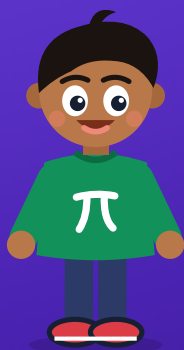


Mathpedia

Matematika Itu Asyik!

Buku matematika interaktif untuk anak Indonesia: SD, SMP, SMA,
IGCSE, IB, sampai olimpiade.



dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD

Editor: Abdullah Hanif Hidayat

Didukung oleh Aurumgen Academy

Tentang buku ini

Ini adalah Jilid 2 dari versi cetak Mathpedia. Bagian yang di layar dapat digeser dan dimainkan (Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, animasi langkah) ditampilkan sebagai gambar, sedangkan latihan lengkap ada di PDF Bank Soal dan LKPD.

Mathpedia • Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026).

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD**

Editor: **Abdullah Hanif Hidayat**

Didukung oleh Aurumgen Academy.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Dokumen ini boleh dicetak dan diperbanyak untuk keperluan pembelajaran nonkomersial dengan tetap mencantumkan sumber.

Semua soal dan LKPD adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.

Versi interaktif dengan komik bergerak, Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, Adu Cepat, dan latihan berskor:
aurumgen.my.id/mathpedia

Daftar isi

BAGIAN C • GEOMETRI & PENGUKURAN

17	Garis, Sudut & Segitiga	4
18	Teorema Pythagoras	33
19	Keliling & Luas Bangun Datar	52
20	Lingkaran	80
21	Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume	108
22	Kesebangunan & Transformasi Geometri	135
23	Geometri Koordinat & Vektor	165

BAGIAN D • TRIGONOMETRI

24	Trigonometri Segitiga Siku-siku	198
25	Aturan Sinus, Kosinus & Luas Segitiga	222
26	Fungsi & Identitas Trigonometri	247

BAGIAN E • KALKULUS

27	Limit: Seni Mendekati	277
28	Turunan: Laju Perubahan	306
29	Aplikasi Turunan: Optimasi & Grafik	332
30	Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga	357

17 Garis, Sudut & Segitiga: Misteri Angka 180

Ukur ketiga sudut segitiga apa saja, sekecil kuku atau sebesar lapangan bola, lalu jumlahkan. Hasilnya selalu 180° . Kebetulan? Di bab ini kamu akan merobek kertas, menyeret segitiga, dan membuktikannya sendiri.

Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan **titik, garis, sinar, dan ruas garis**, serta mengukur dan menggolongkan sudut dengan **busur derajat**;
- memakai sifat sudut **berpelurus, berpenyiku, dan bertolak belakang**;
- menemukan sudut-sudut pada **dua garis sejajar** yang dipotong garis lain (sehadap, berseberangan, sepihak);
- membuktikan bahwa **jumlah sudut segitiga 180°** dan memakai sifat **sudut luar** segitiga;
- memakai **ketaksamaan segitiga** dan menghitung jumlah **sudut dalam dan sudut luar poligon**.

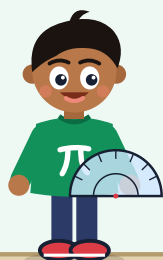
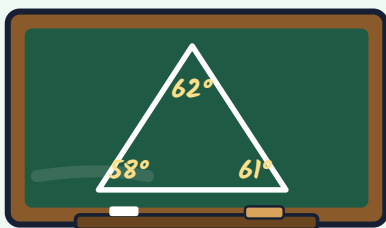
BUSUR DIMAS RUSAK?

KOMIK • 4 PANEL

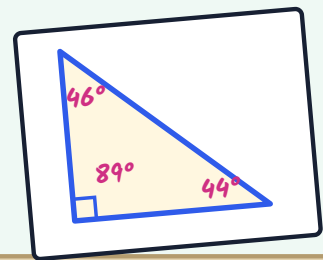
Pelajaran matematika, kelas 7

DIMAS

Sudutnya 58° , 61° , dan 62° . Totalnya 181° ! Busurku pasti rusak, nih.

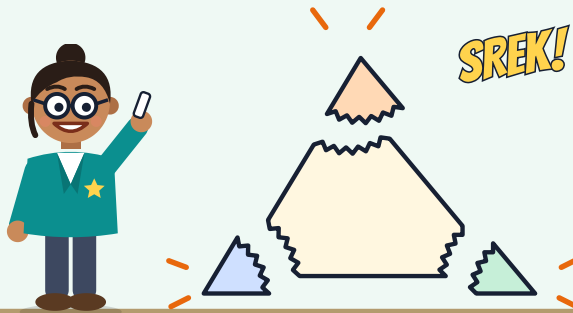
**AYU**

Pungaku $89^\circ + 46^\circ + 44^\circ = 179^\circ$. Dua-duanya meleset 1° saja dari 180° . Kebetulan, ya?



KAK LINTANG

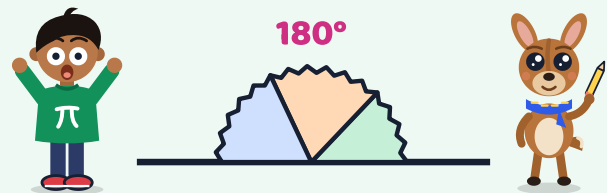
Bukan kebetulan! Robek ketiga pojok segitiga kertasnya, lalu tempelkan ujung-ujungnya di satu titik.

**Tiga pojok, satu garis lurus****ANCIL**

Lihat, pas jadi garis lurus: 180° ! Segitiga sebesar lapangan bola pun sama.

DIMAS

Berarti selisih 1° tadi cuma salah baca busur!

**Tebak Dulu!**

Segitiga A sekecil kuku jari. Segitiga B sebesar lapangan sepak bola. Jumlah ketiga sudut segitiga mana yang lebih besar?

Segitiga B, karena ukurannya jauh lebih besar.

Segitiga A, karena sudut-sudutnya lebih "rapat".

Sama saja: keduanya 180° .

Tergantung panjang sisi-sisinya.

Jawabannya: sama, 180° . Besar sudut mengukur seberapa lebar *bukaan*, bukan seberapa panjang sisinya. Memperbesar segitiga seperti memperbesar foto: sisinya memanjang, tetapi bukaan pojoknya tetap. Di subbab 17.4 kamu akan membuktikan bahwa jumlahnya selalu 180° , berapa pun ukurannya.

17.1 Titik, garis, sudut, dan cara mengukurnya

Geometri dimulai dari benda yang sangat sederhana. Sebuah **titik** hanya menunjukkan letak dan tidak punya ukuran. **Garis** lurus memanjang tanpa ujung ke dua arah. **Sinar garis** punya satu titik pangkal lalu memanjang ke satu arah, seperti sinar senter. **Ruas garis** punya dua ujung, jadi panjangnya bisa diukur.

A

titik A
tanpa ukuran

A B

garis AB
tak berujung

A B

sinar AB
satu pangkal

A B

ruas garis AB
dua ujung

Titik ditulis dengan huruf kapital. Garis, sinar, dan ruas garis diberi nama dengan dua titik yang dilaluinya.

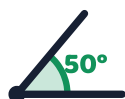


DEFINISI

Sebuah **sudut** dibentuk oleh dua sinar yang titik pangkalnya sama. Titik pangkal itu disebut **titik sudut**, dan kedua sinarnya disebut **kaki sudut**. **Besar sudut** menyatakan seberapa jauh satu kaki harus *diputar* agar berimpit dengan kaki lainnya. Satu putaran penuh dibagi menjadi 360 bagian sama besar; setiap bagian disebut **satu derajat** (1°).

Bahasa sederhana • Gampangnya: buka sebuah gunting. Makin lebar bukaannya, makin besar sudutnya. Panjang mata guntingnya tidak berpengaruh sama sekali!

Sudut dinamai dengan titik sudutnya, misalnya $\angle A$, atau dengan tiga huruf, misalnya $\angle BAC$ (huruf tengah selalu titik sudutnya). Berdasarkan besarnya, sudut dibagi menjadi lima jenis.



lancip
kurang dari 90°



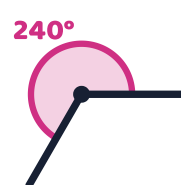
siku-siku
tepat 90°



tumpul
antara 90° dan 180°



lurus
tepat 180°



refleks
lebih dari 180°

Tanda kotak kecil berarti sudut siku-siku, yaitu tepat 90° atau seperempat putaran.

Alat untuk mengukur sudut adalah **busur derajat**. Letakkan titik tengah busur tepat di titik sudut, impitkan garis 0° dengan salah satu kaki sudut, lalu baca angka yang dilewati kaki lainnya.



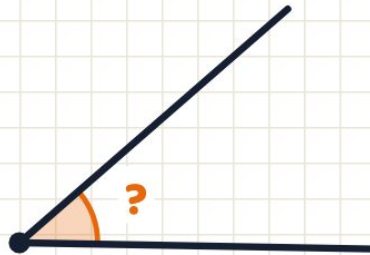
AWAS JEBAKAN

Busur derajat punya **dua deret angka**: satu berjalan dari 0° ke 180° searah jarum jam, satu lagi berlawanan arah. Pilih deret yang angka 0 -nya berada di kaki sudut pertama. Kalau sudutnya jelas lancip tetapi kamu membaca 130° , berarti kamu membaca deret yang salah!

Ronde 1

**Berapa derajat
sudut oranye ini?**

Geser slider,
lalu  Periksa.



Baca deret angka biru:
mulai dari 0 di kaki bawah

Tebakan

90 °

Sebenarnya

—

Selisih

—

Jenis sudut

?

Skor

0 poin • 0 ronde

Tebak besar sudut oranye hanya dengan mata, geser slider **Tebakanmu**, lalu tekan  **Periksa**. Selisih paling banyak 3° = mata elang! Nyalakan **Pasang busur derajat** untuk berlatih membaca busur (tanpa skor).



TAMU DARI MASA LALU

Mengapa satu putaran dibagi menjadi 360°, bukan 100°? Kebiasaan ini diwariskan para astronom Babilonia (±2.000 tahun SM) yang berhitung dengan bilangan basis 60. Salah satu dugaan sejarawan: angka 360 dekat dengan banyaknya hari dalam setahun, dan 360 mudah dibagi oleh 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, dan masih banyak lagi. Itulah sebabnya 360 sangat praktis untuk membagi lingkaran.

Jam dinding adalah busur derajat raksasa. Dua belas angka membagi satu putaran, jadi jarak antara dua angka berurutan adalah $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Jarum menit berputar 360° dalam 60 menit (6° per menit), sedangkan jarum jam hanya bergeser 30° dalam 60 menit (0,5° per menit).

$$\theta = |30j - 5,5m|$$

Jarum jam berada di $30j + 0,5m$ derajat, jarum menit di $6m$ derajat (diukur dari angka 12). Selisihnya adalah sudutnya; kalau lebih dari 180° , ambil 360° dikurangi selisih itu.

j Jam jam

m Menit menit

θ Sudut terkecil $^\circ$

SUDUT TERKECIL

90

°

tepat siku-siku!

Pukul **3.00**: jarum jam di 90° dan jarum menit di 0° (diukur dari angka 12). Selisihnya 90° , jadi sudut terkecil di antara kedua jarum 90° .

Cek satuan: satu putaran 360° dibagi 12 angka jam, jadi tiap angka berjarak 30° .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-JARUM-JAM



TRIK KAK LINTANG

Untuk sudut jarum jam, ingat dua angka saja: **30** (derajat per angka jam) dan **5,5** (selisih kecepatan kedua jarum per menit: $6 - 0,5$). Pukul 4.30? $|30 \times 4 - 5,5 \times 30| = |120 - 165| = 45^\circ$. Jangan menjawab 60° hanya karena jarum menit di angka 6: jarum jam sudah bergeser ke tengah-tengah angka 4 dan 5!

17.2 Sudut berpelurus, berpenyiku, dan bertolak belakang

Sudut sering muncul berpasangan. Dua sudut yang bersebelahan pada sebuah garis lurus selalu "berbagi" setengah putaran. Dua sudut yang bersama-sama membentuk pojok siku-siku berbagi seperempat putaran.



