1 (a) Ayu sudah pasti masuk, jadi tinggal memilih 2 orang dari 6 calon lainnya: $\binom{6}{2} = 15$.
- 2 (b) Ayu pasti masuk dan Dimas pasti tidak, jadi pilih 2 orang dari 5 calon sisanya: $\binom{5}{2} = 10$.

(a) 15 tim, (b) 10 tim. Syarat "wajib ikut" mengurangi ukuran tim yang dipilih, sedangkan syarat "tidak boleh ikut" mengurangi banyak calon.

MITOS

"Gembok koper 'kombinasi' memakai rumus kombinasi."

MITOS

"Kalau urutan tidak penting, bagi saja hasil permutasinya dengan 2."

FAKTA

Pada gembok, urutan angka penting (1-2-3 berbeda dengan 3-2-1) dan angka boleh berulang. Jadi banyak kodenya
 $10 \times 10 \times 10 = 1.000$
. Secara matematika itu permutasi berulang, bukan kombinasi!

FAKTA

Yang benar dibagi $r!$, yaitu banyak cara mengurutkan r orang terpilih. Tim 3 orang dibagi 6, tim 4 orang dibagi 24. Membagi dengan 2 hanya benar untuk $r = 2$.

MITOS

" $0! = 0$, karena tidak ada yang dikalikan."

FAKTA

$0! = 1$
. Ada tepat satu cara menyusun nol benda: tidak melakukan apa-apa. Pola
 $n! = (n+1)! : (n+1)$
juga memaksa
 $0! = 1! : 1 = 1$.



ADU CEPAT

Kombinasi kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Untuk r yang besar, pakai simetri: $C(12, 10) = C(12, 2) = 12 \times 11 : 2 = 66$.

32.6 Segitiga Pascal dan binomial Newton

Tuliskan $\binom{n}{r}$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ dan susun berjenjang. Muncullah segitiga yang terkenal: **segitiga Pascal**. Setiap baris diawali dan diakhiri angka 1, dan setiap bilangan di dalamnya adalah **jumlah dua bilangan tepat di atasnya**.

baris								jumlah
$n = 0$				1				1
$n = 1$			1		1			2
$n = 2$			1		2		1	4
$n = 3$			1		3		3	8
$n = 4$			1		4		6	16
$n = 5$		1		5		10		32
$n = 6$	1		6		15		20	64

Baris ke- n berisi $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. Contoh aturan jumlah: $4 + 6 = 10$. Kolom kanan menunjukkan jumlah setiap baris, yang selalu 2^n .



ATURAN PASCAL

Untuk $1 \leq r \leq n - 1$,

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

▼ Bukti tanpa rumus: Ancil ikut atau tidak?

Kita memilih tim r orang dari n calon, dan Ancil adalah salah satu calonnya. Setiap tim pasti termasuk salah satu dari dua jenis berikut.

- **Ancil ikut.** Sisa $r - 1$ kursi diisi dari $n - 1$ calon lain: $\binom{n-1}{r-1}$ tim.
- **Ancil tidak ikut.** Semua r kursi diisi dari $n - 1$ calon lain: $\binom{n-1}{r}$ tim.

Kedua jenis tidak tumpang tindih dan bersama-sama mencakup semua tim. Dengan aturan penjumlahan, $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$. ■



**Aturan Pascal**

👉 *ketuk sebuah sel*
untuk melihat asal-usulnya

Arti warna

🟡 habis dibagi 2

🟢 sisa 1

Coba 8, 16, 32, atau 64 baris
(pangkat dari 2)

Sel berwarna

11

Semua sel

15

Persentase berwarna

73,3 %

Ketuk sebuah sel untuk melihat dari mana bilangannya berasal (jumlah dua sel di atasnya). Lalu naikkan banyak baris menjadi 32 atau 64 dan tekan ► **Jalankan**: sel ganjil yang diwarnai membentuk **segitiga Sierpiński**, segitiga berlubang yang berulang di dalam dirinya sendiri. Ganti pilihan warna ke sisa bagi 3 atau 5. Pola apa yang muncul?

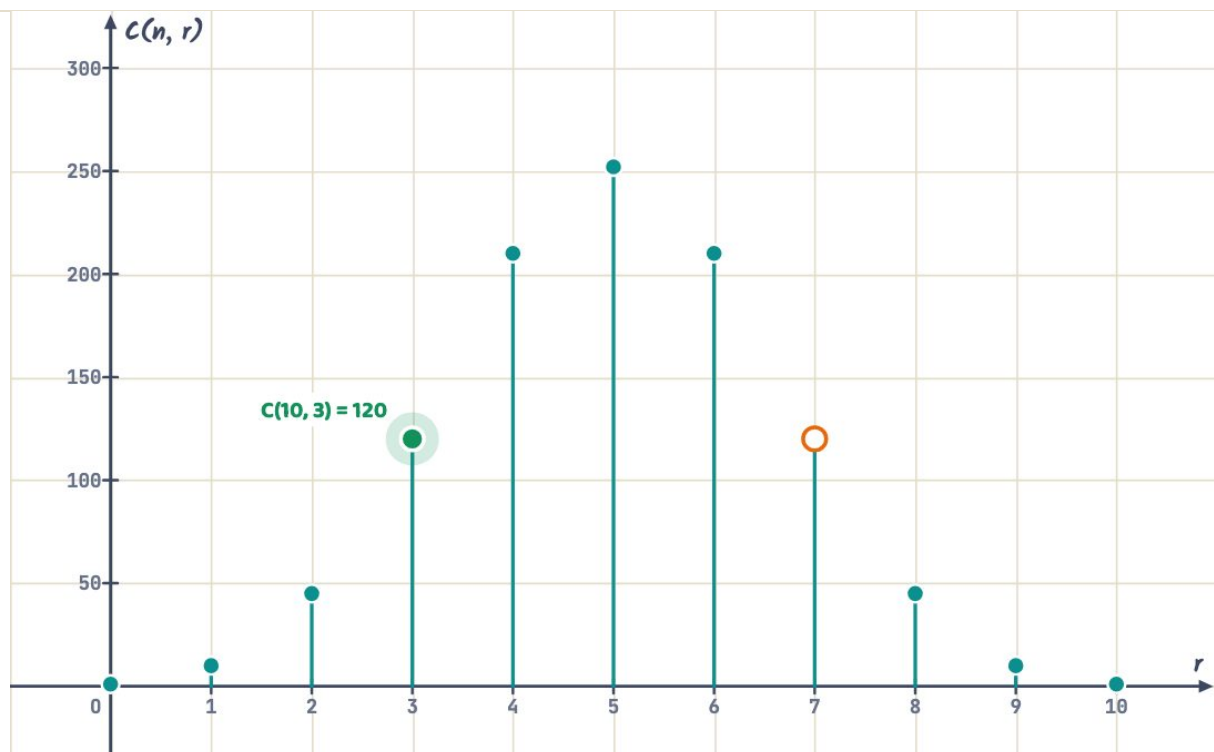
**MENGAPA MUNCUL SEGITIGA SIERPIŃSKI?**

Warna sel hanya bergantung pada **ganjil atau genap**, dan aturan Pascal versi ganjil-genap sangat sederhana: ganjil + ganjil = genap, ganjil + genap = ganjil. Karena itu blok 2 baris, 4 baris, 8 baris, dan seterusnya selalu berulang sebagai tiga salinan dengan lubang di tengah. Pada 64 baris pertama ada $3^6 = 729$ sel ganjil dari 2.080 sel, kira-kira 35%. Semakin banyak baris, persentase sel ganjil makin kecil menuju 0%! Pola ini dinamai dari matematikawan Polandia Wacław Sierpiński, yang membahasnya pada tahun 1915.

$$y = \binom{n}{x}$$

$$\binom{10}{3} = 120 = \binom{10}{7}$$

Setiap batang adalah satu bilangan pada baris ke- n . Bentuknya simetris dan memuncak di tengah.



titik oranye = pasangan simetrinya $C(n, n - r)$

$C(n, r)$
120

$C(n, n - r)$
120

Jumlah satu baris = 2^n
1.024

Seret titik hijau di sepanjang baris. Titik oranye selalu setinggi titik hijau: itulah sifat simetri. Naikkan n : gunungnya makin tinggi dan makin mirip lonceng. Bentuk lonceng ini akan muncul lagi di Bab 34!

Sekarang kejutan berikutnya. Mengapa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ memakai koefisien 1, 2, 1, dan $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ memakai 1, 3, 3, 1? Itu baris ke-2 dan ke-3 segitiga Pascal!

Bayangkan $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$. Setiap suku hasil kali didapat dengan memilih a **atau** b dari **setiap** kurung. Suku a^2b muncul setiap kali kita memilih b dari tepat 1 kurung (dan a dari dua kurung lainnya). Banyak caranya $\binom{3}{1} = 3$. Itulah koefisien 3!



TEOREMA BINOMIAL NEWTON

Untuk setiap bilangan asli n ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

Suku ke- $(k + 1)$ adalah $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$: pilih b dari k kurung di antara n kurung.

COBA SENDIRI

Koefisien yang tersembunyi

Tentukan koefisien x^3 pada penjabaran $(2x + 1)^5$ tanpa menjabarkan seluruhnya.

- 1 Suku umum: $\binom{5}{k} (2x)^{5-k} \cdot 1^k$.
- 2 Agar pangkat x sama dengan 3, perlu $5 - k = 3$, jadi $k = 2$.
- 3 Sukunya: $\binom{5}{2} (2x)^3 = 10 \times 8x^3 = 80x^3$.

Koefisien x^3 adalah 80. Jebakan umum: lupa mengangkat angka 2 di dalam $(2x)^3$, sehingga menjawab 10.



TAMU DARI MASA LALU

Segitiga ini memakai nama **Blaise Pascal** (1623–1662) dari Prancis, yang menulis risalah tentangnya sekitar tahun 1654. Namun ia bukan yang pertama. Di India, pola serupa muncul dalam kajian irama puisi sejak karya Pingala ($\pm$ abad ke-2 SM) dan dijelaskan lebih rinci oleh Halayudha ($\pm$ abad ke-10). Al-Karaji di Persia ($\pm$ 1000 M) juga mengenalnya. Di Tiongkok segitiga ini disebut *segitiga Yang Hui*, dari buku Yang Hui tahun 1261 yang mengutip Jia Xian ($\pm$ abad ke-11). Di Italia ia dikenal sebagai segitiga Tartaglia. Nama "binomial Newton" dipakai karena Isaac Newton ($\pm$ 1665) memperluas rumus ini untuk pangkat pecahan dan negatif.

32.7 Jurus olimpiade: bintang & sekat, inklusi-eksklusi

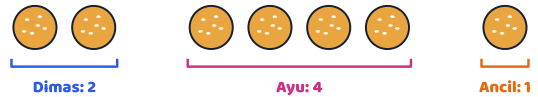
Ibu membeli 7 onde-onde yang sama persis untuk dibagikan kepada Dimas, Ayu, dan Ancil. Boleh saja ada yang tidak kebagian (mungkin Ancil sedang berpuasa). Ada berapa cara membagi? Mendaftar satu per satu sangat melelahkan. Ada trik yang sangat elegan: ubah onde-onde menjadi **bintang** dan batas jatah menjadi **sekat**.

7 onde-onde yang sama persis untuk Dimas, Ayu, dan Ancil



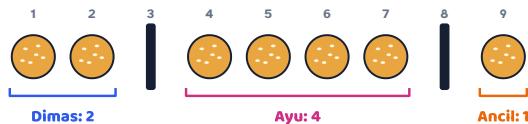
Langkah 1. Ada 7 onde-onde identik dan 3 anak. Yang dihitung hanyalah **berapa banyak** onde-onde yang diterima setiap anak.

Satu cara membagi: Dimas 2, Ayu 4, Ancil 1



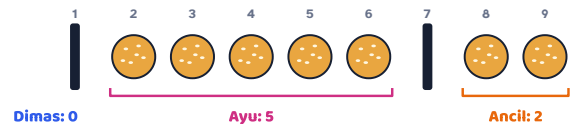
Langkah 2. Satu cara membagi: Dimas 2, Ayu 4, Ancil 1. Jajarkan jatah mereka dari kiri ke kanan.

Ganti batas jatah dengan 2 sekat: 9 simbol berjajar



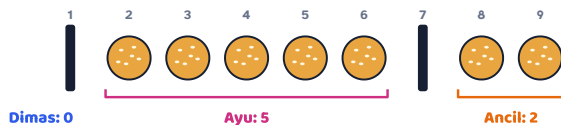
Langkah 3. Batas antarjatah diganti dengan **sekat**. Untuk 3 anak cukup 2 sekat, jadi ada $7 + 2 = 9$ simbol berjajar: ●●●●●●●|●●

Cara lain: Dimas 0, Ayu 5, Ancil 2 (sekat boleh di ujung)



Langkah 4. Cara lain: sekat paling kiri, artinya Dimas tidak kebagian (0), Ayu 5, Ancil 2: |●●●●●●●|●●. Setiap cara membagi berpadanan dengan tepat satu deretan simbol.

Setiap cara membagi = satu pilihan posisi 2 sekat



pilih 2 dari 9 posisi: $C(9, 2) = 36$

Langkah 5. Jadi banyak cara membagi = banyak cara memilih posisi 2 sekat di antara 9 posisi: $\binom{9}{2} = 36$. Tidak perlu mendaftar satu per satu!



TEOREMA BINTANG DAN SEKAT

Banyak cara membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak mendapat bagian) sama dengan banyak penyelesaian bilangan cacah dari $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, yaitu

$$\binom{n + k - 1}{k - 1}.$$

Jika setiap orang wajib mendapat minimal satu, banyaknya $\binom{n-1}{k-1}$.

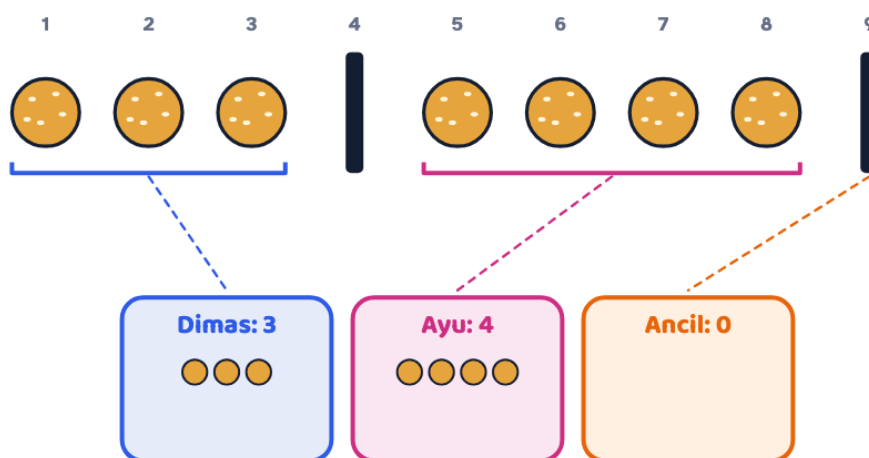
Bahasa sederhana • Intinya: jajarkan semua benda, lalu sisipkan sekat untuk memisahkan jatah setiap orang. Menghitung cara membagi sama dengan menghitung cara menaruh sekat.

LAB MINI Bagi-bagi onde-onde dengan sekat

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-32

$$C(7 + 3 - 1, 3 - 1) = C(9, 2) = 36$$

7 bintang + 2 sekat = 9 simbol



👉 seret sekat hitam ke kiri atau ke kanan

Banyak cara

36

Cara ini

ke-26 dari 36

Pembagian

Dimas 3 • Ayu 4 • Ancil 0

Seret **sekat hitam** ke kiri atau ke kanan dan lihat jatah setiap anak berubah. Tekan ➡ **Berikutnya** untuk menelusuri semua cara secara berurutan, atau ▶ **Jalankan** untuk menghitungnya sampai habis. Nyalakan "setiap anak minimal 1": berapa simbol yang tersisa untuk diatur?

$$\binom{n + k - 1}{k - 1}$$

Membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak kebagian) sama dengan memilih posisi $k - 1$ sekat di antara $n + k - 1$ tempat.

 n

Onde-onde identik buah

 k

Banyak anak orang

 W

Banyak cara membagi cara

BANYAK CARA MEMBAGI

36

cara

7 onde-onde untuk 3 anak: deretan 9 simbol berisi 7 bintang dan 2 sekat. Banyak cara = $C(9, 2) = 36$. Jika setiap anak wajib mendapat minimal satu, banyaknya $C(6, 2) = 15$ cara.

Cek satuan: Benda harus identik. Jika bendanya berbeda-beda, setiap benda punya k pilihan penerima, sehingga banyaknya k^n .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINTANG-SEKAT

Ada 10 onde-onde identik untuk Dimas, Ayu, dan Ancil. Setiap anak wajib mendapat minimal satu. Ada berapa cara membagi?

- 1 Berikan dulu masing-masing 1 onde-onde. Tersisa $10 - 3 = 7$ onde-onde yang boleh dibagi bebas.
- 2 Bintang dan sekat untuk 7 onde-onde dan 3 anak: $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$.
- 3 Cocok dengan rumus "minimal satu": $\binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$.

Ada 36 cara. Trik "bagikan jatah wajib dulu" mengubah soal bersyarat menjadi soal bintang dan sekat biasa.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Berapa bilangan dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2 **atau** 3? Aturan penjumlahan tidak bisa langsung dipakai, karena kedua kelompok tumpang tindih. Kalau dijumlahkan begitu saja, $50 + 33 = 83$, kelipatan 6 terhitung dua kali. Kurangi sekali: $83 - 16 = 67$. Secara umum,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Polanya: tambahkan semua, kurangi irisan dua, tambahkan irisan tiga, dan seterusnya berselang-seling. Prinsip ini menjawab soal olimpiade klasik seperti "tukar kado tanpa ada yang mendapat kadonya sendiri". Coba tantangannya di Tangga Latihan Lv 6!



Plat nomor kendaraan

Kode wilayah, 1–4 angka, dan hingga 3 huruf seri. Aturan perkalian menunjukkan satu kode wilayah bisa menampung ratusan juta nomor.



PIN ATM

Ada 10^6 PIN 6 angka. Kartu diblokir setelah 3 kali salah, sehingga menebak secara acak hampir mustahil berhasil.



Menu warteg

Paket lauk $\times$ sayur $\times$ minuman. Menambah satu pilihan lauk menambah banyak paket sebanyak (sayur $\times$ minuman).



Pengurus OSIS

Ketua, wakil, sekretaris punya jabatan berbeda: permutasi. Panitia tanpa jabatan: kombinasi.



Jadwal liga sepak bola

Liga 18 klub dengan laga kandang dan tandang butuh $2 \times \binom{18}{2} = 306$ pertandingan dalam semusim.



Kode genetik

DNA memakai 4 basa yang dibaca berkelompok tiga. Aturan perkalian: $4^3 = 64$ kodon, cukup untuk 20 jenis asam amino.



Cek Cepat

Dari 6 calon akan dipilih ketua kelas dan wakil ketua kelas. Banyak cara memilihnya adalah...

12

15

30

36

Ayu memilih 2 dari 5 menu warteg untuk dibungkus. Urutan memilih tidak penting. Banyak pilihannya adalah...

10

20

25

7

Banyak susunan huruf berbeda dari kata KAKAK adalah...

120

60

20

10

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. A • 3. D

Tantangan Rumah: detektif kartu huruf

Bahan: 4 potong kertas kecil, pensil, buku catatan, dan 3 anggota keluarga.

1. Tulis huruf S, A, T, U pada empat kertas. Daftarkan semua susunannya secara teratur: mulai dari yang berawalan S, lalu A, lalu T, lalu U. Apakah hasilnya 24?
2. Ganti kertas S dengan huruf A sehingga hurufnya A, A, T, U. Daftar lagi semua susunan yang **terbaca** berbeda.
3. Ulangi untuk huruf K, A, K, A.
4. Ajak 3 anggota keluarga duduk mengelilingi meja makan bersamamu. Catat berapa susunan duduk yang berbeda jika yang penting hanya siapa duduk di sebelah siapa.

Pertanyaan: Berapa susunan pada langkah 2 dan 3? Jelaskan mengapa hasilnya $24 : 2$ dan $24 : (2 \times 2)$. Mengapa susunan duduk melingkar 4 orang hanya $3! = 6$, padahal antrean lurus 4 orang ada 24?

RINGKASAN KILAT **Bab 32 dalam 3 menit**

Kamu sekarang bisa...

- memakai **aturan perkalian** dan **aturan penjumlahan** lewat diagram pohon dan kotak pengisian tempat
- menghitung **faktorial** dan **permutasi**, termasuk permutasi dengan unsur yang sama dan permutasi siklis
- membedakan **permutasi** (urutan penting) dan **kombinasi** (urutan tidak penting)
- membaca **segitiga Pascal** dan memakainya untuk menjabarkan $(a + b)^n$ dengan **binomial Newton**
- memakai jurus olimpiade **bintang dan sekat** serta **inklusi-eksklusi**

Istilah kunci

kaidah pencacahan

diagram pohon

aturan pengisian tempat

faktorial

permutasi

kombinasi

segitiga Pascal

Rumus penting

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Permutasi: menyusun r dari n . Ada n calon dan r kursi berlabel. Kursi pertama punya n pilihan, kursi kedua $n - 1$, dan seterusnya: kalikan r bilangan menurun mulai dari n .

$$S = \frac{(a + b + c)!}{a! b! c!}$$

Lampu hias Agustusan. Susun dulu seolah-olah semua lampu berbeda: $(a + b + c)!$ cara. Lalu bagi dengan $a!$, $b!$, dan $c!$, karena menukar dua lampu yang warnanya sama tidak menghasilkan susunan baru.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Kombinasi: memilih r dari n . Hitung dulu susunan berurutan $P(n, r)$, lalu bagi dengan $r!$ karena urutan di dalam tim tidak penting.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Bintang dan sekat. Membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak kebagian) sama dengan memilih posisi $k-1$ sekat di antara $n + k - 1$ tempat.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Kalikan jika kegiatannya terdiri atas beberapa langkah yang semuanya dilakukan ("kemeja dan celana").
- Rumus $(n-1)!$ hanya berlaku jika kursinya tidak bernomor dan yang penting hanyalah posisi relatif (siapa di sebelah siapa).

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=32

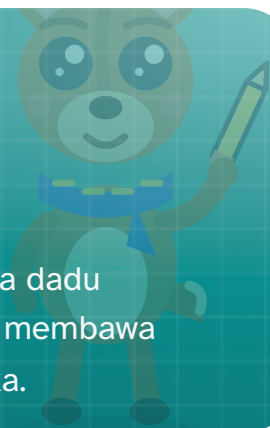
Teka-teki untuk Bab 33

Dimas melempar dua dadu sekaligus, lalu menjumlahkan mata dadunya. "Jumlahnya bisa 2, 3, 4, sampai 12. Ada 11 kemungkinan, jadi peluang mendapat jumlah 7 pasti 1 dari 11!" katanya yakin. Ayu menggeleng. Siapa yang benar?

▼ Intip petunjuk

Pakai aturan perkalian: dua dadu menghasilkan $6 \times 6 = 36$ pasangan hasil yang sama-sama mungkin. Hitung pasangan yang jumlahnya 7: $(1, 6), (2, 5), \dots$ Ada berapa? Lalu bandingkan dengan jumlah 2, yang hanya bisa didapat dari $(1, 1)$. Apakah semua jumlah sama mudahnya muncul? Bab 33 membahasnya dengan **peluang**.

33 Peluang: Menjinakkan Ketidakpastian



Mengapa jumlah 7 jauh lebih sering muncul daripada jumlah 12 saat dua dadu dilempar? Mengapa berpindah pintu bisa melipatgandakan peluangmu membawa pulang sepeda? Hal yang belum pasti ternyata bisa diukur dengan angka.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menyusun **ruang sampel** dan menghitung **peluang klasik** suatu kejadian;
- menaksir peluang dari **percobaan** dan menjelaskan mengapa frekuensi relatif makin dekat ke peluang teoretis;
- memakai **diagram pohon**, **diagram Venn**, aturan penjumlahan, dan aturan perkalian;
- membedakan kejadian **saling lepas** dan **saling bebas**, serta menghitung **peluang bersyarat**;
- menghitung **nilai harapan** dan menilai apakah sebuah permainan adil.

TEBAK DADU MALAM TUJUH BELASAN

KOMIK • 4 PANEL

Malam tirakatan 17 Agustus di pos ronda

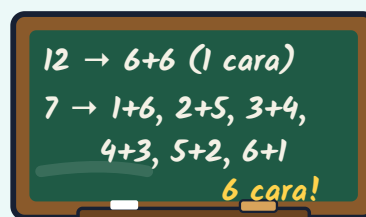
DIMAS

Ayo main tebak jumlah dua dadu! Aku pilih 12. Angka paling besar pasti paling hoki!



AYU

Tunggu. Jumlah 12 cuma bisa dari 6 + 6. Jumlah 7 bisa dari enam pasangan. Coba lihat papan!



KAK LINTANG

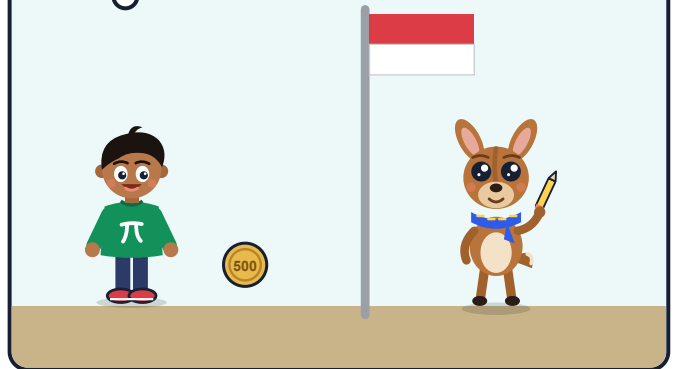
Ada $6 \times 6 = 36$ pasangan yang sama mungkin. Peluang jumlah 7 = $6/36 = 1/6$, jumlah 12 cuma $1/36$.

KLOTAK!**Tiba-tiba, dari balik tiang bendera...****ANCIL**

Tidak percaya? Lempar saja ribuan kali. Makin banyak lemparan, frekuensinya makin dekat ke $1/6$!

DIMAS

Ribuan kali?! Tanganku bisa pegal...

**Tebak Dulu!**

Dua dadu dilempar bersamaan, lalu kedua mata dadunya dijumlahkan. Jumlah berapa yang paling mungkin muncul?

12, karena angkanya paling besar.

Semua jumlah dari 2 sampai 12 sama mungkin.

7.

2, karena dadu sering menunjukkan mata 1.

Jawabannya: 7. Ada 36 pasangan mata dadu yang sama mungkin. Jumlah 7 dapat dibentuk oleh enam pasangan, lebih banyak daripada jumlah lain, sedangkan jumlah 2 dan 12 masing-masing hanya oleh satu pasangan. Inilah jawaban teka-teki di akhir Bab 32: peluang jumlah 7 adalah $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

33.1 Ruang sampel dan peluang klasik

Melempar dadu, mengocok kupon undian, atau menebak cuaca besok adalah contoh **percobaan** acak: kita tahu apa saja hasil yang mungkin, tetapi tidak tahu hasil mana yang akan muncul. Himpunan semua hasil yang mungkin disebut **ruang sampel** S , dan setiap anggotanya disebut **titik sampel**. Sekumpulan hasil yang kita minati, misalnya "muncul mata genap", disebut **kejadian**.

Contoh: pada pelemparan satu dadu, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jadi $n(S) = 6$. Kejadian $A = \text{"muncul mata genap"} = \{2, 4, 6\}$, jadi $n(A) = 3$.



DEFINISI: PELUANG KLASIK

Jika semua titik sampel dalam ruang sampel S **sama mungkin** terjadi, maka **peluang** kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{banyak hasil yang dimina}}{\text{banyak semua hasil yang mu}}$$

Untuk dadu tadi, $P(\text{genap}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Bahasa sederhana • Gampangnya: peluang = **banyak cara yang kita harapkan** dibagi **banyak semua cara yang mungkin**. Di kantong ada 3 permen jeruk dan 1 permen stroberi. Peluang mengambil permen jeruk tanpa melihat adalah 3 dari 4, yaitu $\frac{3}{4}$.



SIFAT-SIFAT PELUANG

- $0 \leq P(A) \leq 1$. Peluang 0 berarti **mustahil**, peluang 1 berarti **pasti**.
- $P(S) = 1$: pasti ada salah satu hasil yang muncul.
- **Komplemen**: peluang A tidak terjadi adalah $P(A') = 1 - P(A)$.

Kembali ke dua dadu Dimas. Ruang sampelnya berisi $6 \times 6 = 36$ pasangan (dadu pertama, dadu kedua). Tabel di bawah memuat jumlah setiap pasangan. Perhatikan enam sel bertanda: semuanya berjumlah 7 dan berjajar pada satu diagonal.

dadu 1 \ dadu 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Jadi $P(\text{jumlah } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, sedangkan $P(\text{jumlah } 12) = \frac{1}{36}$. Pilihan Dimas enam kali lebih kecil peluangnya!



AWAS JEBAKAN

Hasil yang mungkin belum tentu sama mungkin. Jumlah dua dadu punya 11 nilai (2 sampai 12), tetapi $P(\text{jumlah } 7) \neq \frac{1}{11}$. Rumus $n(A)/n(S)$ hanya boleh dipakai pada ruang sampel yang titik-titiknya **sama mungkin**, yaitu 36 pasangan, bukan 11 jumlah.



TRIK KAK LINTANG

Untuk dua dadu, jumlah s muncul sebanyak $6 - |s - 7|$ kali dari 36. Cek: jumlah 7 muncul $6 - 0 = 6$ kali, jumlah 10 muncul $6 - 3 = 3$ kali, jumlah 2 muncul $6 - 5 = 1$ kali. Bentuk tabelnya seperti atap rumah dengan puncak di 7!

CONTOH Kartu bernomor 1 sampai 20

Dua puluh kartu diberi nomor 1 sampai 20, lalu dikocok. Ayu mengambil satu kartu. Berapa peluang nomornya kelipatan 3? Berapa peluang nomornya bukan kelipatan 3?

1 Ruang sampel: $n(S) = 20$, dan setiap kartu sama mungkin terambil.

2 Kelipatan 3: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, jadi $n(A) = 6$.

3 $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Dengan komplemen, $P(A') = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Peluang kelipatan 3 adalah $\frac{3}{10}$, dan peluang bukan kelipatan 3 adalah $\frac{7}{10}$. Jumlah keduanya pasti 1.



ADU CEPAT

Jumlah dua dadu kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Jumlah s muncul $6 - |s - 7|$ kali dari 36. Tulis jawabanmu sebagai pecahan, misalnya $5/36$.

33.2 Frekuensi relatif: peluang dari percobaan

Tidak semua peluang bisa dihitung dengan membilang. Lemparkan sebuah tutup botol plastik: apakah ia lebih sering mendarat telentang atau telungkup? Bentuknya tidak simetris, jadi kedua hasil itu belum tentu sama mungkin. Satu-satunya cara untuk mengetahuinya: **coba berkali-kali dan catat**.



DEFINISI: FREKUENSI RELATIF DAN FREKUENSI HARAPAN

Jika sebuah percobaan diulang n kali dan kejadian A muncul k kali, maka **frekuensi relatif** A adalah $\frac{k}{n}$. Sebaliknya, jika peluang A diketahui, banyak kemunculan yang kita harapkan dalam n percobaan adalah **frekuensi harapan** $F_h(A) = n \cdot P(A)$.

Ketika n kecil, frekuensi relatif bisa melenceng jauh: lempar koin 4 kali dan bisa saja keluar Angka semua. Namun, ketika n makin besar, frekuensi relatif makin mantap mendekati peluang teoretis. Sifat ini disebut **hukum bilangan besar**. Buktikan sendiri di lab berikut.

LAB MINI

Pelempar ribuan kali: tunggu frekuensinya jinak

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33

Lempar 1 dadu

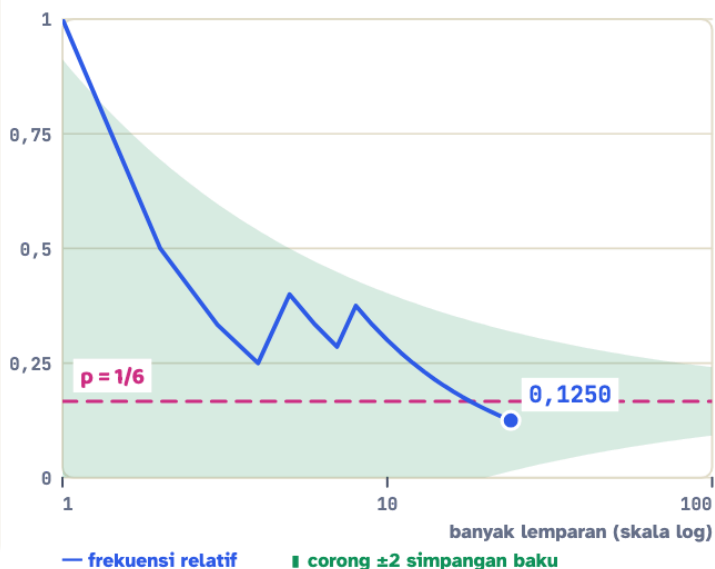


mata 4

frekuensi relatif tiap hasil



Frekuensi relatif "mata 6"



Banyak lemparan
24

Kejadian muncul
3

Frekuensi relatif
0,1250

Peluang teoretis
 $1/6 \approx 0,1667$

Selisih
0,0417

Pilih percobaan, lalu tekan ► **Jalankan** atau ⚡ **+10.000**. Garis biru adalah frekuensi relatif, garis putus-putus adalah peluang teoretis, dan corong hijau menunjukkan seberapa jauh frekuensi biasanya masih boleh melenceng. Perhatikan sumbu mendatarnya: 1, 10, 100, 1.000, ... Untuk **tutup botol**, peluangnya dirahasiakan. Bisakah kamu menaksirnya sebelum menyalakan sakelar "Tampilkan peluang teoretis"?



TAMU DARI MASA LALU

Beberapa ilmuwan pernah benar-benar melempar koin ribuan kali. Naturalis Prancis Comte de Buffon (abad ke-18) mencatat sisi kepala muncul 2.048 kali dari 4.040 lemparan ($\pm 0,507$). Ahli statistik Inggris Karl Pearson (sekitar tahun 1900) melempar 24.000 kali dan memperoleh 12.012 kepala ($\pm 0,5005$). Matematikawan John Kerrich, saat ditawan pada Perang Dunia II, melempar 10.000 kali dan mendapat 5.067 kepala. Semuanya mendekati $\frac{1}{2}$, persis seperti ramalan hukum bilangan besar.

Dimas melempar tutup botol 80 kali; 28 kali tutup itu mendarat telentang. (a) Taksirlah peluang tutup botol mendarat telentang. (b) Jika tutup itu dilempar 500 kali, kira-kira berapa kali ia mendarat telentang?

- 1 (a) Frekuensi relatif telentang = $\frac{28}{80} = \frac{7}{20} = 0,35$. Inilah taksiran peluangnya.
- 2 (b) Frekuensi harapan = $500 \times 0,35 = 175$.
- 3 Ingat: 80 lemparan masih sedikit. Taksiran makin bisa dipercaya jika datanya ditambah, misalnya dengan menggabungkan hasil lemparan teman-teman sekelas.

Taksiran peluang telentang 0,35, dan dari 500 lemparan kita mengharapkan sekitar 175 kali telentang. "Sekitar", bukan "tepat"!



AWAS JEBAKAN

Koin tidak punya ingatan. Setelah Angka muncul lima kali berturut-turut, peluang lemparan berikutnya menghasilkan Angka tetap $\frac{1}{2}$. Hukum bilangan besar tidak bekerja dengan cara "membalas" hasil sebelumnya. Keanehan di awal hanya makin tidak berarti karena tertimbun ribuan lemparan baru.

33.3

Kejadian majemuk: diagram pohon dan diagram Venn

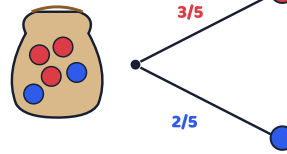
Banyak pertanyaan peluang melibatkan dua kejadian atau lebih: "ambil dua kelereng", "suka bakso **atau** mie ayam", "hujan pada hari Sabtu **dan** Minggu". Dua alat gambar membuat soal seperti ini jauh lebih mudah: **diagram pohon** untuk percobaan bertahap, dan **diagram Venn** untuk kejadian yang saling tumpang tindih.

3 merah, 2 biru



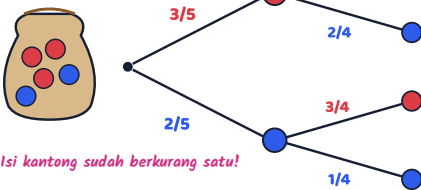
Langkah 1. Kantong berisi 3 kelereng merah (M) dan 2 biru (B). Ayu mengambil satu kelereng, **tidak dikembalikan**, lalu mengambil satu lagi. Berapa peluang kedua kelereng berwarna sama?

3 merah, 2 biru



Langkah 2. Cabang pertama: $P(M) = \frac{3}{5}$ dan $P(B) = \frac{2}{5}$. Peluang pada cabang yang keluar dari satu titik selalu berjumlah 1.

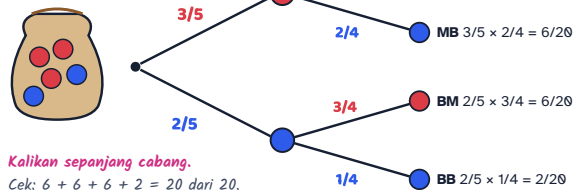
3 merah, 2 biru



Isi kantong sudah berkurang satu!

Langkah 3. Cabang kedua bergantung pada hasil pertama. Jika yang pertama merah, sisa 2 merah dan 2 biru, jadi $\frac{2}{4}$ dan $\frac{2}{4}$. Jika yang pertama biru, sisa 3 merah dan 1 biru, jadi $\frac{3}{4}$ dan $\frac{1}{4}$.

3 merah, 2 biru



Kalikan sepanjang cabang.

Cek: $6 + 6 + 6 + 2 = 20$ dari 20.

Langkah 4. Peluang satu jalur = hasil kali peluang di sepanjang cabangnya. Keempat jalur: $\frac{6}{20}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{2}{20}$, dan totalnya tepat 1.

3 merah, 2 biru



$$P(\text{warna sama}) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

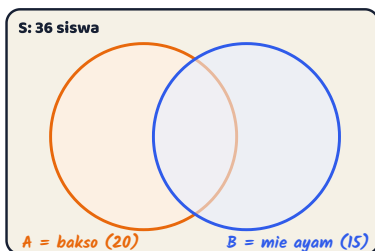
Langkah 5. "Warna sama" terdiri atas jalur MM dan BB, jadi jumlahkan: $\frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.



TRIK KAK LINTANG

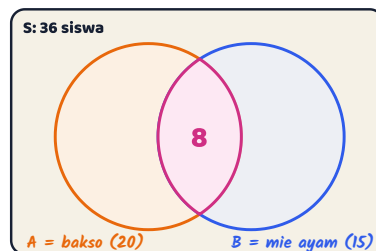
Mantra diagram pohon: **kalikan** sepanjang cabang (kata "dan"), lalu **jumlahkan** antarjalur (kata "atau"). Kalau semua jalur dijumlahkan hasilnya bukan 1, pasti ada cabang yang keliru.

Sekarang diagram Venn. Kak Lintang mendata kesukaan 36 siswa kelas IX: 20 siswa suka bakso, 15 siswa suka mie ayam, dan 8 siswa suka keduanya. Berapa peluang seorang siswa yang dipilih acak suka bakso **atau** mie ayam?



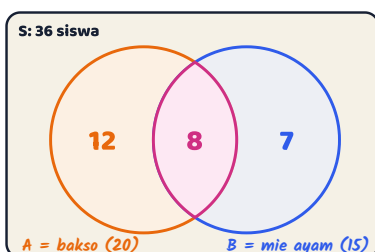
36 siswa ditanya:
 20 suka bakso (A)
 15 suka mie ayam (B)
 8 suka keduanya

Langkah 1. Lingkaran A memuat siswa yang suka bakso (20), lingkaran B memuat siswa yang suka mie ayam (15). Keduanya tumpang tindih karena ada siswa yang suka keduanya.



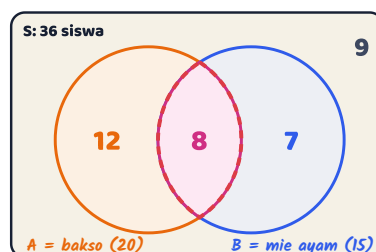
Mulai dari irisan:
 $A \cap B = 8$ siswa
 (suka bakso dan mie ayam sekaligus)

Langkah 2. Isi bagian tengah (irisan $A \cap B$) lebih dulu: 8 siswa.



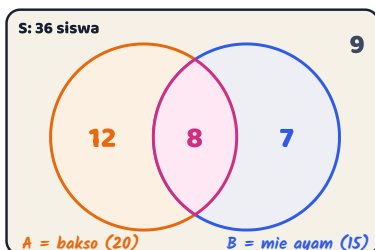
Hanya bakso:
 $20 - 8 = 12$
 Hanya mie ayam:
 $15 - 8 = 7$

Langkah 3. Bagian "hanya bakso" berisi $20 - 8 = 12$ siswa dan bagian "hanya mie ayam" berisi $15 - 8 = 7$ siswa.



9 $20 + 15 = 35$? Ketir! Irisan terhitung 2 kali.
 $n(A \cup B) = 20 + 15 - 8 = 27$
 Bukan keduanya:
 $36 - 27 = 9$

Langkah 4. Jika langsung menjumlahkan $20 + 15$, irisan terhitung dua kali. Kurangi sekali: $n(A \cup B) = 20 + 15 - 8 = 27$. Siswa di luar kedua lingkaran: $36 - 27 = 9$.



$12 + 8 + 7 = 27$ siswa suka bakso atau mie ayam.

$$P(A \cup B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{20}{36} + \frac{15}{36} - \frac{8}{36}$$

Langkah 5. Jadi $P(A \cup B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$. Bagi setiap bilangan dengan 36 dan muncullah aturan penjumlahan peluang.



ATURAN PENJUMLAHAN PELUANG

Untuk sembarang dua kejadian A dan B dalam ruang sampel yang sama,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B$ berarti " A atau B (atau keduanya)", sedangkan $A \cap B$ berarti " A dan B sekaligus".

▼ Bukti dengan membilang

Daerah $A \cup B$ terdiri atas tiga bagian yang tidak bertumpuk: hanya A , irisan, dan hanya B . Banyak anggota "hanya A " adalah $n(A) - n(A \cap B)$, dan "hanya B " adalah $n(B) - n(A \cap B)$. Jadi

$$n(A \cup B) = (n(A) - n(A \cap B)) + n(A \cap B) + (n(B) - n(A \cap B)) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

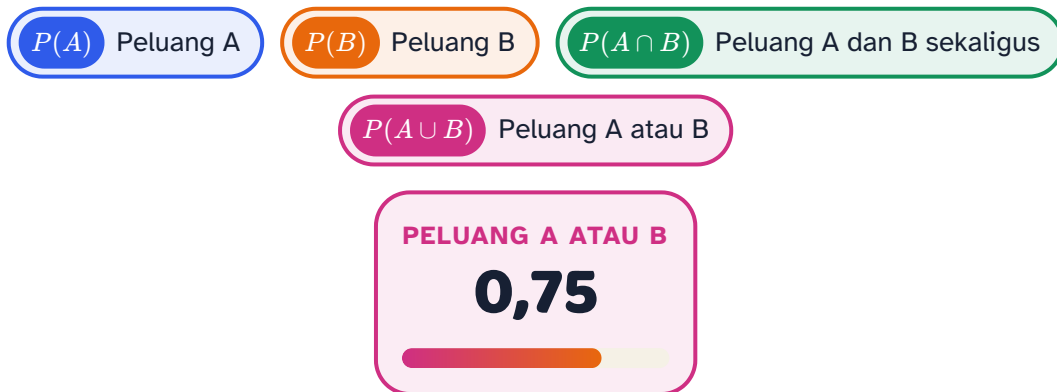
Bagi kedua ruas dengan $n(S)$ dan diperoleh $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Aturan ini tetap berlaku untuk peluang dari percobaan, karena frekuensi relatif juga dibidang dengan cara yang sama.



RUMUS HIDUP Aturan penjumlahan peluang

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jumlahkan peluang kedua kejadian, lalu kurangi peluang irisannya, karena irisan itu sudah terhitung dua kali.



$P(A) + P(B) = 0,97$. Irisan **0,22** ikut terhitung dua kali, jadi dikurangi sekali: hasilnya **0,75**. Jika hasil tampil '-', kombinasi angkanya mustahil: irisan tidak boleh lebih besar daripada $P(A)$ atau $P(B)$, dan $P(A \cup B)$ tidak boleh melebihi 1.

Cek satuan: Semua besaran adalah peluang, bilangan dari 0 sampai 1 tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PELUANG-GABUNGAN](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-PELUANG-GABUNGAN)

Satu kartu diambil acak dari setumpuk kartu remi berisi 52 kartu (13 kartu hati dan 4 kartu As, termasuk As hati). Berapa peluang kartu yang terambil hati atau As?

1 $P(\text{hati}) = \frac{13}{52}$ dan $P(\text{As}) = \frac{4}{52}$.

2 As hati termasuk keduanya: $P(\text{hati} \cap \text{As}) = \frac{1}{52}$.

3 $P(\text{hati} \cup \text{As}) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

Peluangnya $\frac{4}{13}$. Tanpa dikurangi irisan, As hati akan terhitung dua kali dan jawabannya menjadi $\frac{17}{52}$ yang keliru.

33.4 Kejadian saling lepas dan saling bebas

Dua istilah ini sering tertukar, padahal artinya sangat berbeda. **Saling lepas** membicarakan apakah dua kejadian bisa terjadi *bersamaan*. **Saling bebas** membicarakan apakah terjadinya satu kejadian *mengubah peluang* kejadian lain.



DEFINISI

- A dan B **saling lepas** jika keduanya tidak mungkin terjadi bersamaan: $A \cap B = \emptyset$. Akibatnya $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- A dan B **saling bebas** jika terjadinya yang satu tidak memengaruhi peluang yang lain. Syaratnya: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Bahasa sederhana • Contoh saling lepas: dalam satu lemparan dadu, "muncul 2" dan "muncul 5" tidak mungkin terjadi bersamaan. Contoh saling bebas: hasil lemparan koin dan hasil lemparan dadu tidak saling memengaruhi, karena koin tidak tahu apa yang dilakukan dadu.



ATURAN PERKALIAN UNTUK KEJADIAN SALING BEBAS

Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ saling bebas, maka peluang semuanya terjadi adalah

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Gabungkan dengan komplemen untuk kejadian "paling sedikit satu kali": $P(\text{paling sedikit sekali}) = 1 - P(\text{tidak pernah})$.



AWAS JEBAKAN

Saling lepas tidak sama dengan saling bebas. Jika A dan B saling lepas dan peluang keduanya positif, keduanya justru **tidak bebas**: begitu A terjadi, peluang B langsung menjadi 0. Kejadian "muncul 2" dan "muncul 5" pada satu dadu saling lepas, tetapi sangat bergantung satu sama lain.

KERJAKAN BERSAMA

Akhir pekan tanpa hujan?

Prakiraan cuaca menyebut peluang hujan pada hari Sabtu 0,3 dan pada hari Minggu 0,4. Anggap cuaca kedua hari itu saling bebas. Berapa peluang akhir pekan sama sekali tidak hujan? Berapa peluang paling sedikit satu hari hujan?

1 Peluang Sabtu kering = $1 - 0,3 = 0,7$ dan Minggu kering = $1 - 0,4 = 0,6$.

2 Saling bebas, jadi kalikan: $P(\text{dua hari kering}) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

3 Komplementnya: $P(\text{paling sedikit satu hari hujan}) = 1 - 0,42 = 0,58$.

Peluang akhir pekan kering 0,42, dan peluang paling sedikit sehari hujan 0,58. Perhatikan: bukan $0,3 + 0,4 = 0,7$, karena hujan Sabtu dan hujan Minggu bisa terjadi bersamaan.



Tebak Dulu!

Sebuah dadu dilempar 4 kali. Berapa kira-kira peluang muncul mata 6 paling sedikit sekali?

$\frac{4}{6} \approx 0,67$, karena setiap lemparan menyumbang $\frac{1}{6}$.

Tepat $\frac{1}{2}$.

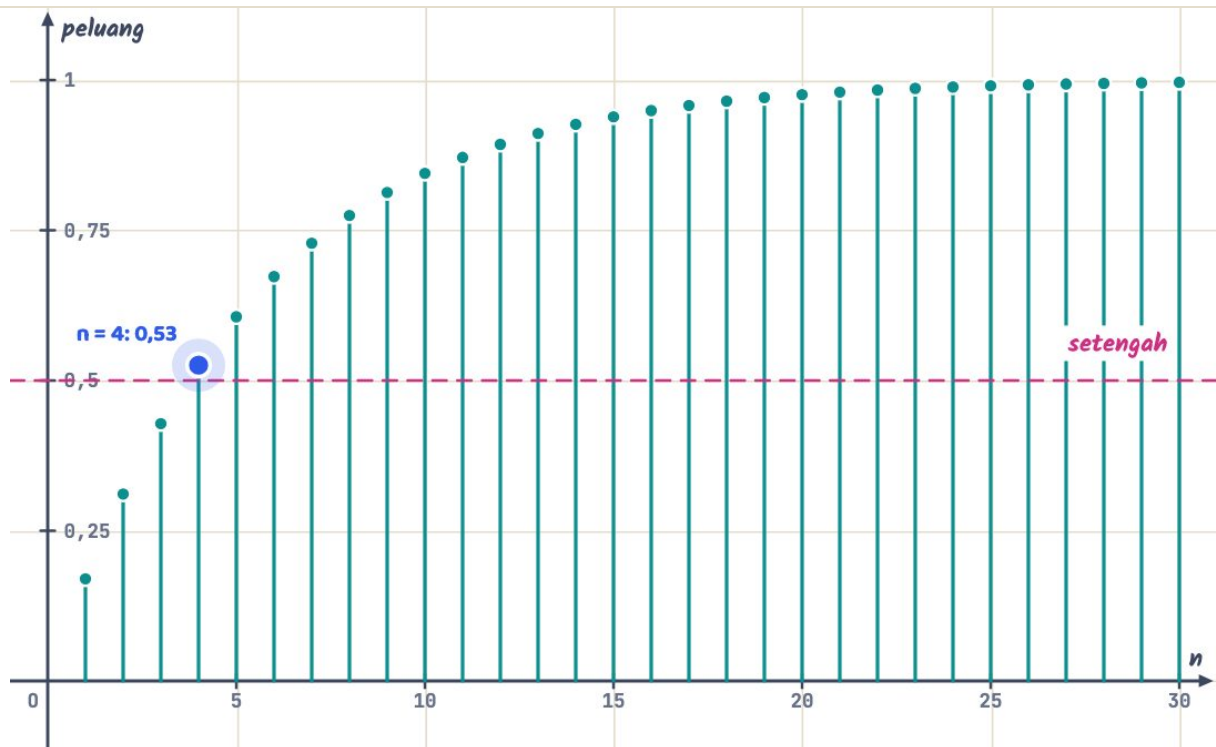
Sedikit di atas setengah, sekitar 0,52.

$\frac{1}{6}$, karena dadunya sama saja.

Jawabannya: sekitar 0,52. Peluang tidak pernah muncul 6 dalam 4 lemparan adalah $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0,48$. Komplementnya $1 - 0,48 \approx 0,52$. Menjumlahkan $\frac{1}{6}$ empat kali keliru karena kejadian "6 pada lemparan ke-1", "6 pada lemparan ke-2", dan seterusnya tidak saling lepas. Kalau dadu dilempar 7 kali, cara menjumlahkan akan menghasilkan $\frac{7}{6} > 1$, padahal peluang tidak pernah melebihi 1!

$$P(\text{paling sedikit sekali dalam } n \text{ kali}) = 1 - (1 - p)^n$$

$$1 - (1 - 0,17)^4 = 0,53$$



$p \approx 1/6$: seperti menunggu mata 6 pada dadu

☒ peluangnya sudah lebih dari setengah

P(paling sedikit sekali)
0,5254

P(gagal terus)
0,4746

n terkecil agar $\geq 50\%$
4

Seret titik biru atau geser slider n . Dengan $p \approx \frac{1}{6}$ (dadu), mulai lemparan ke berapa peluang muncul 6 paling sedikit sekali melewati setengah? Lalu ubah p menjadi 0,3 seperti peluang hujan harian: berapa peluang paling sedikit sekali hujan dalam seminggu ($n = 7$)?

33.5 Peluang bersyarat dan masalah tiga pintu

Informasi baru dapat mengubah peluang. Jika kamu tahu jumlah dua dadu adalah 8, ruang sampelnya menyusut dari 36 pasangan menjadi 5 pasangan saja: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2). Peluang yang dihitung **setelah** kita tahu bahwa B terjadi disebut **peluang bersyarat**.

**DEFINISI: PELUANG BERSYARAT**

Peluang A dengan syarat B telah terjadi (dibaca "peluang A jika diketahui B ") adalah

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Artinya: B menjadi ruang sampel yang baru, dan kita hanya melihat bagian A yang berada di dalam B .

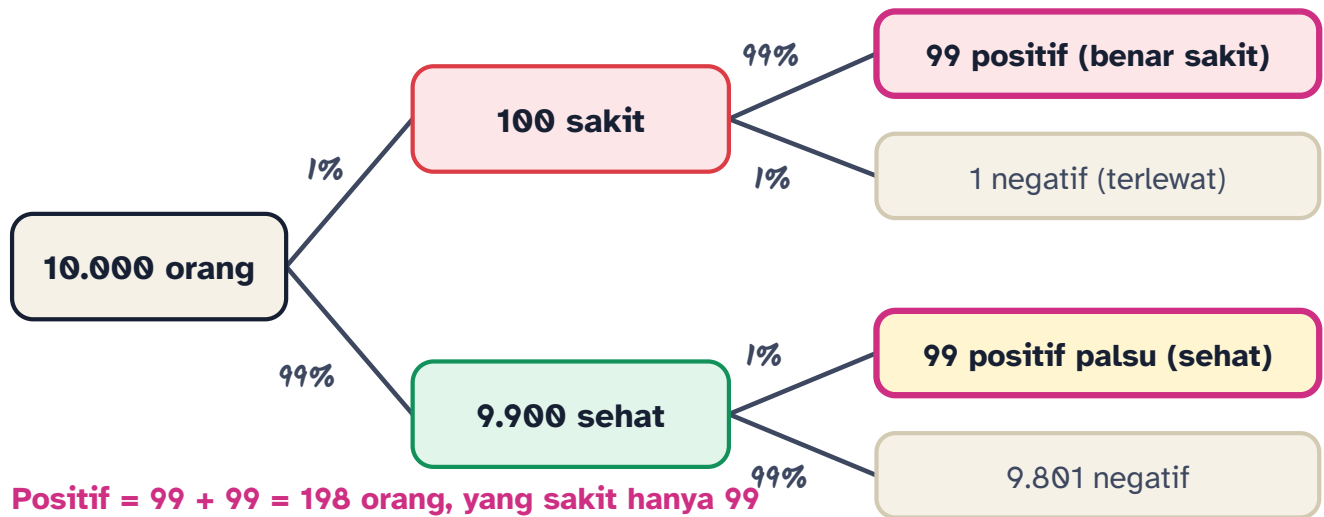
Contoh dengan data rekaan: sebuah kota mencatat prakiraan cuaca dan kenyataannya selama 100 hari.