DEFINISI

Dua sudut disebut **berpelurus** (saling melengkapi menjadi garis lurus) jika jumlahnya 180° . Dua sudut disebut **berpenyiku** jika jumlahnya 90° . Contoh: pelurus 70° adalah 110° , dan penyiku 70° adalah 20° .



TRIK KAK LINTANG

Dengarkan bunyi katanya. Pe-nyiku → siku → 90° . Pe-lurus → lurus → 180° . Tidak perlu hafalan tambahan!

Sekarang silangkan dua sumpit. Terbentuk empat sudut. Sudut-sudut yang saling berhadapan di seberang titik potong disebut **sudut bertolak belakang**.



SIFAT SUDUT BERTOLAK BELAKANG

Jika dua garis berpotongan, sudut-sudut yang bertolak belakang **sama besar**: $\angle 1 = \angle 3$ dan $\angle 2 = \angle 4$.

▼ Bukti (cukup dua baris)

$\angle 1$ dan $\angle 2$ bersebelahan pada satu garis lurus, jadi $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. $\angle 2$ dan $\angle 3$ juga bersebelahan pada garis lurus yang lain, jadi $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

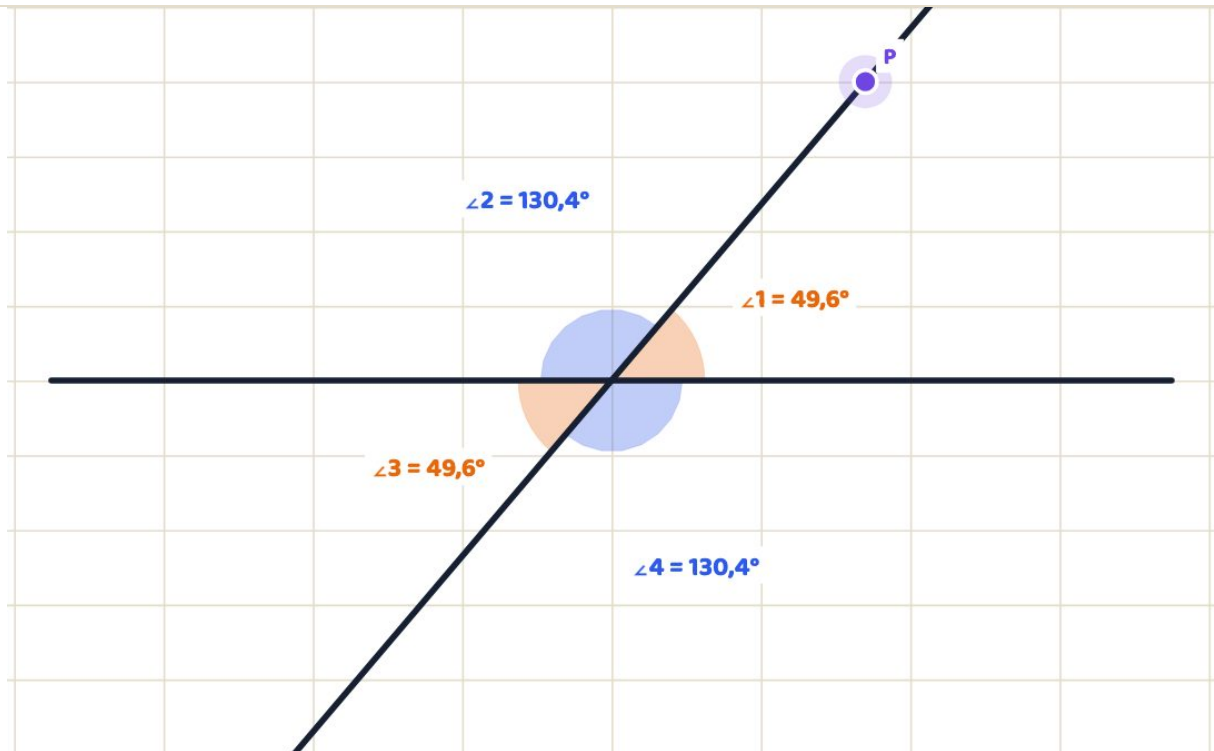
$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 2 = \angle 3.$$

Dengan cara yang sama, $\angle 2 = \angle 4$. Terbukti.



$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \quad \text{dan} \quad \angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 1 = \angle 3 = 49,6^\circ \quad \angle 2 = \angle 4 = 130,4^\circ$$

 $\angle 1$

49,6 °

 $\angle 2$

130,4 °

 $\angle 3$

49,6 °

 $\angle 4$

130,4 °

Seret titik ungu **P** untuk memutar garis miring. Berapa pun sudutnya, $\angle 1$ selalu kembar dengan $\angle 3$, dan $\angle 1 + \angle 2$ selalu 180° . Bisakah kamu membuat keempat sudut sama besar?

CONTOH Bambu layangan bersilang

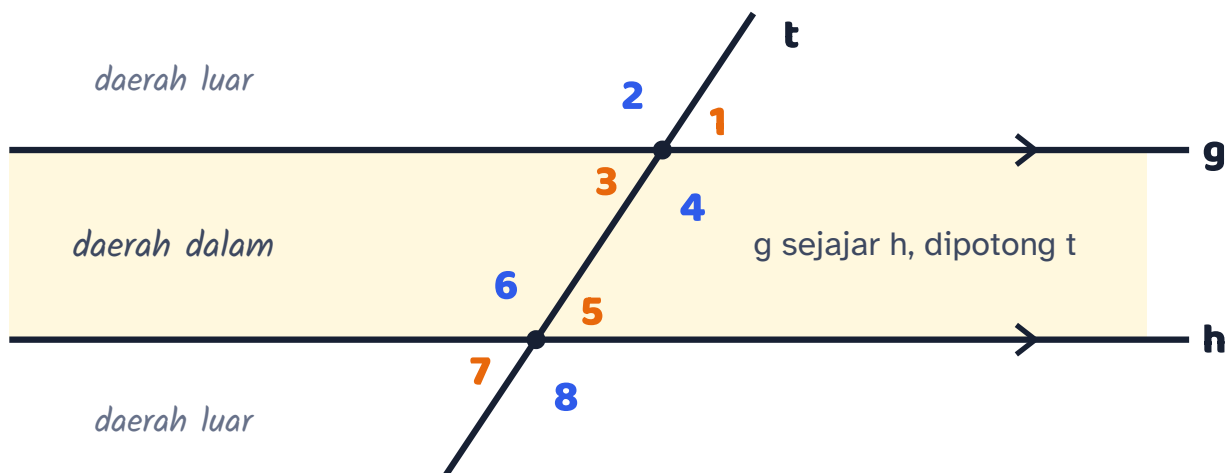
Dua batang bambu rangka layangan bersilang. Salah satu sudut di persilangan besarnya $(2x + 15)^\circ$, sedangkan sudut yang bertolak belakang dengannya $(4x - 25)^\circ$. Tentukan x dan keempat sudut di persilangan itu.

- 1 Sudut bertolak belakang sama besar: $2x + 15 = 4x - 25$.
- 2 Pindahkan suku: $15 + 25 = 4x - 2x$, jadi $40 = 2x$ dan $x = 20$.
- 3 Besar sudutnya $2(20) + 15 = 55^\circ$. Cek: $4(20) - 25 = 55^\circ$. Cocok!
- 4 Dua sudut lainnya adalah pelurusnya: $180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

$x = 20$. Keempat sudutnya $55^\circ, 125^\circ, 55^\circ, 125^\circ$, dan jumlahnya tepat 360° , satu putaran penuh.

17.3 Garis sejajar dan garis yang memotongnya

Dua rel kereta tidak pernah bertemu, sejauh apa pun kamu menelusurinya. Garis seperti itu disebut **garis sejajar** dan ditulis $g \parallel h$. Sebuah garis yang memotong keduanya, misalnya jalan raya yang melintasi rel, disebut **garis transversal**. Perpotongan itu menghasilkan delapan sudut.



Sudut 3, 4, 5, 6 berada di daerah dalam (di antara kedua garis). Sudut 1, 2, 7, 8 berada di daerah luar. Tanda panah kecil pada garis berarti kedua garis sejajar.



SIFAT SUDUT PADA DUA GARIS SEJAJAR

Jika $g \parallel h$ dipotong garis transversal t , maka:

- **sudut sehadap** (posisinya sama di tiap perpotongan) sama besar: $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$;
- **sudut dalam berseberangan** sama besar: $\angle 3 = \angle 5$ dan $\angle 4 = \angle 6$;
- **sudut luar berseberangan** sama besar: $\angle 1 = \angle 7$ dan $\angle 2 = \angle 8$;
- **sudut dalam sepihak** berjumlah 180° : $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ dan $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$.

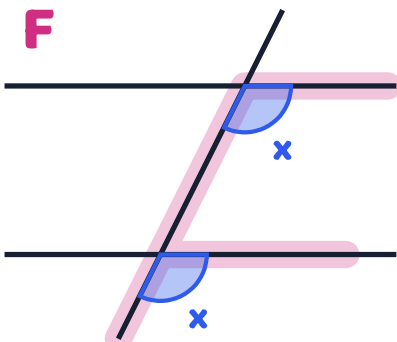
Bahasa sederhana • Gampangnya: pada dua garis sejajar, hanya ada **dua ukuran sudut**. Sudut yang kecil semuanya sama, sudut yang besar semuanya sama, dan satu sudut kecil ditambah satu sudut besar selalu 180° .

▼ Mengapa sudut sehadap sama besar?

Bayangkan garis g digeser lurus ke bawah sepanjang garis t sampai menempel pada h . Karena $g \parallel h$, arahnya tidak berubah, jadi pergeseran itu membawa $\angle 1$ tepat menutupi $\angle 5$. Ini adalah sifat dasar garis sejajar. Sifat lainnya tinggal diturunkan: $\angle 3 = \angle 1$ (bertolak belakang) $= \angle 5$, jadi sudut dalam berseberangan sama; dan $\angle 4 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - \angle 5$, jadi $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$.

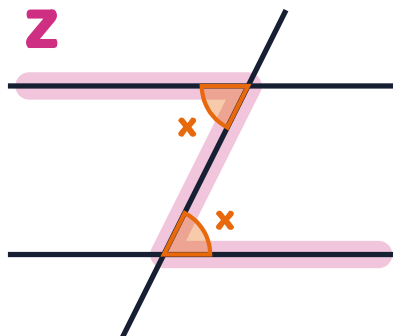


F



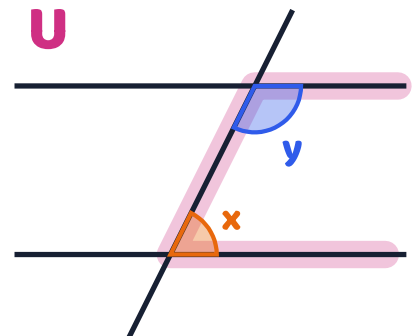
sehadap
sama besar

Z



dalam berseberangan
sama besar

U



dalam sepihak
jumlahnya 180°

Cari huruf tersembunyi pada gambar: F untuk sudut sehadap, Z untuk sudut dalam berseberangan, U untuk sudut dalam sepihak.

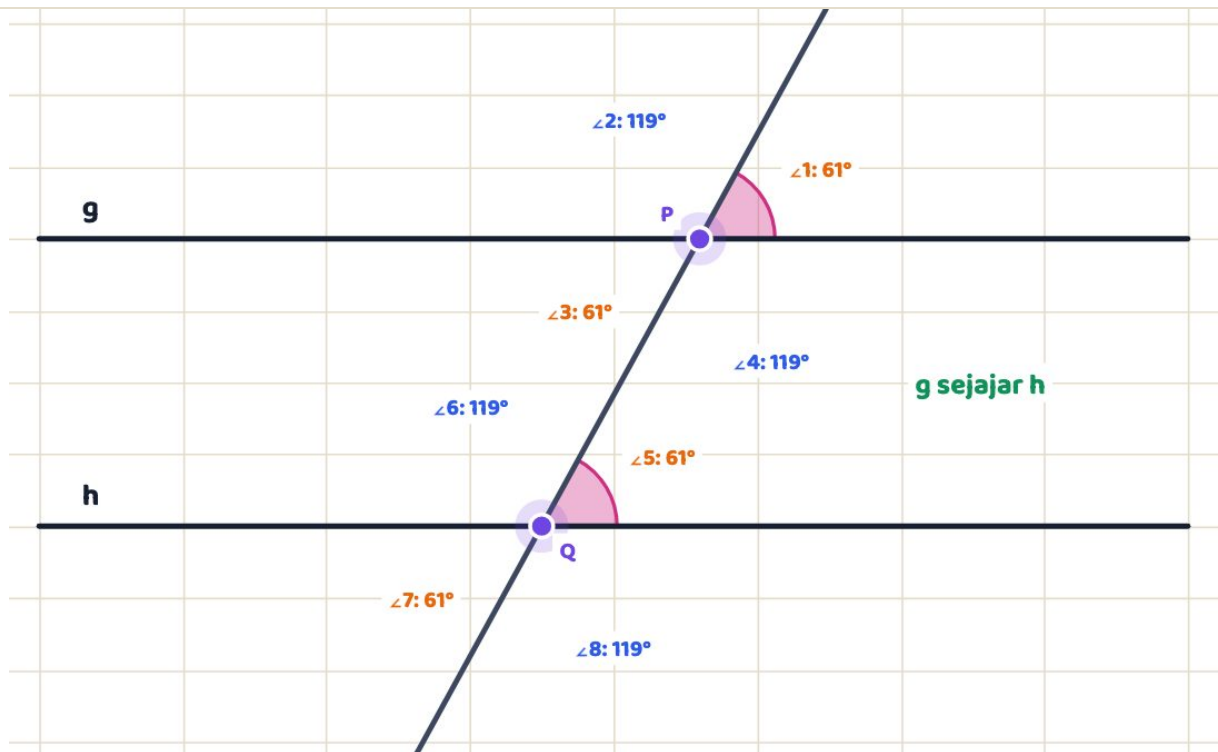


TRIK KAK LINTANG

Cari **huruf F, Z, dan U** (huruf U boleh terbalik atau miring) yang tersembunyi di gambar. Di pojok huruf **F** dan **Z**, sudutnya kembar. Di dalam huruf **U**, kedua sudutnya bergandengan menjadi 180° .

$$g \parallel h \Rightarrow \angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 6, \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\angle 1 = 61,2^\circ, \quad \angle 5 = 61,2^\circ$$



☒ g sejajar h, jadi pasangan ini sama besar

Pasangan
sehadap

Selisih
0 °

Jumlah
122,4 °

Seret titik **P** dan **Q** untuk mengubah kemiringan garis transversal. Slider **pasangan** memilih pasangan sudut yang disorot (1 sehadap, 2 dalam berseberangan, 3 luar berseberangan, 4 dalam sepihak). Lalu miringkan garis **h** sedikit saja: apa yang terjadi pada pasangan yang tadinya kembar?



AWAS JEBAKAN

Sifat sehadap, berseberangan, dan sepihak **hanya berlaku jika kedua garis sejajar**. Pada dua garis yang tidak sejajar, sudut sehadapnya tidak sama besar. Sebelum memakai sifat itu, pastikan ada tanda sejajar (panah kecil) atau keterangan $g \parallel h$ di soal.

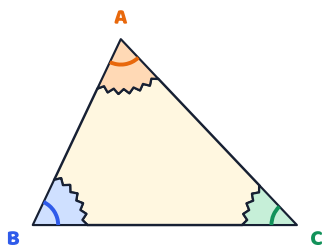
Pada gambar penomoran di atas, jalan raya t melintasi dua rel sejajar g dan h . Diketahui $\angle 1 = 65^\circ$. Tentukan $\angle 6$ dan $\angle 8$ beserta alasannya.

- 1 $\angle 5 = \angle 1 = 65^\circ$ karena keduanya **sehadap** (huruf F).
- 2 $\angle 6$ dan $\angle 5$ bersebelahan pada garis h , jadi berpelurus: $\angle 6 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.
- 3 $\angle 8$ bertolak belakang dengan $\angle 6$, jadi $\angle 8 = 115^\circ$.

$\angle 6 = \angle 8 = 115^\circ$. **Cek dengan huruf U:** $\angle 4 + \angle 5 = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$. **Cocok!**

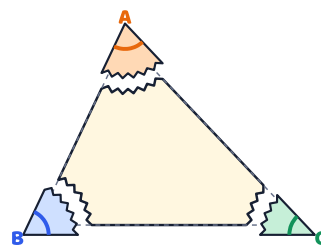
17.4 Jumlah sudut segitiga: bukti robek kertas

Saatnya menjawab misteri komik di awal bab. Dimas dan Ayu sama-sama mendapat hasil yang *hampir* 180° . Ternyata hasil tepatnya memang selalu 180° ; selisih 1° itu hanya kesalahan membaca busur. Lihat buktinya tanpa satu angka pun.



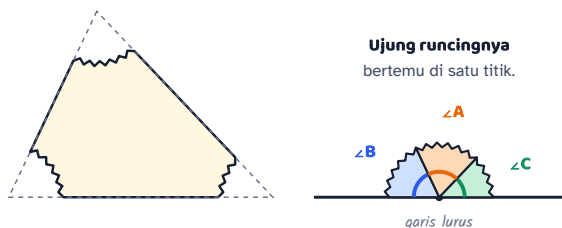
Segitiga kertas
bentuk apa saja.
Warnai ketiga pojoknya.

Langkah 1. Gunting sebuah segitiga dari kertas, bentuk apa saja. Warnai ketiga pojoknya: $\angle A$ oranye, $\angle B$ biru, $\angle C$ hijau.



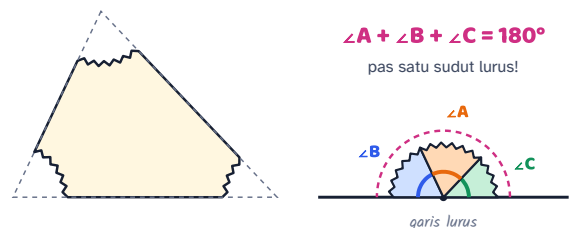
SREK! SREK! SREK!
Robek ketiga pojoknya.

Langkah 2. Robek ketiga pojoknya. Ujung runcing setiap sobekan adalah titik sudutnya.



Ujung runcingnya
bertemu di satu titik.

Langkah 3. Pindahkan sobekan ke sebuah garis lurus. Tempelkan ketiga ujung runcingnya di satu titik, berdampingan tanpa celah dan tanpa tumpang tindih.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
pas satu sudut lurus!

Langkah 4. Ketiganya pas mengisi setengah putaran, yaitu sudut lurus. Jadi $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$!



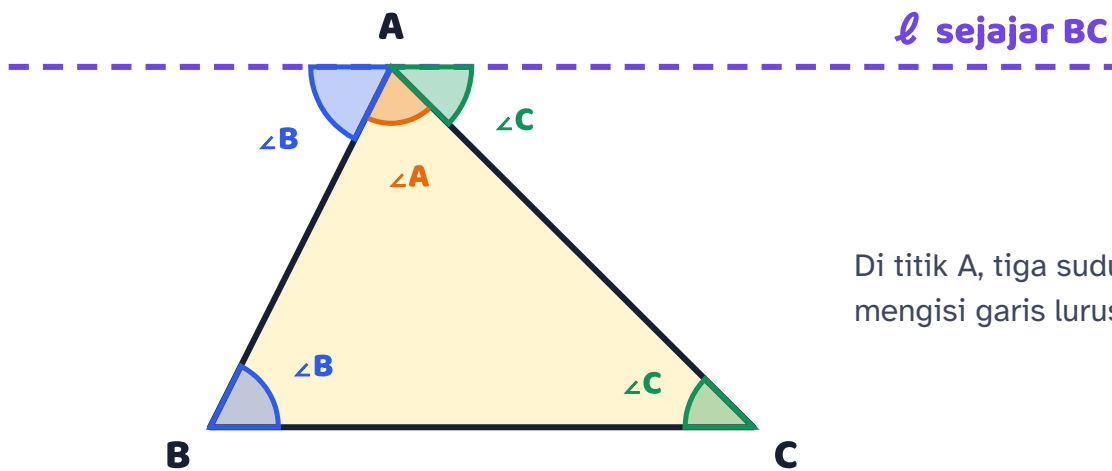
TEOREMA JUMLAH SUDUT SEGITIGA

Pada setiap segitiga ABC berlaku

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

▼ Bukti dengan garis sejajar (berlaku untuk semua segitiga)

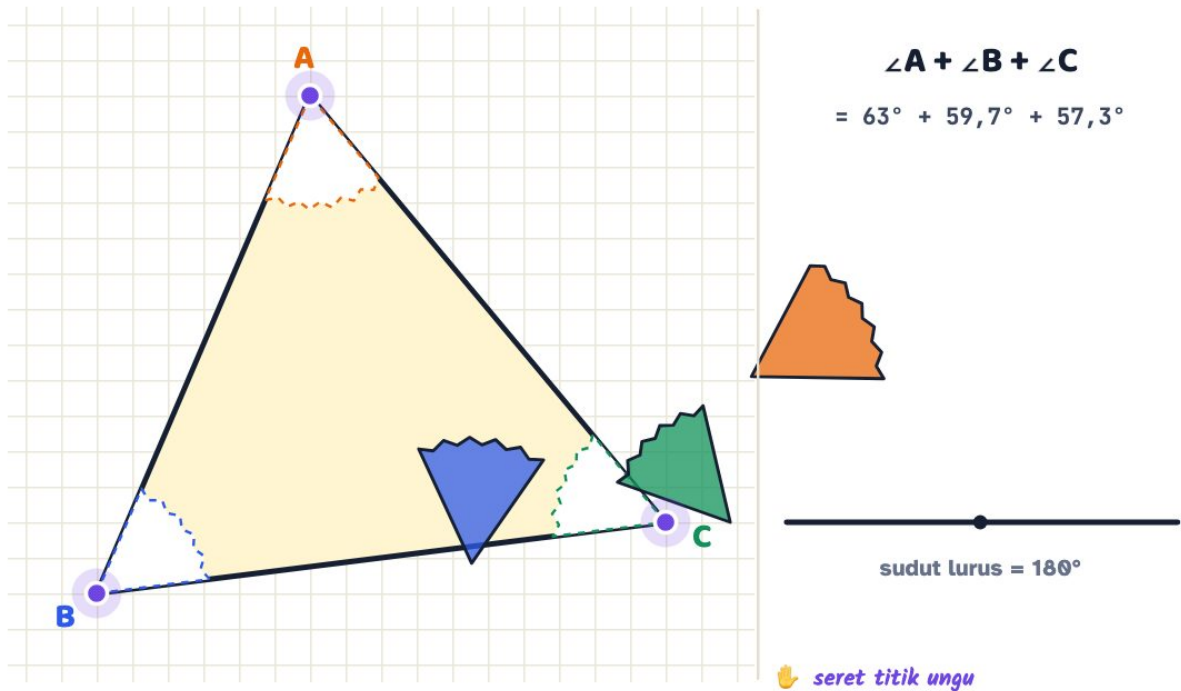
Robek kertas meyakinkan, tetapi kita hanya mencobanya pada beberapa segitiga. Agar yakin untuk *semua* segitiga, tarik garis ℓ melalui A yang sejajar dengan BC .