	Benar hujan	Tidak hujan	Jumlah
Diprakirakan hujan	36	9	45
Diprakirakan cerah	6	49	55
Jumlah	42	58	100

$P(\text{hujan} | \text{diprakirakan hujan}) = \frac{36}{45} = 0,8$: jika prakiraan menyebut hujan, 8 dari 10 kali benar hujan. Sebaliknya, $P(\text{diprakirakan hujan} | \text{hujan}) = \frac{36}{42} \approx 0,86$. Kedua peluang itu memakai pembilang yang sama, tetapi penyebutnya berbeda.

**AWAS JEBAKAN**

$P(A | B)$ umumnya tidak sama dengan $P(B | A)$. "Hampir semua orang sakit mendapat hasil tes positif" tidak berarti "hampir semua orang yang hasil tesnya positif sedang sakit". Jika penyakitnya langka, banyak hasil positif justru berasal dari orang sehat (positif palsu).



Tes yang "99% akurat" untuk penyakit yang diidap 1% penduduk: dari 198 orang bertanda positif, hanya 99 yang benar-benar sakit, jadi $P(\text{sakit} \mid \text{positif}) = \frac{99}{198} = 50\%$.

Perhitungan pada pohon frekuensi itu sama dengan rumus berikut, yang dikenal sebagai aturan Bayes:

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{P(\text{sakit}) \cdot P(+ \mid \text{sakit})}{P(\text{sakit}) \cdot P(+ \mid \text{sakit}) + P(\text{sehat}) \cdot P(+ \mid \text{sehat})}$$

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{r s}{r s + (1 - r)(1 - t)}$$

Dari semua orang yang hasil tesnya positif, berapa bagian yang benar-benar sakit?
Bandingkan positif benar dengan seluruh hasil positif (benar ditambah palsu).

 r

Prevalensi (bagian penduduk yang sakit)

 s Sensitivitas (sakit $\rightarrow$ positif) t Spesifisitas (sehat $\rightarrow$ negatif) $P(\text{sakit} \mid +)$

Peluang benar-benar sakit jika positif

PELUANG BENAR-BENAR SAKIT
JIKA POSITIF

0,5




separuh hasil positif ternyata orang sehat

Bayangkan 10.000 orang: sekitar **100** sakit dan **9.900** sehat. Positif benar $\approx$ **99** orang, positif palsu $\approx$ **99** orang. Jadi di antara orang yang positif, hanya sekitar **50%** yang benar-benar sakit.

Cek satuan: Semua besaran berupa peluang (0 sampai 1), tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TES-KESEHATAN](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-tes-kehatan)

Sebuah tes cepat mendeteksi 95% orang yang sakit dan memberi hasil negatif pada 90% orang yang sehat. Penyakitnya diidap 2% penduduk. Jika hasil tes Pak Darto positif, berapa peluang ia benar-benar sakit?

- 1 Bayangkan 10.000 orang: 200 sakit dan 9.800 sehat.
- 2 Positif benar: $95\% \times 200 = 190$. Positif palsu: $10\% \times 9.800 = 980$.
- 3 $P(\text{sakit} \mid +) = \frac{190}{190 + 980} = \frac{190}{1.170} \approx 0,162$.

Hanya sekitar 16%! Karena itu dokter biasanya meminta tes kedua yang lebih teliti untuk memastikan hasil positif.



MATEMATIKA NUSANTARA

Arisan ibu-ibu RT adalah contoh peluang bersyarat yang adil. Misalkan ada 10 anggota dan setiap bulan satu gulungan nama dikocok dari gelas; yang sudah keluar tidak ikut dikocok lagi. Peluang namamu keluar **tepat pada bulan ketiga**: tidak keluar di bulan pertama ($\frac{9}{10}$), tidak keluar di bulan kedua ($\frac{8}{9}$), lalu keluar di bulan ketiga ($\frac{1}{8}$). Hasil kalinya $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$. Hitung untuk bulan mana pun, hasilnya selalu $\frac{1}{10}$. Semua anggota punya peluang yang sama untuk mendapat giliran di bulan berapa pun. Hal yang sama berlaku untuk undian doorprize 17-an: tidak ada untungnya berebut mengambil kupon lebih dulu.

Sekarang tantangan paling terkenal dalam peluang bersyarat. Dalam lomba 17-an, ada tiga pintu. Di balik satu pintu ada sepeda, di balik dua pintu lainnya ada sandal jepit. Kamu memilih satu pintu. Kak Lintang, pembawa acara yang **tahu** letak sepeda, lalu membuka salah satu pintu lain yang berisi sandal jepit, kemudian bertanya: "Mau tetap, atau pindah ke pintu yang masih tertutup?"



Tebak Dulu!

Apa yang sebaiknya kamu lakukan?

Tetap, karena pilihan pertama biasanya benar.

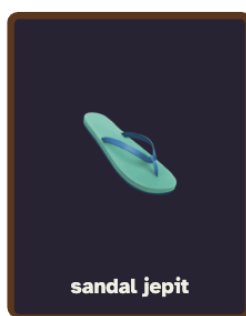
Terserah, karena sekarang peluangnya 50:50.

Pindah, karena peluang menangnya menjadi $\frac{2}{3}$.

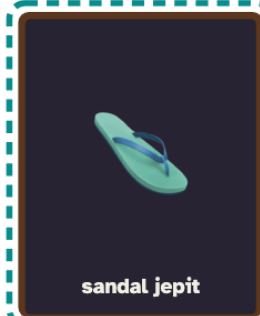
Tidak bisa ditentukan tanpa melihat isi pintu.

Jawabannya: pindah! Pilihan pertamamu benar dengan peluang $\frac{1}{3}$ saja, dan peluang itu tidak berubah karena Kak Lintang *selalu* bisa membuka pintu bersandal. Dengan peluang $\frac{2}{3}$ pilihan pertamamu salah, dan dalam kasus itu Kak Lintang terpaksa menyisakan pintu bersepeda. Jadi pindah menang $\frac{2}{3}$ dari seluruh permainan. Tidak percaya? Mainkan di lab berikut.

Ronde otomatis: pilihan awal pintu 3, sepeda di pintu 3.

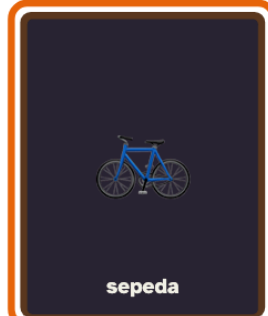


sandal jepit



sandal jepit

pindah



sepeda

awal

Simulasi
cepat...

Selalu TETAP



33,3% (8 dari 24)

Selalu PINDAH



66,7% (16 dari 24)

Permainanmu: tetap → 0 menang dari 0 • pindah → 0 menang dari 0

= peluang teori

Ronde otomatis
24Menang jika selalu TETAP
33,3 %Menang jika selalu PINDAH
66,7 %Teori (tetap : pindah)
1/3 : 2/3

Klik sebuah pintu, lihat Kak Lintang membuka pintu bersandal, lalu klik pintu pilihanmu (**tetap**) atau pintu tertutup lainnya (**pindah**). Mainkan 10 ronde dengan tangan, lalu tekan ► **Jalankan** atau ⚡ **+1.000 ronde** untuk membandingkan kedua strategi. Coba juga 10 pintu: Kak Lintang membuka 8 pintu kosong. Masih ragu untuk pindah?

▼ **Bukti dengan tabel: semua kemungkinan letak sepeda**

Misalkan kamu memilih pintu 1 (pilihan lain berjalan sama persis). Letak sepeda sama mungkin di pintu 1, 2, atau 3.

Sepeda di	Kak Lintang membuka	Jika tetap (pintu 1)	Jika pindah
pintu 1	pintu 2 atau 3	menang 🚲	kalah
pintu 2	pintu 3 (terpaksa)	kalah	menang 🚲
pintu 3	pintu 2 (terpaksa)	kalah	menang 🚲

Tetap menang di 1 dari 3 kasus yang sama mungkin, sedangkan pindah menang di 2 dari 3 kasus. Jadi $P(\text{menang} \mid \text{tetap}) = \frac{1}{3}$ dan $P(\text{menang} \mid \text{pindah}) = \frac{2}{3}$. Kuncinya: pembawa acara **tahu** letak hadiah. Jika ia membuka pintu secara asal dan kebetulan berisi sandal, peluangnya memang menjadi 50:50.



CERITA DI BALIK TIGA PINTU

Masalah ini dinamai dari Monty Hall, pembawa acara kuis televisi di Amerika Serikat. Pada tahun 1990, kolumnis Marilyn vos Savant menulis bahwa pemain sebaiknya pindah. Ribuan pembaca, termasuk banyak yang bergelar doktor, mengirim surat dan menyatakan ia keliru. Konon, matematikawan besar Paul Erdős pun baru yakin setelah melihat hasil simulasi komputer. Ternyata Marilyn benar!



LANJUT · IB & OLIMPIADE

ATURAN BAYES DAN PELUANG TOTAL

Jika $B_1, B_2, \dots, B_k$ saling lepas dan gabungannya seluruh ruang sampel, maka untuk kejadian A berlaku **aturan peluang total** $P(A) = \sum_i P(A | B_i) P(B_i)$ dan **aturan Bayes**

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_i P(A | B_i) P(B_i)}.$$

Bayes "membalik" arah syarat: dari $P(+ | \text{sakit})$ yang diketahui pabrik pembuat tes, kita memperoleh $P(\text{sakit} | +)$ yang dibutuhkan pasien. Pada masalah tiga pintu, misalkan kamu memilih pintu 1 dan pembawa acara membuka pintu 3. Peluang ia membuka pintu 3 adalah $\frac{1}{2}$ jika sepeda di pintu 1, $\frac{1}{3}$ jika sepeda di pintu 2, dan 0 jika sepeda di pintu 3. Bayes memberi

$$P(\text{sepeda di 2} | \text{buka 3}) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0} = \frac{2}{3}.$$

MITOS

"Setelah satu pintu kosong dibuka, tinggal dua pintu, jadi peluangnya pasti 50:50."

MITOS

"Hanya ada dua kemungkinan, lulus atau tidak, jadi peluang lulus

$\frac{1}{2}$
."

FAKTA

Pembawa acara

tahu

letak hadiah dan sengaja membuka pintu kosong.

Informasi itu membuat pintu tertutup yang

tersisa berpeluang

$\frac{2}{3}$

. Dua pilihan belum tentu sama mungkin.

FAKTA

Banyaknya kemungkinan tidak sama dengan peluang. Rumus

$$n(A)/n(S)$$

hanya berlaku jika semua hasil sama mungkin.

Peluang lulus bergantung pada persiapanmu, bukan pada banyaknya pilihan.

MITOS

"Ramalan 'peluang hujan 70%' salah kalau ternyata hari itu cerah."

FAKTA

Peluang 70% berarti: dari banyak hari dengan keadaan cuaca serupa, sekitar 7 dari 10 hari turun hujan. Hari cerah termasuk 3 dari 10 sisanya. Ramalan peluang dinilai dari ketepatannya dalam jangka panjang.

33.6 Nilai harapan dan permainan adil

Dimas dan Ayu bermain di pos ronda: dua dadu dilempar. Jika jumlahnya 7, Dimas mendapat 3 poin dari Ayu. Jika tidak, Ayu mendapat 1 poin dari Dimas. Kedengarannya Dimas untung karena hadiahnya lebih besar. Benarkah? Untuk menjawabnya, kita butuh **rata-rata jangka panjang**.



DEFINISI: NILAI HARAPAN

Jika sebuah permainan atau percobaan menghasilkan nilai $x_1, x_2, \dots, x_k$ dengan peluang $p_1, p_2, \dots, p_k$, maka **nilai harapannya** adalah

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = \sum x_i p_i.$$

Nilai harapan adalah rata-rata hasil per percobaan jika percobaan itu diulang sangat banyak kali. Sebuah permainan disebut **permainan adil** jika nilai harapan keuntungan setiap pemain sama dengan 0.

Untuk Dimas: $E = \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{5}{6} \cdot (-1) = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{3}$. Rata-rata Dimas **kehilangan** sepertiga poin setiap kali bermain. Hadiah besar belum tentu menguntungkan jika peluangnya kecil.

Bahasa sederhana • Cara mudah membayangkannya: mainkan 60 kali. Jumlah 7 muncul sekitar 10 kali (Dimas dapat $10 \times 3 = 30$ poin), dan bukan 7 sekitar 50 kali (Dimas kehilangan 50 poin). Akhirnya Dimas rugi sekitar 20 poin, yaitu $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ poin per permainan.

$$E = p \cdot a - (1 - p) \cdot b$$

Kalikan setiap hasil dengan peluangnya, lalu jumlahkan. Permainan adil jika nilai harapannya nol.

 p

Peluang menang

 a

Poin yang didapat jika menang poin

 b

Poin yang hilang jika kalah poin

 E

Nilai harapan poin per permainan

NILAI HARAPAN

0

poin per permainan



permainan adil

Dalam 100 permainan, kamu kira-kira menang **25** kali (mendapat **75** poin) dan kalah **75** kali (kehilangan **75** poin). Totalnya sekitar **0** poin, atau rata-rata **0** poin per permainan. Agar adil dengan peluang dan poin kalah ini, poin menang seharusnya **3** (tampil '-' jika peluang menang 0, karena berapa pun hadiahnya tidak akan pernah didapat).

Cek satuan: Nilai harapan bersatuan sama dengan skornya (poin).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-NILAI-HARAPAN

Dimas ingin mengubah aturan main tadi agar adil. Jika jumlah dua dadu 7, Dimas mendapat x poin dari Ayu; jika tidak, Ayu mendapat 1 poin dari Dimas. Berapa x ?

- 1 $P(\text{jumlah 7}) = \frac{1}{6}$ dan $P(\text{bukan 7}) = \frac{5}{6}$.
- 2 Nilai harapan keuntungan Dimas: $E = \frac{1}{6}x - \frac{5}{6} \cdot 1$.
- 3 Adil berarti $E = 0$: $\frac{1}{6}x = \frac{5}{6}$, jadi $x = 5$.

Hadiahnya harus 5 poin. Dalam permainan adil, perbandingan hadiah sama dengan kebalikan perbandingan peluang: peluang 1 : 5, hadiah 5 : 1.



TAMU DARI MASA LALU

Teori peluang modern lahir dari surat-menyurat Blaise Pascal dan Pierre de Fermat pada tahun 1654. Seorang bangsawan Prancis, Chevalier de Méré, bertanya bagaimana membagi hadiah secara adil jika sebuah permainan dihentikan sebelum ada pemenangnya. Jawaban mereka: bagilah hadiah sesuai peluang setiap pemain untuk menang seandainya permainan dilanjutkan. Inilah gagasan nilai harapan. De Méré juga heran mengapa "paling sedikit satu mata 6 dalam 4 lemparan satu dadu" ($\pm 0,518$) sedikit lebih mungkin daripada "paling sedikit satu pasangan 6–6 dalam 24 lemparan dua dadu" ($\pm 0,491$). Kamu sekarang bisa menghitung keduanya dengan komplemen!



Prakiraan cuaca BMKG

Peluang hujan dihitung dari model cuaca dan data bertahun-tahun. Nelayan dan petani memakainya untuk memutuskan kapan melaut atau mulai menanam.



Tes kesehatan

Dokter menafsirkan hasil tes dengan peluang bersyarat. Hasil positif pada penyakit langka biasanya dipastikan dengan tes kedua.



Undian doorprize 17-an

Jika kupon dikocok dengan baik, setiap kupon punya peluang sama, tidak peduli diambil pertama atau terakhir.



Pewarisan sifat

Hukum Mendel memakai diagram pohon: dua orang tua pembawa sifat resesif berpeluang $\frac{1}{4}$ menurunkan sifat itu kepada setiap anaknya.



Kendali mutu pabrik

Pabrik memeriksa sampel acak untuk menaksir peluang produk cacat tanpa harus membuka setiap kemasan.

33.7 Kejutan peluang: ulang tahun kembar dan peluang geometris

Intuisi kita sering meleset jauh dalam urusan peluang. Contoh paling terkenal adalah pertanyaan tentang hari ulang tahun.



Tebak Dulu!

Di sebuah kelas ada 23 siswa. Berapa kira-kira peluang ada paling sedikit dua siswa yang berulang tahun pada hari yang sama (tanggal dan bulan)?

Sekitar 6%, karena $\frac{23}{365} \approx 0,06$.

Sekitar 25%.

Sedikit lebih dari 50%.

100%, pasti ada.

Jawabannya: sekitar 50,7%. Kuncinya: yang dibandingkan bukan 23 orang, tetapi **pasangan** orang. Dari 23 siswa dapat dibentuk $\binom{23}{2} = 253$ pasangan, dan setiap pasangan bisa saja kembar ulang tahun. Dengan 57 siswa, peluangnya sudah sekitar 99%!

Hitung lewat komplement: peluang semua ulang tahun **berbeda**. Siswa kedua harus menghindari 1 hari, siswa ketiga menghindari 2 hari, dan seterusnya (anggap setahun 365 hari dan setiap hari sama mungkin):

$$P(\text{ada yang kembar}) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - 31}{365}$$

LAB MINI Paradoks ulang tahun: kelas acak

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-33



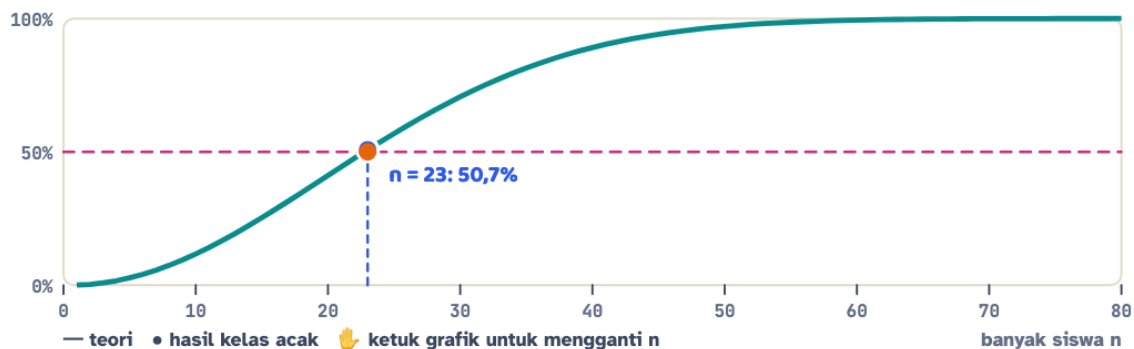
Kelas berisi 23 siswa

253 pasangan siswa

🎉 **Ada ulang tahun kembar!**

27 Mei: 2 siswa

Peluang teori: 50,7%



Banyak pasangan siswa

253

Peluang ada yang kembar (teori)

50,7 %

Kelas acak dicoba

10

Kelas yang punya kembar

50 %

Atur banyak siswa, lalu tekan 🎲 **Satu kelas acak**. Kotak magenta menandai tanggal yang dimiliki dua siswa atau lebih. Tekan ▶ **Jalankan** untuk mencoba kelas acak terus-menerus, lalu bandingkan persentase kelas yang punya ulang tahun kembar dengan kurva teori. Kamu juga bisa mengetuk atau menyeret grafik di bawah untuk mengganti banyak siswa.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA 23 CUKUP?

Dengan ketaksamaan $1 - x \leq e^{-x}$, peluang semua berbeda memenuhi

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \leq e^{-(0+1+\dots+(n-1))/365} = e^{-n(n-1)/730}.$$

Agar peluang ada yang kembar melewati $\frac{1}{2}$, cukup $\frac{n(n-1)}{730} > \ln 2 \approx 0,693$, yaitu $n(n-1) > 506$.

Untuk $n = 23$, $n(n-1) = 506$ dan $\frac{506}{730} \approx 0,693151$ masih sedikit lebih besar daripada $\ln 2 \approx 0,693147$. Secara umum, kembaran mulai sering muncul jika n sekitar $\sqrt{365}$, bukan sekitar $365/2$.

Gagasan yang sama dipakai para ahli keamanan komputer untuk menilai kekuatan kode acak.

Peluang juga bisa dihitung dengan **luas**. Jika hasil percobaan adalah sebuah titik yang dipilih acak dari suatu daerah, peluang titik itu jatuh di bagian tertentu sama dengan perbandingan luasnya. Inilah **peluang geometris**.



JANJIAN DI MONAS

Dimas dan Ayu berjanji bertemu di Monas antara pukul 16.00 dan 17.00. Masing-masing datang pada saat acak dan menunggu paling lama 15 menit. Tulis waktu kedatangan (dalam menit setelah 16.00) sebagai titik (x, y) pada persegi 60×60 . Mereka bertemu jika $|x - y| \leq 15$, yaitu pita di sepanjang diagonal persegi. Daerah sisanya berupa dua segitiga siku-siku sama kaki dengan kaki $60 - 15 = 45$, luas totalnya $45^2 = 2.025$. Jadi

$$P(\text{bertemu}) = 1 - \frac{2.025}{3.600} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \approx 0,44.$$

Ternyata lebih besar kemungkinan mereka *tidak* bertemu. Jika waktu tungguanya 30 menit, peluang bertemu naik menjadi $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Cek Cepat

Satu huruf dipilih acak dari kata MATEMATIKA. Peluang terpilih huruf A adalah...

$$\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{3}$$

Kejadian A dan B saling lepas dengan $P(A) = 0,3$ dan $P(B) = 0,5$. Nilai $P(A \cup B)$ adalah...

$$0,15$$

$$0,8$$

$$0,65$$

$$0,2$$

Sebuah koin seimbang sudah menghasilkan Angka 4 kali berturut-turut. Peluang lemparan kelima menghasilkan Angka adalah...

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{32}$$

lebih kecil daripada $\frac{1}{2}$

lebih besar daripada $\frac{1}{2}$

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. B • 3. A



Tantangan Rumah: peluang rahasia tutup botol

Bahan: 1 tutup botol plastik, buku catatan, pensil, kalkulator atau HP.

1. Tebak dulu dan tulis tebakanmu: tutup botol lebih sering mendarat telentang (lubang di atas) atau telungkup?
2. Jatuhkan tutup botol dari ketinggian sekitar 30 cm ke lantai sebanyak 50 kali. Catat setiap hasil dengan turus.
3. Hitung frekuensi relatif telentang setelah 10, 20, 30, 40, dan 50 lemparan. Gambarlah grafiknya seperti di Lab Mini.
4. Gabungkan datamu dengan data 4 teman atau anggota keluarga yang memakai tutup botol sejenis, sehingga ada sekitar 250 lemparan.
5. Ulangi percobaan dengan tutup botol yang bentuknya berbeda (misalnya tutup botol kecap atau tutup galon kecil).

Pertanyaan: Berapa taksiranmu untuk peluang tutup botol mendarat telentang? Mengapa peluang ini tidak bisa dihitung dengan rumus $n(A)/n(S)$? Bagaimana grafik frekuensi relatifmu berubah ketika datanya digabungkan?



RINGKASAN KILAT

Bab 33 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- menyusun **ruang sampel** dan menghitung **peluang klasik** suatu kejadian
- menaksir peluang dari **percobaan** dan menjelaskan mengapa frekuensi relatif makin dekat ke peluang teoretis
- memakai **diagram pohon**, **diagram Venn**, aturan penjumlahan, dan aturan perkalian
- membedakan kejadian **saling lepas** dan **saling bebas**, serta menghitung **peluang bersyarat**

- menghitung **nilai harapan** dan menilai apakah sebuah permainan adil

Istilah kunci

percobaan

ruang sampel

titik sampel

kejadian

peluang

Komplemen

frekuensi relatif

frekuensi harapan

hukum bilangan besar

diagram pohon

diagram Venn

saling lepas

saling bebas

peluang bersyarat

nilai harapan

permainan adil

Rumus penting

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aturan penjumlahan peluang. Jumlahkan peluang kedua kejadian, lalu kurangi peluang irisannya, karena irisan itu sudah terhitung dua kali.

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{r s}{r s + (1 - r)(1 - t)}$$

Arti hasil tes positif. Dari semua orang yang hasil tesnya positif, berapa bagian yang benar-benar sakit? Bandingkan positif benar dengan seluruh hasil positif (benar ditambah palsu).

$$E = p \cdot a - (1 - p) \cdot b$$

Nilai harapan permainan menang-kalah. Kalikan setiap hasil dengan peluangnya, lalu jumlahkan. Permainan adil jika nilai harapannya nol.

Jangan sampai terjebak

- Hasil yang mungkin belum tentu sama mungkin.
- Koin tidak punya ingatan.
- Saling lepas tidak sama dengan saling bebas.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=33

Teka-teki untuk Bab 34

Lempar 10 koin sekaligus dan catat banyaknya Gambar. Ulangi 1.000 kali, lalu buat diagram batang dari hasilnya. Bentuknya akan menyerupai lonceng, mirip sekali dengan histogram tinggi badan siswa di sekolahmu! Berapa peluang muncul tepat 5 Gambar? Dan mengapa begitu banyak data di alam, dari tinggi badan sampai berat beras dalam kemasan, membentuk lonceng?

▼ Intip petunjuk

Banyak susunan 10 koin dengan tepat 5 Gambar adalah $\binom{10}{5} = 252$ dari $2^{10} = 1.024$ susunan yang sama mungkin, jadi peluangnya $\frac{252}{1024} \approx 24,6\%$. Bab 34 membahas distribusi binomial, papan Galton, dan kurva normal yang berbentuk lonceng.

34 Distribusi Peluang: Rahasia Kurva Lonceng

Mengapa kelereng yang dijatuhkan sembarangan di papan berpaku selalu menumpuk membentuk lonceng? Mengapa maskapai berani menjual tiket lebih banyak daripada jumlah kursinya? Dua bintang statistika, distribusi binomial dan distribusi normal, siap menjawabnya.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan **variabel acak diskret**, menyusun tabel distribusi peluangnya, dan menghitung **nilai harapan** serta varians;
- mengenali **percobaan binomial** dan menghitung $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$;
- menghitung **rataan** np dan **simpangan baku** $\sqrt{np(1 - p)}$ distribusi binomial;
- membaca **kurva normal**, memakai aturan 68–95–99,7, dan mengubah data menjadi **skor z** untuk menghitung peluang;
- menjelaskan mengapa papan Galton dan binomial dengan n besar menghasilkan kurva lonceng (**aproksimasi normal**).

LONCENG DI RUANG UKS

KOMIK • 4 PANEL

Senin pagi di UKS: pengukuran tinggi badan

DIMAS

Kak, kok tinggi kami kebanyakan sedang-sedang saja? Yang jangkung sekali atau mungil sekali cuma sedikit.



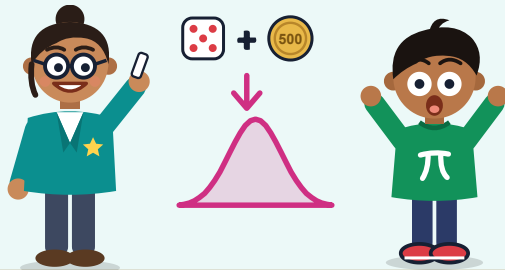
AYU

Aku sudah membuat histogram tinggi 32 teman sekelas. Bentuknya... seperti lonceng!



KAK LINTANG

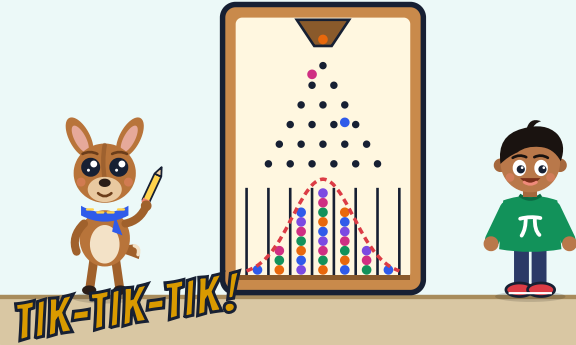
Itu bukan kebetulan! Tinggi badan dipengaruhi banyak hal kecil yang acak: gen, gizi, tidur, olahraga. Jumlahkan banyak hal acak, hasilnya cenderung membentuk lonceng.

**Ancil datang membawa papan berpaku...****ANCIL**

Mau bukti? Jatuhkan kelereng di papan ini. Di tiap paku: kiri atau kanan, 50 : 50. Lihat tumpukannya!

DIMAS

Kelereng kok bisa tahu bentuk lonceng?!



Di akhir Bab 33 ada teka-teki: *apakah tinggi badan siswa membentuk lonceng?* Jawabannya: ya, hampir selalu! Untuk memahami alasannya, kita perlu cara baru memandang peluang. Bukan lagi "berapa peluang satu kejadian", melainkan "bagaimana peluang **tersebar** ke semua hasil yang mungkin". Sebaran inilah yang disebut **distribusi peluang**.

**Tebak Dulu!**

Sebutir kelereng dijatuhkan di papan Galton dengan 10 baris paku. Di setiap paku, kelereng memantul ke kiri atau ke kanan dengan peluang sama. Di laci mana kelereng itu paling mungkin mendarat?

Di laci paling kiri atau paling kanan, karena kelereng cenderung terus memantul ke satu arah.

Semua laci sama besar peluangnya, karena setiap pantulan adil.

Di laci tengah, karena paling banyak jalur yang menuju ke sana.

Tidak bisa diduga sama sekali.

Jawabannya: laci tengah. Setiap pantulan memang adil, tetapi laci-lacinya tidak! Ke laci paling kiri hanya ada 1 jalur (kiri terus 10 kali), peluangnya $\frac{1}{1024}$, kurang dari 0,1%. Ke laci tengah ada $\binom{10}{5} = 252$ jalur, peluangnya $\frac{252}{1024} \approx 24,6\%$. Banyaknya jalur inilah rahasia bentuk lonceng.

34.1 Variabel acak: memberi angka pada hasil acak

Saat tiga koin dilempar, kita jarang peduli urutannya (AGA atau GAA, dengan A = angka dan G = gambar). Yang biasanya ditanyakan: **berapa banyak angka** yang muncul? Aturan yang memberi sebuah bilangan pada setiap hasil percobaan acak disebut **variabel acak**, biasanya ditulis dengan huruf kapital seperti X .



DEFINISI

Variabel acak X disebut **diskret** jika nilai-nilainya dapat dicacah satu per satu, misalnya 0, 1, 2, 3. Daftar semua nilai x beserta peluangnya $P(X = x)$ disebut **distribusi peluang** X . Syaratnya ada dua: setiap $P(X = x) \geq 0$, dan jumlah semua peluang $\sum P(X = x) = 1$.

Banyak angka, x	0	1	2	3
Hasil yang cocok	GGG	AGG, GAG, GGA	AAG, AGA, GAA	AAA
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Bahasa sederhana • Gampangnya, variabel acak itu seperti **papan skor**. Percobaannya acak (koin dilempar), tetapi setiap hasil langsung diberi angka. Tabel distribusi peluang memberi tahu seberapa sering setiap angka diharapkan muncul. Jumlah semua peluangnya selalu 1, karena pasti ada satu hasil yang terjadi.

Variabel seperti tinggi badan, berat beras, atau waktu tempuh ojek berbeda: nilainya bisa berupa bilangan desimal apa saja dalam suatu rentang. Variabel seperti itu disebut **kontinu**, dan kita akan bertemu dengannya di Subbab 34.4.



NILAI HARAPAN DAN VARIANS

Untuk variabel acak diskret X :

$$\mu = E(X) = \sum x P(X = x), \quad \text{Var}(X) = \sum$$

Nilai harapan $E(X)$ adalah rata-rata jangka panjang jika percobaan diulang berkali-kali.

Simpangan bakunya $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ mengukur seberapa jauh hasil biasanya menyebar dari rata-rata itu.

CONTOH Tiga koin dan nilai harapannya

Tiga koin dilempar dan X = banyak angka. Hitung $E(X)$ dan simpangan baku X .

1 Pakai tabel di atas: $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1,5$.

2 $E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$.

3 $\text{Var}(X) = 3 - 1,5^2 = 0,75$, jadi $\sigma = \sqrt{0,75} \approx 0,87$.

Rata-ratanya 1,5 angka dengan simpangan baku $\pm 0,87$. Masuk akal: setengah dari 3 koin, dan hasilnya biasanya 1 atau 2.



AWAS JEBAKAN

Nilai harapan tidak harus berupa nilai yang bisa muncul. Tiga koin tidak pernah menghasilkan "1,5 angka"! $E(X) = 1,5$ artinya: jika kamu melempar tiga koin seribu kali, rata-rata banyak angkanya akan sangat dekat dengan 1,5.

34.2 Distribusi binomial: sukses berulang kali

Banyak peristiwa sehari-hari punya pola yang sama: satu percobaan dengan dua kemungkinan, **sukses** atau **gagal**, diulang beberapa kali. Menebak soal pilihan ganda (benar/salah), menanam benih cabai (tumbuh/tidak), menunggu penumpang di bandara (datang/batal). Yang ingin kita ketahui: berapa peluang mendapat tepat k sukses?



DEFINISI • PERCOBAAN BINOMIAL

Sebuah percobaan disebut **percobaan binomial** jika memenuhi empat syarat:

1. banyak percobaan **tetap**, yaitu n kali;
2. setiap percobaan hanya punya **dua** hasil: sukses atau gagal;
3. peluang sukses **sama** di setiap percobaan, yaitu p ;
4. percobaan-percobaan itu saling **bebas**.

Jika X = banyak sukses, kita menulis $X \sim B(n, p)$ dan menyebut sebarannya **distribusi binomial**.



TRIK KAK LINTANG

Hafalkan syaratnya dengan kalimat "**Tim Dimas Selalu Berani**": banyak percobaan **Tetap**, **Dua** hasil, peluang **Sama**, saling **Bebas**. Kalau satu saja tidak terpenuhi, rumus binomial tidak boleh dipakai.



Tebak Dulu!

Kamu melempar koin yang adil 10 kali. Berapa kira-kira peluang mendapat tepat 5 sisi angka?

50%, karena koinnya adil.

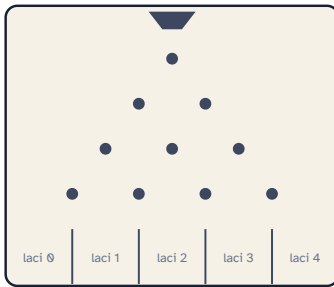
Hampir 100%, karena setengah dari 10 adalah 5.

Sekitar 25%.

Sekitar 5%.

Jawabannya: sekitar 25%. Tepatnya $\binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 24,6\%$. Hasil "tepat 5" memang yang *paling* mungkin, tetapi ia hanya satu dari 11 kemungkinan (0 sampai 10 angka). Jadi lebih mungkin kamu **tidak** mendapat tepat 5 angka (sekitar 75%)!

Dari mana muncul $\binom{n}{k}$? Papan Galton menjawabnya tanpa banyak kata. Ikuti langkah-langkah di bawah.

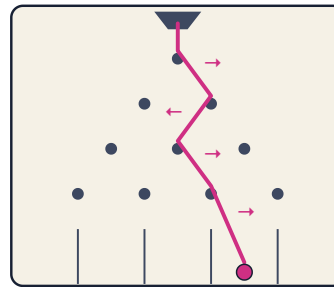


Papan Galton mini: 4 baris

Kelereng masuk dari atas.
Di setiap paku ia memantul
ke kiri atau ke kanan,
masing-masing berpeluang $\frac{1}{2}$.

Ke laci mana ia jatuh?

Langkah 1. Papan Galton mini dengan 4 baris paku. Di setiap paku, kelereng memantul ke kiri atau ke kanan dengan peluang $\frac{1}{2}$.



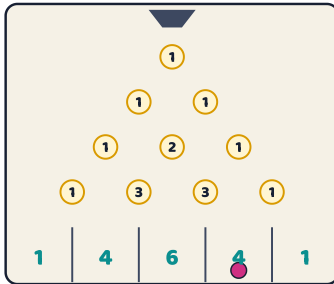
Satu jalur: $\rightarrow \leftarrow \rightarrow \rightarrow$

Peluang jalur ini:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Ada 3 kali ke kanan, jadi
kelereng jatuh di laci 3.
(Laci bernomor 0 sampai 4.)

Langkah 2. Satu jalur, misalnya kanan-kiri-kanan-kanan, berpeluang $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Banyak pantulan ke kanan menentukan nomor laci: 3 kali ke kanan berarti laci 3.



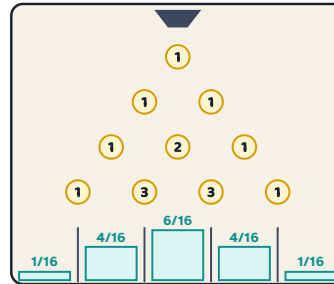
Hitung banyak jalur

Angka di setiap paku = jumlah
dua angka tepat di atasnya.

Muncul segitiga Pascal!

Ke laci 0-4 ada 1, 4, 6, 4, 1
jalur, yaitu $C(4, k)$.

Langkah 3. Banyak jalur menuju setiap paku sama dengan jumlah dua angka di atasnya. Muncullah segitiga Pascal: ke laci 0 sampai 4 ada 1, 4, 6, 4, 1 jalur, yaitu $\binom{4}{k}$.



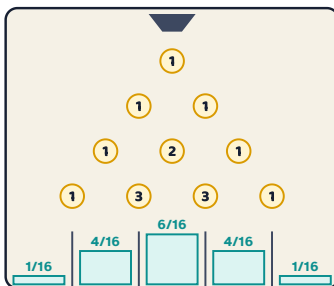
Tiap jalur berpeluang 1/16

Laci k menerima $C(4, k)$ jalur,
sehingga

$$P(X = k) = C(4, k) / 16$$

Laci tengah paling ramai:
 $6/16 = 37,5\%$.

Langkah 4. Karena setiap jalur berpeluang $\frac{1}{16}$, peluang jatuh di laci k adalah $\binom{4}{k} / 16$. Tumpukannya sudah mulai berbentuk lonceng.



Rumus umum binomial

Satu jalur dengan k kali ke kanan
berpeluang $p^k(1-p)^{n-k}$, dan ada
 $C(n, k)$ jalur seperti itu.

Kalikan keduanya!

n baris, peluang ke kanan p :

$$P(X = k) = C(n, k) \cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

Langkah 5. Secara umum, dengan n baris dan peluang ke kanan p : satu jalur dengan k kali ke kanan berpeluang $p^k(1-p)^{n-k}$, dan ada $\binom{n}{k}$ jalur seperti itu. Itulah rumus binomial!



RUMUS PELUANG BINOMIAL

Jika $X \sim B(n, p)$, maka untuk $k = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dengan $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dari Bab 32. Dalam kata-kata: *banyak urutan* $\times$ *peluang satu urutan*.

▼ Mengapa rumusnya begitu? (bukti singkat)

Tulis hasil n percobaan sebagai untaian huruf S (sukses) dan G (gagal), misalnya SGSSG. Karena percobaan saling bebas, peluang satu untaian dengan tepat k huruf S adalah hasil kali peluangnya: p sebanyak k kali dan $1 - p$ sebanyak $n - k$ kali, yaitu $p^k(1 - p)^{n-k}$.

Ada berapa untaian seperti itu? Sama dengan banyak cara memilih k posisi untuk huruf S dari n posisi: $\binom{n}{k}$. Untaian-untaiannya saling lepas (tidak mungkin terjadi bersamaan), jadi peluangnya dijumlahkan: $\binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$. Bonus: menurut Teorema Binomial, jumlah semua peluang itu $(p + (1 - p))^n = 1^n = 1$, persis seperti syarat distribusi peluang.



RUMUS HIDUP

Peluang binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Hitung banyak urutan yang memuat tepat k sukses, lalu kalikan dengan peluang satu urutan: p dipangkatkan banyak sukses, dikali $(1 - p)$ dipangkatkan banyak gagal.

 n

Banyak percobaan

 k

Banyak sukses

 p

Peluang sukses

 P

Peluang

PELUANG

0,2461**iniilah banyak sukses yang paling mungkin (modus)**

Ada **252** urutan berbeda yang memuat tepat **5** sukses dari **10** percobaan. Satu urutan seperti itu berpeluang **$9,766 \times 10^{-4}$** . Hasil kalinya: $P(X = 5) = \mathbf{0,2461}$, atau sekitar **24,609** %.

Cek satuan: Peluang tidak bersatuan dan selalu di antara 0 dan 1.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINOMIAL-PELUANG](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-binomial-peluang)

CONTOH Menebak soal pilihan ganda

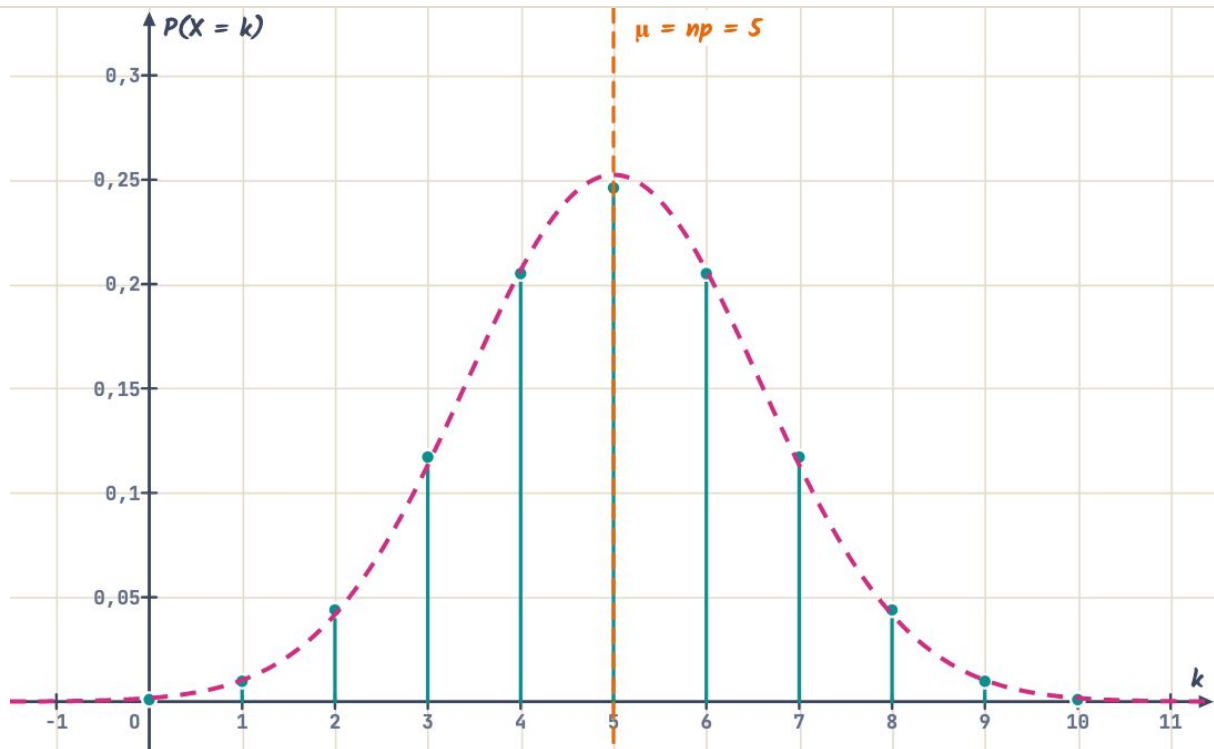
Ayu kehabisan waktu dan menebak 5 soal pilihan ganda terakhir. Setiap soal punya 4 pilihan dengan tepat satu jawaban benar. Berapa peluang Ayu menebak benar tepat 2 soal?

- 1 Cek syarat: 5 soal (tetap), benar/salah (dua hasil), peluang benar $\frac{1}{4}$ (sama), tebakan saling bebas. Jadi $X \sim B(5, \frac{1}{4})$.
- 2 $P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{16} \times \frac{27}{64}$.
- 3 $= \frac{270}{1024} \approx 0,264$.

Sekitar 26,4%. Coba sendiri di Rumus Hidup: dengan $n = 5$ dan $p = 0,25$, banyak benar yang paling mungkin adalah 1, bukan 2.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$X \sim B(10; 0,5), \quad \mu = np = 5, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 1,58$$



✓ $np \geq 5$ dan $n(1-p) \geq 5$: kurva normal sudah pas

$p = 0,5$: simetris sempurna

$\mu = np$

5

σ

1,581

k paling mungkin

5

peluangnya

0,2461

Batang tegak (hijau toska) adalah $P(X = k)$; garis putus-putus magenta adalah kurva normal dengan rata-rata dan simpangan baku yang sama. Geser n dan p , atau tekan ► **Jalankan** agar n bertambah sendiri. Kapan histogramnya miring? Kapan ia mulai pas dengan lonceng?



TAMU DARI MASA LALU

Percobaan sukses-gagal yang diulang disebut juga **percobaan Bernoulli**, untuk menghormati Jacob Bernoulli (1655–1705) dari Swiss. Dalam bukunya *Ars Conjectandi* ("Seni Menduga"), yang baru terbit pada 1713 setelah ia wafat, Bernoulli membuktikan bahwa jika percobaan diulang sangat banyak, persentase sukses akan mendekati p . Hasil ini kini dikenal sebagai *hukum bilangan besar*, fondasi semua survei dan asuransi modern.

34.3 Rataan dan varians binomial

Kalau 100 benih cabai masing-masing tumbuh dengan peluang 0,9, berapa yang kamu tebak akan tumbuh? Tentu sekitar 90. Tebakan alami itu adalah $np = 100 \times 0,9$. Tetapi hasil nyata jarang tepat 90; kadang 87, kadang 93. Seberapa lebar "kadang-kadang" itu diukur oleh simpangan baku.



RATAAN DAN VARIANS BINOMIAL

Jika $X \sim B(n, p)$, maka

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p), \quad \sigma =$$

Varians paling besar saat $p = \frac{1}{2}$ (paling tak terduga) dan nol saat $p = 0$ atau $p = 1$ (hasilnya sudah pasti).

Bahasa sederhana • Gampangnya: rata-rata banyak sukses = banyak percobaan $\times$ peluang sukses. Lempar koin 20 kali, rata-ratanya $20 \times \frac{1}{2} = 10$ angka. Tanam 50 benih dengan peluang tumbuh 0,8, rata-ratanya $50 \times 0,8 = 40$ benih tumbuh.

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Rata-rata banyak sukses adalah n kali p . Sebarannya diukur oleh simpangan baku: akar dari n kali p kali $(1-p)$.

n Banyak percobaan (pemegang tiket)

p Peluang sukses (datang)

σ Simpangan baku orang

SIMPANGAN BAKU

3,74

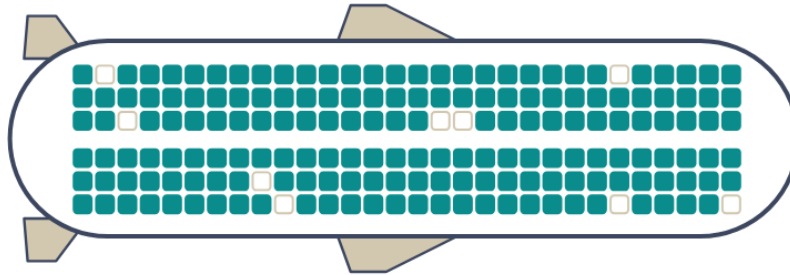
orang

Rata-rata $\mu = np = 174,8$ orang datang. Hasil nyata biasanya menyimpang sekitar $\sigma = 3,74$ orang dari rata-rata itu. Bila histogramnya mirip lonceng, sekitar 95% hari banyak penumpangnya berada di antara **167,321** dan **182,279** ($\mu \pm 2\sigma$).

Cek satuan: σ bersatuan sama dengan X (di sini: orang). Varians σ^2 bersatuan orang².

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINOMIAL-SEBARAN

Hari ke-7: 171 dari 190 pemegang tiket datang

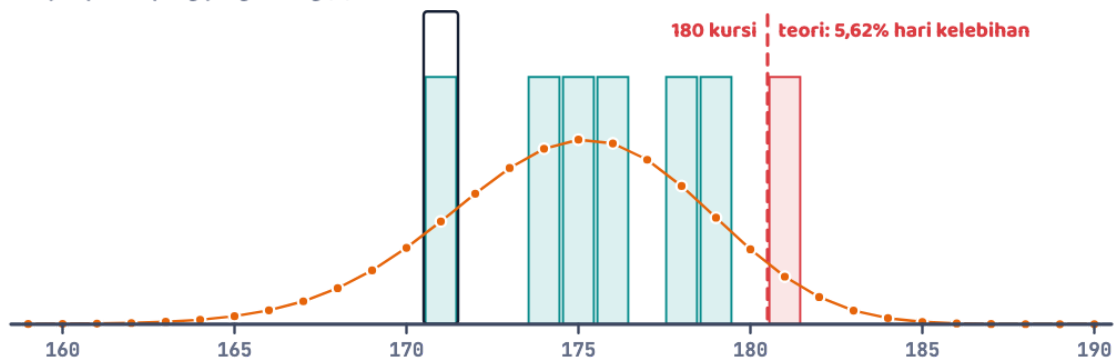


Di gerbang

Semua dapat kursi ✓

kursi kosong: 9

Banyak penumpang yang datang (X) • simulasi • teori binomial

Hari terbang
7Hari kelebihan penumpang
14,3%Teori $P(X > 180)$
5,62%Rata-rata datang (np)
174,8

Pesawat ini berkursi 180. Setiap hari, tiap pemegang tiket datang atau batal secara acak (angka ilustrasi). Tekan ► **Jalankan** untuk menerbangkan pesawat hari demi hari, atau tombol ⚡ untuk ratusan hari sekaligus. Batang merah adalah hari ketika ada penumpang yang tidak kebagian kursi. Berapa tiket paling banyak yang boleh dijual agar risikonya di bawah 5%?

Dengan peluang datang 0,92, menjual 189 tiket memberi risiko kelebihan penumpang sekitar 3%, tetapi 190 tiket sudah sekitar 5,6%, dan 192 tiket melonjak menjadi sekitar 15%. Satu tiket tambahan bisa mengubah risiko secara drastis, karena kita berada di "ekor" distribusi.

Pesawat perintis di pedalaman Papua berkursi 10. Maskapai menjual 12 tiket karena biasanya ada yang batal. Anggap setiap pemegang tiket datang dengan peluang 0,8, saling bebas (angka ilustrasi). Berapa peluang ada penumpang yang datang tetapi tidak kebagian kursi?

- 1 Misalkan X = banyak penumpang yang datang. Maka $X \sim B(12; 0,8)$. Ada yang tidak kebagian kursi jika $X \geq 11$.
- 2 $P(X = 11) = \binom{12}{11}(0,8)^{11}(0,2) = 12 \times 0,08590 \times 0,2 \approx 0,2062$.
- 3 $P(X = 12) = (0,8)^{12} \approx 0,0687$.
- 4 $P(X \geq 11) \approx 0,2062 + 0,0687 = 0,2749$.

Sekitar 27,5%, lebih dari 1 di antara 4 penerbangan! Jika hanya 11 tiket dijual, risikonya turun menjadi $P(X = 11) = 0,8^{11} \approx 8,6\%$. Rataannya pun masuk akal: $np = 9,6$ penumpang untuk 12 tiket.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

LINEARITAS NILAI HARAPAN: SENJATA RAHASIA

Mengapa $E(X) = np$? Tulis $X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, dengan $I_j = 1$ jika percobaan ke- j sukses dan 0 jika gagal. Setiap $E(I_j) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$. Karena nilai harapan bersifat **linear**, $E(X) = E(I_1) + \dots + E(I_n) = np$. Hebatnya, sifat $E(A + B) = E(A) + E(B)$ berlaku *bahkan jika A dan B tidak saling bebas*.

Contoh olimpiade: pada acara tukar kado, 30 siswa memasukkan kado ke sebuah kotak, lalu masing-masing mengambil satu kado secara acak. Berapa nilai harapan banyak siswa yang mendapat kadonya sendiri? Siswa ke- j mendapat kadonya sendiri dengan peluang $\frac{1}{30}$, jadi jawabannya $30 \times \frac{1}{30} = 1$. Ajaibnya, jawabannya tetap 1 untuk 5 siswa maupun 5 juta siswa! (Untuk varians binomial $np(1 - p)$, kita juga memakai kebebasan: varians dari jumlah variabel yang saling bebas sama dengan jumlah variansnya.)

34.4 Distribusi normal: si kurva lonceng

Kembali ke tinggi badan. Bayangkan histogram tinggi seluruh siswa SMA di sebuah provinsi, dengan kelas-kelas selebar 1 cm, lalu 0,5 cm, lalu makin sempit lagi. Puncak-puncak batangnya makin rapat, dan akhirnya menyatu menjadi **kurva mulus** berbentuk lonceng. Untuk variabel kontinu seperti ini, peluang tidak lagi dibaca dari tinggi batang, melainkan dari **luas daerah di bawah kurva**.



DEFINISI • DISTRIBUSI NORMAL

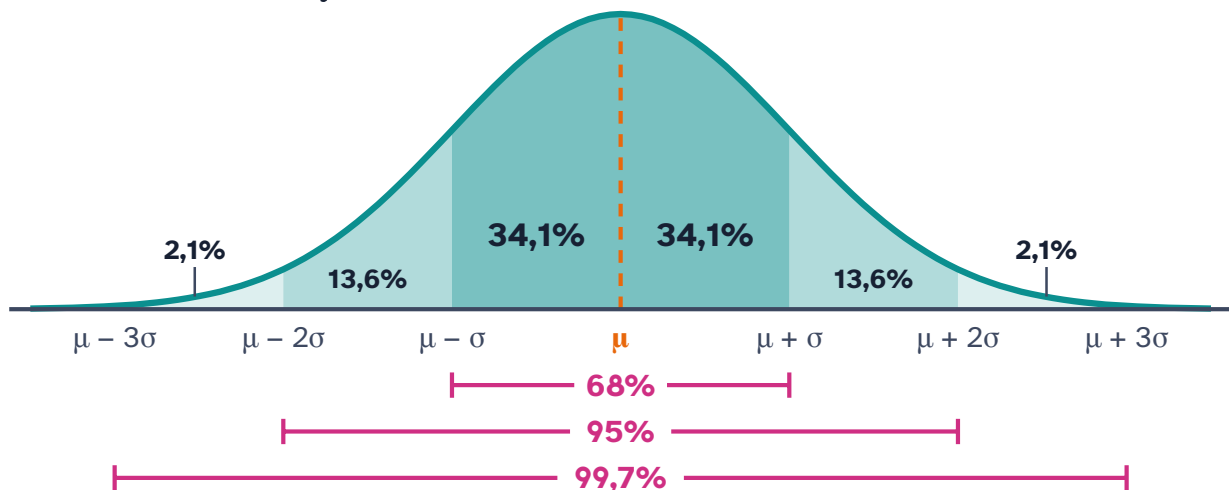
Variabel acak kontinu X berdistribusi **distribusi normal** dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ , ditulis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, jika grafik kepadatannya berbentuk lonceng dengan sifat:

- simetris terhadap garis $x = \mu$, sehingga rata-rata = median = modus;
- makin jauh dari μ , kurva makin rendah tetapi tidak pernah menyentuh sumbu;
- luas seluruh daerah di bawah kurva adalah 1, dan $P(a < X < b) = \text{luas di antara } x = a \text{ dan } x = b$.

Persamaan kurvanya adalah $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Perhatikan: di dalamnya ada π dan e , dua bilangan paling terkenal dalam matematika, bekerja sama menggambar sebuah lonceng.

Bahasa sederhana • Gampangnya: kurva normal itu seperti **bukit yang simetris**. Puncaknya ada di rata-rata. Kebanyakan data berkumpul dekat puncak, dan makin ke pinggir makin sedikit. Makin besar simpangan baku, bukitnya makin landai dan lebar.

Aturan 68–95–99,7



Contoh: jika tinggi siswa berdistribusi $N(160, 8^2)$ dalam cm, sekitar 68% siswa bertinggi 152–168 cm, 95% bertinggi 144–176 cm, dan hampir semuanya (99,7%) bertinggi 136–184 cm.



ATURAN EMPIRIS (68–95–99,7)

Untuk setiap distribusi normal, sekitar **68%** data berada dalam jarak σ dari rata-rata, sekitar **95%** dalam jarak 2σ , dan sekitar **99,7%** dalam jarak 3σ . Aturan ini juga disebut **aturan empiris**.

$P(a < X < b) =$ luas daerah di bawah kurva dari a sampai

$$P(152 < X < 168) = P(-1 < Z < 1) \approx 0,6827$$



$\mu \pm \sigma$: sekitar 68%

z untuk a
-1

z untuk b
1

$P(a < X < b) =$ luas arsiran
0,6827

Seret titik a dan b di sumbu mendatar (data tinggi badan ini ilustrasi). Mulai dari $a = \mu - \sigma$ dan $b = \mu + \sigma$: luasnya sekitar 0,68. Sekarang ubah σ . Kurvanya makin runcing atau makin landai, tetapi luas totalnya selalu 1. Mengapa puncaknya harus naik saat σ mengecil?



AWAS JEBAKAN

Pada penulisan $N(\mu, \sigma^2)$, angka kedua adalah **varians**, bukan simpangan baku. Jadi $X \sim N(160, 64)$ berarti $\sigma = \sqrt{64} = 8$ cm, bukan 64 cm. Beberapa buku dan kalkulator meminta σ , bukan σ^2 ; bacalah dengan teliti.



AWAS JEBAKAN

Untuk variabel kontinu, peluang satu nilai tepat selalu 0: $P(X = 160) = 0$, karena "luas" sebuah garis adalah nol. Yang bermakna adalah peluang suatu **rentang**, misalnya $P(159,5 < X < 160,5)$. Akibatnya, $P(X < 160)$ dan $P(X \leq 160)$ sama saja.



TAMU DARI MASA LALU

Kurva lonceng pertama kali muncul pada 1733 dalam karya Abraham de Moivre, matematikawan kelahiran Prancis yang tinggal di London. Ia sedang menghitung peluang banyak angka dari ratusan lemparan koin, dan menemukan bahwa histogram binomial mendekati sebuah kurva mulus. Sekitar 1809, Carl Friedrich Gauss memakai kurva yang sama untuk menjelaskan galat pengukuran posisi benda langit. Itulah sebabnya kurva normal juga disebut **kurva Gauss**.

MITOS

"Semua data di dunia nyata berdistribusi normal."

MITOS

"Koin sudah lima kali muncul angka, jadi lemparan berikutnya pasti gambar."

FAKTA

Banyak yang tidak. Pendapatan penduduk, harga rumah, dan waktu menunggu angkot condong ke kanan: sebagian kecil nilainya sangat besar. Selalu periksa histogramnya dulu sebelum memakai kurva normal.

FAKTA

Koin tidak punya ingatan. Setiap lemparan saling bebas dan peluangnya tetap $\frac{1}{2}$. Keyakinan keliru ini disebut *kekeliruan penjudi* (*gambler's fallacy*).

MITOS

"Koinnya adil, jadi peluang tepat 5 angka dari 10 lemparan adalah $\frac{1}{2}$."

FAKTA

Hanya sekitar 24,6%. Yang bernilai $\frac{1}{2}$ adalah peluang satu lemparan. Hasil "tepat setengah" memang yang paling mungkin, tetapi tetap hanya satu dari sebelas kemungkinan.

34.5 Skor z dan tabel normal baku

Ada tak hingga banyak kurva normal: rata-rata dan simpangan bakunya bisa apa saja. Untungnya, semua kurva itu bisa "diseragamkan" menjadi satu kurva baku dengan rata-rata 0 dan simpangan baku 1. Caranya: ukur setiap nilai

dengan **berapa simpangan baku** ia berada dari rata-rata.



SKOR Z DAN NORMAL BAKU

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Bilangan $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ disebut **skor z** (nilai baku), dan $N(0, 1)$ disebut distribusi **normal baku**.

Peluangnya ditulis $\Phi(z) = P(Z < z)$. Karena simetris, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, sehingga

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

z	$\Phi(z) = P(Z < z)$	Arti
0	0,5000	tepat setengah data di bawah rata-rata
0,5	0,6915	
1	0,8413	$P(-1 < Z < 1) \approx 0,6827$: aturan 68%
1,25	0,8944	
1,5	0,9332	
1,645	0,9500	batas 5% teratas
1,96	0,9750	$P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$: dipakai survei dan hitung cepat
2	0,9772	$P(-2 < Z < 2) \approx 0,9545$: aturan 95%
2,5	0,9938	
3	0,9987	$P(-3 < Z < 3) \approx 0,9973$: aturan 99,7%

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Skor z menjawab satu pertanyaan: nilai ini berjarak berapa simpangan baku dari rata-rata, dan ke arah mana?

 x

Nilai data (tinggi badan) cm

 μ

Rata-rata cm

 σ

Simpangan baku cm

 z

Skor z

SKOR Z

1,5

Tinggi **172** cm berjarak **1,5** simpangan baku di **atas** rata-rata **160** cm. Jika tinggi badan berdistribusi normal, kira-kira **93,3%** siswa lebih pendek darinya.

Cek satuan: x , μ , dan σ bersatuan sama (cm), sehingga satuannya saling menghapus: skor z tidak bersatuan. Karena itu skor z bisa membandingkan hal yang satuannya berbeda.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SKOR-Z](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-skor-z)



TRIK KAK LINTANG

Gambar, arsir, hitung. Sebelum menyentuh kalkulator, sketsa lonceng kecil, tandai μ , lalu arsir daerah yang ditanyakan. Sketsa itu langsung memberi tahu apakah jawabanmu harus lebih dari atau kurang dari 0,5. Untuk z negatif, pakai cermin: $\Phi(-1,25) = 1 - \Phi(1,25)$.

Mesin mengisi beras berlabel 5 kg. Isi kemasan berdistribusi normal dengan rata-rata 5,05 kg dan simpangan baku 0,04 kg (angka ilustrasi). Berapa persen kemasan yang isinya kurang dari 5 kg? Gunakan $\Phi(1,25) = 0,8944$.

- 1 Skor z untuk 5 kg: $z = \frac{5 - 5,05}{0,04} = \frac{-0,05}{0,04} = -1,25$.
- 2 Sketsa: daerah di kiri $z = -1,25$, jadi jawabannya pasti kurang dari 0,5.
- 3 $P(X < 5) = \Phi(-1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$.

Sekitar 10,6% kemasan kurang dari 5 kg, kira-kira 1 dari 10. Terlalu banyak untuk pabrik yang jujur!

Pabrik pada contoh sebelumnya ingin hanya 2% kemasan yang berisi kurang dari 5 kg, dengan simpangan baku tetap 0,04 kg. Berapa rata-rata isi yang harus disetel? Gunakan $\Phi(2,054) \approx 0,98$.

- 1 Syaratnya $P(X < 5) = 0,02$. Karena $\Phi(-2,054) = 1 - 0,98 = 0,02$, skor z untuk 5 kg harus $-2,054$.
- 2 $\frac{5 - \mu}{0,04} = -2,054 \implies \mu = 5 + 2,054 \times 0,04 \approx 5,082$.
- 3 Cek: $z = \frac{5 - 5,082}{0,04} = -2,05$, dan $\Phi(-2,05) \approx 0,02$. ✓

Rataan harus disetel sekitar 5,082 kg, yaitu 82 gram di atas label. Cara lain yang lebih hemat beras: perbaiki mesin agar simpangan bakunya lebih kecil. Inilah normal invers: dari peluang mundur ke nilai.

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi dengan rata-rata, lalu bagi dengan simpangan baku. Contoh: $\mu = 160$, $\sigma = 8$, $x = 172 \Rightarrow z = 12/8 = 1,5$.



MATEMATIKA NUSANTARA

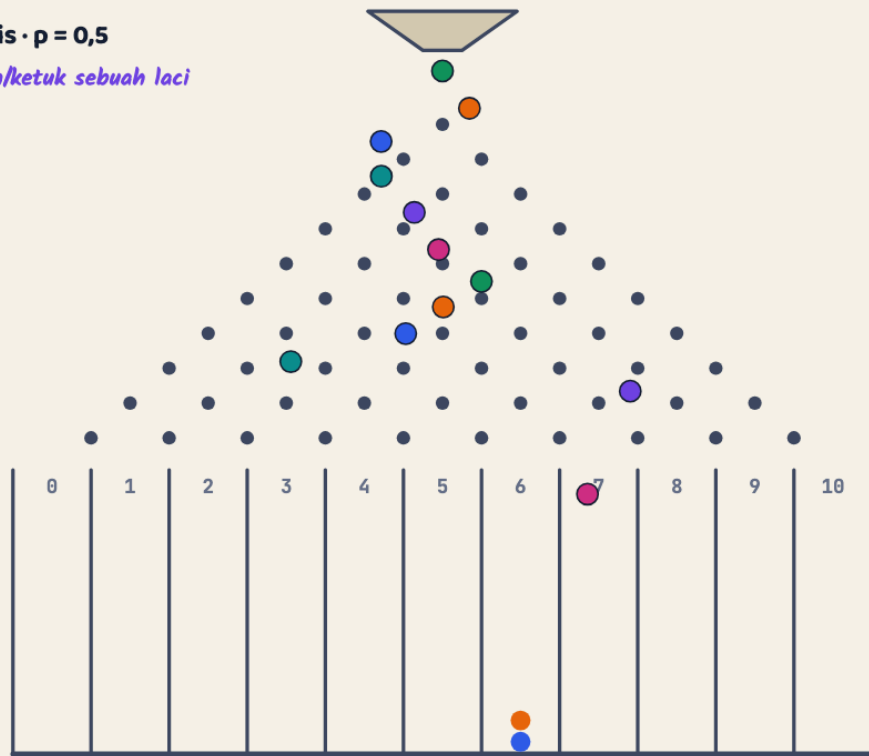
Skor z kemungkinan sudah "mengukurmu" sejak balita! Grafik pertumbuhan anak di Buku KIA yang dibawa ke posyandu memuat garis-garis lengkung. Garis-garis itu menandai skor z menurut standar WHO: garis tengah adalah median anak sehat seusiamu ($z = 0$), lalu $z = \pm 2$ dan $z = \pm 3$. Balita yang tinggi badan menurut umurnya berada di bawah garis $z = -2$ dikategorikan **pendek** (*stunting*), sehingga perlu perhatian gizi. Survei gizi nasional memakai patokan yang sama untuk menghitung angka stunting setiap provinsi.

34.6 Aproksimasi normal dan papan Galton

Sekarang kita bisa menjawab pertanyaan Dimas di komik. Papan Galton adalah **mesin binomial**: setiap kelereng melewati n baris paku, dan nomor lacinya adalah banyak pantulan ke kanan, $X \sim B(n, p)$. Jika banyak baris cukup besar, tumpukan kelereng membentuk lonceng normal. Saatnya mencoba sendiri!

$n = 10 \text{ baris} \cdot p = 0,5$

👉 arahkan/ketuk sebuah laci

Kelereng di laci
2Rata-rata nomor laci
6Teori np
5Simpangan baku
0Teori $\sqrt{np(1-p)}$
1,58

Tekan ► **Jalankan** dan saksikan kelereng berjatuhan, lalu tekan ⚡ untuk menambah ratusan kelereng sekaligus. Nyalakan **Tampilkan teori**: apakah tumpukannya mengikuti titik-titik binomial (oranye) dan kurva normal (magenta)? Ubah peluang ke kanan menjadi 0,8. Ke mana puncaknya pindah? Arahkan kursor ke sebuah laci (atau ketuk) untuk melihat isinya.

**APROKSIMASI NORMAL UNTUK BINOMIAL (DE MOIVRE-LAPLACE)**

Jika $X \sim B(n, p)$ dengan $np \geq 5$ dan $n(1 - p) \geq 5$ (patokan praktis), maka X kira-kira berdistribusi normal:

$$X \approx Y \sim N(np, np(1 - p))$$

Karena X hanya bernilai bulat, pakai **koreksi kontinuitas**: batang $X = k$ dianggap menempati selang $k - 0,5$ sampai $k + 0,5$. Contohnya, $P(X \geq k) \approx P(Y > k - 0,5)$ dan $P(X \leq k) \approx P(Y < k + 0,5)$.

Sebuah koin adil dilempar 100 kali. Perkirakan peluang muncul paling sedikit 60 angka. Gunakan $\Phi(1,9) = 0,9713$.

1 $X \sim B(100; 0,5)$, $\mu = 50$, $\sigma = \sqrt{100 \times 0,5 \times 0,5} = 5$. Syarat $np = n(1 - p) = 50 \geq 5$ terpenuhi.

2 Koreksi kontinuitas: $P(X \geq 60) \approx P(Y > 59,5)$.

3 $z = \frac{59,5 - 50}{5} = 1,9$, jadi $P \approx 1 - \Phi(1,9) = 1 - 0,9713 = 0,0287$.

Sekitar 2,9%. Nilai eksaknya (dengan komputer) 0,0284, jadi aproksimasinya sangat baik. Kalau seseorang mendapat 60 angka atau lebih dari 100 lemparan, wajar kita mulai curiga koinnya berat sebelah.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TEOREMA LIMIT PUSAT: MENGAPA LONCENG ADA DI MANA-MANA

Papan Galton menjumlahkan n "pantulan" kecil yang acak dan saling bebas. **Teorema Limit Pusat** menyatakan sesuatu yang jauh lebih umum: jumlah (atau rata-rata) dari banyak variabel acak saling bebas yang berdistribusi sama dengan varians berhingga akan mendekati distribusi normal, *apa pun* bentuk distribusi asalnya. Tinggi badan dipengaruhi ratusan gen dan banyak faktor lingkungan yang efeknya kira-kira menjumlah, sehingga hasilnya mendekati normal. Rata-rata nilai ujian, galat timbangan, dan hasil hitung cepat pemilu juga begitu. Bonus kalkulus: luas total di bawah kurva normal bernilai 1 karena integral Gauss $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.



TAMU DARI MASA LALU

Papan berpaku ini diciptakan oleh Francis Galton (1822–1911), ilmuwan Inggris dan kerabat Charles Darwin. Ia menamainya *quincunx*, dari pola paku yang tersusun selang-seling, dan memakainya untuk memperagakan bagaimana banyak pengaruh kecil yang acak menghasilkan kurva lonceng. Galton juga meneliti tinggi badan orang tua dan anak-anaknya, persis pertanyaan Dimas di ruang UKS.



Overbooking maskapai

Maskapai memodelkan banyak penumpang yang benar-benar datang dengan distribusi binomial, lalu memilih banyak tiket yang risikonya kecil.



Beras kemasan

Pabrik menyetel rata-rata isi sedikit di atas label dan memakai skor z agar hanya sebagian kecil kemasan yang kurang dari beratnya.



Grafik tumbuh posyandu

Tinggi dan berat balita dibandingkan dengan anak seusianya memakai skor z . Di bawah $z = -2$ menjadi tanda risiko stunting.



Hitung cepat pemilu

Lembaga survei memakai aproksimasi normal untuk binomial agar bisa menyatakan *margin of error*, misalnya $\pm 1\%$ dengan tingkat kepercayaan 95%.



Pengendalian mutu

Pabrik lampu atau obat menguji sampel; banyak barang cacat dalam sampel dimodelkan dengan binomial untuk memutuskan apakah satu kiriman diterima.

Cek Cepat

Jika $X \sim B(20; 0,3)$, nilai harapan X adalah...

0,3

14

6

4,2

Tinggi siswa berdistribusi $N(160, 64)$ dalam cm. Skor z untuk tinggi 176 cm adalah...

2

16

0,25

-2

Manakah yang tidak dapat dimodelkan dengan distribusi binomial?

Banyak angka dalam 10 lemparan koin.

Banyak benih yang tumbuh dari 20 benih, masing-masing tumbuh dengan peluang 0,9 secara bebas.

Banyak jawaban benar saat menebak 10 soal pilihan ganda.

Banyak lemparan dadu sampai mata 6 muncul pertama kali.

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D



Tantangan Rumah: papan Galton dari sepuluh koin

Bahan: 10 uang koin (atau 10 tutup botol yang satu sisinya diberi tanda), kertas berpetak, pensil.

1. Lempar 10 koin sekaligus, lalu hitung banyak koin yang menunjukkan angka (0 sampai 10).
2. Ulangi 50 kali. Catat hasilnya dengan turus.
3. Gambarlah diagram batang: sumbu mendatar banyak angka, sumbu tegak frekuensi.
4. Hitung frekuensi harapan $50 \times P(X = k)$ dengan Rumus Hidup. Misalnya untuk $k = 5$: $50 \times 0,246 \approx 12,3$ kali.
5. Gabungkan datamu dengan data beberapa teman (misalnya 10 orang $\times$ 50 lemparan = 500 lemparan) lalu gambar ulang.

Pertanyaan: Seberapa mirip diagrammu dengan lonceng? Apakah rata-rata banyak angka mendekati $np = 5$? Mengapa diagram gabungan sekelas tampak lebih mulus daripada diagrammu sendiri?



RINGKASAN KILAT

Bab 34 dalam 3 menit



Kamu sekarang bisa...

- menjelaskan **variabel acak diskret**, menyusun tabel distribusi peluangnya, dan menghitung **nilai harapan** serta varians
- mengenali **percobaan binomial** dan menghitung $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- menghitung **rataan** np dan **simpangan baku** $\sqrt{np(1-p)}$ distribusi binomial
- membaca **kurva normal**, memakai aturan 68-95-99,7, dan mengubah data menjadi **skor z** untuk menghitung peluang
- menjelaskan mengapa papan Galton dan binomial dengan n besar menghasilkan kurva lonceng (**aproksimasi normal**)

Istilah kunci

distribusi peluang

variabel acak

Nilai harapan

distribusi binomial

distribusi normal

aturan empiris

skor z

normal baku

koreksi kontinuitas

Rumus penting

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Peluang binomial. Hitung banyak urutan yang memuat tepat k sukses, lalu kalikan dengan peluang satu urutan: p dipangkatkan banyak sukses, dikali $(1 - p)$ dipangkatkan banyak gagal.

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Rataan & simpangan baku binomial. Rata-rata banyak sukses adalah n kali p . Sebarannya diukur oleh simpangan baku: akar dari n kali p kali $(1 - p)$.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Skor z (nilai baku). Skor z menjawab satu pertanyaan: nilai ini berjarak berapa simpangan baku dari rata-rata, dan ke arah mana?

Jangan sampai terjebak

- Nilai harapan tidak harus berupa nilai yang bisa muncul.
- Pada penulisan $N(\mu, \sigma^2)$, angka kedua adalah varians, bukan simpangan baku.
- Untuk variabel kontinu, peluang satu nilai tepat selalu 0: $P(X = 160) = 0$, karena "luas" sebuah garis adalah nol.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=34

Teka-teki untuk Bab 35

Dimas berseru, "Kalau data berdistribusi normal, histogramnya pasti simetris. Jadi kalau histogramnya simetris, datanya pasti normal!" Ayu menggeleng. Menurutnya, kalimat Dimas sama anehnya dengan "Semua kucing berkaki empat, jadi semua yang berkaki empat adalah kucing." Siapa yang benar? Bolehkah sebuah pernyataan "jika ... maka ..." dibalik begitu saja?

▼ Intip petunjuk

Cari contoh yang simetris tetapi bukan lonceng: hasil satu lemparan dadu (mata 1 sampai 6 sama peluangnya) histogramnya simetris tetapi datar. Pernyataan "jika P maka Q " tidak otomatis berarti "jika Q maka P ". Bab 35 membahas implikasi, konvers, kontraposisi, dan cara membuktikan sesuatu dengan sah.

35 Logika & Pembuktian: Menjadi Detektif Matematika

Iklan berkata "dipakai para juara". Kalau kamu memakainya, apakah kamu pasti juara? Detektif menangkap pelaku tanpa melihat kejadiannya. Bab ini memberimu senjata rahasia keduanya: penalaran yang tidak bisa dibantah.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menentukan nilai kebenaran **pernyataan majemuk** (negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi) dengan tabel kebenaran;
- membedakan **implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi**, serta mengenali penalaran yang menyesatkan;
- memakai **kuantor** "semua" dan "ada", menyusun ingkarannya, dan membantah klaim dengan **contoh penyangkal**;
- menyusun **bukti langsung**, bukti dengan kontraposisi, dan **bukti dengan kontradiksi** (misalnya $\sqrt{2}$ irasional);
- membuktikan rumus dengan **induksi matematika**, si efek domino.

KASUS TIMUN YANG HILANG

KOMIK · 4 PANEL

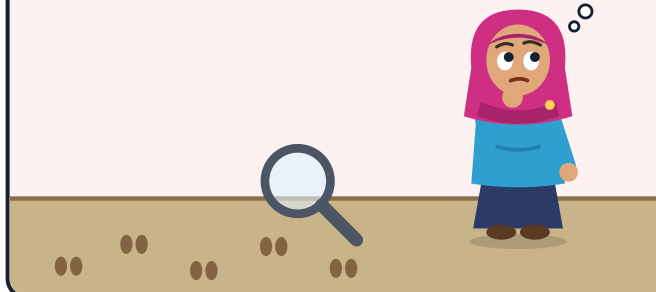
Pagi hari di kebun timun Pak Tani

DIMAS

Timun Pak Tani hilang! Pasti kancil pelakunya. Kancil kan doyan timun!

**AYU**

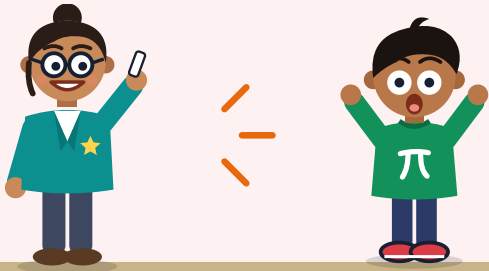
Tunggu! Jika pencurinya kancil, pasti ada jejak kecil. Tapi jejak kecil saja belum membuktikan pencurinya kancil!



KAK LINTANG

Betul! Ayam pun berjejak kecil. "Semua kucing berkaki empat" tidak berarti "yang berkaki empat pasti kucing".

JLEB!



Kasus bersambung di subbab 35.4...

ANCIL

Lagi pula kemarin aku seharian di hutan. Kalau di hutan, aku tak mungkin di kebun!

DIMAS

Lalu siapa pencurinya?



Tebak Dulu!

Teka-teki dari Bab 34: "Semua kucing berkaki empat." Ancil juga berkaki empat. Apa yang dapat disimpulkan?

Ancil pasti kucing.

Ancil pasti bukan kucing.

Tidak ada yang bisa disimpulkan: Ancil mungkin kucing, mungkin bukan.

Kalimat "semua kucing berkaki empat" pasti salah.

Jawabannya: tidak bisa disimpulkan. Kalimat itu hanya berkata "jika kucing, maka berkaki empat". Kebalikannya, "jika berkaki empat, maka kucing", adalah kalimat lain yang disebut **konvers**, dan konvers ini salah (kambing, kancil, dan meja pun berkaki empat). Membedakan keduanya adalah langkah pertama menjadi detektif matematika.

35.1 Pernyataan dan tabel kebenaran

Detektif tidak bekerja dengan perasaan, tetapi dengan kalimat yang bisa diuji. Dalam matematika, kalimat seperti itu disebut **pernyataan**.



DEFINISI

Pernyataan (proposisi) adalah kalimat yang bernilai **benar** (B) atau **salah** (S), tetapi tidak keduanya. Contoh: "Danau Toba berada di Sumatra Utara" (B) dan "7 adalah bilangan genap" (S). Kalimat seperti $x + 2 = 5$ disebut **kalimat terbuka**: nilainya baru jelas setelah x diganti bilangan.

Bahasa sederhana • Gampangnya: pernyataan adalah kalimat yang bisa kamu jawab "betul" atau "keliru". Pertanyaan ("Sudah makan?"), perintah ("Tutup pintunya!"), dan harapan ("Semoga cerah") tidak bisa dijawab begitu, jadi **bukan** pernyataan. Kalimat yang salah tetap pernyataan!

Pernyataan tunggal bisa dirangkai dengan kata penghubung menjadi **pernyataan majemuk**. Kita memakai huruf kecil p, q, r sebagai nama pernyataan.



LIMA PENGHUBUNG LOGIKA

- **Negasi** (ingkaran) $\neg p$: "tidak p ". Nilainya selalu kebalikan p .
- **Konjungsi** $p \wedge q$: " p **dan** q ". Benar hanya jika keduanya benar.
- **Disjungsi** $p \vee q$: " p **atau** q ". Salah hanya jika keduanya salah.
- **Implikasi** $p \Rightarrow q$: "**jika** p , **maka** q ". Salah hanya jika p benar dan q salah.
- **Biimplikasi** $p \Leftrightarrow q$: " p **jika dan hanya jika** q ". Benar jika nilai keduanya sama.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B



CATATAN NOTASI

Banyak buku SMA di Indonesia menulis negasi sebagai $\sim p$. Buku berbahasa Inggris sering memakai $p \rightarrow q$ dan $p \leftrightarrow q$ untuk implikasi dan biimplikasi. Artinya sama persis.

p

Kamu juara kelas.



BENAR

q

Kakak mentraktir bakso.



SALAH

 $\neg p$
S $p \wedge q$
S $p \vee q$
B $p \Rightarrow q$
S $p \Leftrightarrow q$
S

Lampu menyala = benar (B)

 $p \Rightarrow q$: Juara tetapi tidak ditraktir: janji DIINGKARI!

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Baris tabel

ke-2 (B, S)

Nilai $p \Rightarrow q$

S (salah)

Ketuk saklar p dan q (atau baris tabel di bawahnya). Lima lampu menyala jika pernyataannya benar. Ganti kalimatnya menjadi "Janji Kak Lintang": pada baris mana janji itu diingkari? Hanya ada **satu** baris!

**AWAS JEBAKAN**

Dalam matematika, "atau" berarti **salah satu atau keduanya** (inklusif). Pernyataan "7 prima atau 7 ganjil" benar, padahal kedua bagiannya benar. Dalam bahasa sehari-hari, "teh atau kopi?" sering berarti pilih satu saja; itu disebut "atau eksklusif" dan bukan arti $\vee$.

CONTOH Menentukan nilai kebenaran

Misalkan p : "Danau Toba berada di Sumatra Utara" dan q : " $2 + 2 = 5$ ". Tentukan nilai kebenaran $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg q$, dan $p \Rightarrow q$.

- 1 p benar, q salah. Jadi kita memakai baris kedua tabel (B, S).
- 2 $p \wedge q$: "dan" butuh keduanya benar, jadi **salah**. $p \vee q$: cukup satu yang benar, jadi **benar**.
- 3 $\neg q$: " $2 + 2 \neq 5$ ", jadi **benar**. $p \Rightarrow q$: syarat benar tetapi akibat salah, jadi **salah**.

$p \wedge q = \text{S}$, $p \vee q = \text{B}$, $\neg q = \text{B}$, $p \Rightarrow q = \text{S}$.

Berapa baris yang dibutuhkan tabel kebenaran? Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan, B atau S. Satu pernyataan baru **menggandakan** banyak baris.

RUMUS HIDUP Banyak baris tabel kebenaran

$$B = 2^n$$

Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan nilai, jadi setiap pernyataan baru menggandakan banyak baris tabel.

n Banyak pernyataan tunggal

B Banyak baris baris

BANYAK BARIS

8

baris

masih muat di satu halaman buku tulis

Dengan **3** pernyataan tunggal, tabel kebenarannya punya **8** baris. Jika kamu mengisi satu baris per detik tanpa istirahat, perlu sekitar **0,133** menit.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LOGIKA-BARIS



HUKUM DE MORGAN

Untuk pernyataan apa pun p dan q :

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Tanda $\equiv$ berarti **setara**: nilai kebenarannya selalu sama di setiap baris. Contoh: ingkaran "Dimas membawa SIM dan STNK" adalah "Dimas tidak membawa SIM **atau** tidak membawa STNK". Polisi cukup menemukan satu yang tidak dibawa!

▼ Bukti dengan tabel kebenaran

Bandungkan kolom $\neg(p \wedge q)$ dan $\neg p \vee \neg q$ untuk keempat baris (B,B), (B,S), (S,B), (S,S):

$p \wedge q = B, S, S, S$, sehingga $\neg(p \wedge q) = S, B, B, B$. Sementara $\neg p = S, S, B, B$ dan $\neg q = S, B, S, B$, sehingga $\neg p \vee \neg q = S, B, B, B$. Kedua kolom sama di setiap baris, jadi keduanya setara. Hukum kedua dibuktikan dengan cara yang sama.



TAMU DARI MASA LALU

Aristoteles (384–322 SM) dari Yunani menyusun aturan penalaran yang disebut *silogisme*: "Semua manusia fana; Sokrates manusia; jadi Sokrates fana." Lebih dari dua ribu tahun kemudian, George Boole (1815–1864) dari Inggris mengubah logika menjadi aljabar yang hanya memakai dua nilai, 1 (benar) dan 0 (salah). Sekitar tahun 1937, Claude Shannon menunjukkan bahwa aljabar Boole dapat dipakai untuk merancang rangkaian saklar listrik. Dari situlah lahir setiap komputer dan HP di sakumu.

35.2

Implikasi: janji, konvers, dan kontraposisi

Implikasi $p \Rightarrow q$ paling sering membuat orang tersandung. Cara termudah memahaminya: anggaplah implikasi sebagai **janji**. Kak Lintang berkata, "Jika kamu juara kelas, maka Kakak mentraktirmu bakso."

- Juara dan ditraktir: janji ditepati (B).
- Juara tetapi **tidak** ditraktir: janji **diingkari** (S).
- Tidak juara tetapi tetap ditraktir: Kakak sedang baik hati; janjinya tidak dilanggar (B).
- Tidak juara dan tidak ditraktir: janjinya juga tidak dilanggar (B).

Bahasa sederhana • Jadi kalimat "jika... maka..." hanya **salah** dalam satu keadaan: syaratnya terjadi, tetapi akibatnya tidak terjadi. Dalam semua keadaan lain, kalimat itu dianggap benar.



TRIK KAK LINTANG

Implikasi = janji. Janji hanya bisa diingkari kalau syaratnya dipenuhi. Untuk kontraposisi, ingat dua kata: "**tukar, lalu ingkari**". Dari "jika hujan, maka jalan basah" menjadi "jika jalan tidak basah, maka tidak hujan".

Dari satu implikasi $p \Rightarrow q$ kita bisa membuat tiga "kerabat".



DEFINISI

Untuk implikasi $p \Rightarrow q$: **konvers**-nya $q \Rightarrow p$, **invers**-nya $\neg p \Rightarrow \neg q$, dan **kontraposisi**-nya $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Nama	Bentuk	Contoh	Benar?
Implikasi	$p \Rightarrow q$	Jika n habis dibagi 4, maka n genap.	✓ benar
Konvers	$q \Rightarrow p$	Jika n genap, maka n habis dibagi 4.	✗ salah ($n = 6$)
Invers	$\neg p \Rightarrow \neg q$	Jika n tidak habis dibagi 4, maka n tidak genap.	✗ salah ($n = 6$)
Kontraposisi	$\neg q \Rightarrow \neg p$	Jika n tidak genap, maka n tidak habis dibagi 4.	✓ benar



SIFAT KONTRAPOSISI

Implikasi selalu setara dengan kontraposisinya, dan konvers selalu setara dengan invers:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

Tetapi implikasi **tidak** setara dengan konversnya. Inilah jawaban teka-teki kucing: "semua kucing berkaki empat" benar, konversnya salah.

▼ Bukti dengan tabel kebenaran

Untuk baris (B,B), (B,S), (S,B), (S,S): $p \Rightarrow q = B, S, B, B$. Kontraposisi $\neg q \Rightarrow \neg p$ memakai $\neg q = S, B, S, B$ dan $\neg p = S, S, B, B$, sehingga nilainya B, S, B, B. Sama persis!

Konvers $q \Rightarrow p = B, B, S, B$. Berbeda pada baris kedua dan ketiga, jadi konvers tidak setara dengan implikasi. ■



Tebak Dulu!

Aturan: "Jika seseorang mengendarai motor, maka ia wajib memakai helm." Dari kejauhan, polisi hanya tahu sebagian keadaan empat orang: A sedang mengendarai motor, B sedang berjalan kaki, C memakai helm, D tidak memakai helm. Siapa saja yang perlu didekati untuk memastikan tidak ada pelanggaran?

A dan C.

A saja.

A dan D.

Keempat orang itu.

Jawabannya: A dan D. Pelanggaran hanya terjadi pada baris " p benar, q salah": bermotor tetapi tanpa helm. A bermotor, jadi perlu dicek helmnya. D tanpa helm, jadi perlu dicek apakah ia bermotor (itulah kontraposisi!). C sudah berhelm, jadi apa pun kendaraannya, aturan tidak dilanggar. Ahli psikologi menemukan bahwa banyak orang dewasa keliru memilih C pada teka-teki semacam ini.

Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ berarti implikasi berlaku **dua arah**: $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Contoh: "Sebuah segitiga sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya 60° ." Setiap definisi yang baik sebenarnya biimplikasi.



TIGA ATURAN MENARIK KESIMPULAN YANG SAH

- **Modus ponens**: dari $p \Rightarrow q$ dan p , simpulkan q .
- **Modus tollens**: dari $p \Rightarrow q$ dan $\neg q$, simpulkan $\neg p$.
- **Silogisme**: dari $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow r$, simpulkan $p \Rightarrow r$.

Alibi Ancil di komik adalah modus ponens: "jika di hutan, maka tidak di kebun" dan "aku di hutan", jadi "aku tidak di kebun".



AWAS JEBAKAN

Dari $p \Rightarrow q$ dan q , kita **tidak boleh** menyimpulkan p . Kesalahan ini disebut *menegaskan akibat*, dan inilah trik favorit iklan. "Para juara memakai sepatu ini" tidak berarti "pemakai sepatu ini pasti juara". Begitu pula dari $p \Rightarrow q$ dan $\neg p$, kita tidak boleh menyimpulkan $\neg q$.

CONTOH Membongkar iklan yang menyesatkan

Iklan: "Para juara bulu tangkis minum susu merek X." Seorang ibu berpikir, "Kalau anakku minum susu X, ia akan menjadi juara." Sahkah penalaran itu?

- 1 Misalkan p : "seseorang juara bulu tangkis", q : "ia minum susu X". Klaim iklan berbentuk $p \Rightarrow q$.
- 2 Kesimpulan sang ibu berbentuk $q \Rightarrow p$. Itu **konvers**, yang tidak setara dengan klaim iklan.
- 3 Yang setara dengan klaim iklan hanyalah kontraposisinya: "Jika seseorang tidak minum susu X, maka ia bukan juara bulu tangkis".

Penalaran sang ibu tidak sah. Iklan "menyelundupkan" konvers agar kita mengambil kesimpulan yang tidak pernah benar-benar dikatakan.

35.3 Kuantor: "semua" dan "ada"

Kalimat terbuka $x^2 \geq 0$ belum bernilai benar atau salah. Selain mengganti x dengan bilangan, kita bisa memberi **kuantor** di depannya.



DEFINISI

Kuantor universal $\forall x$ dibaca "untuk setiap x " atau "semua x ". **Kuantor eksistensial** $\exists x$ dibaca "ada x " atau "terdapat paling sedikit satu x ".

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ bernilai benar.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ bernilai salah (tidak ada bilangan real yang kuadratnya negatif).
- "Ada bilangan prima yang genap" bernilai benar: bilangan 2.



INGKARAN KUANTOR

$$\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x) \qquad \neg(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x)$$

Untuk membantah "semua", cukup tunjukkan **satu** yang tidak memenuhi. Satu contoh seperti itu disebut **contoh penyangkal**.



AWAS JEBAKAN

Ingkaran "Semua siswa hadir" adalah "**Ada** siswa yang tidak hadir", bukan "Semua siswa tidak hadir". Kalau hanya satu siswa yang absen, kalimat pertama sudah salah, padahal kelas masih hampir penuh.

Bahasa sederhana • Bayangkan kalimat "semua" sebagai gembok besar. Satu contoh penyangkal sudah cukup untuk membukanya. Tetapi untuk menunjukkan bahwa gembok itu kuat, kamu tidak bisa sekadar mencoba seribu kunci: kamu butuh **bukti**.



Tebak Dulu!

Rumus $n^2 + n + 41$ menghasilkan bilangan prima untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 39$: empat puluh kali berturut-turut! Apakah hasilnya selalu prima untuk setiap bilangan cacah n ?

Ya, 40 contoh sudah cukup sebagai bukti.

Ya, karena 41 adalah bilangan prima.

Tidak, ada n yang membuatnya bukan prima.

Tidak ada yang bisa mengetahuinya.

Jawabannya: tidak. Untuk $n = 40$: $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 1681$. Satu contoh penyangkal menggugurkan klaim "untuk setiap", walaupun 40 kasus sebelumnya benar. Rumus ini dikenal sejak Euler (abad ke-18) sebagai contoh pola yang menipu.

Dugaan: $n^2 + n + 41$ selalu prima ($n = 0, 1, 2, \dots$)

n=0 41	n=1 43	n=2 47	n=3 53	n=4 61	n=5 71	n=6 83	n=7 97	n=8 ?	n=9 ?	n=10 ?	n=11 ?
n=12 ?	n=13 ?	n=14 ?	n=15 ?	n=16 ?	n=17 ?	n=18 ?	n=19 ?	n=20 ?	n=21 ?	n=22 ?	n=23 ?
n=24 ?	n=25 ?	n=26 ?	n=27 ?	n=28 ?	n=29 ?	n=30 ?	n=31 ?	n=32 ?	n=33 ?	n=34 ?	n=35 ?
n=36 ?	n=37 ?	n=38 ?	n=39 ?	n=40 ?	n=41 ?	n=42 ?	n=43 ?	n=44 ?	n=45 ?	n=46 ?	n=47 ?

$$n = 7: 7^2 + 7 + 41 = 97 \rightarrow \text{prima} \checkmark$$

Sudah 8 kasus dicek dan semuanya prima. Terbukti? Belum! Contoh bukan bukti.

Kasus dicek

8 dari 48

Status dugaan

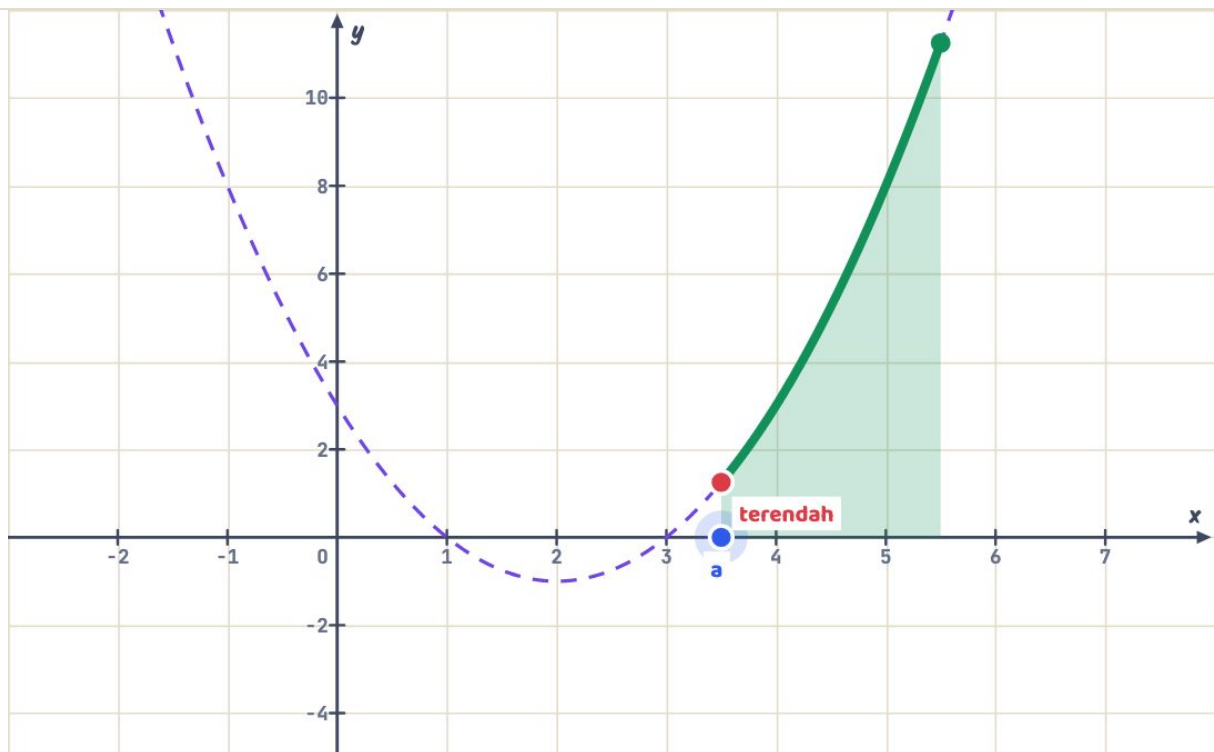
belum terbantah

Pilih sebuah dugaan, lalu tekan ► **Jalankan**. Kotak hijau = prima, kotak merah = contoh penyangkal. Lab berhenti di contoh penyangkal pertama; tekan ► lagi untuk melanjutkan atau ketuk kotak mana pun. Berapa kasus benar yang muncul sebelum dugaan gugur?

$$\forall x \in [a, b] : x^2 - 4x + c > 0$$

$$\forall x \in [3,5; 5,5] : x^2 - 4x + 3 > 0$$

Bagian hijau adalah grafik pada interval. Pernyataan benar jika seluruh bagian hijau berada di atas sumbu-x.



✓ **BENAR:** seluruh bagian hijau di atas sumbu-x

$b = a + L$

5,5

x terendah di interval

3,5

$f(x)$ terkecil

1,25

Seret titik biru a ke kiri atau ubah c . Kapan pernyataan "untuk semua x di interval" runtuh? Perhatikan: cukup **satu** titik merah di bawah sumbu-x.



URUTAN KUANTOR ITU PENTING

"Untuk setiap siswa, ada kursi yang ia duduki" ($\forall s \exists k$) benar di kelas biasa. "Ada kursi yang diduduki setiap siswa" ($\exists k \forall s$) berarti semua siswa berdesakan di satu kursi! Menukar urutan kuantor mengubah arti kalimat.

MITOS

"Kalau sudah dicek pada banyak contoh dan benar semua, berarti sudah terbukti."

MITOS

"Kalau 'jika p maka q ' benar, 'jika q maka p ' juga benar."

FAKTA

Contoh hanya menumbuhkan keyakinan, bukan kepastian. Rumus

$$n^2 + n + 41$$

lolos 40 kali lalu gagal. Pernyataan "untuk semua" butuh bukti umum.

FAKTA

Itu konvers, dan belum tentu benar. Semua kucing berkaki empat, tetapi kambing berkaki empat bukan kucing. Yang pasti setara hanyalah kontraposisi.

MITOS

"Kalimat 'Jika $2 + 2 = 5$, maka bulan terbuat dari keju' pasti salah."

MITOS

"Pembuktian hanya urusan ilmuwan matematika."

FAKTA

Dalam logika, implikasi dengan syarat salah selalu bernilai benar. Janji "jika..." tidak bisa diingkari kalau syaratnya tidak pernah terjadi.

FAKTA

Hakim, dokter, pemrogram, dan pemeriksa fakta memakainya setiap hari. Kamu juga, setiap kali berkata "tidak mungkin, karena..."

35.4 Bukti langsung dan logika detektif

Sebuah **bukti** adalah rantai alasan: dimulai dari hal yang sudah diketahui, lalu setiap mata rantai mengikuti aturan yang sah, sampai tiba di kesimpulan. Pada **bukti langsung**, kita mulai dari syarat p dan melangkah maju sampai q .



DEFINISI

Bilangan bulat n disebut **genap** jika $n = 2k$ dan **ganjil** jika $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Definisi yang tepat adalah "alat sidik jari" seorang detektif matematika.

Buktikan bahwa jumlah dua bilangan ganjil selalu genap.

- 1 Ambil dua bilangan ganjil **sembarang**: $m = 2a + 1$ dan $n = 2b + 1$, dengan a, b bilangan bulat. (Jangan memakai contoh angka!)
- 2 Jumlahkan: $m + n = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$.
- 3 Karena $a + b + 1$ bilangan bulat, $m + n$ berbentuk $2k$, jadi genap. ■

Terbukti untuk semua pasangan bilangan ganjil sekaligus, tanpa perlu mencoba satu per satu. Tanda ■ berarti "selesai dibuktikan".

Kadang jalan maju terasa buntu. Detektif lalu memakai jalan memutar: membuktikan **kontraposisinya**, yang setara dengan pernyataan aslinya.



TEOREMA (KUADRAT GENAP)

Untuk setiap bilangan bulat n : jika n^2 genap, maka n genap.

▼ Bukti dengan kontraposisi

Kontraposisinya: jika n **tidak** genap (ganjil), maka n^2 tidak genap (ganjil). Ambil $n = 2k + 1$. Maka $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, yang berbentuk $2m + 1$, jadi ganjil. Karena kontraposisinya benar, pernyataan aslinya juga benar. ■ (Teorema ini akan kita pakai di 35.5.)

Sekarang kembali ke kebun Pak Tani. Kancil sudah punya alibi. Tersangka tinggal tiga: Ayam, Kambing, dan Monyet.

Pencurinya tepat satu di antara Ayam, Kambing, dan Monyet. Mereka bersaksi: Ayam: "Kambing pelakunya." Kambing: "Ayam berbohong." Monyet: "Bukan aku pelakunya." Ternyata hanya satu di antara mereka yang berkata jujur. Siapa pencurinya?

- 1 Perhatikan kesaksian Ayam dan Kambing: yang satu adalah ingkaran yang lain. Jadi **tepat satu** di antara keduanya jujur.
- 2 Karena hanya satu saksi yang jujur, "jatah jujur" sudah habis dipakai Ayam atau Kambing. Jadi Monyet berbohong.
- 3 Monyet berbohong saat berkata "bukan aku pelakunya", jadi pencurinya Monyet.
- 4 Cek: jika Monyet pelakunya, Ayam berbohong, Kambing jujur, Monyet berbohong. Tepat satu yang jujur. ✓

Pencurinya Monyet (ingat ekor yang menjuntai dari pohon di panel terakhir komik?). Detektif tidak perlu melihat kejadiannya; cukup penalaran yang rapi.



TRIK KAK LINTANG

Strategi detektif: **andaikan** satu kemungkinan, telusuri akibatnya, lalu coret kemungkinan yang menabrak fakta. Kalau kemungkinannya sedikit, periksa semuanya seperti mengisi tabel kebenaran.

Warga Jujur selalu berkata benar • warga Bohong selalu berbohong

"Kami berdua
pembongkang."



Ani

JUJUR

pernyataan **SALAH**
X tidak cocok

(diam saja)



Budi

JUJUR

tidak ada syarat ✓

Cocok 1 dari 2. Ketuk lencana untuk mengganti tebakan.

Nyalakan "Tampilkan semua kemungkinan" untuk memeriksa seperti tabel kebenaran.

Pernyataan cocok

1 dari 2

Status

masih ada yang janggal

Di pulau ini, warga **Jujur** selalu berkata benar dan warga **Bohong** selalu berbohong. Ketuk lencana setiap warga untuk menebak jenisnya. Tebakanmu benar jika semua pernyataan "cocok". Nyalakan **Tampilkan semua kemungkinan** untuk melihat tabel kebenarannya. Perhatikan kasus 4: apa gunanya berkata "Aku jujur"?



Aturan lalu lintas

"Jika lampu merah, kendaraan berhenti" adalah implikasi. Pelanggaran hanya terjadi pada satu baris tabel: lampu merah, tetapi kendaraan jalan terus.



Iklan yang menyesatkan

"Dipakai para juara" tidak berarti "memakainya membuatmu juara". Waspada! konvers yang diselundupkan ke dalam iklan.



Pemrograman

Perintah *if*, *and*, *or*, dan *not* di aplikasi ojek daring dan gim adalah logika proposisi yang dijalankan jutaan kali per detik.



Saklar lampu tangga

Dua saklar seri bekerja seperti "dan", dua saklar paralel seperti "atau". Lampu tangga yang bisa dinyalakan dari atas dan bawah memakai "atau eksklusif".



Mesin pencari & perpustakaan

Kata kunci "batik AND Pekalongan" mempersempit hasil pencarian, sedangkan "batik OR tenun" memperluasnya.



Ruang sidang

Terdakwa dianggap tidak bersalah sampai kesalahannya dibuktikan. Alibi ("saat itu aku di tempat lain") adalah bukti dengan kontradiksi.

35.5 Bukti dengan kontradiksi: $\sqrt{2}$ irasional

Ini senjata paling dramatis seorang detektif: **andaikan kebalikannya benar**, lalu tunjukkan bahwa andaian itu membawa ke hal yang mustahil. Karena kenyataan tidak boleh mustahil, andaianya pasti salah. Cara ini disebut **bukti dengan kontradiksi** (*reductio ad absurdum*).



TEOREMA

$\sqrt{2}$ adalah bilangan **irasional**: tidak dapat ditulis sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan bulat dan $b \neq 0$.

① Andaikan $\sqrt{2}$ rasional:

$$\sqrt{2} = a/b$$

pecahan paling sederhana (FPB = 1)

Langkah 1. Detektif memulai dengan sebuah **andaian**: misalkan $\sqrt{2}$ rasional, yaitu $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan asli dan pecahannya sudah paling sederhana (tidak bisa disederhanakan lagi).

① Andaikan $\sqrt{2}$ rasional:

$$\sqrt{2} = a/b$$

pecahan paling sederhana (FPB = 1)

② Kuadratkan kedua ruas:

$$a^2 = 2b^2$$

a^2 genap, jadi a juga genap

Langkah 2. Kuadratkan: $2 = \frac{a^2}{b^2}$, jadi $a^2 = 2b^2$. Artinya a^2 genap. Menurut teorema di 35.4, jika a^2 genap, maka a genap.

① Andaikan $\sqrt{2}$ rasional:

$$\sqrt{2} = a/b$$

pecahan paling sederhana (FPB = 1)

② Kuadratkan kedua ruas:

$$a^2 = 2b^2$$

a^2 genap, jadi a juga genap

③ Tulis $a = 2k$, substitusi:

$$4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

b^2 genap, jadi b juga genap

Langkah 3. Karena a genap, tulis $a = 2k$. Maka $4k^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2k^2$. Sekarang b^2 genap, jadi b juga genap.

① Andaikan $\sqrt{2}$ rasional:

$$\sqrt{2} = a/b$$

pecahan paling sederhana (FPB = 1)

② Kuadratkan kedua ruas:

$$a^2 = 2b^2$$

a^2 genap, jadi a juga genap

③ Tulis $a = 2k$, substitusi:

$$4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

b^2 genap, jadi b juga genap

④ Periksa barang bukti:

a genap DAN b genap

a/b masih bisa dibagi 2 lagi!

Langkah 4. Periksa barang bukti: a genap dan b genap. Berarti pembilang dan penyebut $\frac{a}{b}$ masih bisa dibagi 2.

KONTRADIKSI!

① Andaikan $\sqrt{2}$ rasional:

$$\sqrt{2} = a/b$$

pecahan paling sederhana (FPB = 1)

② Kuadratkan kedua ruas:

$$a^2 = 2b^2$$

a^2 genap, jadi a juga genap

③ Tulis $a = 2k$, substitusi:

$$4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

b^2 genap, jadi b juga genap

④ Periksa barang bukti:

a genap DAN b genap

a/b masih bisa dibagi 2 lagi!

⑤ Bertentangan dengan ①! Andaian kita salah, jadi

$\sqrt{2}$ IRASIONAL. ■

Langkah 5. Ini bertentangan dengan langkah 1 (pecahan sudah paling sederhana). Andaian membawa kita ke hal yang mustahil, jadi andaian itu salah: $\sqrt{2}$ **irasional**. ■

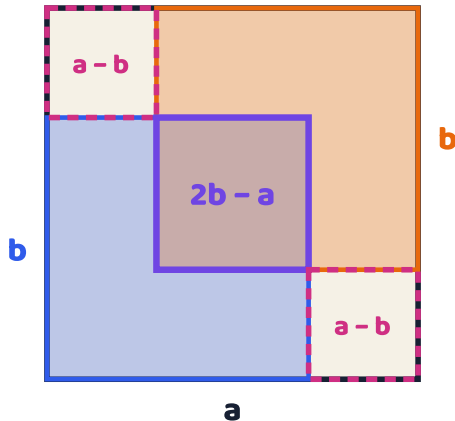


TAMU DARI MASA LALU

Konon, Hippiasus dari Metapontum, anggota kelompok Pythagoras ($\pm$ abad ke-5 SM), menemukan bahwa diagonal persegi tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat terhadap sisinya. Penemuan itu mengguncang keyakinan kelompoknya bahwa "segala sesuatu adalah bilangan (bulat)". Ada legenda bahwa ia ditenggelamkan di laut, tetapi sejarawan meragukan kisah ini. Bukti genap-ganjil seperti di atas sudah disinggung Aristoteles sekitar 2.300 tahun yang lalu.

**BUKTI TANPA KATA ALA TENNENBAUM**

Andaikan $a^2 = 2b^2$ dengan a, b bilangan asli **sekecil mungkin**. Letakkan dua persegi bersisi b di dua pojok persegi bersisi a . Luas dua persegi kecil sama dengan luas persegi besar, jadi bagian yang **tertutup dua kali** (tengah) harus sama luasnya dengan bagian yang **tidak tertutup** (dua pojok):



Luas biru + luas oranye = luas persegi a

$\Rightarrow$ luas tumpang tindih (ungu)

= luas dua pojok kosong (merah muda):

$$(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$$

Solusi bulat yang LEBIH KECIL!

Bertentangan dengan "sekecil mungkin".

Karena $b < a < 2b$, bilangan $2b - a$ dan $a - b$ adalah bilangan asli dengan $2b - a < a$. Kita mendapat solusi yang lebih kecil, padahal a sudah yang terkecil. Kontradiksi!

COBA SENDIRI **Coba sendiri: logaritma yang irasional**

Buktikan bahwa $\log_2 3$ irasional. (Ingat Bab 14: $\log_2 3 = x$ berarti $2^x = 3$.)