Karena $\ell \parallel BC$ dan AB memotong keduanya, sudut di kiri A sama dengan $\angle B$ (sudut dalam berseberangan, huruf Z). Dengan alasan yang sama, sudut di kanan A sama dengan $\angle C$. Ketiga sudut di titik A mengisi garis lurus ℓ , jadi $\angle B + \angle A + \angle C = 180^\circ$. Terbukti. ■

LAB MINI Segitiga ajaib: seret, robek, jajarkan

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17



$\angle A$
63 °

$\angle B$
59,7 °

$\angle C$
57,3 °

$\angle A + \angle B + \angle C$
180 °

Jenis segitiga
lancip • sembarang

Seret titik ungu A , B , atau C di kertas berpetak, lalu tekan ► **Jalankan** untuk merobek pojok-pojoknya. Setelah sobekan tiba di garis lurus, seret lagi titik sudutnya: kipas warna-warni selalu pas setengah lingkaran! Pilih **Tampilan** lain untuk melihat bukti garis sejajar dan sudut luar.

Bahasa sederhana • Gampangnya: tiga pojok segitiga kalau disatukan selalu membentuk garis lurus. Jadi kalau dua sudut sudah diketahui, sudut ketiga tinggal dihitung: **180 dikurangi keduanya**.

CONTOH Sudut ketiga tanpa busur

Dimas mengukur dua sudut segitiga kertasnya: 47° dan 68° . Tanpa memakai busur lagi, berapa sudut ketiganya?

- 1 Jumlah ketiga sudut segitiga 180° .
- 2 Sudut ketiga $= 180^\circ - 47^\circ - 68^\circ = 65^\circ$.

Sudut ketiganya 65° . Semua sudutnya kurang dari 90° , jadi segitiga Dimas adalah segitiga lancip.

ADU CEPAT Sudut ketiga kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangkan kedua sudut dari 180° . Trik cepat: jumlahkan dulu kedua sudut, lalu cari berapa lagi menuju 180° .

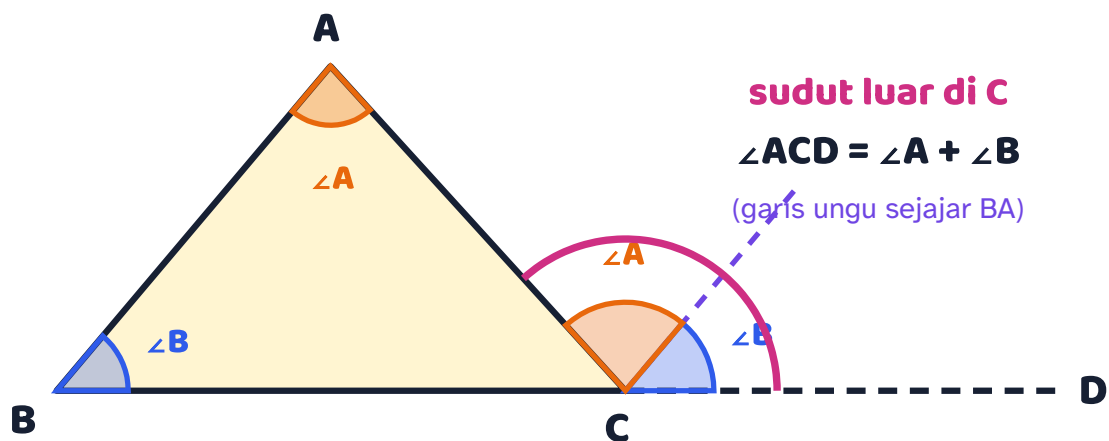
Teorema 180° juga memberi hadiah gratis. Perpanjang sisi BC melewati C sampai titik D . Sudut $\angle ACD$ yang terbentuk di luar segitiga disebut **sudut luar**.



SIFAT SUDUT LUAR SEGITIGA

Sudut luar segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam yang **tidak bersisian** dengannya:

$$\angle ACD = \angle A + \angle B.$$



Bukti: $\angle ACD = 180^\circ - \angle C$ (berpelurus), dan $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$ (jumlah sudut segitiga). Jadi keduanya sama.

Kuda-kuda (rangka atap) sebuah rumah berbentuk segitiga sama kaki. Sudut di puncaknya 120° . Berapa kemiringan atapnya, yaitu besar setiap sudut alasnya?

- 1 Segitiga sama kaki punya dua sudut alas yang sama besar; misalkan masing-masing x .
- 2 $x + x + 120^\circ = 180^\circ$, jadi $2x = 60^\circ$.
- 3 $x = 30^\circ$.

Setiap sudut alas 30° : atapnya cukup landai. Atap yang lebih curam (sudut alas lebih besar) membuat sudut puncaknya lebih kecil.

Pada gambar, $AB \parallel CD$, $\angle BAE = 35^\circ$, dan $\angle DCE = 50^\circ$. Tentukan $\angle AEC$.



- 1 Kuncinya: tarik garis bantu melalui E yang sejajar AB (dan juga sejajar CD).
- 2 Garis bantu itu membagi $\angle AEC$ menjadi dua bagian. Bagian atas sama dengan $\angle BAE = 35^\circ$ (dalam berseberangan, huruf Z).
- 3 Bagian bawah sama dengan $\angle DCE = 50^\circ$ (huruf Z juga).
- 4 $\angle AEC = 35^\circ + 50^\circ$.

$\angle AEC = 85^\circ$. Strategi "tarik garis sejajar lewat titik tengah" adalah jurus andalan dalam soal kejar-sudut.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 300 SM, Euclid dari Aleksandria menulis *Elemen*, buku pelajaran geometri yang dipakai lebih dari dua ribu tahun. Pada Buku I, Proposisi 32, ia membuktikan bahwa sudut luar segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam di seberangnya, dan bahwa ketiga sudut segitiga berjumlah "dua sudut siku-siku". Buktinya memakai garis sejajar, persis seperti bukti di atas.

**SEGITIGA DI PERMUKAAN BOLA: 270°!**

Teorema 180° berlaku di bidang **datar**. Di permukaan bola, ceritanya lain. Mulailah di Kutub Utara, berjalan lurus ke selatan sampai khatulistiwa, belok kiri 90° , berjalan sepanjang khatulistiwa seperempat keliling Bumi, belok kiri 90° lagi, lalu berjalan lurus kembali ke Kutub Utara. Lintasanmu membentuk "segitiga" dengan **tiga sudut siku-siku**: jumlahnya 270° ! Perbedaan ini berasal dari *postulat kesejajaran* Euclid. Di bidang datar, melalui satu titik di luar sebuah garis hanya ada tepat satu garis sejajar; di permukaan bola, tidak ada garis sejajar sama sekali. Matematikawan abad ke-19 seperti Gauss, Bolyai, Lobachevsky, dan Riemann mengembangkan **geometri non-Euclides**, yang kelak dipakai dalam teori relativitas Einstein.

17.5 Jenis segitiga dan ketaksamaan segitiga

Segitiga dapat dikelompokkan menurut **panjang sisinya**: **segitiga sama sisi** (ketiga sisinya sama, setiap sudutnya 60°), **segitiga sama kaki** (dua sisinya sama, dan dua sudut alasnya juga sama), serta **segitiga sembarang** (semua sisinya berbeda). Menurut **sudut terbesarnya**, segitiga bisa lancip, siku-siku, atau tumpul. Kedua cara ini bisa digabung. Tetapi apakah semua gabungan mungkin?

	Sama sisi	Sama kaki	Sembarang
Lancip	✓ $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$	✓ $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$	✓ $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$
Siku-siku	✗ mustahil: semua sudutnya 60°	✓ $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$	✓ $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
Tumpul	✗ mustahil	✓ $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$	✓ $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$

**SISI DAN SUDUT SALING "BERHADAPAN"**

Pada setiap segitiga, **sisi terpanjang berhadapan dengan sudut terbesar**, dan sisi terpendek berhadapan dengan sudut terkecil. Akibatnya, segitiga paling banyak punya satu sudut siku-siku atau satu sudut tumpul. Sudut-sudut yang sama besar berhadapan dengan sisi-sisi yang sama panjang.



Tebak Dulu!

Dimas punya tiga lidi: 4 cm, 5 cm, dan 10 cm. Bisakah ia merangkainya menjadi segitiga (ujung bertemu ujung)?

Bisa, tiga lidi apa pun pasti bisa menjadi segitiga.

Bisa, asalkan lidi 10 cm dipakai sebagai alas.

Tidak bisa, karena $4 + 5$ kurang dari 10.

Tidak bisa, karena panjang ketiganya berbeda.

Jawabannya: tidak bisa. Dua lidi pendek yang direntangkan lurus pun hanya mencapai $4 + 5 = 9$ cm, masih kurang 1 cm dari lidi 10 cm. Ujung-ujungnya tidak akan pernah bertemu. Coba sendiri di Lab Mini di bawah!



KETAKSAMAAN SEGITIGA

Tiga bilangan positif a, b, c bisa menjadi panjang sisi sebuah segitiga jika dan hanya jika jumlah dua sisi mana pun **lebih besar** daripada sisi ketiga:

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b$$

Cara cepatnya: cukup cek apakah **dua sisi terpendek** berjumlah lebih dari **sisi terpanjang**.



Jumlah dua lidi terpendek

9 cm

Lidi terpanjang

10 cm

Hasil

menutup...

Jenis

—

Atur panjang tiga lidi. Lidi biru dan oranye berengsel di ujung alas dan berayun saling mendekat. Kapan ujungnya bertemu? Coba buat kasus "pas-pasan" ketika dua lidi pendek tepat sama dengan lidi terpanjang (tombol 😊 3-4-7).



MENGAPA HARUS "LEBIH BESAR", BUKAN "SAMA DENGAN"?

Jika $a + b = c$, kedua lidi pendek rebah tepat di atas lidi panjang. Ujungnya memang bertemu, tetapi segitiganya **gepeng**: tidak ada ruang di dalamnya dan luasnya nol. Itu bukan segitiga sungguhan. Ketaksamaan segitiga juga menjelaskan mengapa **jalan pintas** lurus selalu lebih pendek daripada jalan berbelok: sisi c selalu lebih pendek daripada $a + b$.



MATEMATIKA NUSANTARA

Para tukang kayu di Indonesia menyebut rangka segitiga penopang atap **kuda-kuda**. Mengapa segitiga, bukan segi empat? Begitu panjang ketiga sisinya dikunci, bentuk segitiga tidak bisa berubah lagi; sudut-sudutnya ikut terkunci. Segi empat dari empat batang kayu masih bisa "miring" menjadi jajargenjang jika didorong. Itulah sebabnya kuda-kuda, rangka menara, dan jembatan rangka baja yang melintasi banyak sungai di Indonesia tersusun dari deretan segitiga.

MITOS

"Sudut makin besar kalau kaki sudutnya diperpanjang."

FAKTA

Besar sudut adalah besar **putaran** di antara kedua kaki, bukan panjang kakinya. Memperpanjang kaki sudut tidak mengubah bukaanannya sedikit pun.

MITOS

"Segitiga yang besar punya jumlah sudut yang lebih besar."

FAKTA

Di bidang datar, jumlahnya selalu 180° , baik segitiga di kuku maupun segitiga selebar lapangan bola. Ukuran sisi tidak berpengaruh.

MITOS

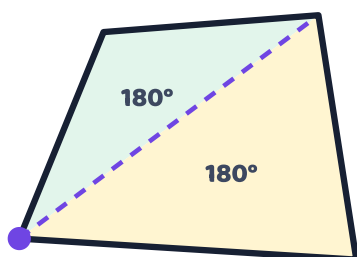
"Tiga lidi berapa pun panjangnya pasti bisa dirangkai menjadi segitiga."

FAKTA

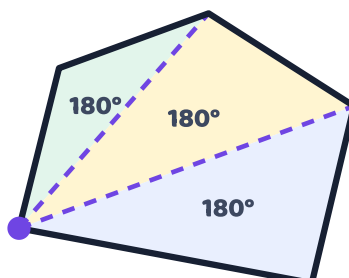
Dua lidi terpendek harus berjumlah **lebih dari** lidi terpanjang. Lidi 3 cm, 4 cm, dan 8 cm tidak akan pernah bisa bertemu ujungnya.