- 1 Andaikan $\log_2 3 = \frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan asli (nilainya positif karena $3 > 1$).
- 2 Maka $2^{a/b} = 3$. Pangkatkan kedua ruas dengan b : $2^a = 3^b$.
- 3 Ruas kiri genap (karena $a \geq 1$), sedangkan ruas kanan ganjil (hasil kali bilangan ganjil). Bilangan genap tidak mungkin sama dengan bilangan ganjil. Kontradiksi!

Jadi $\log_2 3$ irasional. Bukti dengan kontradiksi sering selesai dengan "argumen genap-ganjil" sesingkat ini.

Bukti dengan kontradiksi juga melahirkan prinsip yang tampak sepele tetapi sangat kuat. Jika 13 merpati masuk ke 12 sarang, pasti ada sarang yang dihuni lebih dari satu merpati. Mengapa? Andaikan tidak; maka setiap sarang berisi paling banyak 1 merpati, totalnya paling banyak 12. Kontradiksi dengan 13!



PRINSIP SARANG MERPATI

Jika n benda dimasukkan ke dalam k kotak, maka ada kotak yang berisi paling sedikit $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ benda. ($\lceil x \rceil$ berarti x dibulatkan ke atas.)

RUMUS HIDUP

Prinsip sarang merpati

$$m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

Jika n merpati masuk ke k sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit n/k merpati, dibulatkan ke atas.

n Banyak merpati (benda) ekor

k Banyak sarang (kotak) sarang

m Isi sarang terpadat (paling sedikit) ekor

ISI SARANG TERPADAT (PALING SEDIKIT)

2

ekor

13 anak, 12 bulan: pasti ada 2 yang lahir di bulan sama

13 merpati di 12 sarang: sebaik apa pun dibagi, pasti ada sarang berisi paling sedikit 2 merpati. Andaikan setiap sarang berisi paling banyak 1; totalnya paling banyak 12, kurang dari 13. Kontradiksi!

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MERPATI-PENGANTAR



LANJUT • IB & OLIMPIADE

BILANGAN PRIMA ADA TAK HINGGA BANYAKNYA

Sekitar 300 SM, Euklides memberi bukti yang masih dikagumi hingga kini. Andaikan bilangan prima hanya ada berhingga: $p_1, p_2, \dots, p_k$. Bentuk $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Bilangan $N > 1$ pasti punya faktor prima p , dan p harus salah satu dari daftar itu. Tetapi N dibagi prima mana pun dalam daftar selalu bersisa 1, jadi p tidak membagi N . Kontradiksi! Jadi daftar bilangan prima tidak pernah selesai. (Hati-hati: N sendiri belum tentu prima. Misalnya $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.)

35.6 Induksi matematika: efek domino

Bagaimana membuktikan sesuatu untuk **tak hingga** banyak bilangan, $n = 1, 2, 3, \dots$, tanpa mencoba satu per satu? Bayangkan barisan domino yang tak berujung. Semua domino pasti roboh asalkan dua syarat dipenuhi: domino pertama didorong, dan setiap domino yang roboh pasti merobohkan domino sesudahnya.



PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan tentang bilangan asli n . Jika

1. **kasus dasar:** $P(1)$ benar, dan
2. **langkah induktif:** untuk setiap $k \geq 1$, jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk **semua** bilangan asli n . Anggapan " $P(k)$ benar" pada langkah 2 disebut **hipotesis induksi**.

Bahasa sederhana • Gampangnya: buktikan bahwa domino pertama roboh, lalu buktikan bahwa setiap domino pasti menjatuhkan tetangganya. Kalau dua hal itu beres, semua domino roboh, sejauh apa pun barisannya.

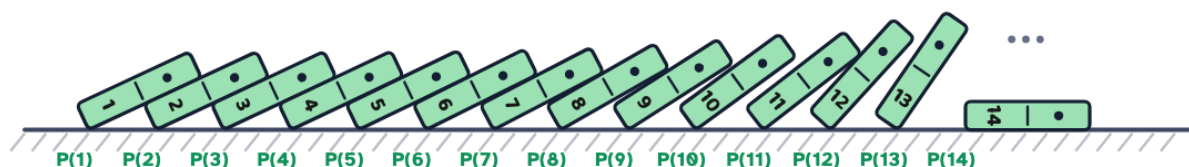
LAB MINI

Domino induksi: robuhkan semuanya!

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35

① **Kasus dasar: domino ke-1 didorong** ✓

② **Langkah induktif: jika domino ke- k roboh, domino ke- $(k+1)$ ikut roboh** ✓



Domino berjatuhan...

Domino roboh

14 dari 14

Kesimpulan

...

Tekan ► **Jalankan**. Lalu rusak syaratnya: matikan kasus dasar, atau matikan langkah induktif sehingga muncul celah. Coba juga mengetuk sebuah domino di tengah: domino mana saja yang roboh? Itulah induksi yang dimulai dari $n = n_0$.



AWAS JEBAKAN

Induksi butuh **kedua** syarat; satu saja tidak cukup. Pernyataan palsu " $n = n + 1$ " lolos langkah induktif (jika $k = k + 1$, tambahkan 1 ke kedua ruas: $k + 1 = k + 2$), tetapi kasus dasarnya gagal ($1 \neq 2$). Sebaliknya, kasus dasar saja hanyalah satu contoh, bukan bukti.

KERJAKAN BERSAMA

Kerjakan bersama: rumus Gauss dengan induksi

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk setiap bilangan asli n .

- 1 **Kasus dasar** $n = 1$: ruas kiri 1, ruas kanan $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Sama. ✓
- 2 **Hipotesis induksi**: andaikan $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ untuk suatu $k \geq 1$.
- 3 **Langkah induktif**: $1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
Inilah rumus untuk $n = k + 1$. ✓
- 4 **Kesimpulan**: menurut prinsip induksi matematika, rumus berlaku untuk semua bilangan asli n . ■

Rumus terbukti untuk tak hingga banyak n hanya dengan dua langkah. Perhatikan bahwa langkah 3 memakai hipotesis induksi; itulah ciri bukti induksi yang benar.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pasangkan suku pertama dengan suku terakhir: setiap pasangan berjumlah $n + 1$, dan ada $n/2$ pasangan.

 n Bilangan terakhir n S_n

Jumlah

JUMLAH

5.050soal legendaris Gauss kecil: **5.050**

$1 + 2 + \dots + 100 = 100 \times 101 : 2 = 5.050$. Dijumlah satu per satu oleh komputer: **5.050**. Sama persis, seperti yang dijamin induksi!

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-INDUKSI-GAUSS

Induksi juga bisa dilihat dengan mata. Tumpuk bilangan ganjil sebagai potongan berbentuk huruf L:

$$1 = 1^2$$



Langkah 1. Mulai dari 1 kotak: $1 = 1^2$. Inilah kasus dasar.

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$



Langkah 2. Tambahkan potongan L berisi 3 kotak (oranye): terbentuk persegi 2×2 . Jadi $1 + 3 = 2^2$.

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$



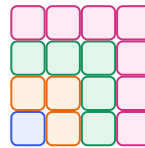
Langkah 3. Tambahkan potongan L berisi 5 kotak: persegi 3×3 , jadi $1 + 3 + 5 = 3^2$.

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$



Langkah 4. Potongan L berikutnya berisi 7 kotak: persegi 4×4 .

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$



Langkah 5. Potongan L berisi 9 kotak: persegi 5×5 . Bilangan ganjil ke- n adalah $2n - 1$.

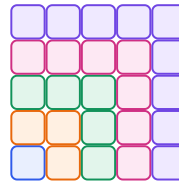
$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$



Langkah induktif: $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$, jadi pola ini berlanjut selamanya!

Langkah 6. Inilah langkah induktif dalam gambar: persegi $k \times k$ ditambah potongan L berisi $2k + 1$ kotak selalu menjadi persegi $(k + 1) \times (k + 1)$, karena $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Jadi $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ untuk semua n .



ADU CEPAT

Jumlah kilat hasil induksi

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-35

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Untuk $1 + 2 + \dots + n$, pakai $n(n + 1)/2$. Untuk $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, jawabannya n^2 . Cari dulu banyak sukunya!



MATEMATIKA NUSANTARA

Dalam dongeng **Kancil dan Buaya**, Kancil ingin menyeberangi sungai yang penuh buaya. Ia mengaku diutus raja untuk menghitung buaya, lalu meminta mereka berbaris dari tepi ke tepi. Sambil berseru "satu, dua, tiga...", Kancil melompat dari punggung ke punggung. Itulah induksi! Kancil pasti sampai di seberang karena (1) ia bisa melompat dari tepi ke buaya pertama (kasus dasar), dan (2) dari setiap buaya ia bisa melompat ke buaya berikutnya (langkah induktif).



LANJUT • IB & OLIMPIADE

"BUKTI" BAHWA SEMUA KUDA SEWARNA: DI MANA SALAHNYA?

Klaim: dalam setiap kelompok berisi n kuda, semua kudanya sewarna. Kasus dasar $n = 1$ jelas benar. Langkah: dari $k + 1$ kuda, singkirkan kuda pertama; sisa k kuda sewarna (hipotesis). Singkirkan kuda terakhir; sisa k kuda juga sewarna. Kedua kelompok "beririsan", jadi semua $k + 1$ kuda sewarna. Di mana salahnya? Langkah dari $k = 1$ ke $k + 1 = 2$: kedua kelompok berisi satu kuda dan **tidak beririsan** sama sekali. Satu domino rusak di awal, dan seluruh barisan berhenti. Pelajaran olimpiade: periksa bahwa langkah induktif berlaku untuk **setiap** k , termasuk yang terkecil.



Cek Cepat

Jika p benar dan q salah, pernyataan manakah yang bernilai benar?

$$p \wedge q$$

$$p \Rightarrow q$$

$$p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q$$

Kontraposisi dari "Jika hujan, maka Ayu membawa payung" adalah...

Jika Ayu tidak membawa payung, maka tidak hujan.

Jika Ayu membawa payung, maka hujan.

Jika tidak hujan, maka Ayu tidak membawa payung.

Hujan dan Ayu tidak membawa payung.

Dalam bukti dengan induksi, setelah membuktikan $P(1)$, langkah berikutnya adalah...

mencoba $P(2)$, $P(3)$, dan $P(4)$ satu per satu

membuktikan $P(k)$ untuk semua k sekaligus

menganggap $P(k + 1)$ benar lalu membuktikan $P(k)$

menganggap $P(k)$ benar lalu membuktikan $P(k + 1)$

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: detektif iklan

Bahan: koran, majalah, brosur, spanduk, atau iklan di TV/HP; buku catatan; pulpen dua warna.

1. Kumpulkan lima slogan iklan atau kalimat promosi (boleh dari spanduk di pinggir jalan).
2. Tulis setiap slogan dalam bentuk "Jika p , maka q ". Contoh: "Juara memakai sepatu ini" menjadi "Jika seseorang juara, maka ia memakai sepatu ini".
3. Tulis konvers dan kontraposisi setiap kalimat.
4. Garis bawahi dengan warna biru kalimat yang *benar-benar dikatakan* iklan, dan dengan warna merah kalimat yang *ingin dipercaya* pembuat iklan.
5. Diskusikan dengan keluargamu: apakah iklan itu menyelundupkan konvers?

Pertanyaan: Dari lima iklan, berapa yang mengandalkan kesalahan konvers? Tulis ulang satu slogan agar jujur secara logika, tetapi tetap menarik.

RINGKASAN KILAT Bab 35 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- menentukan nilai kebenaran **pernyataan majemuk** (negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi) dengan tabel kebenaran
- membedakan **implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi**, serta mengenali penalaran yang menyesatkan
- memakai **kuantor** "semua" dan "ada", menyusun ingkarannya, dan membantah klaim dengan **contoh penyangkal**
- menyusun **bukti langsung**, bukti dengan kontraposisi, dan **bukti dengan kontradiksi** (misalnya $\sqrt{2}$ irasional)
- membuktikan rumus dengan **induksi matematika**, si efek domino

Istilah kunci

pernyataan

Pernyataan

kalimat terbuka

pernyataan majemuk

Negasi

Konjungsi

Disjungsi

Implikasi

Biimplikasi

konvers

invers

kontraposisi

kuantor

Kuantor universal

Kuantor eksistensial

contoh penyangkal

Rumus penting

$$B = 2^n$$

Banyak baris tabel kebenaran. Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan nilai, jadi setiap pernyataan baru menggandakan banyak baris tabel.

$$m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

Prinsip sarang merpati. Jika n merpati masuk ke k sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit n/k merpati, dibulatkan ke atas.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Jumlah n bilangan asli pertama. Pasangkan suku pertama dengan suku terakhir: setiap pasangan berjumlah $n+1$, dan ada $n/2$ pasangan.

Jangan sampai terjebak

- Dalam matematika, "atau" berarti salah satu atau keduanya (inklusif).
- Dari $p \Rightarrow q$ dan q , kita tidak boleh menyimpulkan p .
- Ingkaran "Semua siswa hadir" adalah "Ada siswa yang tidak hadir", bukan "Semua siswa tidak hadir".

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=35

Teka-teki untuk Bab 36

Warung Bu Sri punya dua cabang. Hari ini cabang Pasar menjual 20 porsi nasi uduk dan 15 porsi lontong sayur, sedangkan cabang Stasiun menjual 10 porsi nasi uduk dan 25 porsi lontong sayur. Harga nasi uduk Rp8.000 dan lontong sayur Rp6.000. Berapa pendapatan tiap cabang? Bisakah kamu menuliskan semua angka itu sebagai dua tabel yang "dikalikan" sekaligus?

▼ Intip petunjuk

Pasar: $20 \times 8.000 + 15 \times 6.000 = \text{Rp}250.000$. Stasiun: $10 \times 8.000 + 25 \times 6.000 = \text{Rp}230.000$. Pola "baris kali kolom" ini adalah perkalian **matriks**, tabel angka yang bisa dihitung seperti bilangan. Itulah Bab 36!

36 Matriks: Tabel Ajaib yang Bisa Berhitung

Catatan stok warung, harga paket nasi, karakter game yang berputar, sampai pesan rahasia: semuanya bisa ditulis sebagai kotak berisi angka. Begitu angka-angka itu disusun rapi, kotak itu ternyata bisa dijumlah, dikali, bahkan "dibalik".

Setelah bab ini, kamu bisa

- membaca **matriks** sebagai tabel: ordo, baris, kolom, dan elemen a_{ij} ;
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan skalar, dan **mengalikan dua matriks** dengan aturan baris $\times$ kolom;
- menghitung **determinan** dan **invers** matriks 2×2 , serta memaknai determinan sebagai faktor pengali luas;
- menyelesaikan **sistem persamaan linear** dua variabel dengan invers matriks;
- memakai matriks untuk **rotasi**, **refleksi**, **dilatasi**, menemukan pola pangkat matriks, dan membuat **sandi rahasia**.

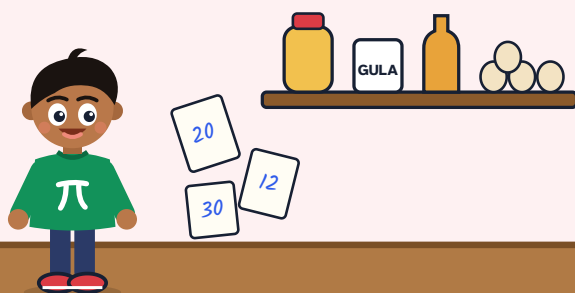
PESAN RAHASIA DI WARUNG BU SARI

KOMIK · 4 PANEL

Sore hari di warung Bu Sari, ibu Dimas

DIMAS

Aduh, catatan stoknya berceceran! Beras, gula, telur, dari Senin sampai Rabu... mana yang mana?



AYU

Susun saja jadi tabel: baris untuk barang, kolom untuk hari. Langsung kelihatan, kan?

	Sen	Sel	Rab
beras	20	18	15
gula	12	9	10
telur	30	24	27



KAK LINTANG

Lepas judulnya, kurung angkanya: jadilah **matriks**. Hebatnya, matriks bisa berhitung: total belanja, harga paket, sampai memutar gambar di game!



20	18	15
12	9	10
30	24	27



TING!

Sehelai kertas melayang dari balik karung beras...

ANCIL

Ini pesan rahasiaku: UKGV XAQS RDUW. Kuncinya sebuah matriks. Siapa bisa membacanya?

DIMAS

Sandi pakai matriks?! Harus kupecahkan!



UKGV XAQS
RDUW



BERAS

**Tebak Dulu!**

Dimas memutar gambar kancil 90° (berlawanan arah jarum jam, pusat O), lalu mencerminkannya terhadap sumbu-x. Ayu melakukan dua langkah yang sama dengan urutan terbalik: cermin dulu, baru putar. Bagaimana hasil akhir mereka?

Pasti sama persis, karena langkah-langkahnya sama.

Bentuk dan letaknya sama, hanya warnanya yang tertukar.

Berbeda: kedua kancil menghadap ke arah yang berlawanan.

Tidak bisa dibandingkan, karena cermin dan putar tidak bisa digabung.

Jawabannya: berbeda. Urutan Dimas sama saja dengan mencerminkan terhadap garis $y = -x$, sedangkan urutan Ayu sama dengan mencerminkan terhadap garis $y = x$. Di bab ini kamu akan melihat sebabnya: setiap transformasi adalah sebuah matriks, dan pada perkalian matriks, **urutan menentukan hasil**. Buktikan sendiri di Grafik Hidup subbab 36.6!

36.1 Matriks: tabel tanpa judul yang bisa berhitung

Di akhir Bab 35 kamu ditantang menyusun data penjualan dalam tabel. Ayu sudah melakukannya di komik: baris untuk barang, kolom untuk hari. Sekarang tambahkan satu langkah lagi. Lepaskan judul baris dan kolomnya, lalu kurung angka-angkanya. Jadilah sebuah **matriks**.

stok (kg)	Sen	Sel	Rab
beras	20	18	15
gula	12	9	10
telur	30	24	27

lepas
judul

$S =$

$$S = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 15 \\ 12 & 9 & 10 \\ 30 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

← baris ke-2

$s_{23} = 10$

ordo 3×3

Angka 10 di baris gula, kolom Rabu menjadi elemen s_{23} : **baris dulu, baru kolom**.



DEFINISI

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom, lalu ditulis di dalam kurung. Setiap bilangan di dalamnya disebut **elemen** (entri). Matriks dengan m baris dan n kolom dikatakan ber**ordo** $m \times n$ (dibaca "m kali n"). Elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j ditulis a_{ij} . Matriks biasanya diberi nama huruf kapital: A, B, S .

Bahasa sederhana • Gampangnya, matriks itu seperti tabel di buku catatan warung yang judulnya sudah kita hafal. Angka 10 di baris gula, kolom Rabu, artinya stok gula hari Rabu 10 kg. Yang penting: **baris dulu, baru kolom**, seperti alamat "Gang 2, Rumah nomor 3".

Beberapa matriks punya nama khusus:

- **Matriks persegi**: banyak baris sama dengan banyak kolom, misalnya ordo 2×2 atau 3×3 seperti S .
- **Matriks baris** $(2 \ 1 \ 3)$ dan **matriks kolom** $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$: hanya punya satu baris atau satu kolom.
- **Matriks nol** O : semua elemennya 0.
- **Matriks identitas** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: angka 1 di diagonal utama dan 0 di tempat lain. Ia berperan seperti angka 1 pada perkalian bilangan.

Dua matriks dikatakan **sama** jika ordonya sama dan setiap elemen yang seletak juga sama. Jadi $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ langsung memberi $x = 7$ dan $y = -2$.

CONTOH Membaca catatan stok

Dari matriks stok S di atas: (a) berapa ordonya? (b) Berapa s_{31} , dan apa artinya? (c) Hari apa stok beras paling sedikit?

- 1 Ada 3 baris (beras, gula, telur) dan 3 kolom (Senin, Selasa, Rabu), jadi ordonya 3×3 .
- 2 s_{31} ada di baris 3 (telur), kolom 1 (Senin): nilainya 30. Artinya stok telur hari Senin 30 kg.
- 3 Beras ada di baris 1: 20, 18, 15. Yang terkecil 15, di kolom 3 (Rabu).

(a) 3×3 ; (b) $s_{31} = 30$; (c) Rabu. Ingat urutan alamat elemen: baris dulu, baru kolom.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 2.000 tahun lalu, kitab Tiongkok *Sembilan Bab tentang Seni Matematika* (*Jiuzhang Suanshu*) sudah menyusun koefisien sistem persamaan dalam kotak-kotak batang hitung, lalu menghilangkan variabel baris demi baris. Cara itu kini kita kenal sebagai eliminasi Gauss. Istilah *matrix* sendiri baru dipakai James Joseph Sylvester sekitar tahun 1850. Kata Latin itu berarti "rahim" atau "induk": Sylvester melihat matriks sebagai induk tempat determinan-determinan "lahir". Lalu Arthur Cayley (1858) memperlakukan matriks seperti bilangan yang bisa dijumlah, dikali, dan dibalik.

36.2 Operasi matriks: jumlah, selisih, skalar, transpos

Bu Sari mencatat beras dan gula yang **masuk** (kg) pada Senin dan Selasa, untuk minggu lalu dan minggu ini. Bentuk tabelnya sama persis. Total dua minggu didapat dengan menjumlahkan angka yang **seletak**:

$$\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 25 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$



ATURAN OPERASI DASAR

- **Penjumlahan dan pengurangan** hanya untuk matriks berordo sama: jumlahkan (kurangkan) elemen yang seletak, $(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- **Perkalian skalar** kA : setiap elemen dikali k , yaitu $(kA)_{ij} = k a_{ij}$.
- **Transpos** A^T : baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Matriks $m \times n$ menjadi $n \times m$.

Penjumlahan matriks bersifat komutatif ($A + B = B + A$) dan asosiatif, karena di setiap sel kita hanya menjumlahkan bilangan biasa.

CONTOH

Harga naik 10 persen

Daftar harga (ribu rupiah) ditulis $H = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, dengan baris: ayam, ikan dan kolom: warung A, warung B. Semua harga naik 10%. Tentukan matriks harga baru dan transposnya.

1

Naik 10% berarti dikali 1,1: $1,1H = \begin{pmatrix} 13,2 & 16,5 \\ 8,8 & 11 \end{pmatrix}$.

2

Transposnya menukar baris dan kolom: $(1,1H)^T = \begin{pmatrix} 13,2 & 8,8 \\ 16,5 & 11 \end{pmatrix}$. Sekarang baris = warung dan kolom = lauk.

Harga ayam di warung A menjadi Rp13.200, ikan di warung B Rp11.000, dan seterusnya. Transpos tidak mengubah datanya, hanya cara menatanya.



AWAS JEBAKAN

Matriks berordo berbeda tidak bisa dijumlahkan atau dikurangkan. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bukan $\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$: penjumlahan itu memang **tidak terdefinisi**, sama seperti menjumlahkan dua tabel stok yang bentuknya berbeda.

36.3

Perkalian matriks: baris kali kolom

Dimas dan Ayu memesan nasi, ayam, dan es teh. Harga di warung Bu Sari dan warung Pak Jono berbeda. Berapa total belanja masing-masing di tiap warung? Untuk setiap pasangan (pembeli, warung), kita mengalikan **banyak pesanan** dengan **harga** tiap menu, lalu menjumlahkannya. Pola "kalikan lalu jumlahkan" inilah perkalian matriks.

Pesanan × Harga satuan = Total belanja (ribu rupiah)

$$\begin{array}{c} \text{Dimas} \\ \text{Ayu} \end{array} \begin{array}{c|c|c} \text{nasi} & \text{ayam} & \text{teh} \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \times \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 5 & 4 \\ 12 & 14 \\ 3 & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline ? & ? \\ ? & ? \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Dimas} \\ \leftarrow \text{Ayu} \end{array}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

kolom A = baris B = 3 ✓ boleh dikalikan
ordo hasil = baris A × kolom B = 2×2

Langkah 1. Matriks pesanan A berordo 2×3 (2 pembeli, 3 menu) dan matriks harga B berordo 3×2 (3 menu, 2 warung). Banyak kolom A sama dengan banyak baris B , jadi AB ada dan berordo 2×2 .

Pesanan × Harga satuan = Total belanja (ribu rupiah)

$$\begin{array}{c} \text{Dimas} \\ \text{Ayu} \end{array} \begin{array}{c|c|c} \text{nasi} & \text{ayam} & \text{teh} \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \times \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 5 & 4 \\ 12 & 14 \\ 3 & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 31 & ? \\ ? & ? \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Dimas} \\ \leftarrow \text{Ayu} \end{array}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$2 \cdot 5 + 1 \cdot 12 + 3 \cdot 3 = 10 + 12 + 9 = 31$

Langkah 2. Elemen baris 1, kolom 1: telusuri **baris 1** A (pesanan Dimas) dan **kolom 1** B (harga di Bu Sari). Kalikan pasangan yang bersesuaian, lalu jumlahkan: $2 \cdot 5 + 1 \cdot 12 + 3 \cdot 3 = 31$.

Pesanan × Harga satuan = Total belanja (ribu rupiah)

$$\begin{array}{c} \text{Dimas} \\ \text{Ayu} \end{array} \begin{array}{c|c|c} \text{nasi} & \text{ayam} & \text{teh} \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \times \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 5 & 4 \\ 12 & 14 \\ 3 & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 31 & 34 \\ ? & ? \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Dimas} \\ \leftarrow \text{Ayu} \end{array}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$2 \cdot 4 + 1 \cdot 14 + 3 \cdot 4 = 8 + 14 + 12 = 34$

Langkah 3. Baris 1 × kolom 2: pesanan Dimas dengan harga di Pak Jono, $2 \cdot 4 + 1 \cdot 14 + 3 \cdot 4 = 34$.

Pesanan × Harga satuan = Total belanja (ribu rupiah)

$$\begin{array}{c} \text{Dimas} \\ \text{Ayu} \end{array} \begin{array}{c|c|c} \text{nasi} & \text{ayam} & \text{teh} \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \times \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 5 & 4 \\ 12 & 14 \\ 3 & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 31 & 34 \\ 35 & ? \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Dimas} \\ \leftarrow \text{Ayu} \end{array}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$1 \cdot 5 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 5 + 24 + 6 = 35$

Langkah 4. Baris 2 × kolom 1: pesanan Ayu dengan harga di Bu Sari, $1 \cdot 5 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 35$.

Pesanan × Harga satuan = Total belanja (ribu rupiah)

$$\begin{array}{c} \text{Dimas} \\ \text{Ayu} \end{array} \begin{array}{c|c|c} \text{nasi} & \text{ayam} & \text{teh} \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \times \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 5 & 4 \\ 12 & 14 \\ 3 & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 31 & 34 \\ 35 & 40 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Dimas} \\ \leftarrow \text{Ayu} \end{array}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$1 \cdot 4 + 2 \cdot 14 + 2 \cdot 4 = 4 + 28 + 8 = 40$

Langkah 5. Baris 2 × kolom 2: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 14 + 2 \cdot 4 = 40$. Matriks hasilnya sudah lengkap.

Pesanan × Harga satuan = Total belanja (ribu rupiah)

$$\begin{array}{c} \text{Dimas} \\ \text{Ayu} \end{array} \begin{array}{c|c|c} \text{nasi} & \text{ayam} & \text{teh} \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \times \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 5 & 4 \\ 12 & 14 \\ 3 & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{Bu Sari} & \text{Pak Jono} \\ \hline 31 & 34 \\ 35 & 40 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Dimas} \\ \leftarrow \text{Ayu} \end{array}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

Dimas: 31 ribu di Bu Sari, 34 ribu di Pak Jono
Ayu: 35 ribu di Bu Sari, 40 ribu di Pak Jono

Langkah 6. Baca hasilnya: elemen c_{ij} adalah total belanja pembeli ke- i di warung ke- j . Dimas dan Ayu sama-sama lebih hemat di warung Bu Sari.



PERKALIAN MATRIKS (BARIS × KOLOM)

Jika A berordo $m \times n$ dan B berordo $n \times p$, hasil kali AB berordo $m \times p$, dengan

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

yaitu baris ke- i matriks A "dikalikan" dengan kolom ke- j matriks B . Syaratnya: banyak kolom A = banyak baris B . Perkalian matriks bersifat asosiatif, $(AB)C = A(BC)$, distributif, $A(B + C) = AB + AC$, dan $AI = IA = A$. Tetapi pada umumnya $AB \neq BA$.

Bahasa sederhana • Cara gampang: telunjuk kiri berjalan **mendatar** di sepanjang baris matriks kiri, telunjuk kanan berjalan **turun** di sepanjang kolom matriks kanan. Setiap kali kedua telunjuk melangkah, kalikan dua angka yang ditunjuk. Terakhir, jumlahkan semua hasilnya.



TRIK KAK LINTANG: CEK ORDO SEPERTI DOMINO

Tulis ordonya berdampingan: $(2 \times 3)(3 \times 2)$. Angka yang bersentuhan di tengah harus sama, seperti sisi domino yang ditempel. Angka di kedua ujung adalah ordo hasilnya: 2×2 . Kalau angka tengahnya beda, misalnya $(2 \times 3)(2 \times 3)$, dominonya tidak bisa ditempel: perkalian tidak terdefinisi.



ADU CEPAT

Baris $\times$ kolom kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pasangkan yang pertama dengan yang pertama, yang kedua dengan yang kedua, kalikan, lalu jumlahkan: $ac + bd$.

KERJAKAN BERSAMA

AB dan BA, kembar atau bukan?

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hitung AB dan BA .

$$1 \quad AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2 \quad BA = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$AB \neq BA$. Bahkan untuk matriks 2×2 yang sederhana, menukar urutan perkalian mengubah hasilnya.



AWAS JEBAKAN

Perkalian matriks bukan perkalian elemen yang seletak, dan urutannya penting: pada umumnya $AB \neq BA$. Akibatnya rumus aljabar biasa tidak selalu berlaku: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, bukan $A^2 + 2AB + B^2$.

36.4 Determinan: faktor pengali luas

Setiap matriks persegi menyimpan satu bilangan istimewa yang disebut **determinan**. Untuk matriks 2×2 rumusnya pendek sekali. Namun maknanya jauh lebih menarik daripada rumusnya: determinan adalah **faktor**

pengali luas.



DEFINISI

Determinan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah bilangan

$$\det A = |A| = ad - bc$$

yaitu hasil kali diagonal utama dikurangi hasil kali diagonal samping.

Mengapa disebut faktor luas? Matriks A dapat dibaca sebagai mesin yang memindahkan setiap titik: $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$. Titik $(1, 0)$ pergi ke (a, c) , yaitu **kolom pertama**, dan titik $(0, 1)$ pergi ke (b, d) , yaitu **kolom kedua**. Akibatnya, persegi satuan berubah menjadi jajargenjang yang dibentuk oleh kedua kolom itu.



Tebak Dulu!

Matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mengubah persegi satuan (luas 1) menjadi sebuah jajargenjang. Berapa luas jajargenjang itu?

7, jumlah semua elemennya.

6, hasil kali diagonal utama.

5.

Tidak bisa dihitung tanpa penggaris.

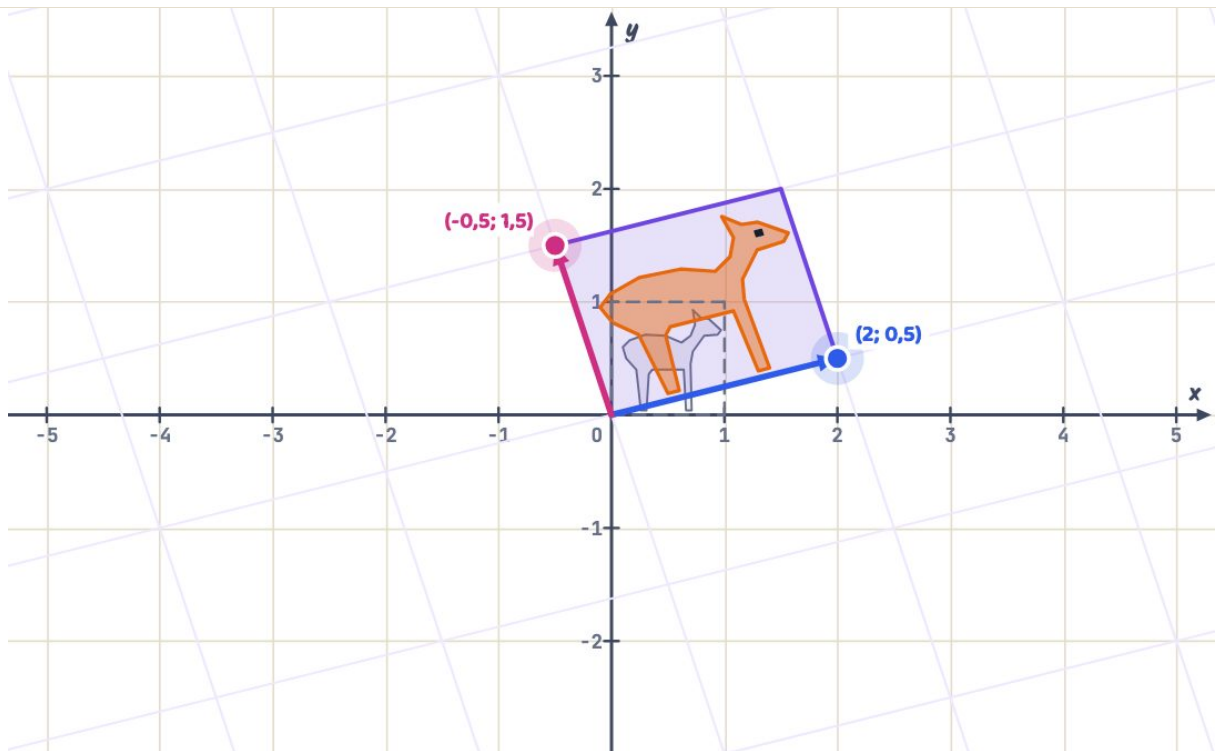
Jawabannya: 5. Luasnya $|\det| = |2 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = 5$. Diagonal samping "mencuri" luas karena kedua kolom saling condong. Lihat buktinya di animasi di bawah, lalu bermainlah dengan Grafik Hidup.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det A = (2)(1,5) - (-0,5)(0,5) \\ = 3,25$$

$$\text{luas baru} = 3,25 \times \text{luas lama}$$

Kolom biru adalah tujuan titik (1, 0); kolom magenta adalah tujuan titik (0, 1). Seluruh bidang ikut terbawa, dan setiap luas dikali $|\det A|$.

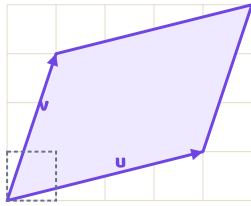


$\det A = ad - bc$
3,25

Luas bayangan persegi
3,25

Luas kancil: asal $\rightarrow$ bayangan
0,252 $\rightarrow$ 0,82

Seret titik biru (tujuan titik (1, 0)) dan titik magenta (tujuan titik (0, 1)), atau geser slider. Coba buat: rotasi 90° ($a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$), cermin terhadap sumbu-y, dilatasi 2 kali, dan kancil yang gepeng menjadi garis ($\det = 0$). Perhatikan: luas kancil selalu dikali $|\det A|$.



Kolom-kolom matriks A:

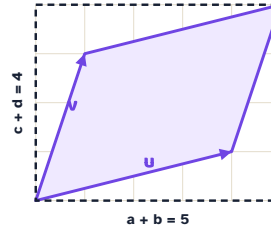
kolom 1: $u = (4, 1)$

kolom 2: $v = (1, 3)$

Persegi satuan (putus-putus) menjadi jajargenjang ungu.

Berapa luasnya?

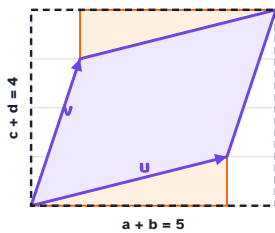
Langkah 1. Matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ membawa titik $(1, 0)$ ke $u = (4, 1)$ dan titik $(0, 1)$ ke $v = (1, 3)$. Persegi satuan (luas 1) berubah menjadi jajargenjang ungu.



Bungkus dengan kotak besar:

$$(a + b)(c + d) = 5 \times 4 = 20$$

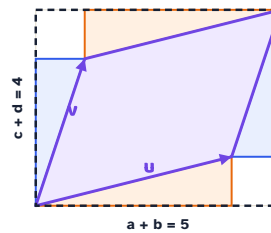
Langkah 2. Bungkus jajargenjang dengan persegi panjang bersisi $a + b = 5$ dan $c + d = 4$. Luasnya $5 \times 4 = 20$.



Buang 2 segitiga oranye:

$$2 \times \frac{1}{2} \cdot a \cdot c = ac = 4 \times 1 = 4$$

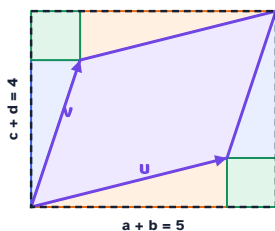
Langkah 3. Di bawah dan di atas ada dua segitiga siku-siku oranye dengan kaki a dan c . Luas keduanya $2 \times \frac{1}{2}ac = ac = 4$.



Buang 2 segitiga biru:

$$2 \times \frac{1}{2} \cdot b \cdot d = bd = 1 \times 3 = 3$$

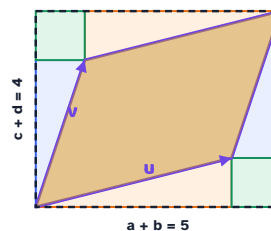
Langkah 4. Di kiri dan kanan ada dua segitiga biru dengan kaki b dan d . Luas keduanya $bd = 3$.



Buang 2 persegi panjang hijau:

$$2 \times b \cdot c = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

Langkah 5. Di dua pojok tersisa persegi panjang hijau berukuran $b \times c$. Luas keduanya $2bc = 2$.



$$\text{sisia} = 20 - 4 - 3 - 2 = 11$$

$$ad - bc = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 11 \checkmark$$

$$\text{luas} = ad - bc$$

Langkah 6. Luas jajargenjang $= (a + b)(c + d) - ac - bd - 2bc = ad - bc$. Di sini $20 - 4 - 3 - 2 = 11 = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1$. Determinan memang faktor pengali luas!

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Kalikan diagonal utama, kurangi dengan hasil kali diagonal samping. Angkanya memberi tahu berapa kali lipat luas berubah, dan tandanya memberi tahu apakah gambar terbalik.

a Elemen a (kiri atas)

b Elemen b (kanan atas)

c Elemen c (kiri bawah)

d Elemen d (kanan bawah)

det A Determinan

DETERMINAN

11

Diagonal utama: $4 \times 3 = 12$. Diagonal samping: $1 \times 1 = 1$. Selisihnya **11**. Persegi satuan (luas 1) berubah menjadi jajargenjang dengan luas $|\det| = 11$. **Tanda positif: arah putar gambar tetap.**

Cek satuan: determinan tidak bersatuan: ia adalah faktor pengali. Jika luas asal dalam cm^2 , luas bayangan juga dalam cm^2 .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MAT-DETERMINAN



SIFAT DETERMINAN (MATRIKS 2×2)

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$: melakukan dua transformasi berarti mengalikan dua faktor luas.
- $\det(kA) = k^2 \det A$, $\det(A^T) = \det A$, dan $\det I = 1$.
- Jika $\det A = 0$, bidang digepengkan menjadi garis atau titik.

▼ Bukti $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ dengan aljabar

Misalkan $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Maka $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$ dan

$$\det(AB) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg).$$

Setelah dikalikan, suku $acef$ dan $bdgh$ saling menghapus, sehingga tersisa $adeh + bcfg - adfg - bceh = ad(eh - fg) - bc(eh - fg) = (ad - bc)(eh - fg)$. Terbukti.



AWAS JEBAKAN

Untuk matriks 2×2 , $\det(kA) = k^2 \det A$, bukan $k \det A$. Mengalikan matriks dengan k meregangkan bidang k kali ke arah mendatar **dan** k kali ke arah tegak, jadi luasnya dikali k^2 .
Contoh: $\det(3I) = 9$, bukan 3.



ADU CEPAT

Determinan kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Diagonal utama dikurangi diagonal samping: $ad - bc$. Hati-hati dengan tanda: dikurangi bilangan negatif sama dengan ditambah.

36.5 Invers matriks dan sistem persamaan linear

Pada bilangan, 5 punya "pasangan pembatal" $\frac{1}{5}$, karena $5 \times \frac{1}{5} = 1$. Pada matriks, peran angka 1 dimainkan matriks identitas I . Matriks A^{-1} yang memenuhi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ disebut **invers** dari A . Ia membatalkan kerja A : kalau A memutar kancil 30° , maka A^{-1} memutarnya kembali 30° ke arah sebaliknya.



INVERS MATRIKS 2×2

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $\det A = ad - bc \neq 0$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Jika $\det A = 0$, matriks A tidak punya invers dan disebut **matriks singular**.

▼ Bukti: kalikan saja!

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (ad - bc) I$. Jadi jika kedua ruas dibagi $ad - bc$ (boleh, asalkan tidak nol), hasilnya I .

Mengapa matriks singular tidak punya invers? Jika ada A^{-1} , maka $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$, padahal $0 \times$ bilangan apa pun $= 0$. Secara geometri: A menggepengkan bidang menjadi garis, sehingga banyak titik berbeda jatuh ke tempat yang sama, dan tidak ada cara mengembalikannya.



TRIK KAK LINTANG: TUKAR-NEGASI-BAGI

Tukar posisi a dan d (diagonal utama). **Negasi**-kan b dan c (diagonal samping) tanpa memindahkannya. **Bagi** semuanya dengan determinan. Setelah itu, cek dengan mengalikan: hasilnya harus I .

KERJAKAN BERSAMA

Invers yang bilangan bulat

Tentukan invers $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dan periksa jawabanmu.

1 $\det A = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1.$

2 Tukar-Negasi-Bagi: $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$

3 Cek: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 14 & -10 + 10 \\ 21 - 21 & -14 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$ Karena $\det A = 1$, inversnya berisi bilangan bulat.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tukar a dan d , beri tanda negatif pada b dan c , lalu bagi semuanya dengan determinan.
Kalau determinannya nol, tidak ada yang bisa dibagi: matriksnya tidak punya invers.

a Elemen a

b Elemen b

c Elemen c

d Elemen d

$\frac{1}{\det A}$ Faktor pengali $1/\det$

FAKTOR PENGALI 1/DET

1

✧ $\det = \pm 1$: invers berisi bilangan bulat

$\det = 1$, jadi faktor pengalinya **1**. Baris 1 invers: **(1; -3)**. Baris 2 invers: **(-1; 4)**. Cek elemen kiri atas $A \cdot A^{-1}$: $4 \cdot (1) + 3 \cdot (-1) = 1$. Jika muncul '-', determinannya 0 sehingga invers tidak ada.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MAT-INVERS

Sekarang kekuatan invers terlihat. Sistem persamaan linear dua variabel (Bab 10)

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

bisa ditulis sebagai **satu** persamaan matriks $AX = B$, dengan

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_B$$

Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} **dari kiri**: $A^{-1}AX = A^{-1}B$, jadi $IX = A^{-1}B$, atau

$$X = A^{-1}B$$

COBA SENDIRI Menebak harga dari dua paket nasi

Warung Bu Sari menjual Paket Hemat (2 porsi nasi + 1 ayam goreng) seharga Rp24.000 dan Paket Keluarga (3 porsi nasi + 4 ayam goreng) seharga Rp66.000. Berapa harga satu porsi nasi dan satu ayam goreng?

1 Misalkan x = harga nasi dan y = harga ayam (ribu rupiah): $2x + y = 24$ dan $3x + 4y = 66$. Jadi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 66 \end{pmatrix}$.

2 $\det A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$, sehingga $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

3 $X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 24 - 1 \cdot 66 \\ -3 \cdot 24 + 2 \cdot 66 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

4 Cek: $2 \cdot 6 + 12 = 24 \checkmark$ dan $3 \cdot 6 + 4 \cdot 12 = 18 + 48 = 66 \checkmark$.

Satu porsi nasi Rp6.000 dan satu ayam goreng Rp12.000. Ubah isi paketnya di Rumus Hidup berikut!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Sistem $ax + by = p$ dan $cx + dy = q$ ditulis $AX = B$. Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kiri, maka $X = A^{-1}B$.

a Nasi di paket 1 porsi

b Ayam di paket 1 potong

c Nasi di paket 2 porsi

d Ayam di paket 2 potong

p Harga paket 1 ribu Rp

q Harga paket 2 ribu Rp

x Harga 1 porsi nasi ribu Rp

HARGA 1 PORSI NASI

6

ribu Rp

✨ kedua harga bulat

$\det = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$. Harga nasi $x = (4 \cdot 24 - 1 \cdot 66) : 5 = 6$; harga ayam $y = (2 \cdot 66 - 3 \cdot 24) : 5 = 12$. Kedua harga positif: data paketnya masuk akal.

Cek satuan: a, b, c, d adalah banyak porsi (tanpa rupiah), sedangkan p dan q dalam ribu rupiah. Jadi x dan y juga dalam ribu rupiah per porsi.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MAT-SPL



DETERMINAN NOL DAN DUA GARIS

Di Bab 10, setiap persamaan linear dua variabel adalah sebuah garis. Jika $\det A \neq 0$, kedua garis berpotongan di tepat satu titik: SPL punya penyelesaian tunggal $X = A^{-1}B$. Jika $\det A = 0$, kedua garis sejajar (tidak ada penyelesaian) atau berimpit (tak hingga banyak penyelesaian).



AWAS JEBAKAN

Dari $AX = B$ diperoleh $X = A^{-1}B$, bukan $X = BA^{-1}$. Karena perkalian matriks tidak komutatif, invers harus dikalikan dari sisi yang sama dengan letak A . Di sini BA^{-1} bahkan tidak terdefinisi, karena B berordo 2×1 .

MITOS

"Dua matriks bisa dikalikan asalkan ordonya sama."

FAKTA

Syaratnya: banyak kolom matriks kiri sama dengan banyak baris matriks kanan. Matriks 2×3 tidak bisa dikali matriks 2×3 , tetapi bisa dikali matriks 3×4 (hasilnya 2×4).

MITOS

"Setiap matriks yang bukan matriks nol pasti punya invers."

FAKTA

Matriks berdeterminan 0 tidak punya invers, misalnya

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

. Ia menggepengkan bidang menjadi garis, dan informasi yang hilang tidak bisa dikembalikan.

MITOS

"AB pasti sama dengan BA, seperti $2 \times 3 = 3 \times 2$."

FAKTA

Pada umumnya

$$AB \neq BA$$

. Memutar lalu mencerminkan berbeda dengan mencerminkan lalu memutar. Kadang

$$AB$$

ada, tetapi

$$BA$$

malah tidak terdefinisi.

36.6 Matriks transformasi: rotasi, refleksi, dilatasi

Di dalam game, setiap titik pada gambar karakter disimpan sebagai pasangan koordinat (x, y) . Untuk memutar, mencerminkan, atau memperbesar karakter, komputer mengalikan setiap titik dengan sebuah **matriks transformasi**. Rahasia untuk menemukan matriksnya cukup satu kalimat.

**KOLOM = BAYANGAN**

Kolom pertama matriks transformasi adalah bayangan titik $(1, 0)$, dan kolom kedua adalah bayangan titik $(0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Contoh: rotasi 90° membawa $(1, 0)$ ke $(0, 1)$ dan $(0, 1)$ ke $(-1, 0)$, jadi matriksnya $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rotasi sebesar θ membawa $(1, 0)$ ke $(\cos \theta, \sin \theta)$ dan $(0, 1)$ ke $(-\sin \theta, \cos \theta)$.

Transformasi (pusat O)	Matriks	Bayangan (x, y)	det
Refleksi terhadap sumbu-x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(x, -y)$	-1
Refleksi terhadap sumbu-y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(-x, y)$	-1
Refleksi terhadap garis $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	(y, x)	-1
Refleksi terhadap garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$(-y, -x)$	-1
Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(-y, x)$	1
Rotasi 180°	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(-x, -y)$	1
Rotasi θ	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$	1
Dilatasi faktor k	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	(kx, ky)	k^2
Gusuran searah sumbu-x	$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(x + ky, y)$	1

Perhatikan kolom det: rotasi dan gusuran tidak mengubah luas ($\det = 1$), refleksi juga tidak mengubah luas tetapi membalik orientasi ($\det = -1$), sedangkan dilatasi mengalikan luas dengan k^2 . Untuk transformasi berurutan, kalikan matriksnya: " T_1 dilanjutkan T_2 " bermatriks M_2M_1 , karena matriks yang **paling kanan bekerja lebih dulu**.

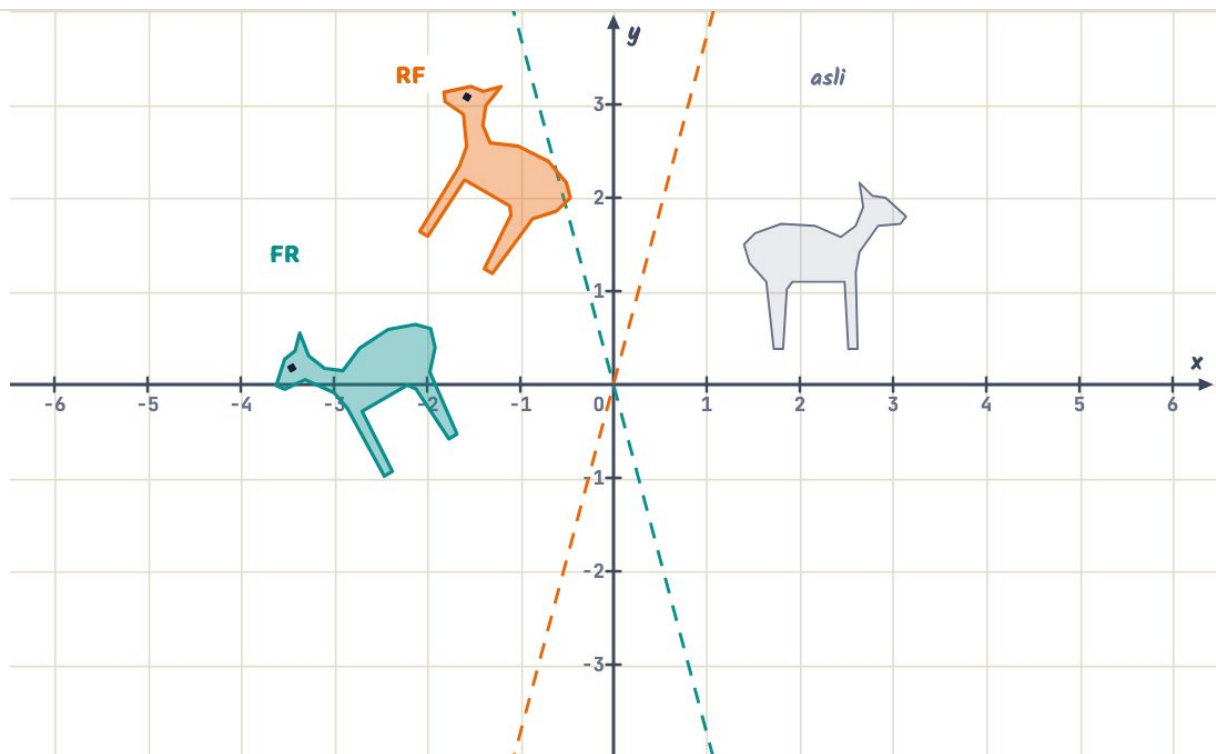
$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$RF = \begin{pmatrix} -0,87 & 0,5 \\ 0,5 & 0,87 \end{pmatrix}$$

$$FR = \begin{pmatrix} -0,87 & -0,5 \\ -0,5 & 0,87 \end{pmatrix}$$

F mencerminkan terhadap sumbu- x , R memutar sejauh θ terhadap O . Pada RF , matriks paling kanan (F) bekerja lebih dulu: cermin dulu, baru putar. Pada FR sebaliknya.



RF $\neq$ FR: urutan menentukan hasil

θ
150°

Garis cermin RF
75°

Garis cermin FR
-75°

Tekan ► **Jalankan** agar sudut θ berputar. Kancil **orange** = cermin dulu, lalu putar (RF). Kancil **hijau toska** = putar dulu, lalu cermin (FR). Kapan keduanya berimpit? Perhatikan juga: setiap hasil ternyata hanyalah **satu**

KERJAKAN BERSAMA Putar lalu perbesar

Segitiga dengan titik sudut $P(1, 1)$, $Q(4, 1)$, $R(1, 3)$ dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O , lalu dilatasi dengan faktor 2 (pusat O). Tentukan bayangannya dan luasnya.

1 Matriks gabungan (rotasi dulu, jadi ditulis paling kanan): $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Bayangan: $P' = (0 - 2, 2 + 0) = (-2, 2)$, $Q' = (0 - 2, 8 + 0) = (-2, 8)$, $R' = (0 - 6, 2 + 0) = (-6, 2)$.

3 Luas asal $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$. Karena $\det M = 0 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 = 4$, luas bayangan $= 4 \times 3 = 12$.

$P'(-2, 2)$, $Q'(-2, 8)$, $R'(-6, 2)$, dengan luas 12. Cek langsung: kaki-kakinya 6 dan 4, jadi luasnya $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ ✓.

Apa yang terjadi jika satu transformasi diulang terus? Itulah **pangkat matriks** $M^n = M \cdot M \cdots M$. Polanya sering mengejutkan, dan soal olimpiade menyukainya.

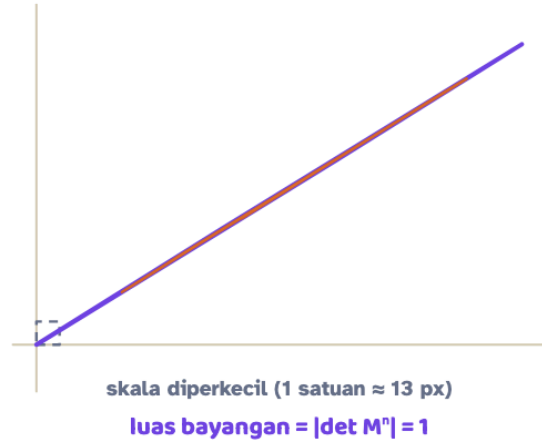
LAB MINI Mesin pangkat matriks: cari polanya!

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

Pangkat-pangkat M

M^1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	M^2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	M^3 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	M^4 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
M^5 $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$	M^6 $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	M^7 ?	M^8 ?
M^9 ?	M^{10} ?	M^{11} ?	M^{12} ?

Persegi satuan & kancil setelah M^6



💡 Entri M^n adalah bilangan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$M^n = (F(n+1) \ F(n) \mid F(n) \ F(n-1))$ dan $\det M^n = (-1)^n$: luasnya tetap 1, bentuknya makin gepeng.

M^n (baris 1 | baris 2)
(13 8 | 8 5)

$\det M^n = (\det M)^n$
1

Periode ($M^p = I$)
tidak ada (tumbuh terus)

Pilih sebuah matriks, lalu tekan ► **Jalankan** untuk menghitung $M, M^2, M^3, \dots$. Kapan hasilnya kembali menjadi I ? Matriks mana yang memunculkan bilangan Fibonacci? Ada juga matriks bukan nol yang kuadratnya nol. Temukan!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

RAHASIA POLA PANGKAT: TEOREMA CAYLEY-HAMILTON MINI

Untuk setiap matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berlaku

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = O.$$

Jadi A^2 selalu bisa ditulis memakai A dan I saja, begitu juga $A^3, A^4, \dots$. Contoh: matriks Fibonacci $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ punya $a + d = 1$ dan $\det F = -1$, sehingga $F^2 = F + I$, persis aturan Fibonacci!