17.6 Sudut-sudut poligon

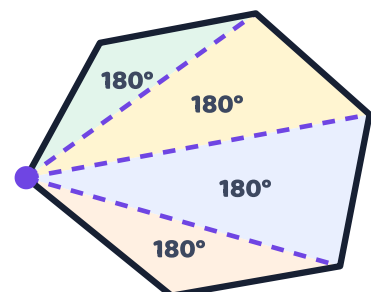
Poligon (segi banyak) adalah bangun datar tertutup yang dibatasi ruas-ruas garis. Segi- n punya n sisi dan n titik sudut. Berapa jumlah sudut dalamnya? Gunakan kembali trik andalan: **potong menjadi segitiga**! Dari satu titik sudut, tarik semua diagonal yang mungkin.



segi empat: 2 segitiga
 $2 \times 180^\circ = 360^\circ$



segi lima: 3 segitiga
 $3 \times 180^\circ = 540^\circ$



segi enam: 4 segitiga
 $4 \times 180^\circ = 720^\circ$

Dari satu titik sudut (ungu), segi- n selalu terpotong menjadi $n - 2$ segitiga. Setiap segitiga menyumbang 180° .



JUMLAH SUDUT DALAM POLIGON

Jumlah sudut dalam segi- n adalah

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$

Pada **segi- n beraturan** (semua sisi dan semua sudutnya sama), setiap sudut dalamnya $\frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$.

RUMUS HIDUP

Jumlah sudut dalam segi- n

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$

Potong segi- n menjadi segitiga dari satu titik sudut: hasilnya selalu $n - 2$ segitiga, dan setiap segitiga menyumbang 180° .

 n

Banyak sisi sisi

 S

Jumlah sudut dalam °

JUMLAH SUDUT DALAM

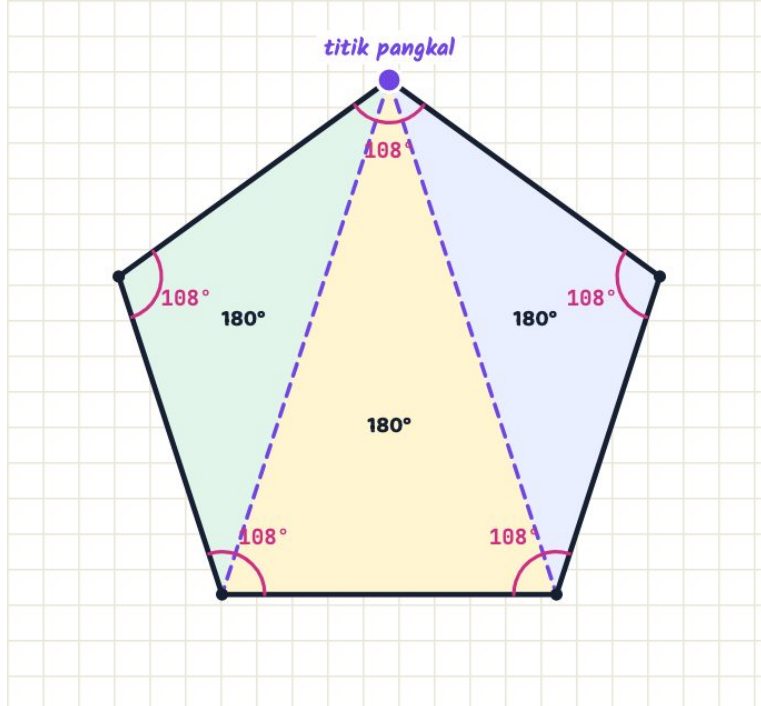
540

°

Segi-**5** dipotong dari satu titik sudut menjadi **3** segitiga, jadi jumlah sudut dalamnya **3** × $180^\circ = \mathbf{540^\circ}$. Kalau segi-**5** itu beraturan, setiap sudut dalamnya **540° : 5 = 108°**.

Cek satuan: hasilnya dalam derajat (°); n adalah bilangan asli 3 atau lebih.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-SUDUT-POLIGON](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-JUMLAH-SUDUT-POLIGON)



Segi-5

3 dari 3 segitiga

$$3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

jumlah sudut terukur:

$$540^\circ$$

Rumus: $(n - 2) \times 180^\circ$

Dari titik pangkal ditarik
 $n - 3 = 2$ diagonal.

► = potong satu per satu

Banyak segitiga

3

Jumlah sudut dalam

540 °

Total belokan Ancil

0 °

Pilih banyak sisi n , lalu tekan ► **Jalankan** untuk memotongnya menjadi segitiga satu per satu. Lalu pilih kegiatan **Ancil keliling**: Ancil berjalan menyusuri tepi dan berbelok di setiap pojok. Berapa total belokannya? Coba juga **Bentuk tak beraturan**.

Saat Ancil berjalan menyusuri tepi poligon, di setiap pojok ia berbelok. Besar belokan itu adalah **sudut luar** poligon: sudut antara perpanjangan satu sisi dan sisi berikutnya. Sudut dalam dan sudut luar di satu pojok selalu berpelurus.



Tebak Dulu!

Ancil berjalan mengelilingi sawah berbentuk segi lima tak beraturan, berbelok di setiap pojok, sampai kembali ke titik awal dan menghadap arah semula. Berapa jumlah semua belokannya?

540°, sama dengan jumlah sudut dalam segi lima.

360°, tepat satu putaran penuh.

180°, sama seperti segitiga.

Tidak bisa ditentukan karena bentuknya tak beraturan.

Jawabannya: 360°. Ancil mulai menghadap ke satu arah dan berakhir menghadap ke arah yang sama, setelah berputar tepat satu kali. Jadi jumlah semua belokan, yaitu jumlah sudut luar, selalu 360°, apa pun bentuk poligon cembungnya dan berapa pun banyak sisinya.



JUMLAH SUDUT LUAR POLIGON

Jumlah sudut luar setiap poligon cembung adalah 360°. Pada segi- n beraturan, setiap sudut luarnya $\frac{360^\circ}{n}$, sehingga setiap sudut dalamnya $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

▼ Bukti aljabar: sudut luar berjumlah 360°

Di setiap pojok, sudut dalam + sudut luar = 180°. Ada n pojok, jadi jumlah semuanya $n \times 180^\circ$. Dikurangi jumlah sudut dalam:

$$\text{jumlah sudut luar} = 180^\circ n - (n - 2) \times 180^\circ = 360^\circ.$$



$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Sudut luar segi-n beraturan adalah 360° dibagi n . Sudut dalamnya adalah pelurusnya: 180° dikurangi sudut luar.

 n

Banyak sisi sisi

 α

Sudut dalam °

SUDUT DALAM

120

°



ubin jenis ini bisa menutup lantai tanpa celah

Sudut luar = $360^\circ : 6 = 60^\circ$. Sudut dalam = $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Cek dengan rumus jumlah: $(6 - 2) \times 180^\circ : 6 = 120^\circ$. Sama!

Cek satuan: sudut luar dan sudut dalam sama-sama dalam derajat; jumlah keduanya 180° .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-POLIGON-BERATURAN](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-SUDUT-POLIGON-BERATURAN)

n	Nama	Jumlah sudut dalam	Tiap sudut dalam (beraturan)	Tiap sudut luar (beraturan)
3	segitiga	180°	60°	120°
4	segi empat	360°	90°	90°
5	segi lima	540°	108°	72°
6	segi enam	720°	120°	60°
8	segi delapan	1.080°	135°	45°
10	segi sepuluh	1.440°	144°	36°

12	segi dua belas	1.800°	150°	30°
----	-------------------	---------------	-------------	------------

ADU CEPAT Sudut dalam poligon beraturan

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-17

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Hitung dulu sudut luarnya ($360 : n$), lalu kurangkan dari 180 . Contoh segi-10: $360 : 10 = 36$, jadi $180 - 36 = 144$.

COBA SENDIRI Menebak banyak sisi dari satu sudut

Setiap sudut dalam sebuah poligon beraturan besarnya 156° . Berapa banyak sisinya, dan berapa jumlah semua sudut dalamnya?

- 1 Mulai dari sudut luar (lebih mudah): $180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$.
- 2 Semua sudut luar berjumlah 360° , jadi $n = 360^\circ : 24^\circ = 15$.
- 3 Jumlah sudut dalam = $(15 - 2) \times 180^\circ = 2.340^\circ$.
- 4 Cek: $15 \times 156^\circ = 2.340^\circ$. Cocok!

Poligon itu segi-15 beraturan, dan jumlah sudut dalamnya 2.340° .



MATEMATIKA NUSANTARA

Banyak masjid di Indonesia menghias lantai, jendela, atau dindingnya dengan motif geometris: bintang bersudut delapan, segi delapan, dan persegi yang saling mengunci. Motif itu bisa menutup bidang tanpa celah karena di setiap titik pertemuan jumlah sudutnya tepat 360° . Contohnya, dua segi delapan beraturan dan satu persegi: $135^\circ + 135^\circ + 90^\circ = 360^\circ$. Lebah pun "tahu" aturan ini: tiga sel segi enam bertemu di satu titik karena $3 \times 120^\circ = 360^\circ$.

MITOS

"Makin banyak sisi poligon, makin besar jumlah sudut luarnya."

FAKTA

Jumlah sudut luar poligon cembung selalu

360°

, satu putaran penuh. Yang bertambah adalah jumlah sudut

dalam

:

180°

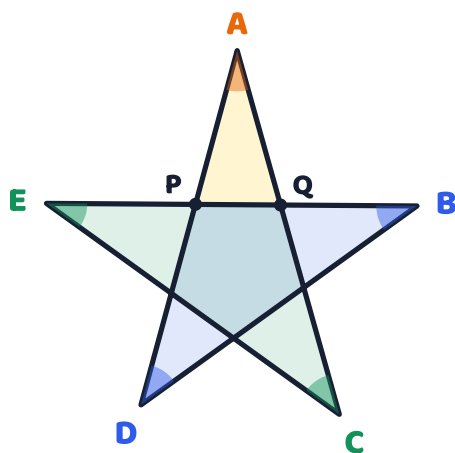
untuk setiap sisi tambahan.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

KEJAR-SUDUT: RAHASIA BINTANG LIMA

Gambarlah bintang lima sembarang (tidak harus beraturan) dengan ujung A, B, C, D, E . Berapa jumlah kelima sudut ujungnya? Jurusan olimpiade bernama **kejar-sudut** (*angle chasing*) menjawabnya tanpa mengukur.



$$\angle APQ = \angle B + \angle D$$

$$\angle AQP = \angle C + \angle E$$

$$\angle A + \angle APQ + \angle AQP = 180^\circ$$

jadi jumlah 5 ujung = 180°

Garis BE memotong AD di P dan AC di Q . Pada segitiga BDP , $\angle APQ$ adalah sudut luar, jadi $\angle APQ = \angle B + \angle D$. Dengan cara yang sama pada segitiga CEQ , $\angle AQP = \angle C + \angle E$. Pada segitiga APQ , $\angle A + \angle APQ + \angle AQP = 180^\circ$. Jadi $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$, untuk *setiap* bintang lima! Tantangan: berapa jumlah ujung bintang tujuh yang dibuat dengan memperpanjang sisi-sisi segi tujuh? (Ada di bank soal Lv 6.)



Kuda-kuda atap

Kemiringan atap ditentukan oleh sudut alas segitiga kuda-kuda. Atap curam membuat air hujan cepat mengalir.



Jembatan rangka baja

Deretan segitiga membuat jembatan kaku dan kuat, karena segitiga tidak bisa berubah bentuk tanpa mengubah panjang sisinya.



Rel kereta & zebra cross

Rel dan garis zebra cross adalah garis sejajar. Jalan yang melintasinya membentuk sudut sehadap yang sama besar.



Ubin & motif masjid

Ubin bisa menutup lantai tanpa celah jika sudut-sudut di setiap titik pertemuan berjumlah 360° .



Rangka layangan

Dua bambu yang bersilang membentuk sudut bertolak belakang yang sama besar, sehingga layangan seimbang kiri dan kanan.



Pantulan bola biliar

Bola memantul dari dinding meja dengan sudut datang sama dengan sudut pantul; pemain menghitungnya untuk membidik.

Cek Cepat

Dua garis berpotongan. Sudut yang bertolak belakang dengan sudut 70° besarnya...

110°

20°

70°

290°

Jumlah semua sudut dalam segi enam adalah...

360°

540°

1.080°

720°

Manakah yang dapat menjadi panjang sisi-sisi sebuah segitiga?

5, 7, 11

3, 3, 6

2, 4, 7

1, 10, 12

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. D · 3. A



Tantangan Rumah: robek, susun, buktikan!

Bahan: kertas bekas, gunting, spidol atau krayon tiga warna, busur derajat (jika ada), lem atau selotip, buku tulis.

1. Gambar dan gunting tiga segitiga yang bentuknya berbeda: satu lancip, satu siku-siku, dan satu tumpul.
2. Jika punya busur, ukur ketiga sudut setiap segitiga lalu jumlahkan. Catat hasilnya.
3. Warnai ketiga pojok setiap segitiga dengan warna berbeda, lalu robek pojok-pojoknya dengan tangan.
4. Gambar sebuah garis lurus di buku. Tempelkan ketiga sobekan sehingga ujung runcingnya bertemu di satu titik pada garis itu.
5. Bonus: lakukan hal yang sama pada sebuah segi empat. Robek keempat pojoknya dan susun ujungnya di satu titik.

Pertanyaan: Apakah ketiga sobekan selalu membentuk garis lurus? Jika jumlah hasil ukur busurmu bukan tepat 180° , dari mana selisihnya? Pada segi empat, bangun apa yang terbentuk oleh keempat sobekan, dan mengapa jumlahnya 360° ?



RINGKASAN KILAT

Bab 17 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- membedakan **titik, garis, sinar, dan ruas garis**, serta mengukur dan menggolongkan sudut dengan **busur derajat**
- memakai sifat sudut **berpelurus, berpenyiku, dan bertolak belakang**
- menemukan sudut-sudut pada **dua garis sejajar** yang dipotong garis lain (sehadap, berseberangan, sepihak)
- membuktikan bahwa **jumlah sudut segitiga 180°** dan memakai sifat **sudut luar** segitiga

- memakai **ketaksamaan segitiga** dan menghitung jumlah **sudut dalam** dan **sudut luar** poligon

Istilah kunci

titik Garis Sinar garis Ruas garis sudut busur derajat berpelurus berpenyiku
 sudut bertolak belakang garis sejajar garis transversal sudut luar segitiga sama sisi
 segitiga sama kaki Poligon

Rumus penting

$$\theta = |30j - 5,5m|$$

Sudut jarum jam. Jarum jam berada di $30j + 0,5m$ derajat, jarum menit di $6m$ derajat (diukur dari angka 12). Selisihnya adalah sudutnya; kalau lebih dari 180° , ambil 360° dikurangi selisih itu.

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$

Jumlah sudut dalam segi-n. Potong segi-n menjadi segitiga dari satu titik sudut: hasilnya selalu $n - 2$ segitiga, dan setiap segitiga menyumbang 180° .

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Sudut dalam segi-n beraturan. Sudut luar segi-n beraturan adalah 360° dibagi n . Sudut dalamnya adalah pelurusnya: 180° dikurangi sudut luar.

Jangan sampai terjebak

- Busur derajat punya dua deret angka: satu berjalan dari 0° ke 180° searah jarum jam, satu lagi berlawanan arah.
- Sifat sehadap, berseberangan, dan sepihak hanya berlaku jika kedua garis sejajar.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=17

Teka-teki untuk Bab 18

Pak Joko, seorang tukang bangunan, harus membuat pojok fondasi rumah yang tepat siku-siku. Busurnya tertinggal, dan penggaris sikunya terlalu kecil untuk fondasi sepanjang 6 meter. Ia hanya punya seutas tali panjang yang diberi 12 simpul berjarak sama. Bagaimana caranya membuat sudut tepat 90° hanya dengan tali itu?

▼ Intip petunjuk

Rentangkan tali menjadi segitiga dengan sisi 3, 4, dan 5 ruas ($3 + 4 + 5 = 12$). Sudut di antara sisi 3 dan sisi 4 ternyata siku-siku! Mengapa bisa begitu? Perhatikan bahwa $3^2 + 4^2 = 5^2$. Bab 18 membuka rahasia tali berumur ribuan tahun ini: **Teorema Pythagoras**.

18 Teorema Pythagoras: Rahasia Tali 3–4–5

Bagaimana tukang bangunan membuat pojok yang siku-siku sempurna hanya dengan seutas tali? Mengapa layar "32 inci" diukur miring? Satu kalimat berumur ribuan tahun menjawab semuanya.

Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **hipotenusa** dan kaki-kaki segitiga siku-siku;
- menjelaskan **bukti visual** Teorema Pythagoras dan memakainya untuk menghitung sisi yang belum diketahui;
- mengenali dan membuat **tripel Pythagoras**;
- memakai **kebalikan teorema** untuk menentukan apakah segitiga lancip, siku-siku, atau tumpul;
- menghitung **jarak dua titik** di bidang koordinat dan **diagonal ruang** sebuah kotak.

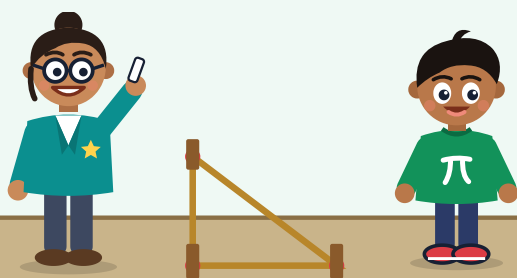
TALI BERSIMPUL KAK LINTANG

KOMIK • 4 PANEL

Sabtu pagi, kerja bakti membangun pos ronda

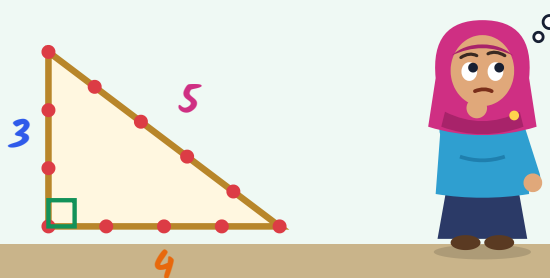
DIMAS

Kak, masa bikin pojok pos ronda cuma pakai tali bersimpul? Penggaris sikunya mana?



AYU

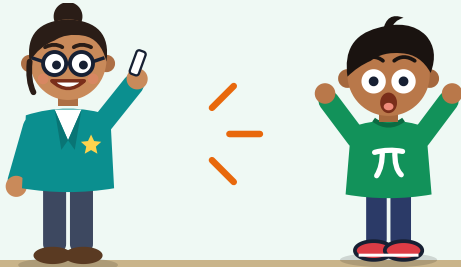
Talinya punya 12 ruas yang sama panjang. Kakak menariknya jadi segitiga dengan sisi 3, 4, dan 5 ruas...



KAK LINTANG

...dan sudut di antara sisi 3 dan 4 pasti siku-siku! Trik ini dipakai tukang sejak ribuan tahun lalu.

TENG!



Tiba-tiba dari balik semak...

ANCIL

Rahasianya: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Sembilan tambah enam belas, pas dua puluh lima!

DIMAS

Kok bisa pas begitu?!



Tebak Dulu!

Toko elektronik menjual TV "32 inci". Angka 32 inci itu mengukur apa?

Lebar layar dari kiri ke kanan.

Tinggi layar dari atas ke bawah.

Panjang diagonal layar, dari pojok ke pojok.

Keliling bingkai layar.

Jawabannya: diagonal layar. Layar TV berbentuk persegi panjang, dan ukurannya dinyatakan lewat garis miring dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas. Diagonal itu adalah sisi terpanjang sebuah segitiga siku-siku yang dibentuk lebar dan tinggi layar. Di akhir bab kamu akan bisa menghitung lebar layar 32 inci itu sendiri!

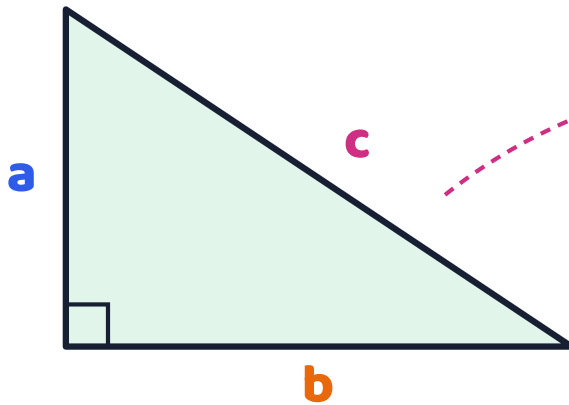
18.1 Segitiga siku-siku dan tiga sisinya

Pojok buku, pojok ubin, pertemuan dinding dan lantai: semuanya membentuk **sudut siku-siku** (90°). Segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku disebut **segitiga siku-siku**. Ketiga sisinya punya nama khusus.



DEFINISI

Pada segitiga siku-siku, sisi di depan sudut siku-siku disebut **hipotenusa** (sisi miring). Hipotenusa selalu menjadi sisi **terpanjang**. Dua sisi lain yang mengapit sudut siku-siku disebut **kaki** segitiga (sisi tegak dan sisi alas).



*c = hipotenusa (sisi miring)
a dan b = kaki segitiga
kotak kecil = sudut 90°*

Hipotenusa c selalu berada di seberang kotak kecil penanda sudut siku-siku.

Bahasa sederhana • Gampangnya: cari dulu **pojok yang siku** (ditandai kotak kecil). Sisi yang **tidak menyentuh** pojok itu adalah sisi miring, dan dialah sisi paling panjang.



AWAS JEBAKAN

Hipotenusa tidak selalu digambar miring atau di sebelah kanan. Kalau segitiganya diputar, cari sisi yang berhadapan dengan sudut 90°. Jangan menebak dari posisi gambar!

18.2 Teorema Pythagoras dan bukti tanpa kata

Gambarlah persegi pada setiap sisi segitiga siku-siku. Ada sesuatu yang ajaib: **luas dua persegi kecil, jika dijumlahkan, selalu tepat sama dengan luas persegi besar**.



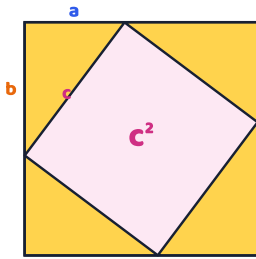
TEOREMA PYTHAGORAS

Pada segitiga siku-siku dengan kaki a dan b serta hipotenusa c , berlaku

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dalam kata-kata: *luas persegi pada sisi miring sama dengan jumlah luas persegi pada kedua kaki.*

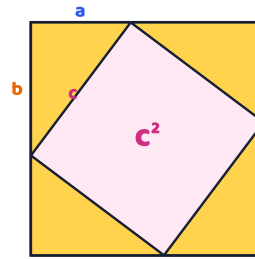
Mengapa begitu? Lihat bukti di bawah. Tidak perlu hafalan: cukup **menggeser empat segitiga**.



Persegi besar bersisi $a + b$.

Di dalamnya ada 4 segitiga siku-siku yang sama persis (kuning).

Langkah 1. Buat persegi bersisi $a + b$. Letakkan empat segitiga siku-siku yang identik (kaki a dan b , hipotenusa c) di keempat pojoknya.

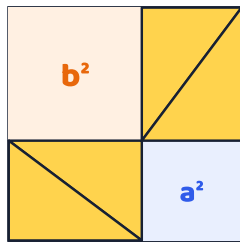


Bagian yang tidak tertutup segitiga

persegi miring bersisi c .

Luas kosong = c^2

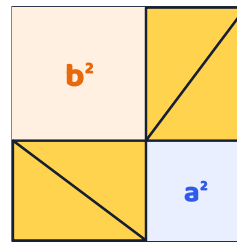
Langkah 2. Bagian tengah yang tidak tertutup adalah persegi miring bersisi c . Luas bagian kosong = c^2 .



Geser segitiganya, jangan diputar

Tiga segitiga pindah tempat, satu tetap di pojok kiri bawah.