Akibatnya $F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$. Ambil determinan kedua ruas: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (\det F)^n = (-1)^n$. Inilah **identitas Cassini**. Cek $n = 5$: $8 \cdot 3 - 5^2 = -1 \checkmark$.

36.7 Sandi rahasia: matriks sebagai gembok

Ingat kertas Ancil di komik: **UKGV XAQS RDUW**. Ancil memakai **sandi Hill**. Begini cara kerjanya:

1. Ubah huruf menjadi angka: A = 0, B = 1, ..., Z = 25.

2. Kelompokkan pesan berpasangan; setiap pasangan menjadi matriks kolom $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$. Jika banyak hurufnya ganjil, tambahkan huruf X.
3. Kalikan dengan matriks kunci K , lalu ambil **sisanya pembagian oleh 26**. Ini aritmetika modulo 26, seperti jam yang angkanya hanya 0 sampai 25. Contoh: $49 \equiv 23 \pmod{26}$, karena $49 = 26 + 23$.
4. Ubah kembali angka menjadi huruf.

Kunci Ancil adalah $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Pasangan KA = (10, 0) disandikan seperti ini:

$$K \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 10 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{UK}$$

Pasangan NC = (13, 2) menjadi $(32, 21) \equiv (6, 21)$, yaitu GV.

LAB MINI Mesin sandi Hill: kunci dan gembok matriks

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-36

Kunci K
 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$K^{-1} \pmod{26}$
 $\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$

Pasangan ke-1: MA → (12, 0)
 $2 \cdot 12 + 3 \cdot 0 = 24 \equiv 24 \rightarrow Y$
 $1 \cdot 12 + 4 \cdot 0 = 12 \equiv 12 \rightarrow M$
 = artinya: ambil sisa pembagian oleh 26

Asli MA TR IK SI TU AS YI KX

↓

Sandi YM

Kunci aman ✓ (det = 5 koprima dengan 26)

Sandi: YMLJUWIYUVCUUELY (huruf X ditambahkan agar genap)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

det K 5	det mod 26 5	pembalik det (mod 26) 21, sebab $5 \times 21 = 105 \equiv 1$	Hasil YMLJUWIYUVCUUELY
-------------------	------------------------	---	----------------------------------

Tulis pesanmu (huruf A–Z, paling banyak 24 huruf), atur kunci K , lalu tekan ► **Jalankan** untuk melihat setiap pasangan disandikan. Tekan 📖 **Pesan Ancil** untuk membuka pesan di komik, lalu ↩️ **Balik arah** untuk menyandikannya lagi. Terakhir, coba 🔧 **Kunci bermasalah**: mengapa pesan dengan kunci itu mustahil dibuka?

Untuk membuka sandi, kita butuh K^{-1} dalam modulo 26. Masalahnya, "membagi dengan det $K = 5$ " tidak bisa dilakukan seperti biasa. Gantinya, cari bilangan yang jika dikali 5 bersisa 1: $5 \times 21 = 105 = 4 \times 26 + 1$, jadi 21

berperan sebagai " $\frac{1}{5}$ ". Maka

$$\begin{aligned} K^{-1} &\equiv 21 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & -63 \\ -21 & 42 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} \pmod{26} \end{aligned}$$

COBA SENDIRI Membuka pesan Ancil

Buka dua pasangan pertama pesan Ancil, UK dan GV, dengan $K^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$.

1 UK = (20, 10): $\begin{pmatrix} 6 \cdot 20 + 15 \cdot 10 \\ 5 \cdot 20 + 16 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 260 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, karena $270 = 10 \cdot 26 + 10$ dan $260 = 10 \cdot 26$. Hasilnya KA.

2 GV = (6, 21): $\begin{pmatrix} 36 + 315 \\ 30 + 336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 351 \\ 366 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$, karena $351 = 13 \cdot 26 + 13$ dan $366 = 14 \cdot 26 + 2$. Hasilnya NC.

Pesan dimulai dengan KANC... Selesaikan sisanya dengan tombol  Pesan Ancil di Lab Mini. (Petunjuk: Ancil sedang memuji dirinya sendiri.)



TAMU DARI MASA LALU

Sandi ini diperkenalkan Lester S. Hill, matematikawan Amerika, pada tahun 1929. Sandi Hill termasuk sandi pertama yang memakai aljabar matriks secara terang-terangan. Kelemahannya: jika musuh mengetahui beberapa pasangan teks asli beserta sandinya, kuncinya bisa dihitung balik... dengan invers matriks juga! Sistem keamanan modern memakai matematika yang jauh lebih rumit.



MATEMATIKA NUSANTARA: SANDI PRAMUKA

Dalam kegiatan Pramuka, banyak siswa Indonesia belajar sandi: sandi Morse, semafor, sandi kotak, sandi angka, dan lain-lain. Sebagian besar sandi itu selalu mengganti satu huruf dengan lambang yang sama, sehingga bisa dibongkar dengan menghitung huruf yang paling sering muncul (dalam bahasa Indonesia, huruf A sangat sering muncul). Sandi Hill lebih licik: huruf yang sama bisa berubah menjadi huruf yang berbeda, tergantung pasangannya. Dengan kunci Ancil, KA menjadi UK, tetapi KI menjadi SQ. Huruf K yang sama berubah menjadi U atau S!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

KUNCI YANG SAH: $\text{FPB}(\text{DET}, 26) = 1$

Dalam modulo 26, bilangan D punya "kebalikan" (bilangan D' dengan $DD' \equiv 1$) jika dan hanya jika $\text{gcd}(D, 26) = 1$, yaitu D ganjil dan bukan kelipatan 13. Hanya 12 sisa yang memenuhi: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25. Kunci $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ punya $\det = 2$, bukan nol, tetapi tetap tidak sah: MA dan ZA sama-sama tersandikan menjadi YW, jadi penerima tidak mungkin tahu mana yang asli. Dari $26^4 = 456.976$ matriks kunci yang mungkin, hanya 157.248 (sekitar 34%) yang sah.



Kasir warung

Matriks pesanan dikali matriks harga memberi total belanja setiap pelanggan di setiap warung dalam sekali hitung.



Grafika game

Saat karakter berputar, membesar, atau bercermin, komputer mengalikan koordinat ribuan titiknya dengan matriks, puluhan kali per detik.



Sandi & keamanan data

Sandi Hill memakai matriks sebagai kunci. Pengamanan data modern juga penuh aljabar, walaupun jauh lebih rumit.



Foto digital

Foto di HP adalah matriks raksasa berisi angka kecerahan piksel. Filter "tajam" dan "buram" adalah hitungan pada matriks itu.



Peta rute KRL & angkot

Matriks keterhubungan (1 = ada jalur langsung, 0 = tidak) yang dikuadratkan menghitung banyak rute dua langkah antarstasiun.



Motif batik & tenun

Satu motif kawung diulang dengan geseran, putaran, dan pencerminan. Di aplikasi desain, setiap langkah itu adalah perkalian matriks.



Cek Cepat

Matriks A berordo 2×3 dan B berordo 3×4 . Ordo AB adalah...

☐ 3×3

☐ 2×4

☐ 4×2

☐ tidak bisa dikalikan

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \dots$$

22

-2

2

14

Manakah matriks yang tidak punya invers?

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. C • 3. A



Tantangan Rumah: kirim pesan rahasia ke sahabat

Bahan: kertas, pensil, tabel huruf A = 0 sampai Z = 25, dan seorang teman.

1. Tulis pesan pendek tanpa spasi (paling banyak 8 huruf). Jika banyak hurufnya ganjil, tambahkan X.
2. Ubah huruf menjadi angka, lalu kelompokkan berpasangan.
3. Kalikan setiap pasangan dengan kunci $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, lalu ambil sisa pembagian oleh 26.
4. Ubah kembali menjadi huruf, lalu berikan sandi dan kuncinya kepada temanmu.
5. Temanmu membuka sandi dengan $K^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$. Periksa hasil kalian dengan Lab Mini.

Pertanyaan: Mengapa kunci $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tidak boleh dipakai? Coba sandikan AA dan CZ dengan kunci itu. Apa yang kamu temukan?

✓ Kamu sekarang bisa...

- membaca **matriks** sebagai tabel: ordo, baris, kolom, dan elemen a_{ij}
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan skalar, dan **mengalikan dua matriks** dengan aturan baris $\times$ kolom
- menghitung **determinan** dan **invers** matriks 2×2 , serta memaknai determinan sebagai faktor pengali luas
- menyelesaikan **sistem persamaan linear** dua variabel dengan invers matriks
- memakai matriks untuk **rotasi, refleksi, dilatasi**, menemukan pola pangkat matriks, dan membuat **sandi rahasia**

🔑 Istilah kunci

matriks

Matriks

elemen

ordo

Matriks identitas

Transpos

determinan

invers

matriks singular

matriks transformasi

sandi Hill

📊 Rumus penting

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Determinan matriks 2×2 . Kalikan diagonal utama, kurangi dengan hasil kali diagonal samping. Angkanya memberi tahu berapa kali lipat luas berubah, dan tandanya memberi tahu apakah gambar terbalik.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Invers matriks 2×2 . Tukar a dan d , beri tanda negatif pada b dan c , lalu bagi semuanya dengan determinan. Kalau determinannya nol, tidak ada yang bisa dibagi: matriksnya tidak punya invers.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

SPL dengan invers matriks. Sistem $ax + by = p$ dan $cx + dy = q$ ditulis $AX = B$. Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kiri, maka $X = A^{-1}B$.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Matriks berordo berbeda tidak bisa dijumlahkan atau dikurangkan.
- Perkalian matriks bukan perkalian elemen yang seletak, dan urutannya penting: pada umumnya $AB \neq BA$.
- Untuk matriks 2×2 , $\det(kA) = k^2 \det A$, bukan $k \det A$.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=36

Teka-teki untuk Bab 37

Matriks $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ memutar setiap titik 90° . Hitunglah J^2 . Hasilnya $-I$! Memutar 90° dua kali sama dengan memutar 180° , yaitu mengalikan setiap titik dengan -1 . Jadi J adalah semacam "akar dari -1 " di dunia matriks. Mungkinkah ada **bilangan** yang kuadratnya -1 ?

▼ Intip petunjuk

Di bilangan real, kuadrat selalu ≥ 0 , jadi tidak ada. Para matematikawan lalu "menciptakan" bilangan baru i dengan $i^2 = -1$. Ajaibnya, mengalikan dengan i ternyata sama dengan memutar 90° di bidang, persis seperti matriks J . Bab 37 · Bilangan Kompleks membahasnya!

37 Bilangan Kompleks: Bilangan yang Memutar

Di garis bilangan, akar dari -1 memang tidak punya tempat. Namun begitu kita berani melangkah keluar dari garis itu, lahirlah bilangan baru yang bisa memutar, meregang, menghitung listrik di rumahmu, dan menggambar fraktal yang tak habis-habis.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan mengapa **satuan imajiner** i dengan $i^2 = -1$ dibutuhkan, dan menghitung pangkat-pangkat i ;
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi **bilangan kompleks** $a + bi$ (termasuk memakai sekawan);
- menggambar bilangan kompleks di **bidang Argand** serta menentukan **modulus** dan **argumennya**;
- memakai **bentuk polar** $r \text{ cis } \theta$ dan memahami perkalian sebagai "putar dan regang";
- memakai **Teorema De Moivre** untuk pangkat dan menemukan **akar-akar kesatuan**.

AKAR DARI MINUS SATU

KOMIK · 4 PANEL

Senin sore, kelas tambahan

DIMAS

Kak, soal ini curang! Kuadrat bilangan apa pun tidak mungkin negatif. Jadi $x^2 + 1 = 0$ pasti tidak punya jawaban!



$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = ???$$

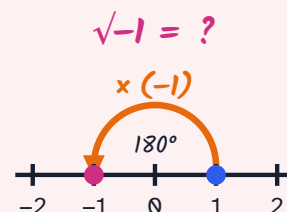


AYU

Bab lalu ditutup dengan teka-teki akar dari -1 . Kalau di garis bilangan, letaknya di mana, Kak?

KAK LINTANG

Di garis itu memang tidak ada. Tetapi lihat: dikali -1 itu sama dengan berputar setengah lingkaran!

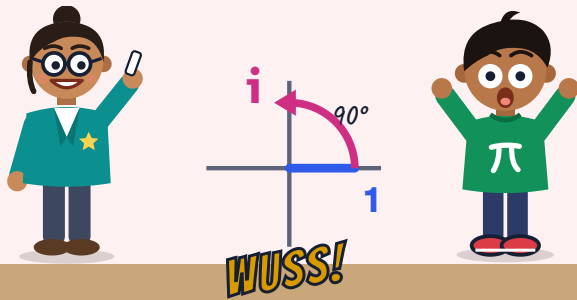


KAK LINTANG

Kalau dua kali putaran yang sama menghasilkan setengah lingkaran (180°), satu putarannya berapa derajat?

DIMAS

90° ! Seperempat putaran: dari arah kanan belok ke atas!



Malamnya, di pasar malam...

ANCIL

Kenalkan: i , si satuan imajiner, dengan $i \times i = -1$. Ia bukan bilangan khayalan. Ia bilangan yang **memutar**, seperti bianglala ini!

DIMAS

Jadi dikali i berarti diputar seperempat lingkaran...



Tebak Dulu!

Dikali -1 dua kali, sebuah bilangan kembali seperti semula, sebab $(-1)(-1) = 1$. Adakah bilangan x dengan $x \cdot x = -1$?

Ada, yaitu -1 , karena "minus kali minus tetap minus".

Tidak mungkin ada. Kuadrat selalu positif, titik.

Tidak ada di garis bilangan, tetapi ada jika kita boleh keluar dari garis itu.

Ada, yaitu $-\frac{1}{2}$, karena $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$.

Jawabannya: tidak ada di garis bilangan, tetapi ada di bidang. Kuadrat bilangan real memang tidak pernah negatif. Namun jika "dikali -1 " kita bayangkan sebagai *putaran 180°* , bilangan yang kuadratnya -1 adalah *putaran 90°* : ia menunjuk ke atas, keluar dari garis bilangan. Bilangan itu diberi nama i , dan seluruh bab ini adalah kisahnya.

37.1 Akar dari -1 : lahirnya bilangan i

Sejarah bilangan adalah sejarah persamaan yang "macet". Persamaan $x + 5 = 2$ macet di bilangan asli, maka lahirlah bilangan negatif. Persamaan $2x = 3$ macet di bilangan bulat, maka lahirlah pecahan. Persamaan $x^2 = 2$

macet di pecahan, maka lahirlah $\sqrt{2}$. Lalu bagaimana dengan $x^2 = -1$?

ℂ kompleks $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = i$

ℝ real $x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$

ℚ rasional $2x = 3 \rightarrow x = 3/2$

ℤ bulat $x + 5 = 2 \rightarrow x = -3$

ℕ asli $x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$

$-3, -10$

$\frac{1}{2}, 0,75$

$\sqrt{2}, \pi$

i
 $3 - 2i$

Setiap kali ada persamaan yang "tidak bisa diselesaikan", dunia bilangan diperluas. Bilangan kompleks $\mathbb{C}$ adalah perluasan yang menjawab $x^2 + 1 = 0$.

Masalahnya, kuadrat bilangan real tidak pernah negatif: $3^2 = 9$ dan $(-3)^2 = 9$. Jadi di garis bilangan tidak ada tempat untuk $\sqrt{-1}$. Para matematikawan lalu melakukan hal yang berani: **mendefinisikan** sebuah bilangan baru, lalu memeriksa apakah aturan hitungnya tetap konsisten. Ternyata konsisten!



DEFINISI

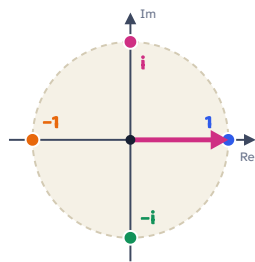
Satuan imajiner i adalah bilangan yang kuadratnya -1 :

$$i^2 = -1$$

Dengan i , akar bilangan negatif bisa ditulis: untuk $a > 0$, $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$. Contoh: $\sqrt{-9} = 3i$ dan $\sqrt{-7} = i\sqrt{7}$. Kelipatan real dari i , seperti $3i$ atau $-\frac{1}{2}i$, disebut **bilangan imajiner**.

Bahasa sederhana • Bayangkan garis bilangan sebagai jalan lurus, dan kamu berdiri menghadap ke kanan. Dikali -1 artinya **balik badan** (putar 180°). Nah, i adalah **setengah dari balik badan**: belok kiri 90° . Belok kiri dua kali sama dengan balik badan. Itulah sebabnya $i \times i = -1$.

Pandangan " i = putaran 90° " adalah kunci seluruh bab ini. Ikuti animasinya langkah demi langkah:

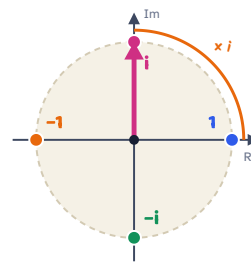


Mulai dari bilangan 1.
Panahnya menunjuk ke kanan,
arah positif garis bilangan.

posisi: 1

1

Langkah 1. Mulai dari 1 di garis bilangan. Bayangkan sebuah panah dari titik asal O ke 1.

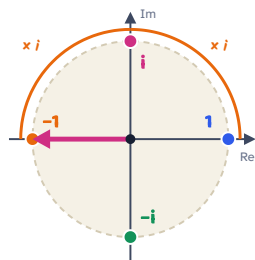


Kalikan dengan i :
panah berputar 90° berlawanan
arah jarum jam.

$1 \cdot i = i$

1 $\rightarrow$ i

Langkah 2. Kalikan dengan i : panah berputar 90° berlawanan arah jarum jam dan kini menunjuk ke atas. Titik itu adalah i .

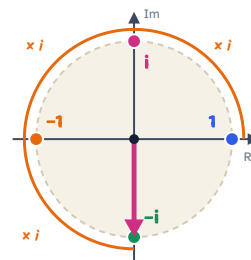


Kalikan lagi dengan i :
dua kali seperempat putaran
sama dengan setengah putaran!

$i \cdot i = i^2 = -1$

1 $\rightarrow$ i $\rightarrow$ -1

Langkah 3. Kalikan lagi dengan i : panah berputar 90° lagi dan menunjuk ke kiri, yaitu ke -1 . Jadi $i \cdot i = i^2 = -1$. Teka-teki terjawab!

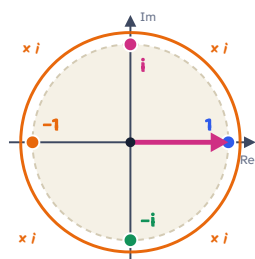


Sekali lagi dikali i :
panah kini menunjuk ke bawah.

$i^3 = -i$

1 $\rightarrow$ i $\rightarrow$ -1 $\rightarrow$ -i

Langkah 4. Kalikan sekali lagi: $i^3 = i^2 \cdot i = -i$. Panah menunjuk ke bawah.



Keempat kalinya:
satu putaran penuh, panah
kembali ke posisi awal.

$i^4 = 1$

1 $\rightarrow$ i $\rightarrow$ -1 $\rightarrow$ -i $\rightarrow$ 1

Langkah 5. Kalikan keempat kalinya: $i^4 = (i^2)^2 = 1$. Satu putaran penuh, kembali ke awal. Pangkat i berulang setiap 4 langkah.

Karena empat kali seperempat putaran kembali ke posisi awal, pangkat-pangkat i berulang dengan **siklus 4**:

Sisa n dibagi 4	1	2	3	0
i^n	i	-1	$-i$	1
Arah panah	$\uparrow$ atas	$\leftarrow$ kiri	$\downarrow$ bawah	$\rightarrow$ kanan
Contoh	i^5, i^9, i^{101}	i^6, i^{10}, i^{50}	i^7, i^{11}, i^{99}	i^4, i^8, i^{100}



TRIK KAK LINTANG

Untuk menghitung i^n dengan n besar, cukup lihat **dua digit terakhir** n dan cari sisanya bila dibagi 4 (boleh begitu karena 100 habis dibagi 4). Contoh: i^{2027} . Dua digit terakhirnya 27, dan $27 = 6 \times 4 + 3$, sisa 3. Jadi $i^{2027} = -i$.



AWAS JEBAKAN

Aturan $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ **tidak berlaku** bila a dan b sama-sama negatif. Godaannya: $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$. Itu salah! Ubah dulu ke bentuk i : $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 1545, Gerolamo Cardano dari Italia menerbitkan rumus penyelesaian persamaan pangkat tiga. Anehnya, untuk persamaan $x^3 = 15x + 4$, yang jelas punya penyelesaian $x = 4$, rumus itu memunculkan $\sqrt{-121}$. Sekitar 1572, Rafael Bombelli berani berhitung dengan "akar negatif" itu seolah-olah bilangan biasa, dan hasilnya tepat 4! René Descartes (1637) menyebut bilangan semacam itu *imaginer* dengan nada mengejek. Leonhard Euler memopulerkan lambang i (sekitar 1777), lalu Caspar Wessel, Jean-Robert Argand, dan Carl Friedrich Gauss (sekitar 1797-1831) menggambarinya sebagai titik pada bidang. Sejak itu "bilangan khayalan" menjadi alat kerja sehari-hari para insinyur.

37.2 Bentuk $a + bi$ dan cara berhitungnya

Begitu i diterima, kita bisa mencampurnya dengan bilangan real biasa. Hasilnya bilangan seperti $3 + 2i$, $-1 - 5i$, atau $\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$.



DEFINISI

Bilangan kompleks adalah bilangan berbentuk $z = a + bi$ dengan a dan b bilangan real. Bilangan a disebut **bagian real**, ditulis $\text{Re}(z)$, dan b disebut **bagian imajiner**, ditulis $\text{Im}(z)$. Himpunan semua bilangan kompleks ditulis $\mathbb{C}$.

- Dua bilangan kompleks sama jika bagian real **dan** bagian imajinernya sama: $a + bi = c + di \iff a = c \text{ dan } b = d$.
- Sekawan** (konjugat) dari $z = a + bi$ adalah $\bar{z} = a - bi$.

Berhitung dengan bilangan kompleks mirip berhitung dengan bentuk aljabar $a + bx$ (Bab 7). Hanya ada satu aturan tambahan: setiap kali muncul i^2 , gantilah dengan -1 .



ATURAN OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad (\text{selalu real dan tidak negatif})$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}, \quad c + di \neq 0$$

▼ Dari mana rumus perkalian itu?

Kalikan seperti mengalikan $(a + bx)(c + dx)$, lalu ganti i^2 dengan -1 :

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + bc)i + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Suku bd pindah ke bagian real dan berganti tanda. Semua "keanehan" bilangan kompleks berasal dari pergantian tanda kecil ini.



Tebak Dulu!

Berapakah $(1 + i)^2$?

2, karena $1^2 + 1^2 = 2$.

0, karena $1^2 + i^2 = 1 - 1$.

$2i$

$2 + 2i$

Jawabannya: $2i$. $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Bagian realnya lenyap! Jawaban 0 muncul kalau suku tengah $2i$ terlupa. Di subbab 37.5 kamu akan melihat alasannya secara geometris: $1 + i$ berarah 45° , sehingga kuadratnya berarah 90° , tepat di sumbu imajiner.

CONTOH Menjumlah, mengurangi, dan mengali

Diketahui $z = 3 + 2i$ dan $w = 1 - 5i$. Hitung $z + w$, $z - w$, dan zw .

- 1 Jumlah: bagian real dengan bagian real, bagian imajiner dengan bagian imajiner. $z + w = (3 + 1) + (2 - 5)i = 4 - 3i$.
- 2 Selisih: $z - w = (3 - 1) + (2 - (-5))i = 2 + 7i$.
- 3 Hasil kali: $zw = 3 - 15i + 2i - 10i^2 = 3 - 13i + 10 = 13 - 13i$.

$z + w = 4 - 3i$, $z - w = 2 + 7i$, dan $zw = 13 - 13i$. Perhatikan suku $-10i^2$ yang berubah menjadi $+10$.



TRIK KAK LINTANG

Membagi bilangan kompleks mirip merasionalkan penyebut di Bab 6. Kalikan pembilang dan penyebut dengan **sekawan penyebut**. Karena $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$ adalah bilangan real, huruf i lenyap dari penyebut.

KERJAKAN BERSAMA Membagi dengan bantuan sekawan

Nyatakan $\frac{5 + 5i}{1 + 2i}$ dalam bentuk $a + bi$.

- 1 Sekawan penyebut adalah $1 - 2i$. Kalikan atas dan bawah dengannya.
- 2 Pembilang: $(5 + 5i)(1 - 2i) = 5 - 10i + 5i - 10i^2 = 15 - 5i$.
- 3 Penyebut: $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$.
- 4 Hasil: $\frac{15 - 5i}{5} = 3 - i$. Cek: $(3 - i)(1 + 2i) = 3 + 6i - i - 2i^2 = 5 + 5i$. ✓

$\frac{5 + 5i}{1 + 2i} = 3 - i$. Selalu cek pembagian dengan mengalikan balik.



AWAS JEBAKAN

Bagian imajiner adalah bilangan **real**: $\text{Im}(3 - 5i) = -5$, bukan $-5i$. Huruf i hanyalah "label arah"; yang dicatat sebagai bagian imajiner adalah angka di depannya.

**ADU CEPAT****Kali kilat: bagian real atau imajiner?**ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-37)**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

$\text{Re}[(a + bi)(c + di)] = ac - bd$ (tanda minus muncul karena $i^2 = -1$), sedangkan $\text{Im} = ad + bc$. Contoh: $(2 + 3i)(4 - 5i)$ punya $\text{Re} = 8 + 15 = 23$ dan $\text{Im} = -10 + 12 = 2$.

**LANJUT • IB & OLIMPIADE****MENJAWAB TANTANGAN CARDANO**

Rumus Cardano untuk $x^3 = 15x + 4$ menghasilkan $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$ (karena $\sqrt{-121} = 11i$). Bombelli menebak bahwa $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$. Cek: $(2 + i)^2 = 3 + 4i$, lalu $(2 + i)^3 = (3 + 4i)(2 + i) = 6 + 3i + 8i + 4i^2 = 2 + 11i$. Serupa, $(2 - i)^3 = 2 - 11i$. Jadi $x = (2 + i) + (2 - i) = 4$, dan memang $4^3 = 64 = 15 \cdot 4 + 4$. Bilangan imajiner muncul di tengah jalan, lalu saling menghapus dan meninggalkan jawaban real yang sah. Inilah alasan sejarah pertama mengapa i dianggap serius.

37.3**Bidang Argand: setiap bilangan punya alamat**

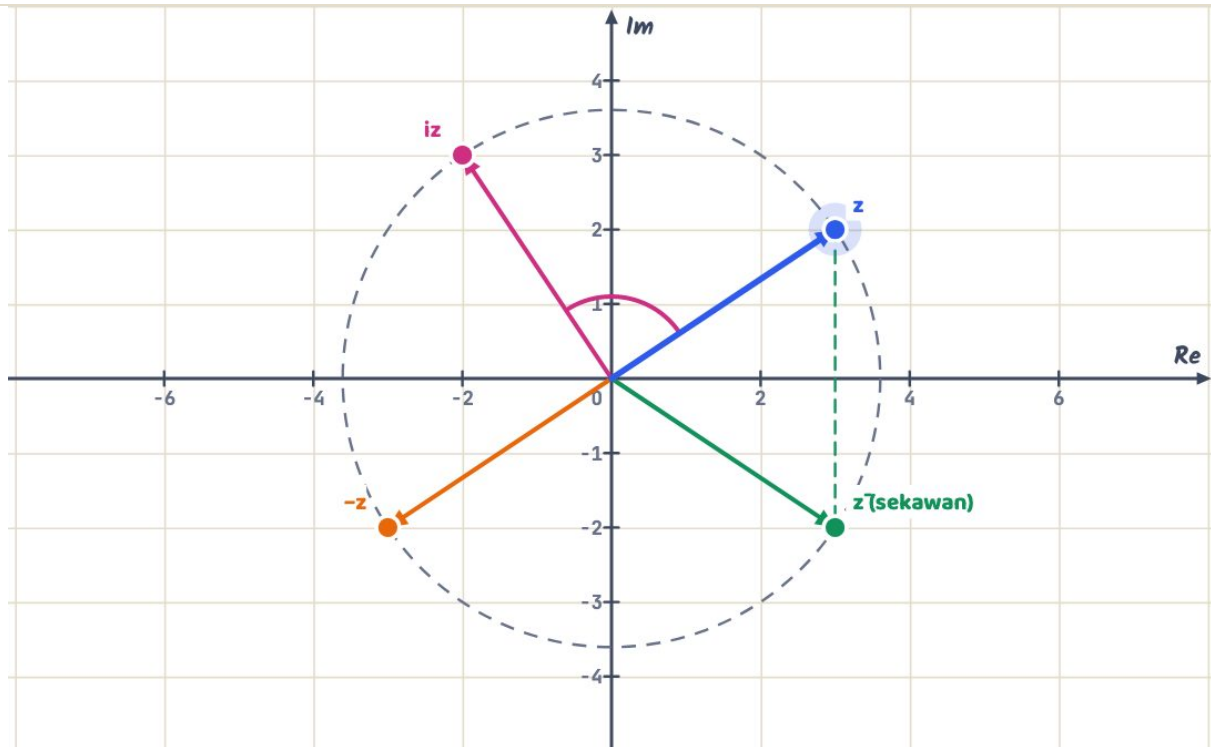
Bilangan real cukup digambar di satu garis. Bilangan kompleks butuh dua arah: satu untuk bagian real dan satu untuk bagian imajiner. Maka $z = a + bi$ digambar sebagai titik (a, b) di **bidang Argand** (bidang kompleks). Sumbu mendatar adalah **sumbu real**, sumbu tegak adalah **sumbu imajiner**.

Bahasa sederhana • Anggap saja bilangan kompleks seperti alamat rumah di kompleks perumahan: "Jalan 3, Gang 2" berarti 3 langkah ke kanan lalu 2 langkah ke atas. Bilangan $3 + 2i$ tinggal di alamat $(3, 2)$, sedangkan bilangan real biasa tinggal di "jalan utama", yaitu sumbu real.

$$z = a + bi \longleftrightarrow (a, b)$$

$$z = 3 + 2i \quad \bar{z} = 3 - 2i \quad -z = -3 - 2i \quad iz = -2 + 3i$$

Sekawan, lawan, dan hasil kali dengan i adalah tiga gerakan geometri yang sederhana.



$|z|$ (sama untuk keempatnya)
3,606

$\arg z$
33,7 °

$\arg(iz)$
123,7 °

Seret titik biru z . Kembaran mana yang merupakan hasil **cermin** terhadap sumbu real, hasil **putaran 180°**, dan hasil **putaran 90°**? Perhatikan: keempat titik selalu berada di lingkaran putus-putus yang sama.



SIFAT GEOMETRI DI BIDANG ARGAND

- $\bar{z}$ adalah pencerminan z terhadap sumbu real.
- $-z$ adalah putaran z sejauh 180° terhadap O .
- iz adalah putaran z sejauh 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O : titik (a, b) berpindah ke $(-b, a)$, karena $i(a + bi) = -b + ai$.
- $z + w$ adalah ujung diagonal jajargenjang yang dibentuk z dan w , persis seperti menjumlahkan vektor di Bab 23.



SAMBUNGAN DENGAN BAB 36

Matriks rotasi 90° dari Bab 36, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mengirim titik (a, b) ke $(-b, a)$, sama persis dengan perkalian oleh i . Bahkan kuadrat matriks itu adalah $-I$: "versi matriks" dari $i^2 = -1$!

37.4 Modulus dan argumen: jarak dan arah

Alamat (a, b) bisa juga dinyatakan dengan gaya pilot: "terbang sejauh r ke arah θ ". Dua bilangan itu adalah modulus dan argumen.



DEFINISI

Untuk $z = a + bi$:

- **Modulus** $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ adalah jarak titik z ke titik asal O .
- **Argumen** $\arg z = \theta$ adalah sudut dari sumbu real positif ke ruas garis Oz , diukur berlawanan arah jarum jam.
- **Argumen utama** dipilih dalam rentang $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$, atau $-\pi < \theta \leq \pi$ dalam radian. Bilangan $z = 0$ tidak punya argumen.

RUMUS HIDUP

Modulus bilangan kompleks

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Modulus adalah jarak titik $a + bi$ ke titik asal O . Inilah Teorema Pythagoras dari Bab 18 yang sedang menyamar!

a Bagian real a

b Bagian imajiner b

$|z|$ Modulus

MODULUS

5

✨ modulus bulat: ada tripel Pythagoras tersembunyi!

$z = 3 + 4i$. Jaraknya ke O adalah $\sqrt{9 + 16} = 5$. Argumen utamanya sekitar $53,13^\circ$. Sekawannya, $\bar{z} = 3 - 4i$, punya modulus yang sama.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-MODULUS-KOMPLEKS

Untuk mencari argumen, **gambar dulu titiknya** agar tahu kuadrannya. Hitung sudut acuan lancip $\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{b}{a} \right|$, lalu sesuaikan:

Letak titik	Kuadran I	Kuadran II	Kuadran III	Kuadran IV
Tanda (a, b)	$(+, +)$	$(-, +)$	$(-, -)$	$(+, -)$
Argumen utama θ	α	$180^\circ - \alpha$	$-(180^\circ - \alpha)$	$-\alpha$



AWAS JEBAKAN

Tombol $\tan^{-1}$ di kalkulator tidak tahu kuadran. Untuk $z = -1 - i$, $\tan^{-1} \frac{-1}{-1} = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$, padahal titik $(-1, -1)$ ada di kuadran III. Argumen utamanya adalah -135° , bukan 45° .

KERJAKAN BERSAMA

Modulus dan argumen dari $-\sqrt{3} + i$

Tentukan modulus dan argumen utama $z = -\sqrt{3} + i$.

- 1 Modulus: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$.
- 2 Titik $(-\sqrt{3}, 1)$ berada di kuadran II (kiri atas).
- 3 Sudut acuan: $\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$.
- 4 Di kuadran II: $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, atau $\frac{5\pi}{6}$ radian.

$|z| = 2$ dan $\arg z = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$. Sudut 30° dan pasangan $1 : \sqrt{3} : 2$ berasal dari segitiga istimewa di Bab 24.

37.5 Bentuk polar: mengali berarti memutar dan meregang

Dari segitiga siku-siku (Bab 24), titik dengan modulus r dan argumen θ punya $a = r \cos \theta$ dan $b = r \sin \theta$. Jadi setiap bilangan kompleks bisa ditulis dengan "jarak dan arah".



DEFINISI: BENTUK POLAR

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$$

Singkatan "cis" berarti $\cos + i \sin$. Contoh: $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ$, $i = 1 \operatorname{cis} 90^\circ$, dan $-2 = 2 \operatorname{cis} 180^\circ$.

Sekarang bagian yang paling ajaib. Kalikan dua bilangan dalam bentuk polar, dan lihat apa yang terjadi pada jarak dan sudutnya.



PERKALIAN DAN PEMBAGIAN BENTUK POLAR

$$r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} \theta_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2), \quad \frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$$

Dalam kata-kata: *modulusnya dikalikan (regang), argumennya dijumlahkan (putar)*. Akibatnya $|zw| = |z| |w|$ dan $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ (kadang perlu ditambah atau dikurangi 360° agar kembali ke rentang argumen utama).

▼ Bukti dengan rumus jumlah sudut (Bab 26)

Kalikan bagian "cis"-nya saja, lalu kelompokkan bagian real dan imajiner:

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2).$$

Menurut rumus jumlah sudut, bagian real itu adalah $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ dan bagian imajiner $\sin(\theta_1 + \theta_2)$. Jadi $\operatorname{cis} \theta_1 \cdot \operatorname{cis} \theta_2 = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$. Kalikan dengan $r_1 r_2$, selesai. Rumus pembagian diperoleh dengan cara serupa. ■

Bahasa sederhana • Bayangkan kamu naik bianglala. Mengalikan posisimu dengan bilangan bermodulus 1, misalnya $\operatorname{cis} 30^\circ$, sama dengan memutar roda 30° . Mengalikan dengan 2 membuat roda membesar dua kali lipat. Jadi perkalian bilangan kompleks = **putar + regang**. Mengalikan dengan i adalah putaran 90° tanpa regangan, karena $|i| = 1$.

$$z w = |z| |w| \operatorname{cis} (\arg z + \arg w)$$

$$z + w = 4 + 2i \quad z w = 2 + 4i$$

 $|z|$

3,162

 $\arg z$

18,4 °

 $|w|$

1,414

 $\arg w$

45 °

 $|zw| = |z| \cdot |w|$

4,472

 $\arg(zw)$

63,4 °

Seret z (biru) dan w (oranye). Jajargenjang hijau menunjukkan $z + w$. Panah magenta zw adalah z yang **diputar** sebesar $\arg w$ dan **diregang** $|w|$ kali. Cocokkan bacaan: apakah $\arg z + \arg w = \arg(zw)$? Coba buat $w = i$, lalu $w = -1$.

Titik $P(4, 2)$ diputar 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O , lalu jaraknya ke O diperbesar 2 kali. Tentukan bayangannya.

1 "Putar 90° dan regang 2 kali" sama dengan mengalikan dengan $2 \operatorname{cis} 90^\circ = 2i$.

2 $(4 + 2i)(2i) = 8i + 4i^2 = -4 + 8i$.

3 Cek: $|-4 + 8i| = \sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 2|4 + 2i|$. ✓

Bayangannya $(-4, 8)$. Satu perkalian menggantikan dua transformasi sekaligus.

Listrik di rumahmu adalah arus bolak-balik (AC) 220 volt yang berayun 50 kali per detik, seperti titik yang berputar pada bianglala. Insinyur listrik menghitungnya dengan bilangan kompleks. Mereka menulis j untuk $\sqrt{-1}$, karena huruf i sudah dipakai untuk kuat arus. "Hambatan" sebuah alat pada arus AC disebut **impedansi** $Z = R + Xj$: modulusnya menentukan besar arus, argumennya menentukan seberapa jauh arus tertinggal dari tegangan.

$$I = \frac{V}{|R + Xj|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Kuat arus sama dengan tegangan dibagi modulus impedansi. Bagian real R adalah hambatan biasa, bagian imajiner X berasal dari kumpulan motor atau trafo.

V Tegangan efektif V

R Hambatan $R \ \Omega$

X Reaktansi $X \ \Omega$

I Kuat arus efektif A

KUAT ARUS EFEKTIF

4,4
A

✨ $|Z|$ bulat: tripel Pythagoras lagi!

Impedansi $Z = 30 + 40j$ ohm. Modulusnya $|Z| = 50$ ohm dan argumennya $53,13^\circ$. Arus efektifnya **4,4** A dan tertinggal $53,13^\circ$ dari tegangan.

Cek satuan: R , X , dan $|Z|$ dalam ohm (Ω). Volt dibagi ohm menghasilkan ampere (A).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-IMPEDANSI-AC



LANJUT • IB & OLIMPIADE

RUMUS EULER DAN PERSAMAAN TERINDAH

Di IB AA HL, bentuk polar juga ditulis sebagai **bentuk eksponen** $z = re^{i\theta}$ (dengan θ dalam radian), berkat rumus Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Alasannya: aturan perkalian polar persis aturan pangkat, $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$. Bukti lengkapnya memakai deret pangkat dari kalkulus lanjut. Dengan $\theta = \pi$ diperoleh

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

satu persamaan yang mempertemukan lima bilangan terpenting: 0 , 1 , π , e , dan i . Banyak matematikawan menyebutnya rumus paling indah sepanjang masa.

MITOS

"Bilangan imajiner hanya khayalan, tidak ada gunanya di dunia nyata."

FAKTA

Namanya saja warisan ejekan Descartes. Listrik AC, sinyal HP, fisika kuantum, dan pengolahan suara memakai bilangan kompleks setiap hari.

MITOS

"Bilangan kompleks bisa diurutkan: $2i$ lebih besar daripada i ."

FAKTA

Jika

$$i > 0$$

, maka

$$i \cdot i > 0$$

, artinya

$$-1 > 0$$

. Jika

$$i < 0$$

, maka

$$(-i)(-i) > 0$$

, juga

$$-1 > 0$$

. Keduanya mustahil. Yang bisa dibandingkan hanyalah modulusnya.

MITOS

"Kuadrat suatu bilangan pasti tidak negatif."

FAKTA

Itu benar untuk bilangan real saja.

$$i^2 = -1$$

, bahkan

$$(1 + i)^2 = 2i$$

bukan bilangan real sama sekali. Sifat "kuadrat ≥ 0 " hilang begitu kita keluar dari garis bilangan.

37.6 De Moivre dan akar-akar kesatuan

Jika mengalikan berarti memutar, mengangkat berarti memutar berulang kali. z^2 memutar dua kali, z^3 tiga kali, dan seterusnya. Modulusnya pun ikut dikalikan berulang kali.



TEOREMA DE MOIVRE

Untuk setiap bilangan bulat n :

$$(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

▼ Bukti dengan induksi matematika (efek domino dari Bab 35)

Langkah dasar $n = 1$: $(r \operatorname{cis} \theta)^1 = r^1 \operatorname{cis} \theta$. Benar.

Langkah induksi: misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $(r \operatorname{cis} \theta)^k = r^k \operatorname{cis} k\theta$. Maka, memakai aturan perkalian polar,

$$(r \operatorname{cis} \theta)^{k+1} = r^k \operatorname{cis} k\theta \cdot r \operatorname{cis} \theta = r^{k+1} \operatorname{cis} (k+1)\theta.$$

Jadi benar untuk semua bilangan asli n . Untuk $n = 0$ jelas benar, dan untuk n negatif gunakan $(r \operatorname{cis} \theta)^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)$. ■

RUMUS HIDUP

Teorema De Moivre

$$|z^n| = r^n, \quad \arg(z^n) = n\theta$$

Untuk memangkatkan, pangkatkan modulusnya dan kalikan argumennya. Tidak perlu mengalikan $(a + bi)$ berkali-kali!

r

Modulus r

θ

Argumen θ°

n

Pangkat n

$|z^n|$

Modulus hasil

MODULUS HASIL

64

hasilnya real negatif

$z = 2 \operatorname{cis} 30^\circ$. Modulusnya dipangkatkan: **2** pangkat **6** = **64**. Argumennya dikalikan: **6** $\times$ **30** $^\circ$ = **180** $^\circ$, setara dengan **180** $^\circ$ setelah dikurangi kelipatan 360 $^\circ$. Jadi z pangkat **6** $\approx$ **-64** + **0i**.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DE-MOIVRE

Hitung $(1 + i\sqrt{3})^6$.

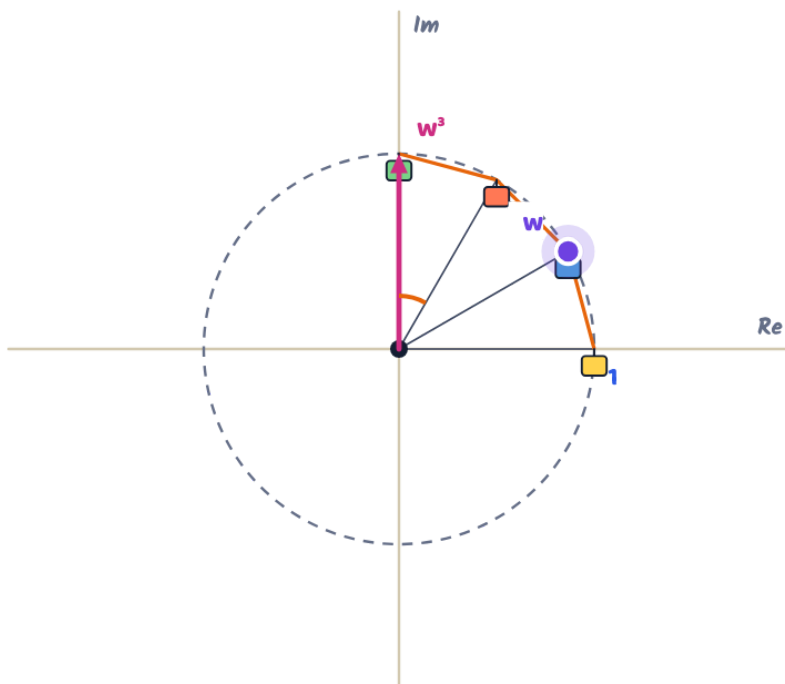
- 1 Modulus: $r = \sqrt{1+3} = 2$. Argumen: titik $(1, \sqrt{3})$ di kuadran I dengan $\tan \theta = \sqrt{3}$, jadi $\theta = 60^\circ$.
- 2 De Moivre: $(2 \operatorname{cis} 60^\circ)^6 = 2^6 \operatorname{cis} 360^\circ$.
- 3 $\operatorname{cis} 360^\circ = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$, jadi hasilnya 64.

$(1 + i\sqrt{3})^6 = 64$, **bilangan real! Enam putaran 60° tepat satu lingkaran penuh. Bandingkan dengan menjabarkan $(1 + i\sqrt{3})^6$ secara manual.**

LAB MINI

Bianglala De Moivre: kalikan terus dengan w

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37



$$w^k = r^k \operatorname{cis} (k\theta)$$

$$w = 1 \operatorname{cis} 30^\circ$$

$$k = 3$$

$$|w^k| = 1$$

$$k\theta = 90^\circ$$

0 putaran penuh

$r = 1$: berputar di lingkaran kembali ke 1 setelah 12 langkah

seret titik ungu w

pangkat k

3

$w^k \approx$

0 + 1i

$|w^k| = r^k$

1

$\arg = k\theta$

90°

Mulai dari 1, lalu kalikan berulang-ulang dengan $w = r \operatorname{cis} \theta$: titik w^k melompat sejauh θ setiap langkah. Dengan $|w| = 1$ dan $\theta = 30^\circ$, terbentuklah bianglala 12 kabin. Bagaimana kalau $|w|$ sedikit lebih dari 1? Seret titik ungu w atau pakai tombol.



Tebak Dulu!

Berapa banyak bilangan kompleks z yang memenuhi $z^6 = 1$?

Hanya satu, yaitu $z = 1$.

Dua, yaitu 1 dan -1 .

Enam.

Tak hingga banyaknya.

Jawabannya: enam. Selain 1 dan -1 , ada empat lagi: $\text{cis } 60^\circ$, $\text{cis } 120^\circ$, $\text{cis } 240^\circ$, dan $\text{cis } 300^\circ$. Masing-masing, jika diputar 6 kali, menempuh kelipatan 360° dan kembali ke 1. Keenam titik itu membentuk segi enam beraturan!



AKAR-AKAR KESATUAN

Persamaan $z^n = 1$ mempunyai tepat n penyelesaian, yang disebut **akar-akar kesatuan** pangkat n :

$$z_k = \text{cis } \frac{360^\circ \cdot k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Dengan $\omega = \text{cis } \frac{360^\circ}{n}$, akar-akarnya adalah $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$: titik-titik sudut **segi- n beraturan** pada lingkaran satuan. Untuk $n \geq 2$, jumlah semuanya nol: $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$.

▼ Mengapa jumlahnya nol?

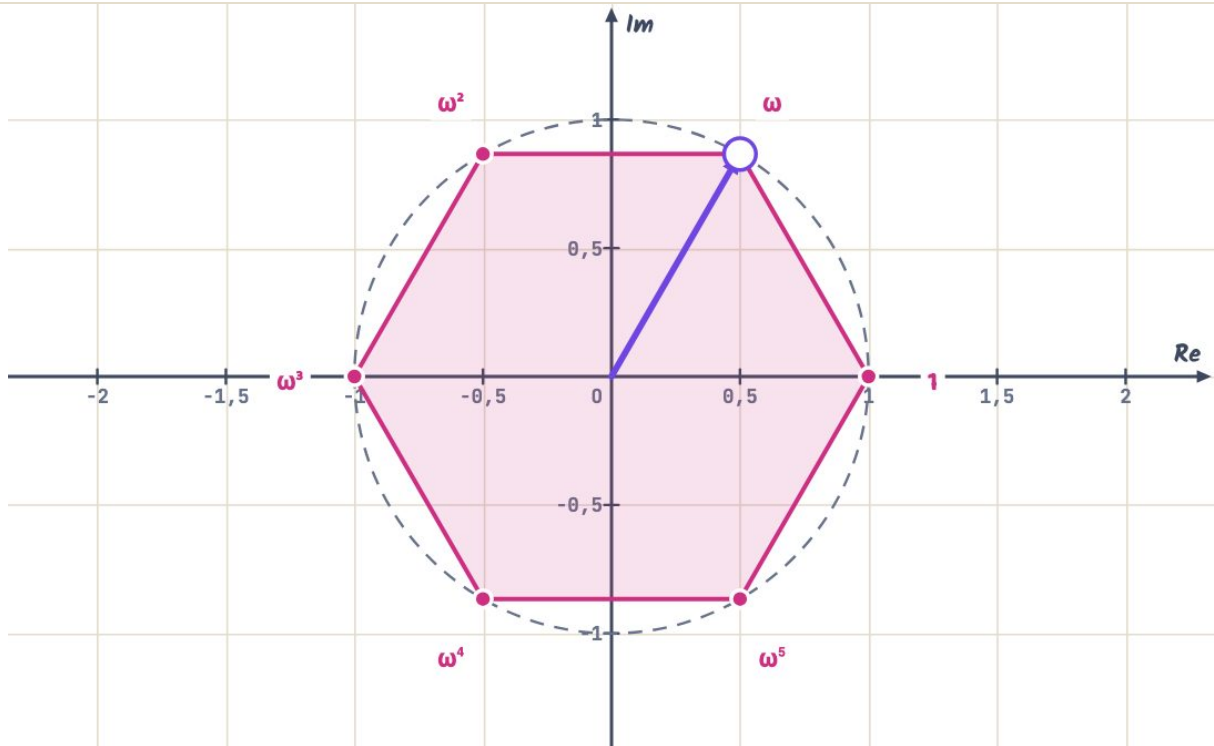
Misalkan $S = 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1}$. Kalikan dengan ω : $\omega S = \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n$. Karena $\omega^n = 1$, suku-sukunya sama dengan S , hanya urutannya bergeser. Jadi $\omega S = S$, atau $(\omega - 1)S = 0$. Karena $\omega \neq 1$, haruslah $S = 0$.

Secara geometris: memutar segi- n sejauh $\frac{360^\circ}{n}$ menghasilkan segi- n yang sama, sehingga "titik berat" semua akar tidak boleh berpindah ketika diputar. Satu-satunya titik yang tidak bergerak saat diputar adalah O .



$$z^n = 1 \iff z = \omega^k, \quad \omega = \text{cis} \frac{360^\circ}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$n = 6 : \quad \omega = \text{cis} 60^\circ, \quad |1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^5| = 0$$



sudut antartitik

60 °

pangkat p

1

p mod n

1

Geser n untuk melihat segi- n beraturan. Tekan ► **Jalankan**: panah ungu ω^p melompat satu titik setiap kali dikali ω , dan setelah n lompatan kembali ke 1. Mengapa jumlah semua akar selalu 0?

Selesaikan $z^3 = 8i$.

- 1 Tulis ruas kanan dalam bentuk polar: $8i = 8 \operatorname{cis} 90^\circ$. Karena sudut boleh ditambah kelipatan 360° , $8i = 8 \operatorname{cis}(90^\circ + 360^\circ k)$.
- 2 Misalkan $z = r \operatorname{cis} \theta$. De Moivre: $r^3 = 8$ dan $3\theta = 90^\circ + 360^\circ k$. Jadi $r = 2$ dan $\theta = 30^\circ + 120^\circ k$.
- 3 $k = 0$: $2 \operatorname{cis} 30^\circ = \sqrt{3} + i$. $k = 1$: $2 \operatorname{cis} 150^\circ = -\sqrt{3} + i$. $k = 2$: $2 \operatorname{cis} 270^\circ = -2i$.
- 4 Cek satu akar: $(-2i)^3 = -8i^3 = -8(-i) = 8i$. ✓

$z = \sqrt{3} + i$, $z = -\sqrt{3} + i$, atau $z = -2i$. Ketiganya membentuk segitiga sama sisi dan jumlahnya 0.



TRIK KAK LINTANG

Akar-akar dari $z^n = w$ selalu membentuk segi- n beraturan yang berpusat di O . Jadi cukup temukan **satu** akar, lalu putar sejauh $\frac{360^\circ}{n}$ berulang kali untuk mendapatkan sisanya.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

SENJATA OLIMPIADE: SARINGAN AKAR KESATUAN

Misalkan $\omega = \operatorname{cis} 120^\circ$, sehingga $\omega^3 = 1$ dan $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Akibatnya $1 + \omega^k + \omega^{2k}$ bernilai 3 jika k kelipatan 3, dan 0 jika bukan. Masukkan $x = 1, \omega, \omega^2$ ke $(1+x)^6 = \sum_k \binom{6}{k} x^k$, lalu jumlahkan:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = \frac{(1+1)^6 + (1+\omega)^6 + (1+\omega^2)^6}{3}.$$

Karena $1 + \omega = \operatorname{cis} 60^\circ$ dan $1 + \omega^2 = \operatorname{cis}(-60^\circ)$, pangkat enam keduanya bernilai 1. Hasilnya $\frac{64+1+1}{3} = 22$. Cek langsung: $1 + 20 + 1 = 22$. ✓ Trik yang sama, dengan $n = 5$, membuktikan $\cos 72^\circ + \cos 144^\circ = -\frac{1}{2}$ dari bagian real $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

37.7 Fraktal dan bilangan kompleks di sekitarmu

Ambil sebuah bilangan kompleks c . Mulai dari $z_0 = 0$, lalu ulangi aturan sederhana $z \rightarrow z^2 + c$ berkali-kali. Hanya ada dua kemungkinan nasib: barisan titiknya tetap **terkurung** di dekat O , atau **kabur** menjauh tanpa batas.



DEFINISI

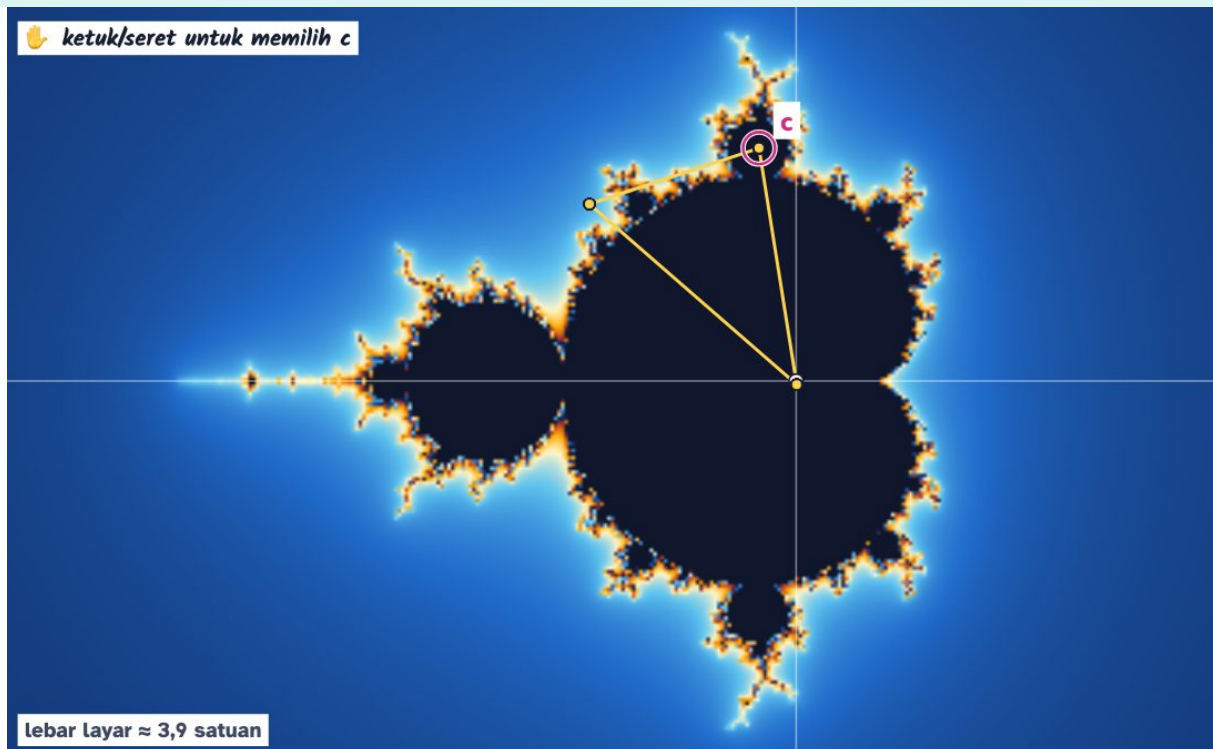
Himpunan Mandelbrot adalah himpunan semua bilangan kompleks c yang barisan $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$ tetap terbatas (tidak kabur ke tak hingga). Fakta penting: begitu suatu $|z_n| > 2$, barisan itu pasti kabur.

c	Barisan $z_1, z_2, z_3, \dots$	Nasib
-1	$-1, 0, -1, 0, -1, \dots$	terkurung (berayun) ✓ anggota
1	$1, 2, 5, 26, 677, \dots$	kabur ✗ bukan anggota
i	$i, -1 + i, -i, -1 + i, -i, \dots$	terkurung (berputar dalam siklus) ✓ anggota

Warnai setiap titik c menurut seberapa cepat barisannya kabur, dan muncullah salah satu gambar paling terkenal dalam matematika modern. Benoît Mandelbrot memotretnya dengan komputer sekitar tahun 1980. Semakin diperbesar, semakin banyak detail baru yang muncul: spiral, "kuda laut", bahkan salinan mini himpunan itu sendiri.

LAB MINI Penjelajah fraktal Mandelbrot

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-37



titik c
 $-0,12 + 0,75i$

perbesaran
 $\times 1$

nasib barisan
terkurung ≥ 100 langkah $\Rightarrow$ anggota

Ketuk atau seret di gambar untuk memilih titik c . Garis kuning menunjukkan orbit $0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \dots$. Apakah orbitnya terkurung atau kabur? Lalu tekan **Perbesar** di dekat tepi himpunan (perbatasan hitam dan warna) dan naikan iterasi bila gambar mulai kabur.



MATEMATIKA NUSANTARA

Beberapa motif batik memuat pola yang berulang dalam ukuran yang makin kecil, ciri khas **fraktal**. Sekitar tahun 2007, sekelompok peneliti dan desainer muda di Bandung memperkenalkan *batik fraktal*: motif dirancang dengan rumus matematika di komputer, lalu dicanting dan diwarnai oleh perajin batik. Bayangkan sehelai kain batik bermotif "kuda laut" dari himpunan Mandelbrot di atas, lahir dari rumus sependek $z^2 + c$!



Listrik rumah (AC)

Tegangan PLN 220 V berayun 50 kali per detik. Insinyur menghitung arus, daya, dan beda fase dengan bilangan kompleks yang ditulis memakai j .



Sinyal HP & WiFi

Data dikirim sebagai titik-titik di bidang kompleks (diagram konstelasi). Setiap titik mewakili beberapa bit sekaligus.



Grafika game & animasi

Memutar gambar sama dengan mengalikan koordinatnya dengan $\text{cis } \theta$; program grafika memakai ide ini atau saudaranya, matriks rotasi.



Musik & suara

Equalizer di HP memecah suara menjadi gelombang-gelombang dengan transformasi Fourier, yang dibangun dari $\text{cis } \theta$.



Fraktal & desain

Komputer menggambar himpunan Mandelbrot dan Julia dari $z^2 + c$; desainer memakainya untuk motif kain, poster, dan latar film.



Cek Cepat

Nilai i^{2026} adalah...

1

i

-1

$-i$

Modulus $-5 + 12i$ adalah...

7

13

17

$\sqrt{119}$

Di bidang Argand, mengalikan bilangan z dengan i sama dengan...

mencerminkan z terhadap sumbu real

menggandakan jarak z ke O

menggeser z satu satuan ke atas

memutar z sejauh 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. B · 3. D



Tantangan Rumah: menguji calon anggota himpunan Mandelbrot

Bahan: kertas berpetak, pensil warna, penggaris, kalkulator (boleh kalkulator HP).

1. Gambar bidang Argand di kertas berpetak dari -3 sampai 3 pada kedua sumbu (1 satuan = 2 kotak).
2. Untuk $c = -2$, hitung $z_1 = 0^2 + c$, lalu $z_2 = z_1^2 + c$, terus sampai z_5 . Tandai setiap titik dan hubungkan berurutan dengan garis.
3. Ulangi untuk $c = -i$ (ingat $i^2 = -1$!) dan untuk $c = 0,5$.
4. Warnai titik c dengan hijau jika barisannya tetap dekat O , atau merah jika suatu saat $|z_n| > 2$.

Pertanyaan: Dua dari tiga nilai c itu anggota himpunan Mandelbrot. Yang mana? Untuk $c = -i$, barisannya membentuk pola apa? Mengapa $c = -2$ "nyaris kabur" tetapi tetap anggota? Cocokkan jawabanmu dengan Lab Mini fraktal.



RINGKASAN KILAT

Bab 37 dalam 3 menit

☒ **Kamu sekarang bisa...**

- menjelaskan mengapa **satuan imajiner** i dengan $i^2 = -1$ dibutuhkan, dan menghitung pangkat-pangkat i
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi **bilangan kompleks** $a + bi$ (termasuk memakai sekawan)
- menggambar bilangan kompleks di **bidang Argand** serta menentukan **modulus** dan **argumennya**
- memakai **bentuk polar** $r \operatorname{cis} \theta$ dan memahami perkalian sebagai "putar dan regang"
- memakai **Teorema De Moivre** untuk pangkat dan menemukan **akar-akar kesatuan**

Istilah kunci

Satuan imajiner

bilangan imajiner

siklus 4

Bilangan kompleks

bagian real

bagian imajiner

Sekawan

bidang Argand

Modulus

Argumen

Argumen utama

impedansi

akar-akar kesatuan

Himpunan Mandelbrot

Rumus penting

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Modulus bilangan kompleks. Modulus adalah jarak titik $a + bi$ ke titik asal O. Inilah Teorema Pythagoras dari Bab 18 yang sedang menyamar!

$$I = \frac{V}{|R + Xj|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Arus listrik AC dan impedansi. Kuat arus sama dengan tegangan dibagi modulus impedansi. Bagian real R adalah hambatan biasa, bagian imajiner X berasal dari kumparan motor atau trafo.

$$|z^n| = r^n, \quad \arg(z^n) = n\theta$$

Teorema De Moivre. Untuk memangkatkan, pangkatkan modulusnya dan kalikan argumennya. Tidak perlu mengalikan $(a + bi)$ berkali-kali!

Jangan sampai terjebak

- Aturan $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ tidak berlaku bila a dan b sama-sama negatif.
- Bagian imajiner adalah bilangan real: $\operatorname{Im}(3 - 5i) = -5$, bukan $-5i$.
- Tombol $\tan^{-1}$ di kalkulator tidak tahu kuadran.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=37

Teka-teki untuk Bab 38

Kamu sudah tahu $i^{2026} = -1$ tanpa melakukan 2026 kali perkalian, karena pangkat i berputar dengan siklus 4. Sekarang tantangan untuk bilangan biasa: **berapakah angka terakhir dari 7^{2026}** ? Bilangan itu punya lebih dari 1.700 digit, sehingga kalkulator pun menyerah.

▼ Intip petunjuk

Tulis angka terakhir dari $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \dots$. Apakah polanya juga "berputar" seperti $i, -1, -i, 1$? Berapa panjang siklusnya, dan di posisi mana pangkat 2026 jatuh? Bab 38 memberi nama pada cara berpikir ini: *aritmetika modular*, matematika jam yang berputar.

38 Teori Bilangan: Ketika Sisa Pembagian Berkuasa



Kalkulator menyerah menghitung 7^{2026} , tetapi sebuah jam dinding bisa menebak angka terakhirnya dalam sepuluh detik. Selamat datang di dunia tempat yang terpenting bukan bilangannya, melainkan **sisanya**.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **algoritma pembagian** dan sifat keterbagian untuk menalar sisa tanpa menghitung bilangan raksasa;
- menghitung FPB dengan **algoritma Euclid** dan menemukan koefisien **Bézout**;
- berhitung dalam **aritmetika modular**: jam, kalender, weton, dan digit cek;
- menentukan angka terakhir pangkat besar lewat **siklus** dan **Teorema Fermat kecil**;
- menyelesaikan **persamaan Diophantine linear**, misalnya membayar pas dengan uang Rp2.000 dan Rp5.000.

KALKULATOR YANG MENYERAH

KOMIK · 4 PANEL

Kantin sekolah, jam istirahat

DIMAS

Teka-teki kemarin: angka terakhir 7^{2026} berapa? Kalkulatorku malah bilang ERROR!

AYU

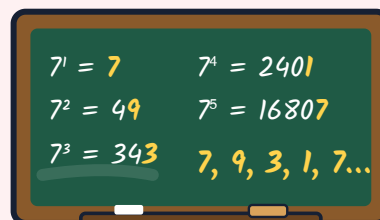
Pantas. Bilangan itu panjangnya 1.713 angka!

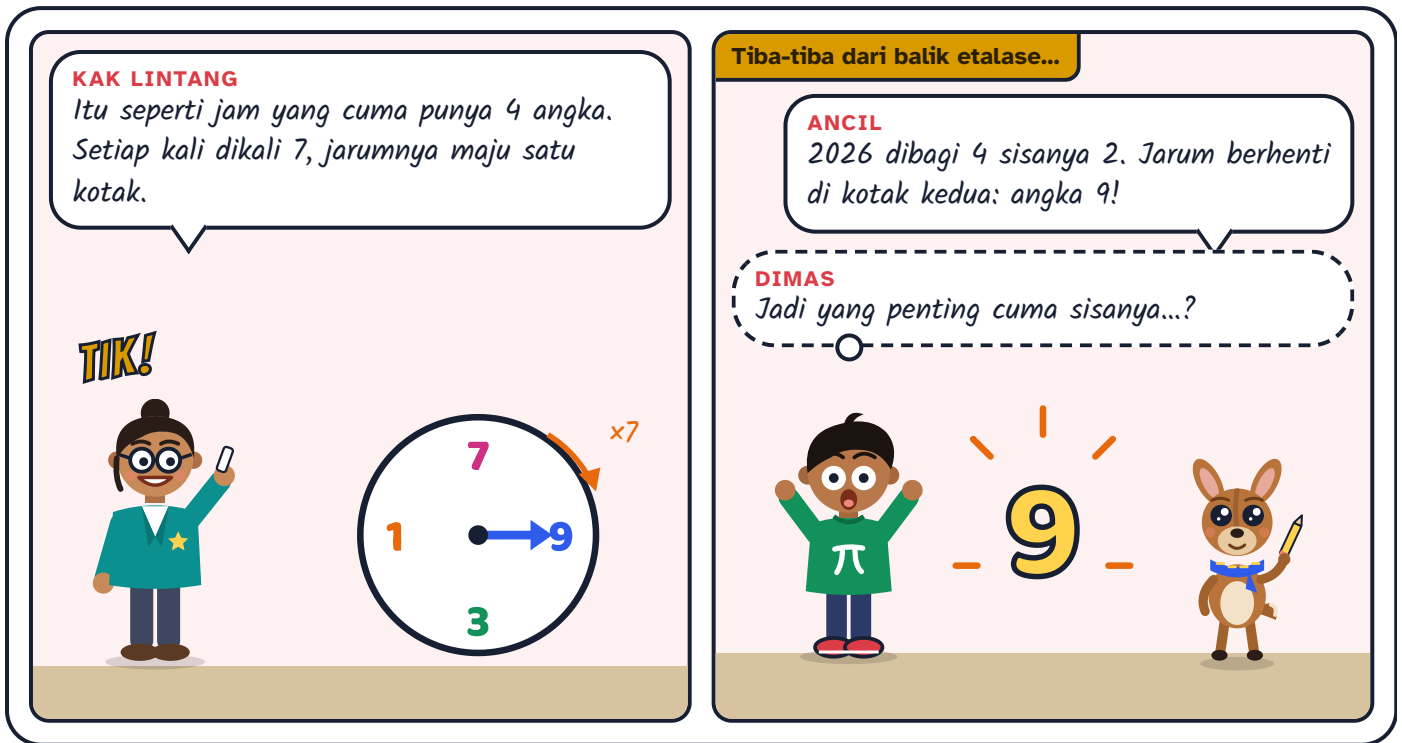


Ayu mulai mencatat

AYU

Lihat angka satuannya saja: 7, 9, 3, 1... lalu 7 lagi! Polanya berulang setiap 4 langkah.





Tebak Dulu!

Hari ini hari Kamis. Hari apakah 1.000 hari lagi?

Kamis lagi, karena 1.000 adalah bilangan "bulat".

Senin.

Rabu.

Tidak bisa ditentukan tanpa kalender 3 tahun ke depan.

Jawabannya: Rabu. Setiap 7 hari, nama hari kembali sama. Jadi yang penting hanyalah sisa 1.000 dibagi 7: $1000 = 142 \times 7 + 6$. Maju 6 hari dari Kamis sama dengan mundur 1 hari: Rabu. Ratusan minggu penuh di dalamnya tidak mengubah apa pun!

38.1

Keterbagian dan algoritma pembagian

Di Bab 4 kamu sudah berkenalan dengan faktor, bilangan prima, FPB, KPK, dan ciri habis dibagi. Bab ini membawa alat-alat itu ke panggung olimpiade. Rahasia pertamanya sederhana: **berhentilah memikirkan bilangannya, pikirkan sisanya.**



DEFINISI

Untuk bilangan bulat $a \neq 0$ dan b , kita katakan a **membagi** b , ditulis $a \mid b$, jika ada bilangan bulat k sehingga $b = ka$. Contoh: $3 \mid 12$ karena $12 = 4 \cdot 3$, sedangkan $5 \nmid 12$. Perhatikan: $a \mid b$ adalah sebuah *pernyataan* (benar atau salah), bukan pecahan seperti a/b .



TEOREMA • ALGORITMA PEMBAGIAN

Untuk setiap bilangan bulat a dan bilangan asli n , ada tepat satu pasangan bilangan bulat q (**hasil bagi**) dan r (**sisa**) sehingga

$$a = q \cdot n + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Contoh: $23 = 5 \cdot 4 + 3$ dan $-17 = (-4) \cdot 5 + 3$.

Dimas



Ayu



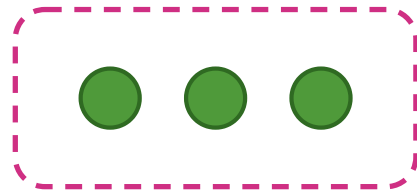
Kak Lintang



Ancil



$$23 = 5 \times 4 + 3$$



sisa $r = 3$ (tidak kebagian)

syarat sisa: $0 \leq r < 4$

Algoritma pembagian dalam bentuk kue arisan: 23 klepon dibagi rata kepada 4 orang. Hasil bagi $q = 5$ (kue per orang), sisa $r = 3$. Sisa selalu lebih kecil daripada pembagiannya.

Bahasa sederhana • Gampangnya: sisa adalah "kue yang tidak kebagian". Kalau 23 kue dibagi rata kepada 4 orang, tiap orang mendapat 5 kue dan 3 kue tersisa. Sisa selalu lebih kecil daripada banyaknya orang. Kalau sisanya masih 4 atau lebih, setiap orang masih bisa mendapat satu kue lagi!



Tebak Dulu!

Sebuah bilangan habis dibagi 4 dan juga habis dibagi 6. Apakah bilangan itu pasti habis dibagi 24?

Ya, karena $4 \times 6 = 24$.

Ya, asalkan bilangannya genap.

Tidak; yang pasti hanya habis dibagi 12.

Tidak; bahkan belum tentu habis dibagi 12.

Jawabannya: tidak, cukup 12. Bilangan 12 sendiri habis dibagi 4 dan 6, tetapi tidak habis dibagi 24. Yang dijamin hanyalah $KPK(4, 6) = 12$. Aturan "kalikan saja" hanya sah bila kedua bilangan tidak punya faktor persekutuan, misalnya 3 dan 8: habis dibagi 3 dan 8 berarti habis dibagi 24.



SIFAT KETERBAGIAN

Untuk bilangan bulat a, b, c, d :

1. Jika $d \mid a$ dan $d \mid b$, maka $d \mid ax + by$ untuk **semua** bilangan bulat x dan y .
2. Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.
3. Jika $a \mid b$ dan $b \neq 0$, maka $|a| \leq |b|$.

▼ Bukti sifat keterbagian

(1) Tulis $a = dk$ dan $b = dl$. Maka $ax + by = d(kx + ly)$, dan $kx + ly$ bilangan bulat. (2) Tulis $b = ak$ dan $c = bl$; maka $c = a(kl)$. (3) Dari $b = ak$ dengan $k \neq 0$ bulat, $|k| \geq 1$, jadi $|b| = |a| |k| \geq |a|$.



CONTOH Kue arisan dalam kotak

Bu RT membuat 250 kue untuk arisan dan memasukkannya ke kotak-kotak berisi 12 kue. Berapa kotak yang terisi penuh, dan berapa kue yang tersisa?

- 1 Cari kelipatan 12 terbesar yang tidak melebihi 250: $12 \times 20 = 240$ (sedangkan $12 \times 21 = 252$ sudah terlalu besar).
- 2 Sisanya $250 - 240 = 10$, dan memang $0 \leq 10 < 12$.
- 3 Jadi $250 = 20 \cdot 12 + 10$.

Ada 20 kotak penuh dan 10 kue tersisa. Dengan bahasa bab ini: $250 \bmod 12 = 10$.

KERJAKAN BERSAMA Trik kombinasi ala OSN

Diketahui a dan b bilangan bulat dengan $13 \mid 2a + 3b$. Buktikan bahwa $13 \mid 5a + b$.

- 1 Kita ingin "mengubah" $2a + 3b$ menjadi $5a + b$ dengan mengalikan lalu membuang kelipatan 13. Karena $2 \times 9 = 18 = 13 + 5$ dan $3 \times 9 = 27 = 26 + 1$, kalikan dengan 9.
- 2 $9(2a + 3b) = 18a + 27b = (5a + b) + 13(a + 2b)$.
- 3 Jadi $5a + b = 9(2a + 3b) - 13(a + 2b)$: kombinasi dua bilangan yang sama-sama habis dibagi 13. Menurut sifat (1), $13 \mid 5a + b$.

Terbukti. Trik "kalikan, lalu kurangi kelipatan pembagi" ini sangat sering dipakai di soal olimpiade.

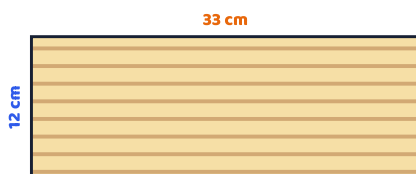


AWAS JEBAKAN

Sisa pembagian tidak pernah negatif: -17 dibagi 5 bersisa 3, bukan -2 , karena $-17 = (-4) \cdot 5 + 3$. Banyak kalkulator dan bahasa pemrograman menjawab -2 ; dalam matematika kita selalu memakai sisa $0 \leq r < n$.

38.2 FPB, algoritma Euclid, dan identitas Bézout

Kak Lintang membawa kue lapis berukuran $33 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. Ia ingin memotongnya menjadi potongan persegi yang sama besar, sebesar mungkin, tanpa sisa sedikit pun. Sisi persegi itu harus membagi 33 dan juga membagi 12, jadi yang dicari adalah $\text{FPB}(33, 12)$. Euclid punya cara memotong yang sangat cerdas.



Kue lapis 33 x 12 cm

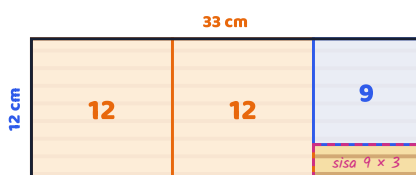
Potong persegi terbesar yang muat, lalu ulangi pada sisa potongannya.

Langkah 1. Kue lapis 33 cm x 12 cm akan dipotong menjadi persegi-persegi **sama besar** yang sebesar mungkin. Strategi Euclid: potong persegi terbesar yang muat, lalu ulangi pada potongan yang tersisa.



$$33 = 2 \times 12 + 9$$

Langkah 2. Persegi terbesar bersisi 12. Muat 2 buah, dan tersisa potongan 9 x 12. Inilah pembagian bersisa $33 = 2 \times 12 + 9$.



$$33 = 2 \times 12 + 9$$

$$12 = 1 \times 9 + 3$$

Langkah 3. Dari potongan 9 x 12, persegi terbesar bersisi 9. Muat 1 buah, dan tersisa 9 x 3: $12 = 1 \times 9 + 3$.



$$33 = 2 \times 12 + 9$$

$$12 = 1 \times 9 + 3$$

$$9 = 3 \times 3 + 0$$

sisa 0 → berhenti!

Langkah 4. Dari potongan 9 x 3, persegi bersisi 3 muat tepat 3 buah tanpa sisa: $9 = 3 \times 3 + 0$. Sisa 0 berarti selesai!



$$33 = 2 \times 12 + 9$$

$$12 = 1 \times 9 + 3$$

$$9 = 3 \times 3 + 0$$

$$\text{FPB}(33, 12) = 3$$

pas 44 persegi 3 x 3

Langkah 5. Persegi terakhir (sisi 3) ternyata menutup **seluruh** kue: $11 \times 4 = 44$ potong. Jadi $\text{FPB}(33, 12) = 3$. Sisi 3 membagi 9, sehingga membagi 12, sehingga membagi 33: semua potongan besar tersusun dari persegi 3 x 3.

Di Bab 4 kamu mencari FPB lewat faktorisasi prima. Cara itu nyaman untuk bilangan kecil, tetapi bayangkan memfaktorkan bilangan 300 angka! Algoritma Euclid sama sekali tidak memerlukan faktorisasi; ia hanya memakai pembagian bersisa berulang-ulang, dan sisanya mengecil dengan cepat.



TEOREMA • ALGORITMA EUCLID

Jika $a = qb + r$, maka

$$\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, r).$$

Ulangi pembagian bersisa dengan pasangan baru (b, r) sampai sisanya 0. **Sisa terakhir yang bukan nol** adalah FPB-nya.

▼ Bukti algoritma Euclid

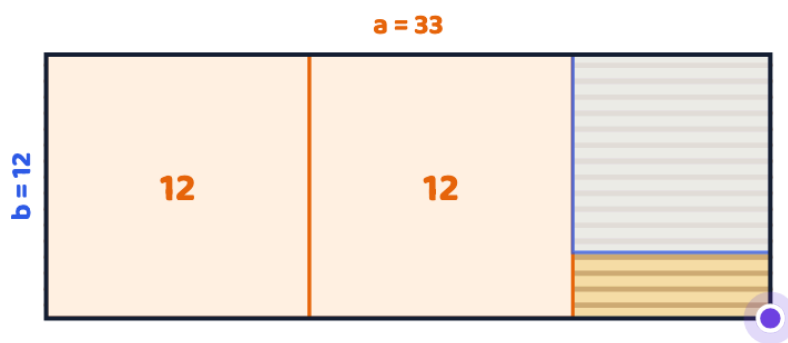
Setiap pembagi persekutuan a dan b juga membagi $r = a - qb$ (sifat 1). Sebaliknya, setiap pembagi persekutuan b dan r juga membagi $a = qb + r$. Jadi pasangan (a, b) dan (b, r) memiliki himpunan pembagi persekutuan yang **sama persis**, sehingga pembagi terbesarnya pun sama. Karena $b > r > r' > \dots \geq 0$ adalah barisan bilangan cacah yang terus turun, prosesnya pasti berhenti di sisa 0.



LAB MINI

Pemotong kue Euclid

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38



Pembagian bersusun

$$33 = 2 \times 12 + 9$$

$$12 = 1 \times 9 + 3$$

👉 seret titik ungu di pojok kue

FPB(a, b)
3

x (Bézout)
-1

y (Bézout)
3

Persegi terpotong
2

Atur panjang dan lebar kue (atau seret titik ungu di pojok kanan bawah), lalu tekan ► **Jalankan**. Coba tombol **Fibonacci 55 × 34**: mengapa pasangan Fibonacci membuat Euclid bekerja paling lama? Perhatikan baris Bézout yang muncul di akhir.

Euclid menyimpan hadiah tersembunyi. Baca pembagian bersusun pada kue tadi dari bawah ke atas, lalu substitusikan sisanya satu per satu:

$$3 = 12 - 1 \cdot 9 = 12 - 1 \cdot (33 - 2 \cdot 12) = 3 \cdot 12 - 1 \cdot 33$$

Jadi FPB 3 dapat ditulis sebagai kombinasi 33 dan 12 dengan pengali bulat: $33 \cdot (-1) + 12 \cdot 3 = 3$. Ini selalu bisa dilakukan.



TEOREMA · IDENTITAS BÉZOUT

Untuk bilangan bulat a dan b yang tidak keduanya nol, ada bilangan bulat x dan y sehingga

$$ax + by = \text{FPB}(a, b).$$

Lebih kuat lagi: $\text{FPB}(a, b)$ adalah bilangan positif **terkecil** yang berbentuk $ax + by$, dan setiap bilangan berbentuk $ax + by$ adalah kelipatannya.

▼ Bukti identitas Bézout

Misalkan $d = ax_0 + by_0$ adalah bilangan positif terkecil berbentuk $ax + by$ (pasti ada, karena misalnya $a^2 + b^2 > 0$ berbentuk itu). Bagi a dengan d : $a = qd + r$ dengan $0 \leq r < d$. Maka $r = a - q(ax_0 + by_0) = a(1 - qx_0) + b(-qy_0)$ juga berbentuk $ax + by$. Karena $r < d$ dan d yang terkecil positif, haruslah $r = 0$, jadi $d \mid a$. Dengan cara sama $d \mid b$. Di sisi lain, setiap pembagi persekutuan a dan b membagi $ax_0 + by_0 = d$, jadi tidak ada pembagi persekutuan yang lebih besar daripada d . Kesimpulannya $d = \text{FPB}(a, b)$.





TRIK KAK LINTANG: TABEL EUCLID DIPERLUAS

Daripada substitusi mundur yang mudah keliru, catat setiap sisa sebagai kombinasi a dan b sambil maju. Baris baru = baris dua di atasnya dikurangi q kali baris tepat di atasnya.

Sisa	q	x	y	Cek: $33x + 12y$
33	—	1	0	33
12	—	0	1	12
9	2	$1 - 2 \cdot 0 = 1$	$0 - 2 \cdot 1 = -2$	$33 - 24 = 9$
3	1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$	$1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$-33 + 36 = 3$

Baris terakhir sebelum sisa 0 langsung memberi koefisien Bézout: $x = -1, y = 3$.

KERJAKAN BERSAMA FPB dan koefisien Bézout

Tentukan FPB(252, 198) dengan algoritma Euclid, lalu tuliskan FPB itu dalam bentuk $252x + 198y$.

1 $252 = 1 \cdot 198 + 54; 198 = 3 \cdot 54 + 36; 54 = 1 \cdot 36 + 18; 36 = 2 \cdot 18 + 0$. Jadi FPB = 18.

2 Mundur: $18 = 54 - 36 = 54 - (198 - 3 \cdot 54) = 4 \cdot 54 - 198$.

3 Substitusi $54 = 252 - 198$: $18 = 4(252 - 198) - 198 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198$.

FPB(252, 198) = 18 = $252 \cdot 4 + 198 \cdot (-5)$. Cek: $1008 - 990 = 18$. ✓



TAMU DARI MASA LALU

Algoritma Euclid tercatat dalam kitab *Elemen* karya Euclid dari Aleksandria (± 300 SM), Buku VII, dan sering disebut algoritma tertua yang masih dipakai sampai sekarang. Di sana algoritma ini digambarkan persis seperti memotong ruas garis: "kurangi yang panjang dengan yang pendek berulang-ulang". Identitasnya dinamai Étienne Bézout, matematikawan Prancis abad ke-18, walaupun Claude-Gaspard Bachet sudah menuliskan hasil serupa sekitar seabad sebelumnya.

38.3 Aritmetika modular: berhitung di jam dinding

Jam dinding hanya punya angka 1 sampai 12. Pukul 10 ditambah 5 jam bukan pukul 15, melainkan pukul 3. Jam "melupakan" kelipatan 12 dan hanya mengingat sisanya. Matematikawan menamai dunia seperti ini **aritmetika modular**.



DEFINISI • KONGRUENSI

Untuk bilangan asli n , kita tulis

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b),$$

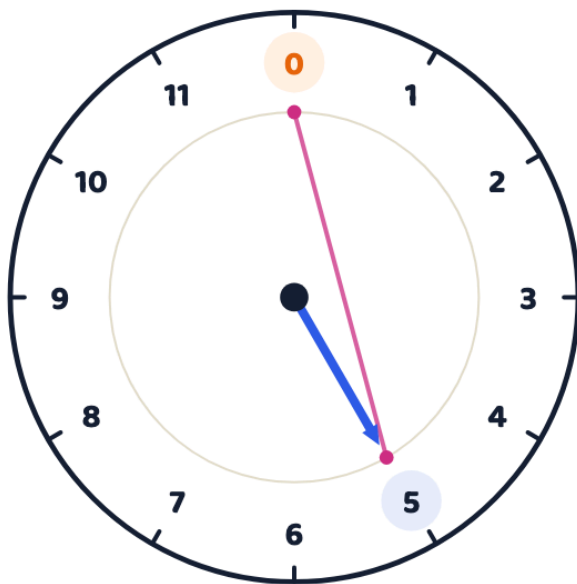
dibaca " a **kongruen** dengan b modulo n ". Artinya a dan b bersisa sama jika dibagi n . Bilangan n disebut **modulus**. Contoh: $15 \equiv 3 \pmod{12}$, $100 \equiv 2 \pmod{7}$, dan $-1 \equiv 6 \pmod{7}$. Sisa pembagian a oleh n ditulis $a \bmod n$.

Bahasa sederhana • Bayangkan jam berangka 0 sampai $n - 1$. Mulai di angka 0, lalu maju a langkah. Angka tempat jarum berhenti adalah $a \bmod n$. Dua bilangan disebut kongruen kalau jarumnya berhenti di angka yang sama.

LAB MINI

Jam modular: jarum yang melompat

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38



Jam modulo 12

langkah $a = 5$

lompatan ke-1: maju $1 \times 5 = 5$

$$5 = 0 \times 12 + 5$$

$$\text{posisi} = 5 \bmod 12 = 5$$

$$\text{FPB}(5, 12) = 1$$

Tebak dulu: setelah berapa lompatan jarum kembali ke titik awal?

Tekan ► untuk melihatnya.

👉 klik angka di jam = pilih langkah a

Lompatan ke-
1

Total maju $k \cdot a$
5

Posisi = $k \cdot a \bmod n$
5

FPB(a, n)
1

Angka dikunjungi
2

Pilih modulus n dan langkah a , lalu tekan ► **Jalankan**: jarum melompat a angka setiap kali dan meninggalkan jejak berbentuk bintang. Kapan jarum mengunjungi *semua* angka? Bandingkan $n = 12$ dengan $a = 5$ dan $a = 4$. Kamu juga bisa mengeklik angka di jam untuk memilih langkah.

$$a = q \cdot n + r, \quad r = a \bmod n$$

Kurangi a dengan kelipatan n sebanyak mungkin; yang tersisa (antara 0 dan $n - 1$) adalah $a \bmod n$, yaitu tempat jarum jam berhenti.



 $n = 7$: sisa ini menentukan hari

$1.000 = 142 \times 7 + 6$. Sisa selalu salah satu dari 0, 1, ..., 6. Pada jam bernomor 0 sampai 6, bergerak 1.000 langkah dari angka 0 berakhir di angka 6.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SISA-MODULO



SIFAT OPERASI KONGRUENSI

Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$, maka

$$a + c \equiv b + d, \quad a - c \equiv b - d, \quad ac \equiv bd,$$

Artinya, kamu boleh **mengganti bilangan dengan sisanya kapan saja** sebelum menjumlah, mengurangi, mengalikan, atau mengangkat.

▼ Bukti sifat operasi

Diketahui $n \mid a - b$ dan $n \mid c - d$. Penjumlahan: $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, habis dibagi n .

Perkalian: $ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$, kombinasi dua kelipatan n , jadi habis dibagi n . Pangkat: terapkan aturan perkalian k kali.



TRIK KAK LINTANG: PAKAI SISA NEGATIF

Sisa "hampir n " lebih enak ditulis negatif. Karena $6 \equiv -1 \pmod{7}$, maka $6^{2026} \equiv (-1)^{2026} = 1 \pmod{7}$. Karena $99 \equiv -1 \pmod{100}$, maka 99^{99} berakhiran 99. Hitungan raksasa selesai dalam satu baris!



AWAS JEBAKAN

Dalam kongruensi, kamu **tidak** boleh sembarangan membagi kedua ruas. Contoh: $2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 8 \pmod{10}$ (sebab 6 dan 16 bersisa sama), tetapi $3 \not\equiv 8 \pmod{10}$. Membagi dengan c hanya sah jika $\text{FPB}(c, n) = 1$.

CONTOH

Hari Kemerdekaan tahun depan

Tanggal 17 Agustus 2026 jatuh pada hari Senin. Hari apakah 17 Agustus 2027?

- 1 Dari 17 Agustus 2026 sampai 17 Agustus 2027 ada 365 hari (Februari 2027 hanya 28 hari).
- 2 $365 = 52 \cdot 7 + 1$, jadi $365 \equiv 1 \pmod{7}$.
- 3 Maju 1 hari dari Senin.

17 Agustus 2027 jatuh pada hari Selasa. Itulah sebabnya tanggal ulang tahunmu bergeser satu hari setiap tahun (dua hari bila melewati 29 Februari).



ADU CEPAT

Sisa kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari kelipatan n terbesar yang tidak melebihi a , lalu hitung selisihnya. Contoh: $100 \bmod 7 \rightarrow 98 = 14 \times 7$, jadi sisanya 2.



MATEMATIKA NUSANTARA

Kalender Jawa memakai dua siklus sekaligus: tujuh hari (Senin sampai Minggu) dan lima hari *pasaran* (Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon). Pasangan keduanya disebut **weton**, misalnya Jumat Kliwon. Karena $\text{KPK}(7, 5) = 35$, weton yang sama berulang setiap 35 hari (satu *selapan*), dan setiap pasangan hari-pasaran muncul tepat sekali dalam 35 hari. Kalender Pawukon di Bali bahkan menjalankan beberapa "minggu" dengan panjang berbeda secara bersamaan dalam siklus 210 hari. Leluhur kita sudah bermain aritmetika modular berabad-abad!



LANJUT · IB & OLIMPIADE

TEOREMA SISA CINA

Jika $\text{FPB}(m, n) = 1$, sistem $x \equiv a \pmod{m}$, $x \equiv b \pmod{n}$ **selalu** punya penyelesaian, dan penyelesaiannya tunggal modulo mn . Bukti singkat: ambil bilangan $0, 1, \dots, mn - 1$. Dua bilangan berbeda di antaranya tidak mungkin punya pasangan sisa yang sama, sebab selisihnya akan habis dibagi m dan n , jadi habis dibagi mn , padahal selisihnya kurang dari mn . Ada mn bilangan dan mn pasangan sisa, jadi setiap pasangan muncul tepat sekali. Inilah alasan matematis di balik siklus weton 35 hari.



TAMU DARI MASA LALU

Kitab *Sunzi Suanjing* dari Tiongkok (sekitar abad ke-3 sampai ke-5 M) memuat teka-teki terkenal: ada sejumlah benda; dihitung tiga-tiga sisa 2, dihitung lima-lima sisa 3, dihitung tujuh-tujuh sisa 2. Berapa banyaknya? Jawaban terkecilnya 23, dan dari teka-teki inilah Teorema Sisa Cina mendapat namanya.

COBA SENDIRI

Menanti Jumat Kliwon

Hari ini Minggu Pon. Paling cepat berapa hari lagi kita bertemu Jumat Kliwon? (Urutan pasaran: Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon.)

- 1 Dari Minggu ke Jumat maju 5 hari, jadi banyak hari d memenuhi $d \equiv 5 \pmod{7}$.
- 2 Dari Pon ke Kliwon maju 2 pasaran, jadi $d \equiv 2 \pmod{5}$.
- 3 Kandidat $d \equiv 5 \pmod{7}$: 5, 12, 19, 26, 33. Yang bersisa 2 jika dibagi 5 adalah 12.

Jumat Kliwon tiba 12 hari lagi, lalu berulang setiap 35 hari: 47, 82, ... hari lagi.

38.4 Angka terakhir dan siklus pangkat

Sekarang kita siap menjawab teka-teki komik. Angka satuan sebuah bilangan sama dengan sisanya jika dibagi 10. Menurut sifat perkalian kongruensi, angka satuan 7^{k+1} cukup dihitung dari angka satuan 7^k dikali 7. Jadi angka satuan pangkat-pangkat sebuah bilangan berjalan seperti jarum jam:

Angka satuan a	a^1	a^2	a^3	a^4	Panjang siklus
0, 1, 5, 6	tidak berubah (0, 1, 5, 6)				1
2	2	4	8	6	4

3	3	9	7	1	4
4	4	6	4	6	2
7	7	9	3	1	4
8	8	4	2	6	4
9	9	1	9	1	2

Untuk 7, siklusnya $7 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$, panjangnya 4. Karena $2026 = 4 \times 506 + 2$, pangkat 2026 jatuh di posisi kedua siklus: angka satuan 7^{2026} adalah **9**. Dalam bahasa modular: $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, sehingga

$$7^{2026} = (7^4)^{506} \cdot 7^2 \equiv 1^{506} \cdot 49 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Bahasa sederhana • Gampangnya: cari pola angka satuan dengan mengalikan beberapa kali, temukan kapan polanya berulang, lalu bagi pangkatnya dengan panjang pola. Sisanya menunjukkan posisi di dalam pola.



MENGAPA SELALU AMAN MAJU 4 PANGKAT?

Untuk **setiap** bilangan bulat a berlaku $a^5 \equiv a \pmod{10}$ (buktinya memakai Teorema Fermat kecil di subbab berikutnya, untuk modulus 2 dan 5). Akibatnya $a^{k+4} \equiv a^k \pmod{10}$ untuk semua $k \geq 1$, walaupun siklus aslinya bisa lebih pendek (1 atau 2).

$$s = \text{angka satuan dari } a^k$$

Angka satuan a^k hanya bergantung pada angka satuan a dan sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4), karena polanya berulang setiap 4 pangkat.

 a Bilangan pokok a k Pangkat k s

Angka satuan

ANGKA SATUAN

9



teka-teki komik terjawab!

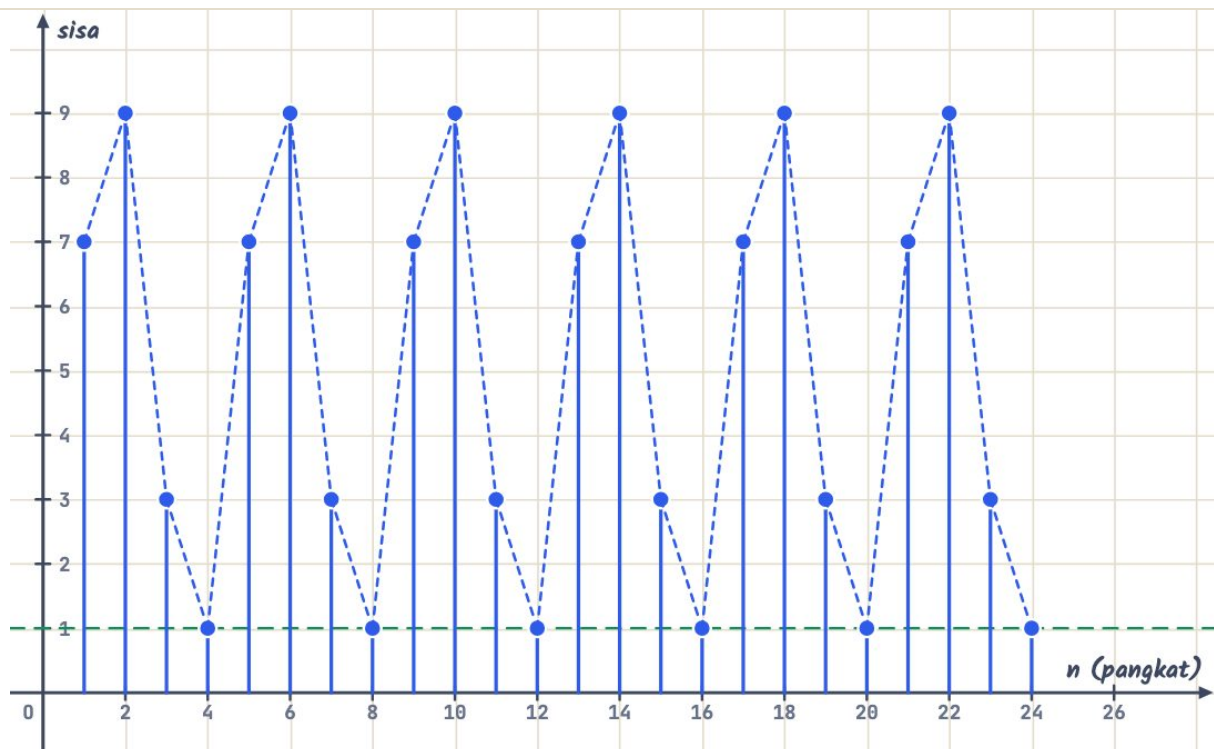
Angka satuan dari **7** adalah **7**. Pangkat **2.026** dibagi 4 bersisa **2**, jadi cukup hitung **7** pangkat **2**, yaitu **49**. Angka satuannya **9**.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SATUAN-PANGKAT

$$y_n = a^n \bmod m$$

$$y_n = 7^n \bmod 10$$

Titik ke- n menunjukkan sisa a^n jika dibagi m . Karena sisanya hanya punya m kemungkinan, cepat atau lambat polanya pasti berulang.



$m = 10$: inilah angka satuan a^n

Panjang siklus

4

$a^{(m-1)} \bmod m$

7

$a^{2026} \bmod m$

9

Mulai dari $a = 7$, $m = 10$: titik-titik melompat 7, 9, 3, 1 lalu berulang. Sekarang ganti m dengan bilangan prima (5, 7, 11, 13) dan perhatikan garis putus-putus magenta. Apa yang selalu terjadi di sana?

Tentukan angka satuan dari $2^{2026} \times 3^{2027}$.

- 1 Siklus 2: 2, 4, 8, 6. Karena $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, angka satuan 2^{2026} adalah 4.
- 2 Siklus 3: 3, 9, 7, 1. Karena $2027 \equiv 3 \pmod{4}$, angka satuan 3^{2027} adalah 7.
- 3 Kalikan angka satuannya saja: $4 \times 7 = 28$.

Angka satuannya 8, padahal bilangannya sendiri punya lebih dari 1.500 angka.



ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-38)

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Ambil angka satuan a , lalu sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4). Contoh: 13 pangkat 27 $\rightarrow$ 3 pangkat 3 = 27 $\rightarrow$ angka satuannya 7.



DUA ANGKA TERAKHIR 7^{2026}

Dua angka terakhir adalah sisa pembagian oleh 100. Keberuntungan kecil: $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. Maka $7^{2026} = (7^4)^{506} \cdot 7^2 \equiv 49 \pmod{100}$, jadi 7^{2026} berakhiran **49**. Untuk bilangan pokok lain, siklus modulo 100 bisa lebih panjang (misalnya 20 untuk bilangan pokok 3), tetapi panjangnya selalu membagi 40, seperti yang dijamin Teorema Euler di subbab berikutnya.

38.5 Teorema Fermat kecil: rahasia kalung manik-manik

Di grafik siklus tadi, pilih modulus prima, misalnya $m = 7$, lalu ganti-ganti a . Ada keajaiban: pada pangkat ke-6 sisanya **selalu 1**. Dengan $m = 11$, keajaiban yang sama terjadi pada pangkat ke-10. Ini bukan kebetulan.



TEOREMA FERMAT KECIL

Jika p bilangan prima dan a bilangan bulat yang tidak habis dibagi p , maka

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Bentuk yang setara dan berlaku untuk **semua** bilangan bulat a : $a^p \equiv a \pmod{p}$, yaitu $p \mid a^p - a$.

Mengapa $a^p - a$ selalu habis dibagi p ? Bayangkan Ayu merangkai kalung dari p manik dengan a pilihan warna. Sebagai *untaian lurus*, ada a^p kemungkinan. Sebanyak a di antaranya berwarna tunggal. Ketika ujung-ujung untai disambung menjadi kalung, untai-untai yang hanya berbeda karena **diputar** menjadi kalung yang sama. Lab berikut menunjukkan bahwa untuk p prima, setiap kalung campuran berasal dari tepat p untai.

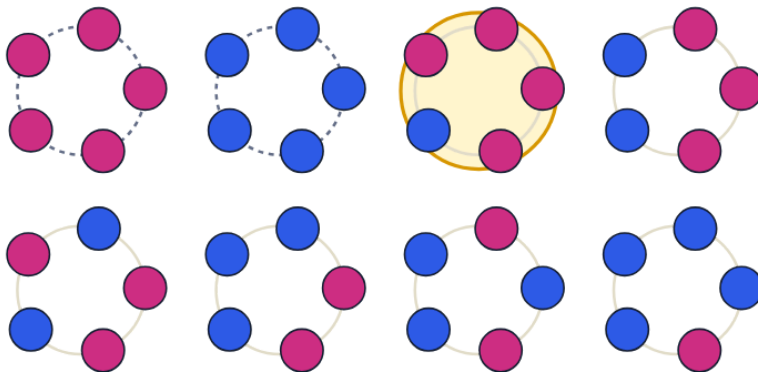
LAB MINI Kalung manik-manik Fermat

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38

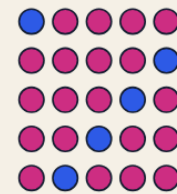
$2^5 = 32$ untai • 2 satu warna • 30 campuran

$30 \div 5 = 6$ ✓ bulat

kalung campuran berbeda: 6



Kalung terpilih, dibuka di setiap putaran:



= 5 untai berbeda

$p = 5$ prima: setiap kalung campuran = tepat 5 untai

👉 klik sebuah kalung

a^p (semua untai)

32

Untai satu warna

2

Kalung campuran

6

$(a^p - a) \div p$

6

Pilih banyak warna a dan banyak manik p . Tekan ► **Jalankan** untuk memutar semua kalung, lalu klik sebuah kalung untuk melihat untai-untai yang dikandungnya. Bandingkan $p = 5$ atau 7 (prima) dengan $p = 4$ atau 6. Kapan $(a^p - a) \div p$ bulat?

▼ Bukti Teorema Fermat kecil dengan kalung

Kelompokkan $a^p - a$ untai campuran (yang memakai lebih dari satu warna) menurut kalung yang dibentuknya. Memutar sebuah untai sejauh $1, 2, \dots, p$ posisi menghasilkan untai-untai dalam kelompok yang sama; misalkan untai kembali ke bentuk semula pertama kali setelah s putaran. Maka putaran berulang dengan periode s , dan karena putaran sejauh p jelas mengembalikan untai, $s \mid p$. Untuk p prima, $s = 1$ atau $s = p$. Nilai $s = 1$ berarti untai tidak berubah saat diputar satu posisi, yaitu semua manik berwarna sama, padahal untainya campuran. Jadi $s = p$: setiap kelompok berisi tepat p untai, sehingga $p \mid a^p - a$. Jika $p \nmid a$, bilangan a boleh "dicoret" dari $a(a^{p-1} - 1)$ karena $\text{FPB}(a, p) = 1$, sehingga $p \mid a^{p-1} - 1$.

RUMUS HIDUP Teorema Fermat kecil

$$a^{p-1} \bmod p = r$$

Jika p prima dan a tidak habis dibagi p , sisa a pangkat $(p - 1)$ dibagi p selalu 1.



3 pangkat 6 dibagi 7 bersisa 1. Modulus prima dan a tidak habis dibagi p, jadi Fermat menjamin sisa 1.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-FERMAT-KECIL



AWAS JEBAKAN

Teorema Fermat hanya berjalan satu arah: "prima $\Rightarrow$ sisa 1". Kebalikannya salah! Contoh: $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, padahal $341 = 11 \times 31$ bukan prima. Ingat juga syaratnya: jika $p \mid a$, misalnya 7^6 dibagi 7, sisanya 0, bukan 1.

Tentukan sisa pembagian 3^{2026} oleh 11.

- 1 11 prima dan tidak membagi 3, jadi $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.
- 2 $2026 = 10 \cdot 202 + 6$, sehingga $3^{2026} = (3^{10})^{202} \cdot 3^6 \equiv 3^6 \pmod{11}$.
- 3 $3^5 = 243 = 22 \cdot 11 + 1 \equiv 1$, jadi $3^6 \equiv 3 \pmod{11}$.

Sisanya 3. Bonus: ternyata siklus 3 modulo 11 hanya sepanjang 5, dan 5 membagi $p - 1 = 10$. Panjang siklus selalu membagi $p - 1$.



TAMU DARI MASA LALU

Pierre de Fermat, ahli hukum di Toulouse pada abad ke-17 yang bermatematika sebagai hobi, menuliskan teorema ini dalam sebuah surat tahun 1640 tanpa menyertakan bukti. Gottfried Leibniz menulis buktinya sekitar 1683 tetapi tidak menerbitkannya; bukti pertama yang diterbitkan datang dari Leonhard Euler pada 1736. Bukti dengan kalung yang kamu lihat di atas dipopulerkan Solomon Golomb pada 1956.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TEOREMA EULER DAN KRIPTOGRAFI RSA

Misalkan $\varphi(n)$ adalah banyaknya bilangan $1, 2, \dots, n$ yang relatif prima dengan n . Euler membuktikan: jika $\text{FPB}(a, n) = 1$, maka $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Untuk n prima, $\varphi(n) = n - 1$ dan kita mendapat Fermat lagi. Karena $\varphi(10) = 4$ dan $\varphi(100) = 40$, siklus angka satuan selalu membagi 4 dan siklus dua angka terakhir selalu membagi 40 (untuk a yang relatif prima dengan 10). Sistem kriptografi RSA memilih dua prima raksasa p, q , lalu mengenkripsi pesan M menjadi $M^e \pmod{pq}$. Hanya pemilik $\varphi(pq) = (p - 1)(q - 1)$ yang tahu pangkat d dengan $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}$ untuk membukanya, dan menemukan $\varphi(pq)$ tanpa mengetahui p dan q sangatlah sulit.

MITOS

"Kalau 2^{n-1} bersisa 1 jika dibagi n , pasti n bilangan prima."

MITOS

"Angka satuan pangkat selalu berulang setiap 4 langkah."

FAKTA

Tidak selalu.
 $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, padahal $341 = 11 \times 31$.
Teorema Fermat hanya menjamin arah "prima $\Rightarrow$ sisa 1", bukan sebaliknya.

FAKTA

Siklusnya bisa sepanjang 1 (untuk 0, 1, 5, 6), 2 (untuk 4 dan 9), atau 4. Yang selalu benar: maju 4 pangkat tidak mengubah angka satuan, karena $a^5 \equiv a \pmod{10}$.

MITOS

"Teori bilangan memang indah, tetapi tidak ada gunanya."

FAKTA

Matematikawan G. H. Hardy (1940) pernah bangga bahwa teori bilangan "tak berguna". Kini aritmetika modular mengamankan m-banking, tanda tangan digital, dan digit cek di setiap kartu ATM.

Persamaan Diophantine linear: uang pas tanpa kembalian



Tebak Dulu!

Dompet Ayu hanya berisi lembaran Rp2.000 dan Rp5.000 (masing-masing banyak sekali). Ia harus membayar dengan uang pas, tanpa kembalian. Harga manakah yang mustahil ia bayar?

Rp11.000

Rp7.000

Rp3.000

Rp13.000

Jawabannya: Rp3.000. $Rp11.000 = 3 \times 2.000 + 5.000$, $Rp7.000 = 2.000 + 5.000$, $Rp13.000 = 4 \times 2.000 + 5.000$. Rp3.000 tidak bisa: satu lembar 5.000 sudah kelebihan, sedangkan lembar 2.000 saja hanya menghasilkan bilangan genap (dalam ribuan). Ternyata di antara kelipatan Rp1.000, hanya Rp1.000 dan Rp3.000 yang mustahil; semua harga mulai Rp4.000 bisa dibayar pas!

Membayar N ribu rupiah dengan x lembar Rp2.000 dan y lembar Rp5.000 berarti mencari bilangan bulat x, y dengan $2x + 5y = N$. Persamaan yang jawabannya harus bilangan bulat seperti ini disebut **persamaan Diophantine**, dinamai Diophantus dari Aleksandria (sekitar abad ke-3 M).

Bahasa sederhana • Coba bayar Rp1.000 kalau penjual boleh memberi kembalian: serahkan tiga lembar Rp2.000 (Rp6.000), lalu terima kembalian satu lembar Rp5.000. Hasilnya kamu membayar $6.000 - 5.000 = 1.000$ rupiah. Kembalian sama dengan y bernilai negatif: $2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 1$.



TEOREMA • PERSAMAAN DIOPHANTINE LINEAR

Misalkan $d = \text{FPB}(a, b)$. Persamaan $ax + by = c$ mempunyai penyelesaian bilangan bulat **jika dan hanya jika** $d \mid c$. Jika (x_0, y_0) satu penyelesaian, maka **semua** penyelesaiannya adalah

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

▼ Bukti

Syarat perlu: d membagi a dan b , jadi membagi $ax + by = c$. **Syarat cukup:** menurut Bézout ada u, v dengan $au + bv = d$. Jika $c = kd$, maka $x = ku, y = kv$ memenuhi $ax + by = c$. **Semua solusi:** jika (x, y) dan (x_0, y_0) sama-sama solusi, maka $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$. Bagi dengan d : $\frac{a}{d}(x - x_0) = -\frac{b}{d}(y - y_0)$. Karena $\frac{a}{d}$ dan $\frac{b}{d}$ relatif prima, $\frac{b}{d} \mid x - x_0$; tulis $x - x_0 = \frac{b}{d}t$, dan substitusi memberi $y - y_0 = -\frac{a}{d}t$.