Langkah 3. Sekarang geser tiga segitiga ke posisi baru. Hanya digeser, tidak diputar, jadi luasnya tidak berubah.

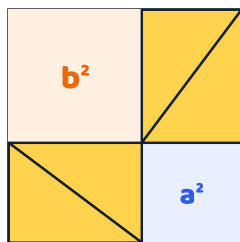


Sekarang bagian kosongnya

berupa dua persegi:

b^2 dan a^2

Langkah 4. Bagian yang kosong sekarang berupa dua persegi: satu bersisi b (luas b^2) dan satu bersisi a (luas a^2).



persegi besar sama, 4 segitiga sama
⇒ luas sisanya juga sama:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Langkah 5. Persegi besarnya sama, empat segitiganya sama, jadi luas bagian kosong pun harus sama: $a^2 + b^2 = c^2$. Terbukti, tanpa satu pun rumus rumit!

▼ Bukti dengan aljabar (untuk yang suka hitungan)

Luas persegi besar dapat dihitung dengan dua cara. Pertama, sisinya $a + b$, jadi luasnya $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Kedua, persegi itu terdiri atas persegi miring c^2 dan empat segitiga yang masing-masing luasnya $\frac{1}{2}ab$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab \implies a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \implies a^2 + b^2 = c^2.$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Kuadratkan kedua kaki, jumlahkan, lalu tarik akarnya. Itulah panjang sisi miring.

a

Kaki a satuan

b

Kaki b satuan

c

Hipotenusa satuan

HIPOTENUSA

5

satuan



semua sisi bulat: tripel Pythagoras!

Kaki **3** dan **4**: kuadratnya **9** dan **16**, jumlahnya **25**. Akar dari **25** adalah **5**. Perhatikan: hipotenusa selalu lebih panjang daripada kaki mana pun, tetapi lebih pendek daripada $a + b = 7$.

Cek satuan: Satuan sisi miring sama dengan satuan kaki-kakinya (cm tetap cm, m tetap m).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PYTHAGORAS](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-pythagoras)

LAB MINI Persegi di tiap sisi: tuang airnya!

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

a^2 9	b^2 16	$a^2 + b^2$ 25	sisi miring c 5	Air menuang... 37%
------------	-------------	-------------------	----------------------	-----------------------

Seret titik ungu untuk mengubah kaki a dan b . Lalu tekan ► **Jalankan**: air dari dua persegi kecil dituang ke persegi besar. Apakah selalu pas, tidak tumpah dan tidak kurang?

CONTOH Tangga bersandar di tembok

Kaki tangga diletakkan 3 m dari tembok. Ujung atasnya menyentuh tembok setinggi 4 m. Berapa panjang tangga itu?

- 1 Tembok, lantai, dan tangga membentuk segitiga siku-siku. Tangga adalah hipotenusanya, karena berhadapan dengan sudut siku-siku di kaki tembok.
- 2 $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
- 3 $c = \sqrt{25} = 5$.

Panjang tangga 5 m. Inilah tali 3–4–5 Kak Lintang dalam ukuran meter!

Tali layangan sepanjang 50 m terentang lurus. Layangan berada tepat di atas titik yang berjarak 30 m dari Dimas. Berapa tinggi layangan dari tangan Dimas?

- 1 Tali adalah hipotenusa ($c = 50$), jarak mendatar adalah satu kaki ($b = 30$), tinggi adalah kaki lainnya (a).
- 2 Susun ulang teorema: $a^2 = c^2 - b^2 = 2500 - 900 = 1600$.
- 3 $a = \sqrt{1600} = 40$.

Tinggi layangan 40 m di atas tangan Dimas. Saat mencari kaki, kurangkan; saat mencari hipotenusa, jumlahkan.



TAMU DARI MASA LALU

Teorema ini memakai nama Pythagoras dari Samos (± 570 – 495 SM), tetapi hubungannya sudah dikenal jauh lebih awal. Lempeng tanah liat Babilonia bernama *Plimpton 322* (± 1800 SM) memuat daftar bilangan yang berkaitan dengan tripel Pythagoras. Kitab *Sulba Sutra* dari India dan kitab *Zhoubi Suanjing* dari Tiongkok (yang menyebutnya teorema *gougu*) juga membahasnya. Yang istimewa dari tradisi Yunani adalah upaya **membuktikan** bahwa teorema ini selalu benar, bukan hanya mencobanya pada beberapa contoh.

18.3 Tripel Pythagoras: angka-angka yang "pas"

Tiga bilangan asli a, b, c yang memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$ disebut **tripel Pythagoras**. Tripel ini sangat disukai pembuat soal karena hasil akarnya bulat. Hafalkan beberapa yang paling sering muncul, dan kamu akan menghemat banyak waktu.

Tripel dasar	Cek	Kelipatannya juga tripel
3, 4, 5	$9 + 16 = 25$	6, 8, 10 · 9, 12, 15 · 30, 40, 50
5, 12, 13	$25 + 144 = 169$	10, 24, 26 · 15, 36, 39
8, 15, 17	$64 + 225 = 289$	16, 30, 34
7, 24, 25	$49 + 576 = 625$	14, 48, 50
20, 21, 29	$400 + 441 = 841$	40, 42, 58



TRIK KAK LINTANG

Kalau tiga sisi punya faktor persekutuan, bagi dulu! Segitiga 15-20-25 itu sebenarnya 3-4-5 yang dikali 5. Jadi kalau kakinya 15 dan 20, sisi miringnya pasti 25, tanpa menghitung akar.



ADU CEPAT

Sisi miring kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kenali tripel dasarnya, lalu kalikan. Contoh: 9 dan 12 adalah 3 dan 4 yang dikali 3, jadi $c = 15$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

PABRIK TRIPEL EUCLID

Untuk bilangan asli $m > n$, tiga bilangan berikut selalu membentuk tripel Pythagoras:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2.$$

Cek: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$. Jika $\gcd(m, n) = 1$ dan $m - n$ ganjil, tripelnya **primitif** (tidak punya faktor persekutuan). Karena ada tak hingga banyak pasangan seperti itu, tripel Pythagoras primitif juga ada tak hingga banyaknya. Hebatnya, *setiap* tripel primitif dapat dibuat dengan cara ini.

$$c = m^2 + n^2$$

Pilih dua bilangan m dan n . Sisi miringnya $m^2 + n^2$, sedangkan kakinya $m^2 - n^2$ dan $2mn$.

m Bilangan m

n Bilangan n

c Sisi miring

SISI MIRING

5

✨ tripel primitif

Dengan $m = 2$ dan $n = 1$: kaki $a = 3$, kaki $b = 4$, sisi miring $c = 5$. Cek: $a^2 + b^2 = 25$ dan $c^2 = 25$. Jika muncul '-', berarti m belum lebih besar daripada n .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRIPEL-EUCLID](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-tripel-euclid)

18.4 Kebalikan teorema: lancip, siku-siku, atau tumpul?

Teorema Pythagoras juga bisa dibalik. Kalau tiga sisi memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$, segitiganya **pasti** siku-siku. Itulah sebabnya tali 3–4–5 Kak Lintang bekerja: $3^2 + 4^2 = 5^2$, jadi sudut di antara sisi 3 dan 4 pasti 90° .



KEBALIKAN TEOREMA PYTHAGORAS

Misalkan c adalah sisi **terpanjang** sebuah segitiga dengan sisi a, b, c .

- Jika $a^2 + b^2 = c^2$, segitiga itu **siku-siku**.
- Jika $a^2 + b^2 > c^2$, segitiga itu **lancip** (semua sudut kurang dari 90°).
- Jika $a^2 + b^2 < c^2$, segitiga itu **tumpul** (satu sudut lebih dari 90°).



Tebak Dulu!

Segitiga dengan sisi 5 cm, 6 cm, dan 8 cm termasuk segitiga apa?

Siku-siku, karena $5 + 6 > 8$.

Lancip, karena semua sisinya berbeda.

Tumpul, karena $5^2 + 6^2$ kurang dari 8^2 .

Bukan segitiga sama sekali.

Jawabannya: tumpul. Sisi terpanjang 8, jadi bandingkan $5^2 + 6^2 = 61$ dengan $8^2 = 64$. Karena $61 < 64$, sisi terpanjangnya "terlalu panjang" untuk siku-siku, sehingga sudut di depannya melebar menjadi tumpul. Syarat $5 + 6 > 8$ hanya memastikan ketiga sisi *bisa* membentuk segitiga.

LAB MINI

Penguji sudut: tarik tali sesuka hatimu

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

jumlah kuadrat 2 sisi pendek
100

kuadrat sisi terpanjang
121

sudut terbesar
102,6 °

Jenis
tumpul

Atur panjang tiga sisi. Lihat sudut terbesar berubah warna: **biru** = lancip, **hijau** = tepat 90° , **merah** = tumpul. Bisakah kamu menemukan tiga tripel Pythagoras yang berbeda?



AWAS JEBAKAN

Saat menguji jenis segitiga, yang dikuadratkan dan dibandingkan harus **sisi terpanjang**. Untuk sisi 13, 5, 12, jangan menghitung $13^2 + 5^2$ lalu membandingkannya dengan 12^2 . Urutkan dulu: $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$, jadi siku-siku.

MITOS

"Rumus $a^2 + b^2 = c^2$ berlaku untuk semua segitiga."

MITOS

"Kalau kakinya 3 dan 4, sisi miringnya $3 + 4 = 7$."

FAKTA

Hanya untuk segitiga

siku-siku

. Untuk segitiga lain hubungannya lancip (

$$a^2 + b^2 > c^2$$

) atau tumpul (

$$a^2 + b^2 < c^2$$

). Rumus umumnya adalah aturan kosinus yang akan kamu pelajari di Bab 25.

FAKTA

Sisi miring selalu

lebih pendek

daripada jumlah dua kaki (jalan pintas selalu lebih pendek daripada jalan memutar). Hitung dengan kuadrat:

$$\sqrt{9 + 16} = 5$$

, bukan 7.

MITOS

"Pythagoras sendiri yang pertama kali menemukan rumus ini."

FAKTA

Bangsa Babilonia, India, dan Tiongkok sudah memakai hubungan ini berabad-abad sebelumnya. Pythagoras dan murid-muridnya terkenal karena dianggap ikut

membuktikannya

secara umum.

18.5 Pythagoras di bidang koordinat: jarak dan lingkaran

Di peta digital, posisi dinyatakan dengan koordinat. Untuk mengukur jarak lurus antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, gambarlah segitiga siku-siku dengan kaki mendatar $\Delta x = x_2 - x_1$ dan kaki tegak $\Delta y = y_2 - y_1$. Jaraknya adalah hipotenusa:

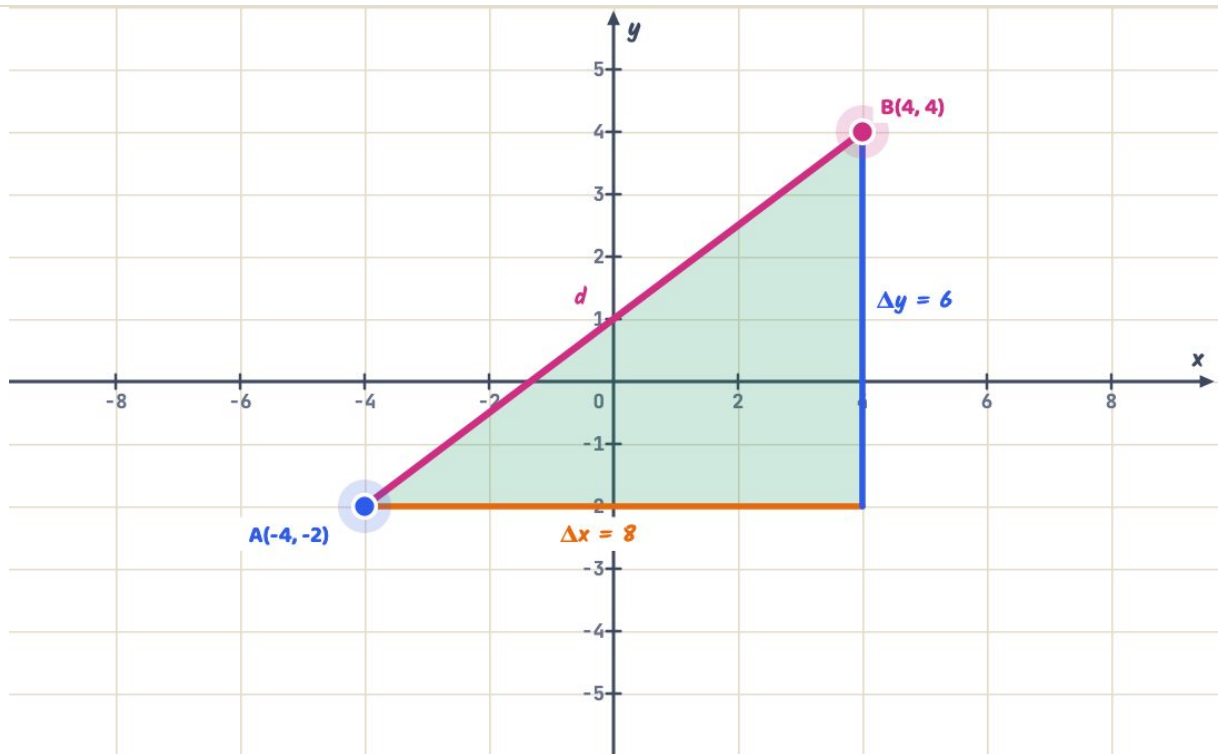
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

GRAFIK HIDUP Jarak dua titik di peta kota

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-18

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} \approx 10$$



✨ jaraknya bulat: ada tripel Pythagoras tersembunyi!