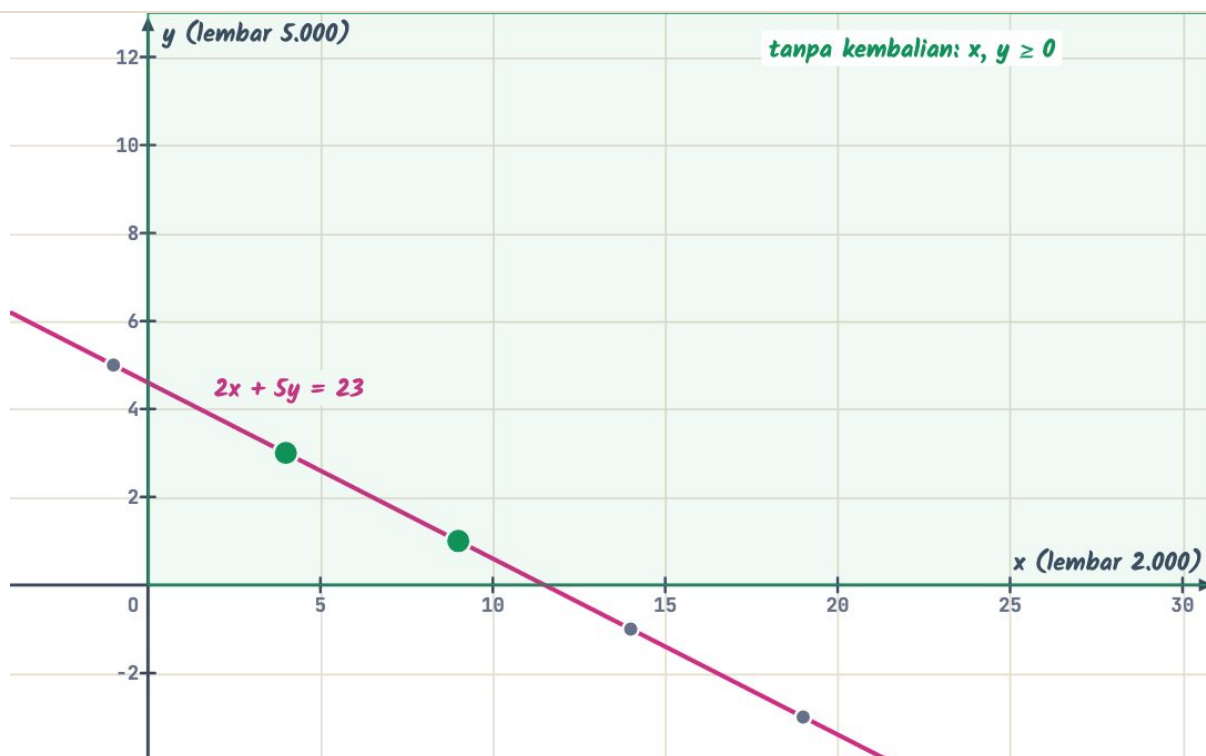
GRAFIK HIDUP Uang pas dengan lembar 2.000 dan 5.000

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-38

$$2x + 5y = N \quad (\text{ribu rupiah})$$

$$2x + 5y = 23$$

Setiap titik adalah satu cara membayar. Titik hijau: tanpa kembalian ($x, y \geq 0$). Titik abu-abu: x atau y negatif, artinya ada lembar yang dikembalikan penjual.



$N \geq 4$: selalu bisa dibayar pas

Cara tanpa kembalian
2

Lembar paling sedikit
7

Geser harga N . Semua titik bulat terletak di garis yang sama dan berjarak teratur: maju 5 ke kanan, turun 2. Itulah rumus $x = x_0 + 5t, y = y_0 - 2t$. Berapa harga yang hanya punya satu cara bayar tanpa kembalian?

$$d = \text{FPB}(a, b), \quad ax + by = c \text{ punya solusi bulat} \Leftrightarrow$$

Hitung FPB kedua koefisien. Persamaan punya solusi bulat tepat ketika ruas kanan c adalah kelipatan FPB itu.



FPB(6, 15) = 3. Bilangan 21 adalah kelipatan 3, jadi $6x + 15y = 21$ punya solusi bilangan bulat. Bagi dulu semuanya dengan 3: $2x + 5y = 7$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SYARAT-DIOPHANTINE

Kak Lintang membeli kue lapis Rp7.000 per potong dan klepon Rp4.000 per bungkus, masing-masing minimal satu, dengan total tepat Rp100.000. Ada berapa kemungkinan belanjanya?

- 1 Model: $7x + 4y = 100$ dengan $x, y \geq 1$. Karena $\text{FPB}(7, 4) = 1$, solusi bulat pasti ada.
- 2 Bézout: $7 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 1$. Kalikan 100: $x_0 = -100, y_0 = 200$.
- 3 Semua solusi: $x = -100 + 4t, y = 200 - 7t$. Syarat $x \geq 1$ memberi $t \geq 26$; syarat $y \geq 1$ memberi $t \leq 28$.
- 4 $t = 26, 27, 28$ menghasilkan $(x, y) = (4, 18), (8, 11), (12, 4)$.

Ada 3 kemungkinan. Cek salah satunya: $7 \cdot 8 + 4 \cdot 11 = 56 + 44 = 100$. ✓

**BILANGAN FROBENIUS: HARGA YANG MUSTAHIL**

Untuk dua bilangan asli $a, b > 1$ yang relatif prima, bilangan terbesar yang **tidak** dapat ditulis sebagai $ax + by$ dengan $x, y \geq 0$ adalah $ab - a - b$, dan banyaknya bilangan yang mustahil tepat $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. Untuk uang 2 dan 5 (ribuan): yang terbesar $10 - 2 - 5 = 3$, dan ada $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2$ harga mustahil, yaitu Rp1.000 dan Rp3.000. Untuk perangko 5 dan 7: yang terbesar 23, dan ada 12 nilai mustahil. Hasil ini sering muncul di OSN dengan cerita koin, perangko, atau kemasan.

**Kalender & weton**

Menentukan hari 1.000 hari lagi, atau kapan Jumat Kliwon berikutnya, cukup dengan sisa pembagian oleh 7 dan 5.

**ISBN & barcode**

Angka terakhir ISBN-13 dan barcode produk dipilih agar jumlah berbobot 1 dan 3 habis dibagi 10, sehingga salah ketik satu angka pasti ketahuan.

**Nomor kartu ATM**

Nomor kartu pembayaran memakai algoritma Luhn (modulo 10) untuk menangkap salah ketik sebelum transaksi diproses.

**m-banking & situs aman**

Kriptografi RSA mengandalkan pangkat modulo bilangan raksasa dan Teorema Euler, saudara tua Teorema Fermat kecil.

**Kode QRIS**

Data QRIS diakhiri kode pemeriksa (CRC) yang dihitung dari sisa sebuah pembagian, sehingga kode yang rusak dapat ditolak aplikasi.

**Jadwal obat & ronda**

Minum obat setiap 8 jam atau giliran ronda bergilir adalah aritmetika modulo 24 dan modulo banyaknya warga.

**Cek Cepat**

Sisa pembagian 2^{100} oleh 3 adalah...

2

1

0

Tidak bisa ditentukan tanpa kalkulator

Untuk nilai c manakah persamaan $6x + 15y = c$ mempunyai penyelesaian bilangan bulat?

10

20

21

25

Jarum jam menunjuk pukul 10. Seratus jam kemudian, jarum menunjuk pukul...

2

4

10

8

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. C • 3. A

Tantangan Rumah: detektif ISBN

Bahan: 3–5 buku yang punya ISBN 13 angka (lihat sampul belakang atau halaman hak cipta), kertas, pensil, kalkulator HP.

1. Tulis 13 angka ISBN sebuah buku (abaikan tanda hubung).
2. Kalikan angka ke-1, 3, 5, ... dengan 1 dan angka ke-2, 4, 6, ... dengan 3, lalu jumlahkan ketiga belas hasilnya.
3. Periksa: apakah jumlahnya habis dibagi 10? Ulangi untuk buku-buku lain.
4. Sekarang pura-pura salah ketik: tukar dua angka yang bersebelahan, lalu hitung ulang jumlahnya.
5. Coba beberapa pertukaran. Kapan kesalahannya tertangkap dan kapan lolos?

Pertanyaan: Jika dua angka bersebelahan u dan v tertukar, jumlah berbobotnya berubah sebesar $2(u - v)$ atau $-2(u - v)$. Kapan perubahan itu tetap kelipatan 10 sehingga kesalahan lolos? (Petunjuk: $10 \mid 2(u - v) \iff 5 \mid u - v$.)

 RINGKASAN KILAT **Bab 38 dalam 3 menit**

✓ Kamu sekarang bisa...

- memakai **algoritma pembagian** dan sifat keterbagian untuk menalar sisa tanpa menghitung bilangan raksasa
- menghitung FPB dengan **algoritma Euclid** dan menemukan koefisien **Bézout**
- berhitung dalam **aritmetika modular**: jam, kalender, weton, dan digit cek
- menentukan angka terakhir pangkat besar lewat **siklus** dan **Teorema Fermat kecil**
- menyelesaikan **persamaan Diophantine linear**, misalnya membayar pas dengan uang Rp2.000 dan Rp5.000

🔑 Istilah kunci

membagi

hasil bagi

sisa

aritmetika modular

kongruen

modulus

persamaan Diophantine

📖 Rumus penting

$$a = q \cdot n + r, \quad r = a \bmod n$$

Sisa pembagian ($a \bmod n$). Kurangi a dengan kelipatan n sebanyak mungkin; yang tersisa (antara 0 dan $n - 1$) adalah $a \bmod n$, yaitu tempat jarum jam berhenti.

$$s = \text{angka satuan dari } a^k$$

Angka satuan pangkat besar. Angka satuan a^k hanya bergantung pada angka satuan a dan sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4), karena polanya berulang setiap 4 pangkat.

$$a^{p-1} \bmod p = r$$

Teorema Fermat kecil. Jika p prima dan a tidak habis dibagi p , sisa a pangkat $(p - 1)$ dibagi p selalu 1.

$$d = \text{FPB}(a, b), \quad ax + by = c \text{ punya solusi bulat} \iff d \mid c$$

Syarat persamaan Diophantine linear. Hitung FPB kedua koefisien. Persamaan punya solusi bulat tepat ketika ruas kanan c adalah kelipatan FPB itu.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Sisa pembagian tidak pernah negatif: -17 dibagi 5 bersisa 3, bukan -2 , karena $-17 = (-4) \cdot 5 + 3$.
- Dalam kongruensi, kamu tidak boleh sembarangan membagi kedua ruas.
- Teorema Fermat hanya berjalan satu arah: "prima $\Rightarrow$ sisa 1".

📄 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=38

Teka-teki untuk Bab 39

Di sebuah kelas ada 13 siswa. Benarkah pasti ada dua siswa yang lahir pada bulan yang sama, tanpa perlu menanyai mereka satu per satu? Versi teori bilangannya lebih mengejutkan: ambil 13 bilangan bulat *sembarang*. Pasti ada dua di antaranya yang selisihnya habis dibagi 12. Mengapa?

▼ Intip petunjuk

Hanya ada 12 bulan, dan hanya ada 12 kemungkinan sisa pembagian oleh 12 (0 sampai 11). Kalau 13 benda dimasukkan ke 12 kotak, pasti ada kotak yang berisi dua. Bab 39 menamai trik sederhana namun sakti ini **prinsip sarang merpati**.

39 Strategi Olimpiade: Merpati, Papan Catur, dan Rahasia AM-GM

Bagaimana kamu bisa yakin ada dua teman sekelas yang lahir di bulan yang sama tanpa bertanya kepada siapa pun? Mengapa 31 domino tidak akan pernah bisa menutup papan catur yang dua pojoknya dipotong? Di bab terakhir ini kamu mengisi kotak perkakas para juara: berpikir cerdas, bukan menghitung semuanya.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **prinsip sarang merpati** (bentuk dasar dan bentuk umum) untuk membuktikan bahwa sesuatu *pasti ada*;
- menemukan **invarian** dan **monovarian** untuk menjawab pertanyaan "mungkinkah?";
- memakai **pewarnaan** untuk membuktikan bahwa sebuah pengubinan mustahil;
- membuktikan dan memakai ketaksamaan **AM-GM** serta **Cauchy-Schwarz** untuk mencari nilai maksimum dan minimum;
- menerapkan **heuristik Pólya**: kasus kecil, bekerja mundur, simetri, dan prinsip ekstrem.

TIGA BELAS MERPATI

KOMIK · 4 PANEL

Senin pagi, di depan papan pengumuman

DIMAS

Kak, soal latihan seleksi OSN ini aneh: "Buktikan, dari 13 siswa pasti ada 2 yang lahir di bulan yang sama." Masa harus kutanya satu per satu?



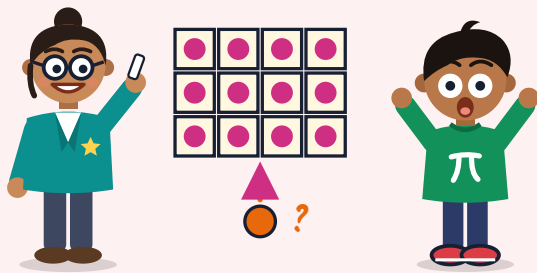
AYU

Bertanya ke 13 orang hanya membuktikannya untuk satu kelas. Soalnya bilang "pasti", artinya untuk kelas MANA PUN!



KAK LINTANG

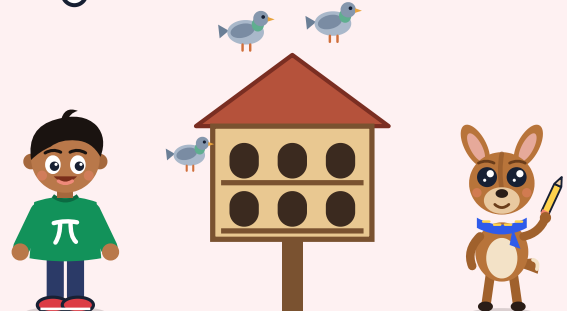
Bayangkan 12 kotak, satu per bulan. Dua belas siswa pertama paling-paling mengisi 12 kotak berbeda. Siswa ke-13? Semua kotak sudah berpenghuni!

TING!**Dari atap pagupon (rumah merpati)...****ANCIL**

Itulah prinsip sarang merpati: 13 merpati, 12 sarang, pasti ada sarang berisi dua. Tanpa menanyakan satu tanggal pun!

DIMAS

Membuktikan "pasti ada" tanpa menunjuk orangnya... keren!

**Tebak Dulu!**

Dalam kotak yang gelap ada 10 kaus kaki merah dan 10 kaus kaki biru, bercampur. Paling sedikit berapa kaus kaki yang harus kamu ambil tanpa melihat agar pasti mendapat sepasang yang warnanya sama?

11, lebih dari separuh isi kotak.

2, karena sepasang terdiri atas dua kaus kaki.

3 saja.

21, karena kotaknya hanya berisi 20.

Jawabannya: 3. Hanya ada dua warna, jadi dua "sarang". Dengan nasib paling sial, dua kaus kaki pertama berbeda warna. Kaus kaki ketiga *pasti* sewarna dengan salah satunya. Angka 11 adalah jebakan; pertanyaan "agar pasti mendapat dua kaus kaki **merah**" pun jawabannya bukan 11, melainkan 12 (sial terburuk: 10 biru dulu).

Prinsip sarang merpati: pasti ada, walau tak tahu yang mana

Soal olimpiade sering berbunyi "buktikan bahwa *pasti ada...*". Kita tidak diminta menunjuk siapa atau yang mana, cukup memastikan bahwa ia ada. Senjata paling sederhana untuk soal seperti ini terdengar seperti lelucon, tetapi dipakai sampai di tingkat olimpiade internasional.

Bahasa sederhana • Bayangkan ada 5 kursi dan 6 anak yang semuanya harus duduk. Seberapa pun pintarnya mereka mengatur diri, pasti ada satu kursi yang dipakai berdua. Itu saja isinya!



PRINSIP SARANG MERPATI (PIGEONHOLE PRINCIPLE)

Bentuk dasar. Jika $n + 1$ ekor merpati (atau lebih) masuk ke n sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit 2 merpati.

Bentuk umum. Jika N benda dimasukkan ke k kotak, pasti ada kotak yang berisi paling sedikit $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ benda.

$$\text{isi kotak ter penuh} \geq \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Lambang $\lceil x \rceil$ berarti x **dibulatkan ke atas**: $\lceil 2,1 \rceil = 3$, $\lceil 4 \rceil = 4$.

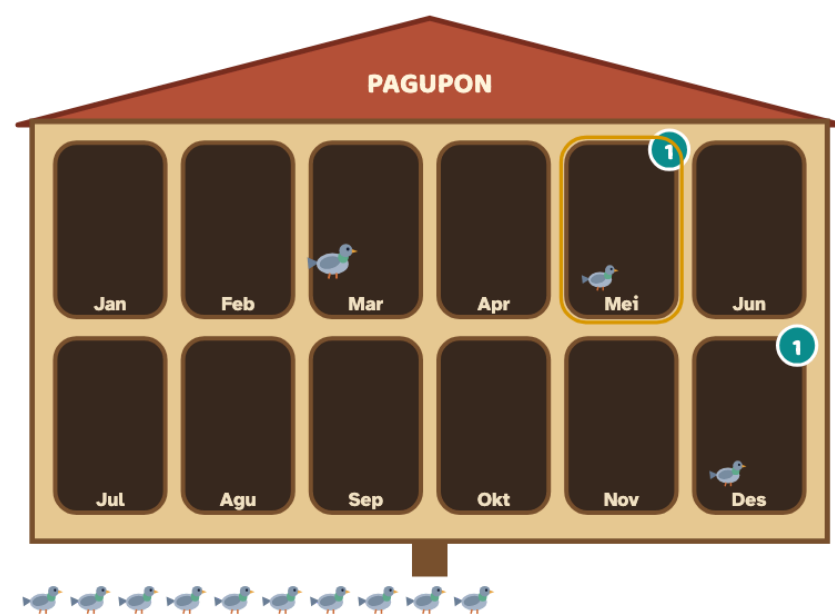
▼ Bukti (dengan kontradiksi, seperti di Bab 35)

Andaikan setiap kotak berisi paling banyak $\lceil N/k \rceil - 1$ benda. Karena $\lceil N/k \rceil - 1 < N/k$, jumlah seluruh benda paling banyak

$$k \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \cdot \frac{N}{k} = N,$$

padahal bendanya ada N . Kontradiksi! Jadi ada kotak dengan paling sedikit $\lceil N/k \rceil$ benda. Bentuk dasar adalah kasus $N = n + 1$, $k = n$: $\lceil (n + 1)/n \rceil = 2$.



**N = 13 merpati****k = 12 sarang** $N : k = 1,08$ $\lceil N/k \rceil = 2$

Janji: pasti ada sarang

berisi ≥ 2 ekor

sarang terpenuhi: 1 ekor

👉 *ketuk lubang*Merpati di sarang
2Isi sarang terpenuhi
1Jaminan $\lceil N/k \rceil$
2Keadaan
11 merpati menunggu

Ketuk sebuah lubang untuk menerbangkan merpati berikutnya ke sana, atau tekan ► **Jalankan**. Pilih cara terbang "**paling merata**": merpati berusaha keras tidak berbagi sarang. Tetap saja, adakah sarang yang berisi $\lceil N/k \rceil$ ekor? Coba 13 merpati di 12 sarang, lalu 25 merpati di 12 sarang.

$$m = \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Bagikan N merpati ke k sarang serata mungkin. Tetap saja ada sarang yang isinya paling sedikit N/k , dibulatkan ke atas.

 N

Banyak merpati ekor

 k

Banyak sarang sarang

 m

Isi minimal sarang terpenuhi ekor

ISI MINIMAL SARANG TERPENUH

2

ekor



pasti ada sarang yang dihuni bersama

13 merpati di 12 sarang: rata-rata **1,083** ekor per sarang. Karena isi sarang selalu bilangan bulat, pasti ada sarang berisi paling sedikit **2** ekor.

Cek satuan: merpati dan sarang hanyalah nama samaran. Tanyakan selalu: siapa merpatinya, apa sarangnya?

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SARANG-MERPATI](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-sarang-merpati)



TRIK KAK LINTANG

Kalau soal berbunyi "buktikan pasti ada dua yang...", curigai sarang merpati. Ajukan dua pertanyaan: **siapa merpatinya?** dan **apa sarangnya?** Seni olimpiadennya ada pada memilih sarang yang cerdas: kadang bulan lahir, kadang sisa pembagian, kadang pasangan bilangan, kadang potongan persegi.



AWAS JEBAKAN

Prinsip sarang merpati hanya menjamin **ada** sarang yang berisi dua; ia tidak memberi tahu sarang *yang mana*, dan tidak menjamin *semua* sarang terisi. Hati-hati pula menghitung sarang: skor 0 sampai 10 itu 11 kemungkinan, bukan 10.

CONTOH Kembaran ulang tahun di sekolah

Sebuah sekolah memiliki 370 siswa. Buktikan bahwa ada dua siswa yang berulang tahun pada tanggal dan bulan yang sama.

- 1 Merpati: 370 siswa. Sarang: semua kemungkinan tanggal ulang tahun dalam setahun.
- 2 Termasuk 29 Februari, banyaknya tanggal hanya 366.
- 3 $370 > 366$, jadi menurut prinsip sarang merpati ada tanggal yang dimiliki paling sedikit dua siswa.

Terbukti, tanpa membuka satu pun data siswa. Bahkan menurut bentuk umum, ada tanggal yang dimiliki $\lceil 370/366 \rceil = 2$ siswa, dan dengan 733 siswa dijamin ada tiga.

KERJAKAN BERSAMA Sarang berupa pasangan

Enam bilangan berbeda dipilih dari 1, 2, ..., 10. Buktikan bahwa selalu ada dua bilangan terpilih yang jumlahnya 11.

- 1 Kuncinya memilih sarang. Pasangkan bilangan yang jumlahnya 11: $\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}$. Ada 5 sarang yang mencakup semua bilangan 1–10.
- 2 Enam bilangan terpilih adalah merpatinya. Karena $6 > 5$, dua bilangan terpilih berada di sarang yang sama.
- 3 Dua bilangan sesarang adalah pasangan berjumlah 11.

Selalu ada pasangan berjumlah 11. Lima bilangan belum cukup: pilihan 1, 2, 3, 4, 5 tidak punya pasangan berjumlah 11.

ADU CEPAT Sarang merpati kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-39](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-39)

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bagi N dengan k, lalu bulatkan ke atas. Contoh: 25 merpati, 12 sarang $\rightarrow 25 : 12 \approx 2,08 \rightarrow 3$.



TAMU DARI MASA LALU

Prinsip ini sering dinamai menurut Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), matematikawan Jerman yang memakainya dalam teori bilangan sekitar tahun 1834. Ia menyebutnya *Schubfachprinzip*, "prinsip laci": benda yang terlalu banyak untuk laci yang terlalu sedikit. Idenya bahkan lebih tua: sebuah buku Prancis dari sekitar tahun 1622 sudah memakainya untuk menyimpulkan bahwa pasti ada dua orang dengan jumlah helai rambut yang sama persis!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

SATU MEMBAGI YANG LAIN

Pilih $n + 1$ bilangan dari $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Buktikan bahwa ada dua bilangan terpilih yang salah satunya membagi yang lain.

Ide: tulis setiap bilangan sebagai $2^k \cdot m$ dengan m ganjil (misalnya $12 = 2^2 \cdot 3$). Bagian ganjil m hanya bisa $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$: ada n sarang. Karena ada $n + 1$ merpati, dua bilangan punya bagian ganjil yang sama, misalnya $2^i m$ dan $2^j m$ dengan $i < j$. Yang kecil membagi yang besar! Untuk $n = 5$, pilihan 6, 7, 8, 9, 10 gagal karena hanya lima bilangan; bilangan keenam dari 1–10 pasti membuat pasangan "membagi".

39.2

Invarian dan monovarian: yang tetap di tengah perubahan

Banyak soal olimpiade berupa *proses*: ada keadaan awal, ada langkah yang diizinkan, lalu muncul pertanyaan "mungkinkah sampai ke keadaan ini?" atau "apa hasil akhirnya?". Mencoba semua kemungkinan bisa memakan waktu seumur hidup. Jalan pintasnya: cari sesuatu yang **tidak berubah**.



DEFINISI

Sebuah **invarian** adalah besaran yang nilainya tidak berubah oleh setiap langkah yang diizinkan (misalnya jumlah, paritas, atau sisa pembagian). Sebuah **monovarian** adalah besaran yang hanya bergerak ke satu arah: selalu naik atau selalu turun.

Jika keadaan akhir yang diminta punya nilai invarian yang berbeda dari keadaan awal, keadaan itu **mustahil** dicapai. Jika sebuah monovarian bilangan asli terus turun, prosesnya **pasti berhenti**.

Hapus a dan b , tulis $|a - b|$



Langkah 1: hapus 2 dan 1, tulis 1

Yang berubah
banyak bilangan: 9

Yang **TIDAK** berubah
jumlah sekarang = 53

GANJIL

Jumlahnya berubah, tetapi selalu berkurang sebanyak bilangan genap. Paritasnya tetap!

👉 ketuk dua bilangan

Bilangan tersisa
9

Jumlah semua bilangan
53

Invarian
jumlah ganjil

Kedaaan
berjalan

Ketuk dua bilangan di papan. Keduanya dihapus dan diganti sesuai aturan. Ulangi sampai tersisa satu bilangan, atau tekan ► **Jalankan** agar Ancil memilih secara acak. Ulangi berkali-kali: apakah hasil akhirnya berubah-ubah? Lihat panel kanan: apa yang **tidak pernah** berubah?

Pada aturan "tulis $|a - b|$ ", jumlahnya berubah, tetapi berubahnya selalu sebanyak bilangan genap ($-2 \min(a, b)$). Jadi **paritas jumlah** adalah invarian. Untuk bilangan 1 sampai 10, jumlah awalnya 55 (ganjil), sehingga bilangan terakhir pasti ganjil, apa pun urutan pilihanmu.

CONTOH

Mematahkan cokelat batang

Cokelat batang berukuran 6×8 kotak. Setiap kali dipatahkan, satu potong dibelah menjadi dua potong sepanjang garis kotak. Paling sedikit berapa patahan yang diperlukan agar semua 48 kotak terpisah?

- 1 Perhatikan besaran banyak potong – banyak patahan. Awalnya $1 - 0 = 1$.
- 2 Setiap patahan menambah tepat satu potong, jadi besaran itu tetap 1: invarian!
- 3 Di akhir ada 48 potong, jadi banyak patahan $= 48 - 1 = 47$.

Tepat 47 patahan, tidak lebih dan tidak kurang, apa pun caranya. Strategi pintar tidak bisa menghematnya, dan strategi asal-asalan tidak memboroskannya.

Ancil menulis sebuah bilangan asli $n > 1$. Setiap langkah: jika bilangannya genap, ia membaginya dengan 2; jika ganjil, ia menambahkan 1. Buktikan bahwa proses ini selalu sampai di 1.

- 1 Jika n genap, langkah berikutnya $n/2 < n$: bilangan turun.
- 2 Jika $n > 1$ ganjil, dua langkah berikutnya memberi $n + 1$ lalu $\frac{n+1}{2}$. Karena $n > 1$, berlaku $\frac{n+1}{2} < n$: setelah dua langkah bilangan juga turun.
- 3 Jadi paling lambat setiap dua langkah, bilangannya turun. Barisan bilangan asli yang terus turun tidak mungkin berlangsung selamanya.

Bilangan itu adalah monovarian, sehingga proses pasti sampai di 1. (Sepupu terkenalnya, soal Collatz "kalikan 3 tambah 1", sampai sekarang belum terpecahkan!)



AWAS JEBAKAN

Invarian ampuh untuk membuktikan sesuatu **mustahil**, tetapi tidak otomatis membuktikan sesuatu **mungkin**. Kalau nilai invarian keadaan tujuan cocok, kamu masih harus menunjukkan langkah-langkah yang benar-benar mencapainya.



MATEMATIKA NUSANTARA

Papan **congklak** (dakon) punya 14 lubang kecil dan 2 lubang besar yang disebut rumah. Pada aturan yang umum, setiap lubang kecil diisi 7 biji, jadi ada 98 biji. Biji berpindah-pindah sepanjang permainan, tetapi jumlah totalnya tetap 98: invarian paling sederhana. Pemain jago memakai invarian lain. Saat menabur, seorang pemain melewati 7 lubangnya, rumahnya sendiri, dan 7 lubang lawan, tetapi melompati rumah lawan. Jadi satu putaran terdiri atas 15 tempat, dan menabur 15 biji membuat biji terakhir jatuh kembali ke lubang asal. Inilah aritmetika modulo 15 dari Bab 38!



Tebak Dulu!

Dua pojok papan catur 8×8 yang berseberangan dipotong, sehingga tersisa 62 petak. Bisakah 62 petak itu ditutup rapat oleh 31 domino (setiap domino menutup dua petak bersebelahan)?

Bisa, karena 62 bilangan genap.

Bisa, asalkan sebagian domino dipasang tegak dan sebagian mendatar.

Tidak bisa, bagaimanapun cara memasangnya.

Hanya bisa jika domino boleh saling menumpuk.

Jawabannya: tidak bisa. Dua pojok yang berseberangan berwarna sama, misalnya hitam. Tersisa 30 petak hitam dan 32 petak putih. Setiap domino selalu menutup **satu hitam dan satu putih**, jadi 31 domino memerlukan 31 hitam dan 31 putih. Petak hitamnya kurang! "Genap" ternyata belum cukup.

Teka-teki di atas menunjukkan kekuatan **pewarnaan**: memberi warna pada petak-petak supaya setiap kepingan (domino, tromino, ubin) **selalu menutup warna yang sama banyak**. Lalu kita cukup menghitung warna. Warna hitam-putih papan catur adalah invarian yang menyamar!

Bahasa sederhana • Coba bayangkan setiap domino sebagai sepasang sepatu: satu kiri (hitam) dan satu kanan (putih). Kalau di rak ada 30 sepatu kiri dan 32 sepatu kanan, kamu tidak mungkin membuat 31 pasang. Dua sepatu kanan pasti tersisa.



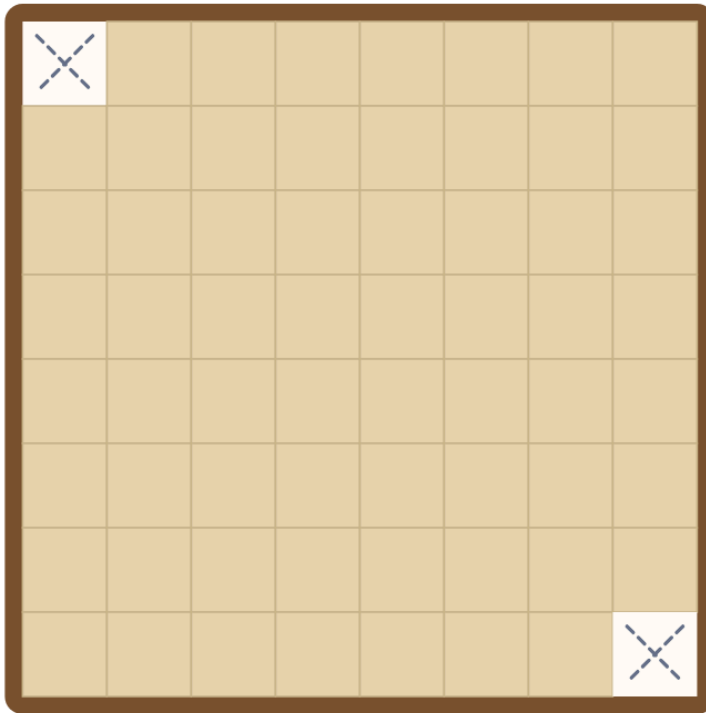
SIFAT PEWARNAAN PAPAN CATUR

Pada papan berwarna catur, setiap domino menutup tepat **satu petak hitam dan satu petak putih**. Akibatnya, sebuah daerah hanya bisa ditutup penuh oleh domino jika banyak petak hitamnya **sama dengan** banyak petak putihnya.

▼ Bukti: papan catur terpotong tidak dapat ditutup

Dua petak yang berbagi sisi berbeda baris atau berbeda kolom sejauh satu, sehingga jumlah nomor baris dan kolomnya berbeda paritas: satu hitam dan satu putih. Jadi d domino menutup tepat d petak hitam dan d petak putih.

Papan 8×8 punya 32 petak hitam dan 32 putih. Dua pojok berseberangan, misalnya a_1 dan h_8 , sama-sama hitam. Setelah dipotong tersisa 30 hitam dan 32 putih. Andaikan 31 domino menutupnya: mereka menutup 31 petak hitam, padahal hanya ada 30. Kontradiksi.



Hitungan petak

☐ hitam: ?

☐ putih: ?

domino: 0 kosong: 62

Bisakah 31 domino menutup semua petak? Coba dulu, lalu nyalakan "Tampilkan warna".

👉 Seret ke petak sebelah untuk memasang domino. Ketuk domino untuk melepas.

 Petak hitam
?

 Petak putih
?

 Domino terpasang
0

 Petak kosong
62

Mula-mula warna papan disembunyikan. Seret dari satu petak ke petak sebelahnya (atau ketuk dua petak berurutan) untuk memasang domino; ketuk domino untuk melepasnya. Bisakah kamu menutup semuanya? Setelah menyerah, nyalakan **Tampilkan warna**. Lalu tekan ✂ **Satu hitam + satu putih**: kini selalu bisa! Tekan 📊 **Isi otomatis** untuk melihat jumlah domino terbanyak.



KEBALIKANNYA JUGA INDAH

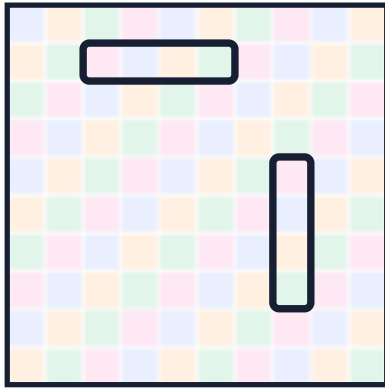
Bagaimana jika yang dipotong adalah satu petak hitam dan satu petak putih, di mana pun letaknya? Ralph Gomory membuktikan bahwa papan catur 8×8 yang dipotong seperti itu **selalu** dapat ditutup 31 domino. Idennya: semua 64 petak dapat dilalui oleh satu jalur tertutup yang warnanya berselang-seling. Dua potongan memutus jalur menjadi dua ruas yang panjangnya genap, dan setiap ruas genap mudah ditutup domino satu per satu.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

UBIN 1×4 DAN EMPAT WARNA

Bisakah papan 10×10 ditutup oleh 25 ubin berukuran 1×4 ? Luasnya cocok ($25 \times 4 = 100$), dan dua warna pun tidak menolong. Pakailah **empat warna**: petak di baris i dan kolom j (mulai dari 0) diberi warna $(i + j) \bmod 4$. Ubin 1×4 , mendatar maupun tegak, selalu menutup empat petak berurutan sehingga menutup tepat **satu petak dari setiap warna**. Jadi 25 ubin memerlukan tepat 25 petak dari setiap warna. Padahal hitungannya 25, 26, 25, dan 24. Mustahil!



Warna $(i + j) \bmod 4$ pada papan 10×10

- | | |
|--|---|
| warna 0: 25 petak | warna 1: 26 petak |
| warna 2: 25 petak | warna 3: 24 petak |

Setiap ubin 1×4 (garis tebal) menutup tepat satu petak dari setiap warna, jadi 25 ubin butuh $25 + 25 + 25 + 25 = 100$ petak.

$26 \neq 25 \neq 24 \Rightarrow \text{mustahil!}$

Pewarnaan diagonal empat warna: ubin mendatar maupun tegak selalu menutup keempat warna sekali, tetapi banyak petak per warna tidak sama.

39.4 Ketaksamaan AM-GM: rata-rata yang selalu menang

Tebak Dulu!

Pak RT punya pagar bambu sepanjang 40 m untuk membuat kandang persegi panjang. Ukuran manakah yang memberi luas terbesar?

18 m $\times$ 2 m, karena sisinya paling panjang.

15 m $\times$ 5 m.

10 m $\times$ 10 m.

Semuanya sama luasnya, karena kelilingnya sama-sama 40 m.

Jawabannya: 10 m $\times$ 10 m. Luasnya berturut-turut 36, 75, dan 100 m². Keliling yang sama *tidak* menjamin luas yang sama. Persegi selalu menang, dan alasannya adalah ketaksamaan paling terkenal di olimpiade: AM-GM.

Untuk dua bilangan tak negatif a dan b ada dua cara merata-ratakan. **Rata-rata aritmetika** (AM, *arithmetic mean*) adalah $\frac{a+b}{2}$: bagi rata jumlahnya. **Rata-rata geometri** (GM, *geometric mean*) adalah $\sqrt{ab}$: sisi persegi yang luasnya sama dengan persegi panjang $a \times b$.

Bahasa sederhana • Contoh: untuk 4 dan 9, AM = $\frac{4+9}{2} = 6,5$ dan GM = $\sqrt{36} = 6$. AM menang tipis. Coba pasangan lain sesukamu: AM tidak pernah kalah!



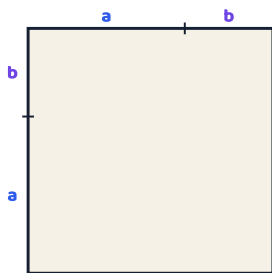
KETAKSAMAAN AM-GM (DUA BILANGAN)

Untuk semua bilangan real $a, b \geq 0$,

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

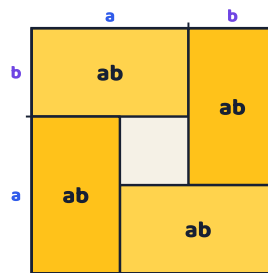
dan kesamaan terjadi **jika dan hanya jika** $a = b$. Akibatnya: jika **jumlah** dua bilangan tetap, **hasil kalinya** terbesar saat keduanya sama; jika hasil kalinya tetap, jumlahnya terkecil saat keduanya sama.

Inilah buktinya tanpa kata. Kita akan menunjukkan $(a + b)^2 \geq 4ab$ hanya dengan menyusun empat persegi panjang.



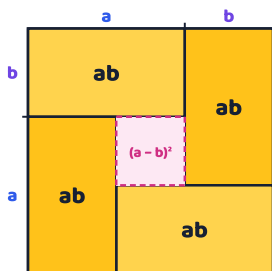
Persegi besar bersisi $a + b$.
Luasnya $(a + b)^2$.

Langkah 1. Buat persegi besar bersisi $a + b$. Luasnya $(a + b)^2$.



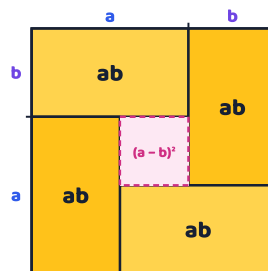
Pasang 4 persegi panjang $a \times b$
seperti baling-baling kincir angin.
Luas keempatnya: $4ab$.

Langkah 2. Susun empat persegi panjang berukuran $a \times b$ di dalamnya seperti baling-baling kincir angin. Luas keempatnya $4ab$.



Di tengah tersisa lubang persegi
bersisi $a - b$, luasnya $(a - b)^2$.
Luas tidak pernah negatif!

Langkah 3. Di tengah tersisa sebuah lubang persegi bersisi $a - b$, dengan luas $(a - b)^2$. Luas tidak mungkin negatif.

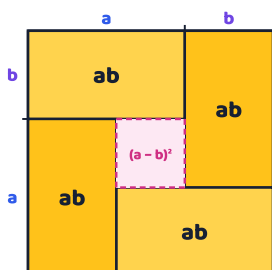


Di tengah tersisa lubang persegi
bersisi $a - b$, luasnya $(a - b)^2$.
Luas tidak pernah negatif!

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$$

Langkah 4. Luas persegi besar = luas empat persegi panjang + luas lubang: $(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2 \geq 4ab$.



Di tengah tersisa lubang persegi
bersisi $a - b$, luasnya $(a - b)^2$.
Luas tidak pernah negatif!

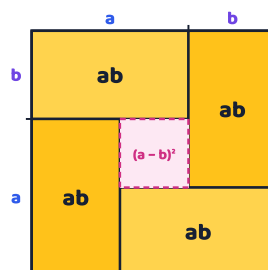
$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$$

Langkah 5. Tarik akar kedua ruas (semuanya tak negatif): $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Bagi dengan 2: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Terbukti!



Jika $a = b$, lubangnya lenyap: $(a + b)^2 = 4ab$.
AM = GM tepat!

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$$

Langkah 6. Kapan sama persis? Saat lubangnya lenyap, yaitu $a - b = 0$. Jadi AM = GM tepat ketika $a = b$.

▼ Bukti aljabar dalam satu baris

Untuk $a, b \geq 0$: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$, dan bernilai 0 tepat ketika $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, yaitu $a = b$.

$$s = \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

Selisih rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri selalu berupa bilangan kuadrat yang dibagi dua, jadi tidak pernah negatif.

a

Bilangan a

b

Bilangan b

s

Selisih AM – GM

SELISIH AM – GM

0,5

GM bulat: a × b bilangan kuadrat

AM = (4 + 9)/2 = **6,5** dan GM = $\sqrt{4 \cdot 9}$ = **6**. Selisihnya **0,5**, sama dengan $(\sqrt{4} - \sqrt{9})^2/2$ = **0,5**. Tidak pernah negatif!

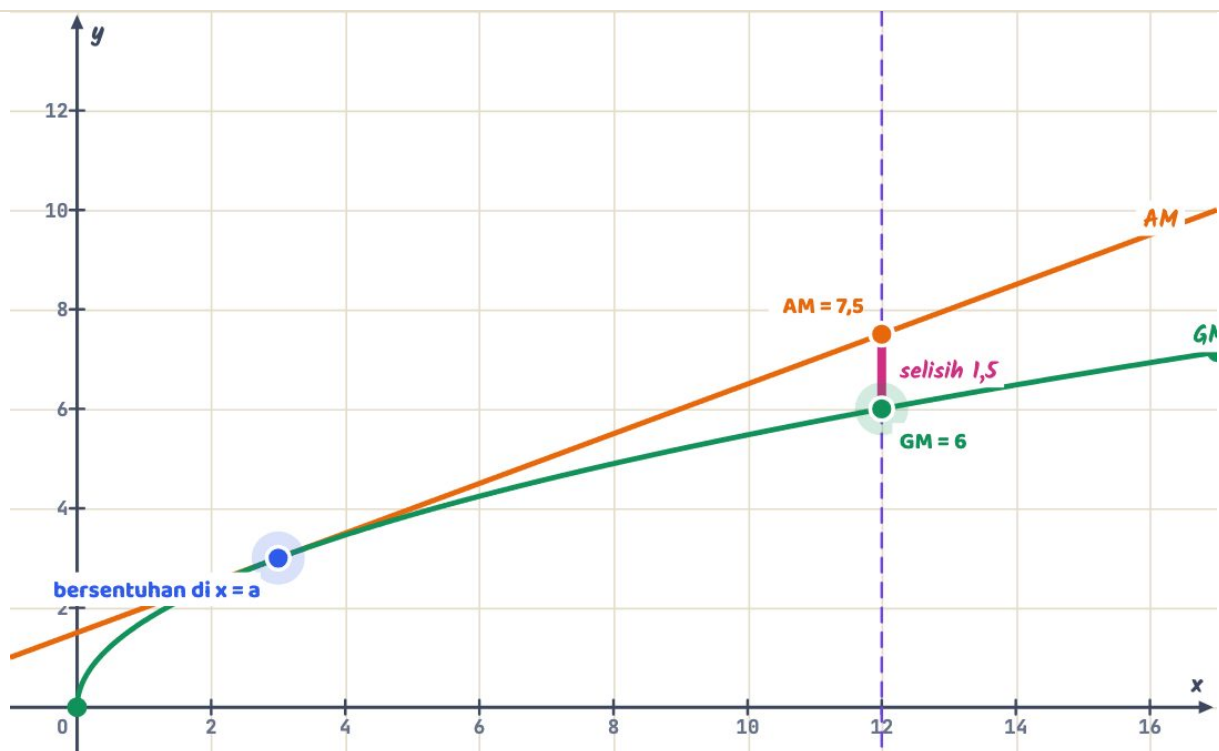
Cek satuan: jika a dan b dalam meter, AM dan GM juga dalam meter, sehingga keduanya bisa dibandingkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-AM-GM

$$\frac{a+x}{2} \geq \sqrt{ax}$$

$$x = 12 : \quad \frac{3+12}{2} = 7,5 \geq \sqrt{3 \cdot 12} = 6$$

Garis orange (AM) selalu berada di atas kurva hijau (GM) atau menyentuhnya. Keduanya bersentuhan tepat di $x = a$.



$b \neq a$: $AM > GM$

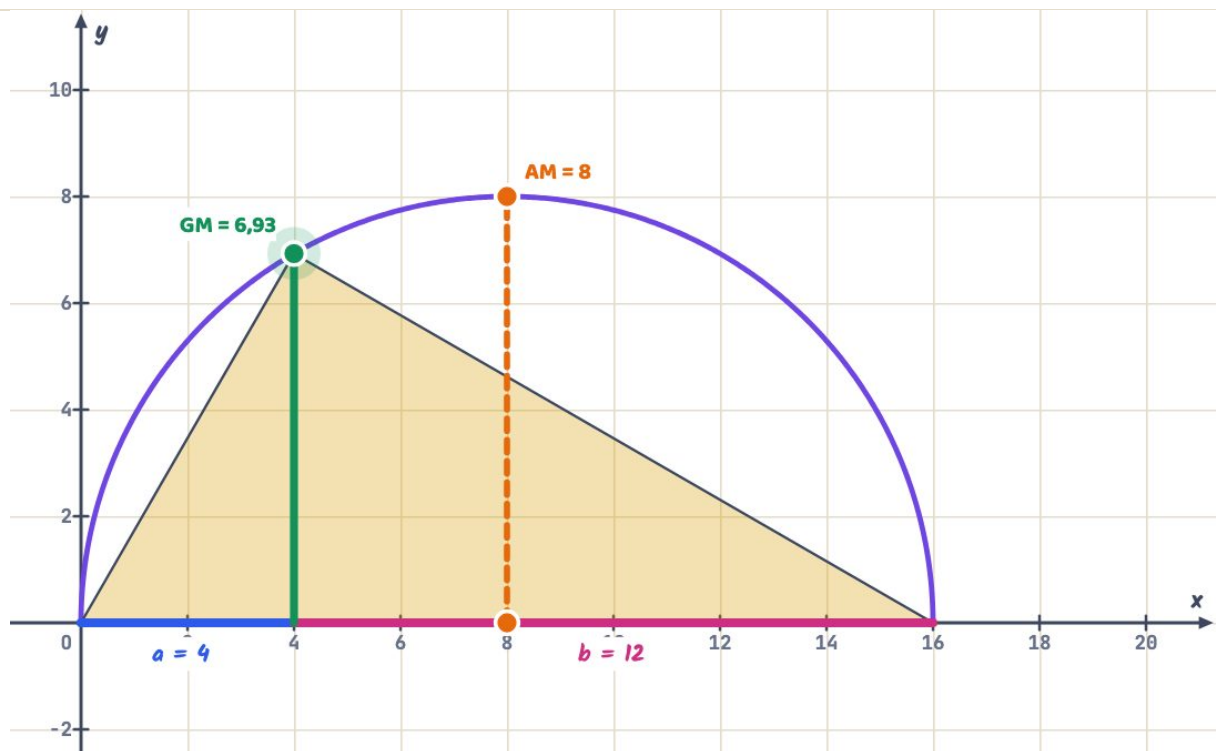
AM	GM	AM - GM
7,5	6	1,5

Seret titik hijau di sepanjang kurva, atau titik biru untuk mengubah a . Ruas magenta adalah selisih $AM - GM$. Bisakah kamu membuatnya negatif? Perhatikan juga: garis AM adalah **garis singgung** kurva GM di $x = a$.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{4 \cdot 12} = 6,93 \leq \frac{16}{2} = 8$$

Diameter dibagi menjadi a dan b . Tinggi tegak dari titik pembagi ke busur adalah GM , sedangkan jari-jari adalah AM .



$$b = (a + b) - a$$

12

$$GM = \sqrt{ab}$$

6,928

$$AM = (a + b)/2$$

8

Segitiga kuning siku-siku di titik hijau (Teorema Thales, Bab 20). Dari kesebangunan, tinggi ruas hijau memenuhi $t^2 = ab$, jadi $t = \sqrt{ab}$. Ruas hijau adalah setengah tali busur, dan tidak mungkin lebih tinggi daripada jari-jari oranye. Seret titik hijau: kapan keduanya sama tinggi?

CONTOH Pagar Pak RT

Dengan pagar 40 m, Pak RT membuat kandang persegi panjang berukuran $p \times l$. Berapa luas terbesarnya?

- 1 Keliling 40 m, jadi $p + l = 20$.
- 2 AM-GM: $\sqrt{pl} \leq \frac{p+l}{2} = 10$, sehingga $pl \leq 100$.
- 3 Kesamaan saat $p = l = 10$.

Luas terbesar 100 m², dicapai oleh kandang persegi 10 m $\times$ 10 m.

KERJAKAN BERSAMA Minimum yang bersembunyi

Tentukan nilai minimum $x + \frac{16}{x}$ untuk $x > 0$.

- 1 Kedua suku positif dan hasil kalinya tetap: $x \cdot \frac{16}{x} = 16$. Ini tanda untuk memakai AM-GM.
- 2 $x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 2\sqrt{16} = 8$.
- 3 Kesamaan saat $x = \frac{16}{x}$, yaitu $x = 4$. Cek: $4 + 4 = 8 \checkmark$.

Nilai minimumnya 8, dicapai di $x = 4$. Tanpa turunan, tanpa grafik!

**TRIK KAK LINTANG**

Pecah sukunya sampai hasil kalinya konstan. Untuk mencari minimum $x^2 + \frac{16}{x}$ (dengan $x > 0$), pecah $\frac{16}{x} = \frac{8}{x} + \frac{8}{x}$. Hasil kali $x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x} = 64$ konstan, sehingga AM-GM tiga bilangan memberi $x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{64} = 12$, dicapai saat $x^2 = \frac{8}{x}$, yaitu $x = 2$.

**AWAS JEBAKAN**

AM-GM hanya berlaku untuk bilangan **tak negatif**: untuk $a = -4$ dan $b = -1$, $AM = -2,5$ tetapi $\sqrt{ab} = 2$. Selain itu, minimum hanya tercapai jika **kesamaan bisa terjadi**. Untuk $x \geq 3$, memang $x + \frac{1}{x} \geq 2$, tetapi minimumnya bukan 2 karena $x = 1$ tidak diizinkan; minimum sebenarnya $3 + \frac{1}{3}$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

AM-GM UNTUK n BILANGAN

Untuk $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

dengan kesamaan tepat ketika semua a_i sama. Contoh: jika $a + b + c = 12$ dengan $a, b, c \geq 0$, maka $abc \leq \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64$. Inilah alasan kubus adalah kotak dengan volume terbesar untuk jumlah rusuk yang sama. Cauchy membuktikan versi umum ini dengan induksi "maju-mundur": dari 2 ke 4, 8, 16, ..., lalu turun ke semua n .



TAMU DARI MASA LALU

Setengah lingkaran pada Grafik Hidup di atas berasal dari kitab *Elemen* karya Euclid (± 300 SM). Euclid memakainya untuk membuat ruas yang panjangnya "pertengahan sebanding" dua ruas lain, yaitu $\sqrt{ab}$. Lebih dari dua ribu tahun kemudian, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) menuliskan bukti AM-GM untuk n bilangan dalam buku kalkulusnya tahun 1821. Nama Cauchy akan kamu temui lagi di subbab berikutnya.

39.5

Cauchy-Schwarz: ketaksamaan para vektor

Kalau AM-GM membandingkan jumlah dengan hasil kali, ketaksamaan **Cauchy-Schwarz** membandingkan "jumlah hasil kali" dengan "hasil kali jumlah kuadrat". Bentuknya tampak rumit, tetapi maknanya sederhana: hasil kali titik dua vektor tidak pernah melebihi hasil kali panjangnya.



KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ

Untuk semua bilangan real a_1, a_2, b_1, b_2 ,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dengan kesamaan tepat ketika (a_1, a_2) dan (b_1, b_2) **sebanding**. Bentuk yang sama berlaku untuk n pasang bilangan: $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$.

▼ Bukti dengan identitas Lagrange (dan arti geometrisnya)

Jabarkan dan kurangkan: $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$. Selisihnya nol tepat ketika $a_1 b_2 = a_2 b_1$, yaitu kedua pasangan sebanding.

Secara geometris, untuk vektor $\vec{u} = (a_1, a_2)$ dan $\vec{v} = (b_1, b_2)$ berlaku $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$. Karena $|\cos \theta| \leq 1$, kuadrat hasil kali titik tidak melebihi $|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$.



$$D = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1b_2 -$$

Ruas kanan Cauchy-Schwarz dikurangi ruas kirinya selalu sama dengan sebuah bilangan kuadrat, jadi tidak pernah negatif.

$$\begin{matrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & b_1 & b_1 & b_2 & b_2 & D & \text{Selisih kedua ruas} \end{matrix}$$

SELISIH KEDUA RUAS

4

Ruas besar: $(1 + 4)(9 + 16) = 125$. Ruas kecil: $(11)^2 = 121$. Selisihnya 4, tidak pernah negatif.

Cek satuan: semua bilangan tak bersatuan; D selalu bilangan kuadrat sempurna bila inputnya bulat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-CAUCHY-SCHWARZ

Bilangan real x dan y memenuhi $3x + 4y = 25$. Tentukan nilai minimum $x^2 + y^2$.

1 Pasangkan $(3, 4)$ dengan (x, y) : $(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2)$.

2 $625 \leq 25(x^2 + y^2)$, jadi $x^2 + y^2 \geq 25$.

3 Kesamaan saat $(x, y) = k(3, 4)$: $25k = 25$, $k = 1$, titiknya $(3, 4)$. Cek: $9 + 16 = 25 \checkmark$.

Minimumnya 25. Artinya, titik pada garis $3x + 4y = 25$ yang paling dekat ke titik asal adalah $(3, 4)$, dengan jarak $\sqrt{25} = 5$. Tripel 3-4-5 dari Bab 18 muncul lagi!

**BENTUK ENGEL (LEMMA TITU)**

Untuk $x, y > 0$, Cauchy-Schwarz dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Bentuk ini sangat praktis untuk pecahan. Contoh: jika $x + y = 2$ dan $x, y > 0$, maka $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1^2}{x} + \frac{3^2}{y} \geq \frac{(1+3)^2}{2} = 8$, dengan kesamaan saat $\frac{1}{x} = \frac{3}{y}$, yaitu $x = \frac{1}{2}$ dan $y = \frac{3}{2}$.

39.6**Kotak perkakas Pólya: heuristik pemecahan masalah**

Di Bab 1 kamu berkenalan dengan empat langkah Pólya: **pahami** masalahnya, **rencanakan**, **laksanakan**, dan **periksa kembali**. Langkah kedua paling sulit, karena di situlah ide harus muncul. Para juara tidak menunggu ilham jatuh dari langit; mereka membuka kotak perkakas berisi **heuristik**, yaitu strategi coba-coba yang terarah.

Strategi	Pertanyaan pemicu	Contoh mini
Kasus kecil	Bagaimana jika angkanya 1, 2, 3, bukan 2026?	n orang saling berjabat tangan: 1, 3, 6, 10, ... $\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}$.
Bekerja mundur	Dari keadaan akhir, langkah apa yang membawaku ke sana?	Permainan ambil biji: posisi kalah 0, 4, 8, ... (animasi di bawah).
Simetri	Apa yang tetap jika aku menukar, membalik, atau memasangkan?	Gauss: $1 + 2 + \dots + 100 = 50$ pasang $\times 101 = 5050$.
Prinsip ekstrem	Bagaimana dengan yang terbesar, terkecil, terdekat, terjauh?	Perang balon air (Contoh "Coba sendiri" di bawah).
Invarian & paritas	Apa yang tidak berubah oleh setiap langkah?	Papan tulis ajaib, cokelat batang.
Sarang merpati	Apakah bendanya lebih banyak daripada kotaknya?	13 siswa, 12 bulan.
Pewarnaan	Bisakah kuberi warna agar setiap kepingan menutup warna yang sama banyak?	Papan catur terpotong, ubin 1×4 .

Mari lihat **bekerja mundur** beraksi. Dimas dan Ayu bermain dengan 21 biji congklak. Bergiliran, setiap pemain mengambil 1, 2, atau 3 biji. Yang mengambil biji terakhir menang. Dimas mulai. Bagaimana caranya pasti menang?

Banyak biji yang tersisa saat giliranmu:



Aturan: ambil 1, 2, atau 3 biji. Yang mengambil biji terakhir menang.
Mulai dari akhir permainan, bukan dari 21!

Langkah 1. Bekerja mundur: mulailah dari keadaan paling akhir, yaitu ketika biji hampir habis.

Banyak biji yang tersisa saat giliranmu:



0 biji di giliranmu: lawan baru saja mengambil biji terakhir.
Kamu kalah: K.

Langkah 2. Dengan 0 biji di giliranmu, lawan sudah mengambil biji terakhir. Itu posisi **kalah** (K).

Banyak biji yang tersisa saat giliranmu:



1, 2, atau 3 biji: ambil semuanya sekaligus.
Kamu menang: M.

Langkah 3. Dengan 1, 2, atau 3 biji, ambil semuanya. Itu posisi **menang** (M).

Banyak biji yang tersisa saat giliranmu:



4 biji: ambil 1, 2, atau 3, lawan mendapat posisi M dan menang.
Semua jalan menuju M lawan, jadi 4 adalah K.

Langkah 4. Dengan 4 biji, langkah apa pun memberi lawan posisi M. Jadi 4 adalah posisi K.

Banyak biji yang tersisa saat giliranmu:



5, 6, 7: sisakan tepat 4 untuk lawan, jadi M.
8: setiap langkah memberi lawan 5, 6, atau 7. Jadi 8 adalah K.

Langkah 5. 5, 6, dan 7 adalah M (sisakan 4 untuk lawan), sedangkan 8 kembali menjadi K.

Banyak biji yang tersisa saat giliranmu:



Pola: kelipatan 4 adalah posisi kalah.
 $21 = 4 \times 5 + 1$. Dimas mengambil 1 biji, menyisakan 20, lalu setiap lawan mengambil k , Dimas mengambil $4 - k$. Pasti menang!

Langkah 6. Polanya: kelipatan 4 adalah K. Karena $21 = 4 \times 5 + 1$, Dimas mengambil 1 biji dan selalu menyisakan kelipatan 4.

KERJAKAN BERSAMA

Simetri: menjumlah tanpa menjumlah

Semua bilangan empat angka yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4 (setiap angka dipakai tepat sekali) dijumlahkan. Berapa hasilnya?

- 1 Banyak bilangannya $4! = 24$. Menjumlahkan satu per satu melelahkan; cari simetri.
- 2 Pasangkan setiap bilangan dengan "cerminannya": ganti setiap angka d dengan $5 - d$. Contoh: $1234 \leftrightarrow 4321$, $2143 \leftrightarrow 3412$. Setiap pasangan berjumlah 5555.
- 3 Ada $24 : 2 = 12$ pasangan, jadi jumlahnya $12 \times 5555 = 66.660$.

Jumlahnya 66.660. Cara lain: setiap angka muncul 6 kali di setiap posisi, sehingga jumlahnya $6 \times (1 + 2 + 3 + 4) \times 1111 = 66.660$. Dua jalan, satu jawaban: tanda bahwa kita benar!

Lima anak berdiri di lapangan sehingga jarak setiap dua anak berbeda-beda. Pada aba-aba, setiap anak melempar balon air tepat ke anak yang paling dekat dengannya. Buktikan bahwa ada anak yang tetap kering.

- 1 **Prinsip ekstrem:** ambil pasangan dengan jarak terkecil, misalnya A dan B. Masing-masing adalah yang terdekat bagi yang lain, jadi A dan B saling lempar.
- 2 **Kasus 1:** ada anak lain (C, D, atau E) yang melempar ke A atau B. Ketiga anak itu hanya punya 3 balon, dan paling sedikit satu "terbuang" ke A atau B. Jadi paling banyak 2 balon mendarat pada C, D, E: ada yang kering.
- 3 **Kasus 2:** tidak ada yang melempar ke A atau B. Ulangi idenya untuk C, D, E: pasangan terdekat di antara mereka, misalnya C dan D, saling lempar, dan E melempar ke C atau D. Tidak ada yang melempar ke E.

Dalam kedua kasus ada anak yang kering. Dengan induksi (Bab 35), cara yang sama berlaku untuk banyak anak ganjil berapa pun. Untuk banyak anak genap, coba cari contoh semua anak basah!



TRIK KAK LINTANG

Buntu dengan angka besar seperti 2026? **Kecilkan dulu.** Ganti dengan 1, 2, 3, 4, kerjakan dengan tangan, catat dalam tabel, lalu tebak polanya. Setelah itu, jangan lupa langkah terpenting: **buktikan** polanya.



AWAS JEBAKAN

Pola dari kasus kecil bisa menipu. Letakkan n titik pada lingkaran dan hubungkan setiap pasang titik dengan tali busur. Banyak daerah maksimumnya untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$ adalah 1, 2, 4, 8, 16, tampak seperti pangkat dua. Namun untuk $n = 6$ hasilnya **31**, bukan 32! Rumus sebenarnya $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$. Tebakan baru menjadi kebenaran setelah dibuktikan.

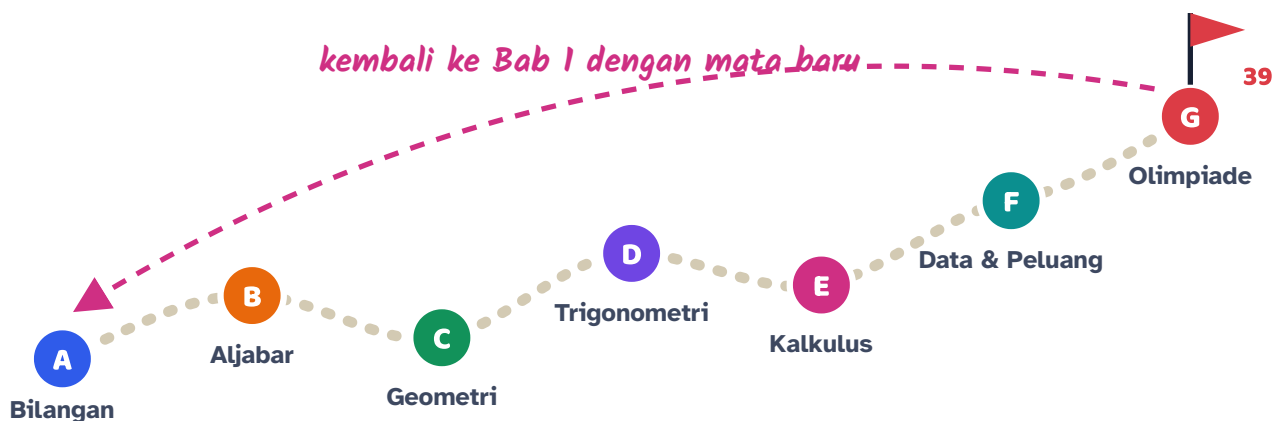


TAMU DARI MASA LALU

George Pólya (1887–1985), matematikawan kelahiran Hongaria yang lama mengajar di Swiss dan Amerika Serikat, menulis buku *How to Solve It* (1945). Buku tipis itu terjual lebih dari satu juta eksemplar dan diterjemahkan ke banyak bahasa. Pólya percaya bahwa memecahkan masalah adalah keterampilan praktis, seperti berenang: kamu mempelajarinya dengan meniru dan berlatih, bukan hanya dengan membaca.

39.7 Akhir yang menjadi awal

Selamat! Kamu sudah sampai di bab terakhir Mathpedia. Perjalananmu dimulai dari pola batik kawung dan sarang lebah, melewati bilangan, aljabar, geometri, trigonometri, kalkulus, serta data dan peluang, sampai akhirnya tiba di puncak: strategi olimpiade. Coba tengok ke belakang. Hampir setiap ide di bab ini sudah kamu temui dalam bentuk lain: invarian di congklak, soal pagar di puncak parabola, Cauchy-Schwarz di vektor, sarang merpati di kalender.



Tujuh bagian, 39 bab. Puncak gunung bukan tempat berhenti, melainkan tempat melihat jalan-jalan baru.



SURAT DARI KAK LINTANG

Untuk kamu yang sudah sampai di halaman ini, Matematika bukan lomba siapa yang paling cepat menghitung. Matematika adalah keberanian untuk bertanya "**mengapa?**" dan kesabaran untuk mencari jawabannya sampai tuntas. Bawalah empat kebiasaan ini ke mana pun kamu pergi:

1. **Bermainlah dulu.** Coba kasus kecil, gambar, dan tebak dengan berani seperti Dimas.
2. **Tuntut bukti.** Tanyakan "apakah selalu benar?" seperti Ayu.
3. **Cari jalan cerdas.** Seperti Ancil, cari invarian, simetri, atau sarang merpati sebelum menghitung keras.
4. **Jangan takut salah.** Setiap kesalahan adalah petunjuk. Juara olimpiade pun mencoret-coret ratusan halaman sebelum menemukan satu ide yang indah.

Salam hangat dari kami berempat: Kak Lintang, Ayu, Dimas, dan Ancil.



PETA JALAN OLIMPIADE

Di Indonesia, **Olimpiade Sains Nasional (OSN)** untuk SD, SMP, dan SMA diselenggarakan berjenjang, mulai dari tingkat kabupaten/kota, provinsi, hingga nasional. Peraih medali terbaik tingkat SMA dibina lebih lanjut untuk memilih tim Indonesia ke **International Mathematical Olympiad (IMO)**, lomba matematika pelajar tertua di dunia yang pertama kali digelar di Rumania pada tahun 1959. Ada pula banyak lomba lain, misalnya olimpiade yang diadakan kampus-kampus seperti OMITS dan kompetisi daring. Latihan terbaik untuk semuanya sama: soal Lv 5–6 di setiap bab buku ini.

MITOS

"Juara olimpiade itu jenius sejak lahir."

FAKTA

Kebanyakan juara berlatih bertahun-tahun, mengerjakan ratusan soal, dan sering gagal. Mereka hafal

strategi

seperti di bab ini, bukan sekadar rumus. Rasa ingin tahu dan kegigihan jauh lebih penting daripada bakat.

MITOS

"Sudah dicoba seratus kali dan selalu gagal, berarti mustahil."

FAKTA

Seratus kegagalan belum menjadi bukti.

Kemustahilan dibuktikan dengan argumen yang berlaku untuk

semua

cara, misalnya hitungan warna pada papan catur terpotong atau sebuah invarian.

MITOS

"Soal olimpiade butuh rumus rahasia yang rumit."

FAKTA

Banyak soal OSN selesai dengan ide sederhana: sarang merpati, paritas, pewarnaan, atau AM-GM dua bilangan. Yang sulit adalah

melihat

ide itu, dan kemampuan melihat tumbuh lewat latihan.



Kompresi berkas

Sarang merpati membuktikan tidak ada program yang bisa memperkecil *setiap* berkas tanpa kehilangan data: berkas panjang lebih banyak daripada berkas pendek.



Sidik jari digital

Kode cek (*hash*) yang pendek pasti punya "tabrakan" karena masukannya jauh lebih banyak. Para ahli keamanan merancang agar tabrakan itu sangat sulit ditemukan.



Kemasan hemat

AM-GM menunjukkan kotak yang mendekati kubus memakai bahan paling sedikit untuk volume tertentu, penting bagi UMKM yang mengirim keripik dan kopi.



Jadwal ujian dan liga

Pewarnaan graf menyusun jadwal agar mata ujian yang diikuti siswa yang sama tidak bentrok, dan pertandingan liga tidak tumpang-tindih.



Frekuensi menara seluler

Menara yang berdekatan diberi "warna" frekuensi berbeda agar sinyalnya tidak saling mengganggu. Ini juga soal pewarnaan.



Kecerdasan buatan permainan

Program catur dan permainan strategi menilai posisi dengan bekerja mundur dari akhir permainan, persis seperti tabel M dan K tadi.

Cek Cepat

Ada 20 siswa. Pasti ada paling sedikit berapa siswa yang lahir pada hari yang sama (Senin sampai Minggu)?

Nilai minimum $x + \frac{4}{x}$ untuk $x > 0$ adalah...

Papan 4×4 dipotong dua pojoknya yang berseberangan. Paling banyak berapa domino yang dapat dipasang tanpa tumpang-tindih?

6

7

8

5

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A

Tantangan Rumah: papan catur kertas

Bahan: buku tulis berpetak (kotak-kotak), pensil warna, gunting, dan kertas bekas untuk dipotong menjadi "domino" 2×1 petak.

1. Gambar papan 6×6 di buku berpetak, lalu warnai seperti papan catur.
2. Coret dua pojok yang berseberangan. Gunting 17 domino kertas seukuran dua petak.
3. Coba tutup 34 petak sisanya dengan 17 domino. Catat berapa domino yang berhasil dipasang.
4. Gambar papan baru. Kali ini coret satu petak hitam dan satu petak putih sesukamu, lalu coba lagi.
5. Ajak anggota keluarga mencoba percobaan pertama tanpa memberi tahu rahasianya.

Pertanyaan: Mengapa percobaan pertama selalu gagal, sedangkan percobaan kedua selalu berhasil? Jelaskan percobaan pertama dengan menghitung petak hitam dan putih, dengan kalimatmu sendiri.

RINGKASAN KILAT Bab 39 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- memakai **prinsip sarang merpati** (bentuk dasar dan bentuk umum) untuk membuktikan bahwa sesuatu *pasti ada*
- menemukan **invarian** dan **monovarian** untuk menjawab pertanyaan "mungkinkah?"
- memakai **pewarnaan** untuk membuktikan bahwa sebuah pengubinan mustahil
- membuktikan dan memakai ketaksamaan **AM-GM** serta **Cauchy-Schwarz** untuk mencari nilai maksimum dan minimum
- menerapkan **heuristik Pólya**: kasus kecil, bekerja mundur, simetri, dan prinsip ekstrem

Istilah kunci

dibulatkan ke atas

invarian

monovarian

pewarnaan

Rata-rata aritmetika

Rumus penting

$$m = \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Sarang merpati bentuk umum. Bagikan N merpati ke k sarang serata mungkin. Tetap saja ada sarang yang isinya paling sedikit N/k , dibulatkan ke atas.

$$D = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

Cauchy-Schwarz lewat identitas Lagrange. Ruas kanan Cauchy-Schwarz dikurangi ruas kirinya selalu sama dengan sebuah bilangan kuadrat, jadi tidak pernah negatif.

$$s = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

AM $\geq$ GM untuk dua bilangan. Selisih rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri selalu berupa bilangan kuadrat yang dibagi dua, jadi tidak pernah negatif.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Prinsip sarang merpati hanya menjamin ada sarang yang berisi dua; ia tidak memberi tahu sarang yang mana, dan tidak menjamin semua sarang terisi.
- Invarian ampuh untuk membuktikan sesuatu mustahil, tetapi tidak otomatis membuktikan sesuatu mungkin.
- AM-GM hanya berlaku untuk bilangan tak negatif: untuk $a = -4$ dan $b = -1$, $AM = -2,5$ tetapi $\sqrt{ab} = 2$.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=39

Teka-teki untuk perjalanan berikutnya: kembali ke Bab 1

Di [Bab 1](#) kamu menebak dari pola bahwa $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$. Waktu itu kamu baru *menebak*. Sekarang kamu punya kotak perkakas lengkap. Bisakah kamu **membuktikannya dengan tiga cara berbeda**: dengan gambar tanpa kata, dengan induksi, dan dengan trik simetri Gauss? Setelah itu, buka [Bank Soal](#), tekan  **Tantangan Olimpiade**, dan taklukkan soal-soal tersulit dari 39 bab. Perjalananmu baru saja dimulai!

▼ Intip petunjuk

Gambar: susun titik-titik menjadi persegi $n \times n$; setiap bilangan ganjil adalah satu "siku" berbentuk huruf L yang membungkus persegi sebelumnya. **Induksi:** jika jumlahnya n^2 , tambahkan suku berikutnya $2n+1$ sehingga $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. **Simetri:** tulis deretnya maju dan mundur, lalu jumlahkan per kolom: setiap kolom berjumlah $2n$, ada n kolom, jadi dua kali jumlahnya $2n^2$.



ALAT BELAJAR

Peta Rumus & Koleksi Kartu

Semua Rumus Hidup di buku ini, dikelompokkan per bagian. Rumus yang sudah kamu taklukkan berubah menjadi kartu koleksi berwarna.



TRIK KAK LINTANG

Rumus bukan mantra untuk dihafal. Setiap rumus adalah **kalimat** tentang pola. Coba baca kalimat di bawah setiap kartu dengan suara keras. Kalau kamu bisa menceritakan rumusnya dengan bahasamu sendiri, kamu sudah paham.

Koleksimu: **0/132** kartu rumus. Buka bab, mainkan Rumus Hidup, lalu jawab "🎯 Tantang aku" untuk mendapatkan kartunya.

Bagian A • Bilangan

Bab 1 • #1

Bilangan segitiga

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dua tangga yang sama membentuk persegi panjang $n \times (n+1)$. Satu tangga = setengahnya.

Bab 1 • #2

Rumus Binet: Fibonacci dari akar 5

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ dan $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$ dipangkatkan n , dikurangkan, lalu dibagi $\sqrt{5}$. Hasilnya selalu bilangan Fibonacci yang bulat.

Bab 1 • #3

Jumlah n bilangan ganjil pertama

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = S_n = n^2$$

Setiap bilangan ganjil adalah satu sabuk L yang memperbesar persegi satu ukuran. n sabuk = persegi $n \times n$.

Bab 1 • #4

Jangkauan tebak angka

$$N = 2^k - 1$$

Setiap tebakan di tengah membuang separuh kemungkinan. Jadi satu tebakan tambahan menggandakan jangkauanmu, lalu ditambah satu.

Bab 2 · #5

Suhu akhir

$$T = T_0 + \Delta T$$

Suhu akhir sama dengan suhu awal ditambah perubahannya. Suhu naik berarti perubahannya positif; suhu turun berarti perubahannya negatif.

Bab 2 · #6

Jarak dua titik di garis bilangan

$$d = |a - b|$$

Kurangkan kedua bilangan, lalu buang tandanya. Jarak tidak pernah negatif.

Bab 2 · #7

Jumlah bilangan bulat berurutan

$$S = \frac{(m + n) \times (n - m + 1)}{2}$$

Jumlahkan suku pertama dan suku terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua. Bilangan negatif ikut dihitung!

Bab 3 · #8

Penjumlahan pecahan

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru jumlahkan banyak potongannya (pembilang).

Bab 3 · #9

Harga setelah diskon

$$H = H_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Diskon p% artinya kamu hanya membayar (100 - p)% dari harga awal.

Bab 3 · #10

Persen perubahan

$$P = \frac{B-L}{L} \times 100\%$$

Selisih nilai baru dan nilai lama, dibandingkan dengan nilai LAMA, lalu dijadikan persen.

Bab 3 · #11

Persen balik: harga sebelum diskon

$$H_0 = \frac{H}{1 - \frac{p}{100}}$$

Harga setelah diskon adalah (100 - p)% dari harga awal. Bagi dengan faktor pengalinya untuk kembali ke 100%.

Bab 4 · #12

Batas uji bilangan prima

$$d_{\max} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

Untuk memeriksa apakah n prima, cukup coba bagi n dengan bilangan prima yang tidak lebih dari akar n. Kalau tidak ada yang membagi habis, n pasti prima.

Bab 4 · #13

Banyak faktor dari faktorisasi prima

$$\tau(n) = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Untuk $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$: tambahkan 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan semuanya. Itulah banyak faktor n, tanpa perlu mendaftarnya satu per satu.

Bab 4 · #14

KPK dari FPB (dua lampu kedip)

$$\text{KPK}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{FPB}(a, b)}$$

Kalikan kedua bilangan, lalu bagi dengan FPB-nya. Hasilnya adalah KPK: waktu tunggu sampai dua lampu menyala bersamaan lagi.

Bab 4 • #15

Bilangan Euclid: kalikan prima, tambah 1

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$$

Kalikan k bilangan prima pertama, lalu tambahkan 1. Hasilnya tidak habis dibagi satu pun prima di dalam daftar itu.

Bab 5 • #16

Membagi menurut rasio

$$A = \frac{a}{a+b} \times T$$

Jumlahkan suku-suku rasio untuk mendapat banyak bagian, bagi totalnya, lalu kalikan dengan suku milikmu.

Bab 5 • #17

Dari peta ke jarak sebenarnya

$$J = \frac{p \times n}{100.000}$$

Kalikan jarak di peta dengan penyebut skala untuk mendapat jarak sebenarnya dalam cm, lalu bagi 100.000 untuk mengubahnya menjadi km.

Bab 5 • #18

Waktu kerja berbalik nilai

$$t = \frac{k}{n}$$

Waktu selesai sama dengan beban kerja dibagi banyak pekerja. Pengerjanya dikali dua, waktunya tinggal separuh.

Bab 5 • #19

Waktu tempuh

$$t = \frac{s}{v} \times 60$$

Jarak dibagi kecepatan menghasilkan waktu dalam jam; kalikan dengan 60 untuk mendapat menit.

Bab 6 • #20

Tebal kertas terlipat

$$t = t_0 \cdot 2^n$$

Setiap lipatan menggandakan tebal. Jadi tebal awal dikalikan 2 sebanyak n kali.

Bab 6 • #21

Mengalikan pangkat sebasis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Basisnya sama? Pangkatnya tinggal dijumlahkan, karena semua faktornya digabung dalam satu barisan.

Bab 6 • #22

Pangkat pecahan = akar lalu pangkat

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Penyebut pecahan menjadi akarnya, pembilang menjadi pangkatnya. Ambil akarnya dulu supaya angkanya kecil.

Bab 6 • #23

Waktu tempuh cahaya

$$t = \frac{m \times 10^k \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

Cahaya menempuh 300.000 km setiap detik. Bagi angka depan jarak dengan 3, lalu kurangkan pangkat sepuluhnya dengan 5.

Bagian B • Aljabar & Fungsi

Bab 7 • #1

Ongkos ojek daring

$$T = d + p \times k$$

Ongkos ojek = biaya dasar (dibayar sekali di awal) ditambah tarif per kilometer dikali jarak tempuh.

Bab 7 • #2

Model luas $(a + b)^2$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Persegi bersisi $a + b$ terbelah menjadi empat bagian: persegi a^2 , persegi b^2 , dan DUA persegi panjang ab .

Bab 7 • #3

Perkalian kembar: selisih dua kuadrat

$$(m + d)(m - d) = m^2 - d^2$$

Persegi panjang $(m + d) \times (m - d)$ luasnya sama dengan persegi m^2 dikurangi persegi kecil d^2 . Jadi $52 \times 48 = 50^2 - 2^2$.

Bab 8 • #4

Kunci persamaan linear

$$ax + b = c \implies x = \frac{c - b}{a}$$

Buka bungkusnya dari luar ke dalam: kurangi kedua ruas dengan b , lalu bagi kedua ruas dengan a .

Bab 8 • #5

Nilai minimal ulangan berikutnya

$$\frac{nR + X}{n+1} \geq T \implies X \geq (n+1)T - nR$$

Jumlah semua nilai harus mencapai target dikali banyak ulangan. Ulangan berikutnya bertugas menutup kekurangannya.

Bab 8 • #6

Lama parkir maksimal

$$p + q(t - 1) \leq U \implies t \leq 1 + \frac{U - p}{q}$$

Selama total tarif tidak melebihi uangmu, kamu masih boleh parkir. Ambil bilangan bulat terbesar yang memenuhi.

Bab 9 • #7

Gradien dari dua titik

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien adalah perubahan y dibagi perubahan x : berapa satuan garis naik untuk setiap satu langkah ke kanan.

Bab 9 • #8

Tarif ojek online sebagai fungsi linear

$$T = c + mx$$

Tarif = biaya awal + tarif per km $\times$ jarak. Biaya awal adalah titik potong sumbu- y , tarif per km adalah gradiennya.

Bab 9 • #9

Rumus Braak: suhu dan ketinggian

$$T = 26,3 - 0,6 \times \frac{h}{100}$$

Setiap naik 100 meter, suhu udara rata-rata turun sekitar 0,6 °C. Gradiennya -0,6 °C per 100 m, atau -0,006 °C per meter.

Bab 10 • #10

Titik impas dua tarif

$$x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Dua tarif sama mahal pada jarak = selisih biaya buka dibagi selisih tarif per km.

Bab 10 • #11

Ayam dan kambing: rumus peluit Ancil

$$\text{kambing} = \frac{\text{kaki} - 2 \times \text{kepala}}{2}$$

Anggap dulu semua hewan ayam. Kaki yang tersisa, dibagi dua, adalah banyak kambing.

Bab 10 • #12

Aturan Cramer 2 x 2

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Untuk $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$: x adalah selisih perkalian silang dibagi determinan $D = ae - bd$.

Bab 11 • #13

Rumus abc

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ambil lawan dari b, tambahkan akar diskriminan, lalu bagi dengan dua kali a. Ganti + dengan - untuk mendapat akar yang lain.

Bab 11 • #14

Diskriminan

$$D = b^2 - 4ac$$

Kuadrat b dikurangi empat kali a kali c. Tandanya meramal jenis akar sebelum kamu menghitungnya.

Bab 11 • #15

Jumlah kuadrat akar, tanpa mencari akar

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

Kuadratkan jumlah akar, lalu kurangi dua kali hasil kalinya. Kamu tidak perlu tahu akarnya satu per satu.

Bab 12 • #16

Sumbu simetri parabola

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

Sumbu simetri berada di $x = -b/(2a)$: lawan dari b, dibagi dua kali a. Nilai c sama sekali tidak ikut menentukan.

Bab 12 • #17

Nilai ekstrem (tinggi puncak)

$$y_p = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nilai terkecil (atau terbesar) sebuah fungsi kuadrat sama dengan minus diskriminan dibagi empat kali a.

Bab 12 • #18

Untung harian penjual tahu bulat

$$U = (h - m)(1800 - h)$$

Untung = untung per biji x banyak yang terjual. Harga naik, untung per biji naik, tetapi pembeli berkurang. Harga terbaik ada di puncak parabola.

Bab 13 · #19

Diskon bertumpuk: dua mesin bersambung

$$H = (V \circ D)(P) = P \left(1 - \frac{d}{100}\right) - v$$

Mesin D memotong d persen, lalu mesin V memotong v rupiah. Kalau urutannya ditukar, harga akhirnya berubah!

Bab 13 · #20

Mesin mundur fungsi linear

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

Mesin maju: kali a, lalu tambah b. Mesin mundur: kurangi b dulu, baru bagi a. Langkah terakhir dibatalkan paling awal!

Bab 13 · #21

Transformasi fungsi: mesin di dalam mesin

$$y = a f(b(x - c)) + d, \quad f(u) = u^2$$

Ikuti x melewati lima mesin kecil: kurangi c, kali b, kuadratkan, kali a, lalu tambah d. Yang di dalam kurung bekerja lebih dulu.

Bab 13 · #22

Tagihan air berjenjang

$$T(v) = \begin{cases} 10.000 + 2.000v, & 0 \leq v \leq 10 \\ 30.000 + 3.500(v - 10), & 10 < v \leq 20 \\ 65.000 + 5.000(v - 20), & v > 20 \end{cases}$$

Biaya beban Rp10.000, lalu 10 m³ pertama Rp2.000/m³, 10 m³ berikutnya Rp3.500/m³, dan sisanya Rp5.000/m³. Tiga aturan, satu fungsi.

Bab 14 · #23

Pertumbuhan & peluruhan eksponensial

$$N = N_0 \cdot b^{t/T}$$

Mulai dari N₀. Setiap lewat satu periode T, jumlahnya dikali b. Setelah waktu t, sudah lewat t/T periode.

Bab 14 · #24

Bunga majemuk

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$$

Setiap periode, saldo dikali (1 + r/100n). Dalam t tahun ada n·t periode, jadi pengali itu dipakai n·t kali.

Bab 14 · #25

Logaritma: pangkat yang dicari

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Logaritma menjawab satu pertanyaan: b harus dipangkatkan berapa supaya hasilnya x?

Bab 14 · #26

Perbandingan energi dua gempa

$$\frac{E_B}{E_A} = 10^{1,5(M_B - M_A)}$$

Naik 1 magnitudo, energinya sekitar 32 kali. Naik 2 magnitudo, sekitar 1.000 kali.

Bab 15 · #27

Suku ke-n barisan aritmetika

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Mulai dari suku pertama, lalu tambahkan beda sebanyak $n - 1$ kali. Hanya ada $n - 1$ langkah dari suku pertama ke suku ke- n .

Bab 15 · #28

Jumlah deret aritmetika

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Banyak suku dikali rata-rata suku pertama dan suku terakhir. Itulah trik Gauss dalam satu baris.

Bab 15 · #29

Jumlah deret geometri

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Kalikan deret dengan rasionya, kurangkan dari deret semula, dan hampir semua suku saling menghapus.

Bab 15 · #30

Jumlah deret geometri tak hingga

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

Kalau setiap suku menyusut dengan rasio di antara -1 dan 1 , jumlah tak hingga banyak suku itu mendekati a dibagi $(1 - r)$.

Bab 15 · #31

Angsuran cicilan (anuitas)

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Angsuran tiap bulan ditentukan oleh besar pinjaman, bunga per bulan, dan lama cicilan. Semakin lama mencicil, angsurannya lebih ringan, tetapi total bunganya lebih besar.

Bab 16 · #32

Volume kotak dari karton

$$V = x(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume = tinggi $\times$ panjang alas $\times$ lebar alas. Tingginya x , sedangkan panjang dan lebar karton masing-masing berkurang $2x$ karena dipotong di kedua ujungnya.

Bab 16 · #33

Teorema Sisa

$$S = P(a) = a^3 + ba^2 + ca + d$$

Mau tahu sisa pembagian $P(x)$ oleh $(x - a)$? Tidak perlu membagi: cukup masukkan $x = a$ ke dalam $P(x)$.

Bab 16 · #34

Vieta: dari akar ke koefisien

$$d = -rst$$

Untuk $x^3 + bx^2 + cx + d$ dengan akar r, s, t : suku tetapnya adalah hasil kali ketiga akar dengan tanda dibalik. Koefisien b dan c juga bisa dibaca langsung dari akar-akarnya.

Bagian C • Geometri & Pengukuran

Bab 17 • #1

Sudut jarum jam

$$\theta = |30j - 5,5m|$$

Jarum jam berada di $30j + 0,5m$ derajat, jarum menit di $6m$ derajat (diukur dari angka 12). Selisihnya adalah sudutnya; kalau lebih dari 180° , ambil 360° dikurangi selisih itu.

Bab 17 • #2

Jumlah sudut dalam segi-n

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$

Potong segi-n menjadi segitiga dari satu titik sudut: hasilnya selalu $n - 2$ segitiga, dan setiap segitiga menyumbang 180° .

Bab 17 • #3

Sudut dalam segi-n beraturan

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Sudut luar segi-n beraturan adalah 360° dibagi n . Sudut dalamnya adalah pelurusnya: 180° dikurangi sudut luar.

Bab 18 • #4

Teorema Pythagoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Kuadratkan kedua kaki, jumlahkan, lalu tarik akarnya. Itulah panjang sisi miring.

Bab 18 • #5

Pabrik tripel Euclid

$$c = m^2 + n^2$$

Pilih dua bilangan m dan n . Sisi miringnya $m^2 + n^2$, sedangkan kakinya $m^2 - n^2$ dan $2mn$.

Bab 18 • #6

Diagonal ruang kotak

$$d = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Tongkat terpanjang yang muat di kotak = akar dari jumlah kuadrat panjang, lebar, dan tinggi.

Bab 19 • #7

Luas trapesium

$$L = \frac{1}{2} \times (a + b) \times t$$

Jumlahkan kedua sisi sejajar, kalikan dengan tinggi, lalu ambil separuhnya. Sama saja dengan rata-rata kedua sisi sejajar dikali tinggi.

Bab 19 • #8

Rumus Heron

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Hitung setengah keliling s . Kurangi s dengan tiap sisi, kalikan keempat bilangan itu, lalu tarik akarnya. Tidak perlu tinggi sama sekali!

Bab 19 · #9

Teorema Pick

$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

Hitung paku di dalam (I) dan paku yang tersentuh karet (B). Luasnya: I ditambah separuh B, lalu dikurangi satu.

Bab 20 · #10

Keliling & luas lingkaran

$$L = \pi r^2$$

Luas lingkaran adalah π kali jari-jari kuadrat, sedangkan kelilingnya 2π kali jari-jari.

Bab 20 · #11

Penghitung putaran roda

$$n = \frac{s}{\pi d}$$

Satu putaran berarti maju sejauh satu keliling. Jadi banyak putaran sama dengan jarak tempuh dibagi keliling roda.

Bab 20 · #12

Busur, juring, dan tembereng

$$L_{\text{juring}} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

Juring adalah pecahan lingkaran. Pecahannya $\theta/360^\circ$, jadi luas juring = pecahan itu dikali luas lingkaran.

Bab 20 · #13

Kelajuan roda dari putaran per menit

$$v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$$

Satu putaran sama dengan 2π radian. Kalikan banyak putaran per detik dengan 2π untuk mendapat kecepatan sudut ω , lalu kalikan jari-jari untuk mendapat kelajuan tepi roda.

Bab 21 · #14

Volume dan luas permukaan balok

$$V = p \times l \times t$$

Isi balok = banyaknya kubus satuan = panjang $\times$ lebar $\times$ tinggi. Kulitnya terdiri atas enam persegi panjang yang berpasangan.

Bab 21 · #15

Volume tabung (tandon air)

$$V = \pi r^2 t$$

Luas lingkaran alas dikali tinggi. Bagi dengan 1.000 untuk mengubah cm^3 menjadi liter.

Bab 21 · #16

Volume kerucut (tumpeng)

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$

Sepertiga dari tabung yang alas dan tingginya sama.

Bab 21 · #17

Volume dan luas bola

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Pangkat tiga untuk isi, pangkat dua untuk kulit: $L = 4\pi r^2$, empat kali luas lingkaran terbesarnya.

Bab 21 · #18

Perbesaran: luas $\times k^2$, volume $\times k^3$

$$V' = k^3 \times V$$

Jika semua panjang dikali k , luas dikali k^2 dan volume dikali k^3 .

Faktor skala bangun sebangun

$$k = \frac{p'}{p}$$

Bagi panjang pada bayangan dengan panjang yang bersesuaian pada bangun asli. Semua pasangan sisi memberi k yang sama.

Tinggi benda dari bayangannya

$$T = t \times \frac{B}{b}$$

Tinggi benda sama dengan tinggi tongkat dikali berapa kali bayangan benda lebih panjang daripada bayangan tongkat.

Dilatasi sebuah titik

$$x' = a + k(x - a)$$

Ukur jarak titik dari pusat, kalikan dengan k, lalu hitung lagi dari pusat. Koordinat y dihitung dengan cara yang sama.

Jarak dua titik (bonus: titik tengah)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jarak lurus adalah sisi miring segitiga siku-siku yang kakinya selisih x dan selisih y. Titik tengahnya cukup rata-rata koordinat.

Pusat & jari-jari dari bentuk umum lingkaran

$$r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$$

Dari $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$: pusatnya $(-D/2, -E/2)$, dan jari-jarinya akar dari $(D/2)^2 + (E/2)^2 - F$.

Titik pembagi ruas garis

$$x_P = \frac{n x_A + m x_B}{m + n}$$

Jika $AP : PB = m : n$, koordinat A diberi bobot n dan koordinat B diberi bobot m (bersilang), lalu dibagi m + n.

Hasil kali titik dari panjang & sudut

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Kalikan kedua panjang, lalu kalikan dengan cos sudut di antaranya. Sudut lancip memberi hasil positif, siku-siku memberi nol, tumpul memberi negatif.

Bagian D • Trigonometri

Bab 24 • #1

Tinggi layangan dari panjang tali

$$t = L \sin \alpha$$

Tali yang terentang lurus adalah sisi miring dan tinggi layangan adalah sisi depan sudut. Jadi tinggi = panjang tali × sinus sudutnya.

Bab 24 • #2

Sudut kemiringan ram kursi roda

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{t}{p} \right)$$

Bagi tinggi ram dengan panjang mendatarnya untuk mendapat $\tan \theta$, lalu tekan $\tan^{-1}$ untuk mendapat sudutnya.

Bab 24 • #3

Tinggi benda dari sudut elevasi

$$H = d \tan \alpha + h$$

Tinggi benda sama dengan jarak mendatar dikali tangen sudut elevasi, lalu ditambah tinggi mata pengamat.

Bab 25 • #4

Aturan sinus: cari sisi dari dua sudut

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Pasangan lengkap (a, A) memberi 'nilai tukar' a : sin A. Kalikan nilai tukar itu dengan sin B, dan kamu mendapat sisi b.

Bab 25 • #5

Aturan kosinus: Pythagoras plus koreksi

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

Hitung dulu versi Pythagoras $a^2 + b^2$, lalu kurangi dengan koreksi $2ab \cos C$. Tarik akarnya, dan itulah sisi di depan sudut C.

Bab 25 • #6

Luas segitiga: $\frac{1}{2}ab \sin C$

$$L = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Dua sisi dan sudut yang diapitnya sudah cukup. Tinggi segitiga tersembunyi di dalam $b \sin C$.

Bab 26 • #7

Radian dan panjang busur

$$s = r \theta, \quad \theta = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

Panjang busur sama dengan jari-jari dikali sudut dalam radian. Ubah dulu derajat ke radian dengan mengalikan $\pi/180$.

Bab 26 • #8

Model gelombang sinus (pasang surut)

$$y = A \sin (B(x - C)) + D$$

Tinggi = sumbu tengah D ditambah A kali sinus. B mengatur seberapa cepat gelombang berulang, C mengatur kapan siklus dimulai.

Bab 26 • #9

Sudut rangkap

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Sinus sudut dua kali lipat bukan dua kali sinusnya, melainkan dua kali sinus dikali kosinus.

Bagian E • Kalkulus

Bab 27 • #1

Limit selisih kuadrat (tabel mendekat)

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}, \quad x = a + h$$

Bentuk 0/0 di $x = a$ ternyata menyembunyikan $2a$: makin kecil jaraknya h , makin dekat $f(x)$ ke $2a$. Jadi limit $(x^2 - a^2)/(x - a)$ untuk $x \rightarrow a$ sama dengan $2a$.

Bab 27 • #2

Biaya rata-rata pabrik tahu

$$\bar{C} = \frac{F + v n}{n} = \frac{F}{n} + v$$

Biaya tetap F dibagi rata ke n potong tahu, lalu ditambah biaya bahan v per potong. Makin banyak tahu dibuat, biaya rata-rata turun mendekati v , tetapi tidak pernah di bawahnya.

Bab 27 • #3

Bunga majemuk menuju e

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Uang Rp1 dengan bunga khayalan 100% setahun, dibungakan n kali. Makin sering dibungakan, hasilnya mendekati bilangan $e \approx 2,71828$, bukan membesar tanpa batas.

Bab 28 • #4

Kemiringan tali busur pada $y = x^2$

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Naik dibagi maju antara dua titik pada parabola. Semakin kecil h , semakin dekat hasilnya ke kemiringan garis singgung, yaitu $2x$.

Bab 28 • #5

Aturan pangkat: kemiringan $y = a \cdot x^n$

$$m = a n x^{n-1}$$

Turunkan pangkat n ke depan untuk dikalikan dengan a , lalu kurangi pangkatnya satu. Masukkan nilai x untuk mendapat kemiringan garis singgung di titik itu.

Bab 28 • #6

Laju pertumbuhan penduduk

$$P'(t) = r P_0 e^{rt}$$

Pada pertumbuhan eksponensial, laju bertambahnya penduduk sebanding dengan banyaknya penduduk saat itu.

Bab 29 • #7

Volume kotak dari karton

$$V = x(p - 2x)(l - 2x)$$

Gunting persegi x di keempat pojok, lalu lipat: tinggi kotak x , alasnya $(p - 2x)$ kali $(l - 2x)$.

Bab 29 • #8

Kebun berpagar di samping tembok

$$L = x(K - 2x)$$

Dua sisi lebar x memakai $2x$ meter kawat; sisanya, $K - 2x$, menjadi sisi panjang yang sejajar tembok.

Bab 29 • #9

Bahan kaleng tertutup

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Bahan = tutup dan alas ($2\pi r^2$) ditambah badan ($2\pi rh$).
 Karena $h = V/(\pi r^2)$, bahan badan sama dengan $2V/r$.

Bab 30 • #10

Jumlah Riemann kanan untuk $y = x^2$

$$R_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Jumlahkan n persegi panjang di bawah $y = x^2$ dari 0 sampai b . Makin banyak persegi panjangnya, makin dekat hasilnya ke $b^3/3$.

Bab 30 • #11

Luas di bawah $y = x^n$

$$L = \int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Naikkan pangkatnya satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Daerah di bawah x^n dari 0 sampai b mengisi tepat $1/(n+1)$ bagian persegi panjang $b \times b^n$ yang membungkusnya.

Bab 30 • #12

Volume tumpeng lewat integral

$$V = \int_0^t \pi \left(\frac{r}{t} y\right)^2 dy = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$

Pada jarak y dari puncak, jari-jari irisan tumpeng adalah $(r/t)y$. Jumlahkan semua cakram tipis dari puncak sampai alas, hasilnya sepertiga volume tabung.

Bagian F • Data & Peluang

Bab 31 • #1

Rata-rata gabungan

$$\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Jumlahkan dulu semua nilai (banyak anggota $\times$ rata-rata) dari kedua kelompok, baru bagi dengan banyak anggota seluruhnya.

Bab 31 • #2

Simpangan baku lima data

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5}}$$

Ukur jarak tiap data dari rata-rata, kuadratkan, rata-ratakan, lalu tarik akarnya: itulah jarak khas data dari pusatnya.

Bab 31 • #3

Mengubah semua data sekaligus

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

$$\sigma_y = |a| \sigma_x$$

Mengalikan data dengan a mengalikan rata-rata dan simpangan bakunya; menambah b hanya menggeser rata-rata, sebarannya tidak berubah.

Bab 32 • #4

Permutasi: menyusun r dari n

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ada n calon dan r kursi berlabel. Kursi pertama punya n pilihan, kursi kedua $n-1$, dan seterusnya: kalikan r bilangan menurun mulai dari n .

Bab 32 · #5

Lampu hias Agustusan

$$S = \frac{(a + b + c)!}{a! b! c!}$$

Susun dulu seolah-olah semua lampu berbeda: $(a + b + c)!$ cara. Lalu bagi dengan $a!$, $b!$, dan $c!$, karena menukar dua lampu yang warnanya sama tidak menghasilkan susunan baru.

Bab 32 · #6

Kombinasi: memilih r dari n

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$

Hitung dulu susunan berurutan $P(n, r)$, lalu bagi dengan $r!$ karena urutan di dalam tim tidak penting.

Bab 32 · #7

Bintang dan sekat

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Membagi n benda identik kepada k orang (boleh ada yang tidak kebagian) sama dengan memilih posisi $k - 1$ sekat di antara $n + k - 1$ tempat.

Bab 33 · #8

Aturan penjumlahan peluang

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jumlahkan peluang kedua kejadian, lalu kurangi peluang irisannya, karena irisan itu sudah terhitung dua kali.

Bab 33 · #9

Arti hasil tes positif

$$P(\text{sakit} \mid +) = \frac{r s}{r s + (1 - r)(1 - t)}$$

Dari semua orang yang hasil tesnya positif, berapa bagian yang benar-benar sakit? Bandingkan positif benar dengan seluruh hasil positif (benar ditambah palsu).

Bab 33 · #10

Nilai harapan permainan menang-kalah

$$E = p \cdot a - (1 - p) \cdot b$$

Kalikan setiap hasil dengan peluangnya, lalu jumlahkan. Permainan adil jika nilai harapannya nol.

Bab 34 · #11

Peluang binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Hitung banyak urutan yang memuat tepat k sukses, lalu kalikan dengan peluang satu urutan: p dipangkatkan banyak sukses, dikali $(1 - p)$ dipangkatkan banyak gagal.

Bab 34 · #12

Rataan & simpangan baku binomial

$$\sigma = \sqrt{n p (1 - p)}$$

Rata-rata banyak sukses adalah n kali p . Sebarannya diukur oleh simpangan baku: akar dari n kali p kali $(1 - p)$.

Skor z (nilai baku)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Skor z menjawab satu pertanyaan: nilai ini berjarak berapa simpangan baku dari rata-rata, dan ke arah mana?

Bagian G · Matematika Lanjut & Olimpiade**Banyak baris tabel kebenaran**

$$B = 2^n$$

Setiap pernyataan tunggal punya dua kemungkinan nilai, jadi setiap pernyataan baru menggandakan banyak baris tabel.

Prinsip sarang merpati

$$m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

Jika n merpati masuk ke k sarang, pasti ada sarang yang berisi paling sedikit n/k merpati, dibulatkan ke atas.

Jumlah n bilangan asli pertama

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pasangkan suku pertama dengan suku terakhir: setiap pasangan berjumlah $n + 1$, dan ada $n/2$ pasangan.

Determinan matriks 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Kalikan diagonal utama, kurangi dengan hasil kali diagonal samping. Angkanya memberi tahu berapa kali lipat luas berubah, dan tandanya memberi tahu apakah gambar terbalik.

Invers matriks 2×2

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tukar a dan d, beri tanda negatif pada b dan c, lalu bagi semuanya dengan determinan. Kalau determinannya nol, tidak ada yang bisa dibagi: matriksnya tidak punya invers.

SPL dengan invers matriks

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Sistem $ax + by = p$ dan $cx + dy = q$ ditulis $AX = B$. Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kiri, maka $X = A^{-1}B$.

Modulus bilangan kompleks

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Modulus adalah jarak titik $a + bi$ ke titik asal O. Inilah Teorema Pythagoras dari Bab 18 yang sedang menyamar!

Arus listrik AC dan impedansi

$$I = \frac{V}{|R + Xj|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Kuat arus sama dengan tegangan dibagi modulus impedansi. Bagian real R adalah hambatan biasa, bagian imajiner X berasal dari kumparan motor atau trafo.

Teorema De Moivre

$$|z^n| = r^n, \quad \arg(z^n) = n\theta$$

Untuk memangkatkan, pangkatkan modulusnya dan kalikan argumennya. Tidak perlu mengalikan $(a + bi)$ berkali-kali!

Sisa pembagian ($a \bmod n$)

$$a = q \cdot n + r, \quad r = a \bmod n$$

Kurangi a dengan kelipatan n sebanyak mungkin; yang tersisa (antara 0 dan $n - 1$) adalah $a \bmod n$, yaitu tempat jarum jam berhenti.

Angka satuan pangkat besar

$$s = \text{angka satuan dari } a^k$$

Angka satuan a^k hanya bergantung pada angka satuan a dan sisa k dibagi 4 (sisa 0 dibaca 4), karena polanya berulang setiap 4 pangkat.

Teorema Fermat kecil

$$a^{p-1} \bmod p = r$$

Jika p prima dan a tidak habis dibagi p , sisa a pangkat $(p - 1)$ dibagi p selalu 1.

Syarat persamaan Diophantine linear

$$d = \text{FPB}(a, b), \quad ax + by = c \text{ punya solusi bulat} \iff d \mid c$$

Hitung FPB kedua koefisien. Persamaan punya solusi bulat tepat ketika ruas kanan c adalah kelipatan FPB itu.

Sarang merpati bentuk umum

$$m = \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Bagikan N merpati ke k sarang serata mungkin. Tetap saja ada sarang yang isinya paling sedikit N/k , dibulatkan ke atas.

AM $\geq$ GM untuk dua bilangan

$$s = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

Selisih rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri selalu berupa bilangan kuadrat yang dibagi dua, jadi tidak pernah negatif.

Cauchy-Schwarz lewat identitas Lagrange

$$D = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

Ruas kanan Cauchy-Schwarz dikurangi ruas kirinya selalu sama dengan sebuah bilangan kuadrat, jadi tidak pernah negatif.



PENUTUP

Sampai jumpa di puncak berikutnya!

Glosarium istilah penting, panduan untuk guru dan orang tua, serta informasi tentang buku ini.

Panduan untuk guru & orang tua

- **Mulai dari tebakan.** Minta anak memilih jawaban "Tebak Dulu" *sebelum* membaca. Tebakan yang keliru lalu dibuktikan sendiri jauh lebih melekat daripada jawaban yang langsung diberikan.
- **Biarkan mereka bermain.** Grafik Hidup, Rumus Hidup, dan Lab Mini sengaja dibuat untuk diutak-atik. Tanyakan: "Kalau nilai ini dijadikan dua kali lipat, apa yang terjadi?" Biarkan mereka menebak, lalu mengecek.
- **Minta penjelasan, bukan hanya jawaban.** Setelah anak menjawab benar, tanyakan "Bagaimana kamu tahu?" Kemampuan menjelaskan adalah tanda paham yang sesungguhnya.
- **Tangga latihan.** Untuk SD-SMP cukup Lv 1-2. Untuk SMA dan TKA, targetkan Lv 3. Lv 4-5 untuk siswa IGCSE/IB, dan Lv 6 untuk peserta olimpiade.
- **Adu Cepat** melatih kelancaran berhitung. Pakai sebagai pemanasan 1 menit di awal pelajaran. Rekor tersimpan di perangkat, jadi anak bisa bersaing dengan dirinya sendiri.
- **Mode Dasar • SMA • Lanjut** di kanan atas menyesuaikan kedalaman bacaan tanpa mengganti buku.
- **Progres** (XP, kartu, soal yang sudah benar) tersimpan di perangkat. Jika dibuka di aurumgen.my.id, hasil latihan juga direkam secara anonim untuk menghitung statistik "berapa persen pembaca menjawab benar".

Glosarium

A • Bilangan

Istilah	Arti singkat
Bilangan bulat	..., -2, -1, 0, 1, 2, ... Bilangan tanpa pecahan, termasuk negatif dan nol.
Bilangan rasional	Bilangan yang dapat ditulis sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p, q bulat dan $q \neq 0$. Desimalnya berhenti atau berulang.
Bilangan prima	Bilangan asli lebih dari 1 yang faktornya hanya 1 dan dirinya sendiri: 2, 3, 5, 7, 11, ...
FPB & KPK	Faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan atau lebih.
Rasio	Perbandingan dua besaran, mis. 2 : 3.
Notasi ilmiah	Cara menulis bilangan sebagai $a \times 10^n$ dengan $1 \leq a < 10$.

B • Aljabar & Fungsi

Istilah	Arti singkat
Variabel	Huruf yang mewakili bilangan yang belum diketahui atau dapat berubah.
Persamaan	Kalimat matematika dengan tanda "=" yang benar untuk nilai tertentu dari variabelnya.
Fungsi	Aturan yang memasangkan setiap masukan dengan tepat satu keluaran.
Gradien	Kemiringan garis: perubahan y dibagi perubahan x .
Diskriminan	$D = b^2 - 4ac$ pada persamaan kuadrat; menentukan banyak dan jenis akar.
Logaritma	Pangkat yang dicari: $\log_b x = y$ artinya $b^y = x$.
Barisan & deret	Barisan adalah daftar bilangan berpola; deret adalah jumlah suku-sukunya.

C • Geometri & Pengukuran

Istilah	Arti singkat
Hipotenusa	Sisi terpanjang segitiga siku-siku, di depan sudut siku-siku.
Sebangun	Bentuk sama, ukuran boleh berbeda; sudut bersesuaian sama dan sisi bersesuaian sebanding.
Kongruen	Bentuk dan ukuran sama persis.
π (pi)	Perbandingan keliling lingkaran dengan diameternya, $\pm 3,14159...$
Vektor	Besaran yang punya besar dan arah, digambar sebagai panah.

D • Trigonometri

Istilah	Arti singkat
Sinus, kosinus, tangen	Perbandingan sisi segitiga siku-siku: depan/miring, samping/miring, depan/samping.

Radian	Satuan sudut: panjang busur dibagi jari-jari. $180^\circ = \pi$ radian.
Periode	Panjang satu putaran pola yang berulang pada grafik fungsi trigonometri.

E • Kalkulus

Istilah	Arti singkat
Limit	Nilai yang didekati suatu fungsi ketika masukannya mendekati suatu bilangan.
Turunan	Laju perubahan sesaat; kemiringan garis singgung grafik.
Integral	Penjumlahan bagian-bagian yang sangat kecil; luas di bawah grafik.

F • Data & Peluang

Istilah	Arti singkat
Mean, median, modus	Rata-rata, nilai tengah setelah diurutkan, dan nilai yang paling sering muncul.
Simpangan baku	Ukuran seberapa jauh data menyebar dari rata-ratanya.
Permutasi & kombinasi	Banyak cara menyusun (urutan penting) dan memilih (urutan tidak penting).
Peluang	Ukuran kemungkinan suatu kejadian, dari 0 (mustahil) sampai 1 (pasti).

G • Matematika Lanjut & Olimpiade

Istilah	Arti singkat
Implikasi	Pernyataan "jika P maka Q".
Induksi matematika	Cara membuktikan pernyataan untuk semua bilangan asli: buktikan langkah awal dan langkah "domino".
Matriks	Susunan bilangan dalam baris dan kolom.
Bilangan kompleks	Bilangan $a + bi$ dengan $i^2 = -1$.

Modulo	Sisa pembagian; $a \equiv b \pmod{n}$ artinya a dan b bersisa sama bila dibagi n .
Prinsip sarang merpati	Jika $n + 1$ merpati masuk ke n sarang, pasti ada sarang berisi minimal dua merpati.

Tentang buku ini

Mathpedia · Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026). Buku matematika interaktif untuk SD, SMP, SMA, IGCSE, IB, dan olimpiade.

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD** · Editor: **Abdullah Hanif Hidayat** · Didukung oleh **Aurumgen Academy**.

Semua soal adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.



RUJUKAN

- Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan (2025). *Capaian Pembelajaran Mata Pelajaran Matematika Fase A–F* (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025).
- Cambridge Assessment International Education. *Cambridge IGCSE Mathematics 0580: Syllabus*.
- International Baccalaureate Organization. *Mathematics: Analysis and Approaches* dan *Mathematics: Applications and Interpretation*, Subject Guide.
- Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets*. Jossey-Bass.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Boleh dipakai untuk pembelajaran nonkomersial dengan menyebut sumbernya.