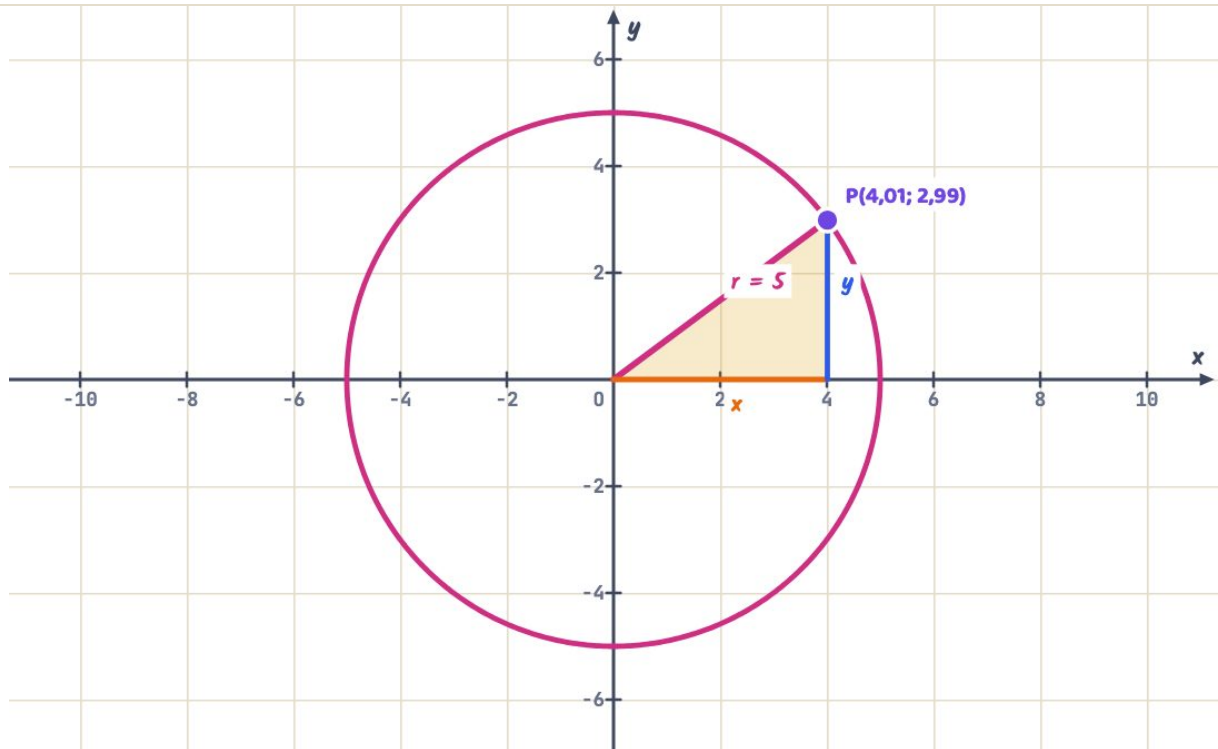
Δx	Δy	Jarak d
8	6	10

Seret titik A dan B (atau geser slider). Kaki hijau selalu mendatar dan tegak, jadi selalu ada sudut siku-siku di pojoknya. Coba buat jarak tepat 10 tanpa menaruh titik di garis lurus yang sama!

Sekarang bayangkan semua titik $P(x, y)$ yang jaraknya **tepat** r dari pusat $O(0, 0)$. Menurut Pythagoras, $x^2 + y^2 = r^2$. Kumpulan semua titik itu membentuk **lingkaran**. Jadi persamaan lingkaran tidak lain adalah Teorema Pythagoras yang berputar!

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(4,01)^2 + (2,99)^2 = 25 = 5^2$$



x

4,01

y

2,99

 $x^2 + y^2$

25

Tekan ► **Jalankan**: titik P berkeliling, tetapi $x^2 + y^2$ tidak pernah berubah. Ubah r dan perhatikan hasilnya selalu r^2 .

Di peta kota bergrid (satuan km), gudang berada di $A(-2, 1)$ dan rumah pelanggan di $B(4, 9)$. Ojek harus mengikuti jalan (mendatar lalu tegak), sedangkan drone terbang lurus. Berapa km drone lebih hemat?

1 Jarak lewat jalan: $|\Delta x| + |\Delta y| = |4 - (-2)| + |9 - 1| = 6 + 8 = 14$ km.

2 Jarak lurus: $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ km.

3 Selisih: $14 - 10 = 4$ km.

Drone menempuh 10 km, 4 km lebih pendek daripada rute jalan 14 km.

18.6 Pythagoras tiga dimensi dan di sekitarmu

Berapa panjang tongkat terpanjang yang muat di dalam kardus? Tongkat itu terbentang dari pojok bawah ke pojok atas yang berseberangan: **diagonal ruang**. Pakai Pythagoras **dua kali**: pertama untuk diagonal alas $\sqrt{p^2 + l^2}$, lalu sekali lagi bersama tinggi t :

$$d = \sqrt{\left(\sqrt{p^2 + l^2}\right)^2 + t^2} = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

$$d = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Tongkat terpanjang yang muat di kotak = akar dari jumlah kuadrat panjang, lebar, dan tinggi.



DIAGONAL RUANG

130

cm

Kardus $120 \times 30 \times 40$ cm: diagonal alasnya **123,693** cm, dan diagonal ruangnya **130** cm. Payung lipat 125 cm **muat** di dalamnya.

Cek satuan: Semua rusuk memakai satuan yang sama (cm), jadi diagonalnya juga dalam cm.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DIAGONAL-RUANG

Layar TV 32 inci punya perbandingan lebar : tinggi = 16 : 9. Berapa lebar layarnya dalam cm? (1 inci = 2,54 cm)

1 Misalkan lebar $16k$ dan tinggi $9k$. Diagonalnya $\sqrt{(16k)^2 + (9k)^2} = k\sqrt{256 + 81} = k\sqrt{337}$.

2 Diagonal = 32 inci, jadi $k = \frac{32}{\sqrt{337}} \approx \frac{32}{18,36} \approx 1,743$.

3 Lebar = $16k \approx 27,9$ inci $\approx 27,9 \times 2,54 \approx 70,8$ cm. Tinggi = $9k \approx 15,7$ inci $\approx 39,8$ cm.

Lebar layar $\pm 70,8$ cm dan tingginya $\pm 39,8$ cm. Sekarang kamu tahu mengapa TV "32 inci" tidak selebar 32 inci!



MATEMATIKA NUSANTARA

Tukang bangunan di banyak daerah di Indonesia memeriksa pojok fondasi dengan cara **60-80-100**: ukur 60 cm di satu sisi dan 80 cm di sisi lain, lalu pastikan jarak kedua ujungnya tepat 100 cm. Itu tripel 3-4-5 yang dikalikan 20! Para petani juga memakai patok dan tali dengan cara serupa saat membagi petak sawah agar berbentuk persegi panjang.



Tangga mobil pemadam

Petugas menghitung panjang tangga yang perlu dijulurkan dari jarak truk ke gedung dan tinggi jendela yang dituju.



Ukuran layar

TV, laptop, dan ponsel dijual berdasarkan diagonal layar, yaitu hipotenusa dari lebar dan tingginya.



GPS & peta digital

Aplikasi peta menghitung jarak lurus antarlokasi dengan rumus jarak, versi koordinat dari Pythagoras.



Tenda pramuka

Panjang tali pancang dihitung dari tinggi tiang dan jarak patok ke kaki tiang.



Rangka atap rumah

Panjang kaso miring ditentukan dari setengah lebar rumah dan tinggi bubungan atap.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

SEMUT DI DALAM KARDUS

Seekor semut di pojok lantai kardus $8 \times 6 \times 3$ ingin ke pojok langit-langit yang berseberangan, tetapi harus berjalan di permukaan. Rahasiannya: **buka kardus menjadi jaring-jaring**, lalu tarik garis lurus. Ada tiga cara membuka yang berbeda, menghasilkan $\sqrt{(8+6)^2 + 3^2} = \sqrt{205}$, $\sqrt{(8+3)^2 + 6^2} = \sqrt{157}$, dan $\sqrt{(6+3)^2 + 8^2} = \sqrt{145}$. Yang terpendek $\sqrt{145} \approx 12,04$, lebih panjang daripada diagonal ruang $\sqrt{109} \approx 10,44$ yang hanya bisa ditempuh nyamuk yang terbang. Trik "buka jaring-jaring" ini sering muncul di soal olimpiade.



Cek Cepat

Pada segitiga siku-siku dengan kaki 9 dan 12, panjang hipotenusanya adalah...

21

15

$\sqrt{63}$

108

Manakah yang bukan tripel Pythagoras?

6, 8, 10

5, 12, 13

8, 15, 17

4, 5, 6

Jarak antara titik $A(1, 1)$ dan $B(4, 5)$ adalah...

5

7

25

$\sqrt{7}$

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A

Tantangan Rumah: detektif pojok siku-siku

Bahan: meteran jahit atau tali + penggaris, pensil, buku catatan.

1. Pilih sebuah pojok: pojok meja, pojok kamar di lantai, atau pojok ubin.
2. Dari titik pojok, ukur 30 cm di sepanjang sisi pertama dan beri tanda.
3. Dari titik pojok yang sama, ukur 40 cm di sepanjang sisi kedua dan beri tanda.
4. Ukur jarak lurus antara kedua tanda. Kalau hasilnya tepat 50 cm, pojok itu siku-siku sempurna.
5. Periksa minimal tiga pojok berbeda dan catat hasilnya.

Pertanyaan: Pojok mana yang paling "tidak siku"? Jika jaraknya lebih dari 50 cm, apakah sudutnya lebih besar atau lebih kecil daripada 90° ? Jelaskan dengan kebalikan Teorema Pythagoras.

RINGKASAN KILAT Bab 18 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- mengenali **hipotenusa** dan kaki-kaki segitiga siku-siku
- menjelaskan **bukti visual** Teorema Pythagoras dan memakainya untuk menghitung sisi yang belum diketahui
- mengenali dan membuat **tripel Pythagoras**
- memakai **kebalikan teorema** untuk menentukan apakah segitiga lancip, siku-siku, atau tumpul
- menghitung **jarak dua titik** di bidang koordinat dan **diagonal ruang** sebuah kotak

Istilah kunci

sudut siku-siku

segitiga siku-siku

hipotenusa

kaki

tripel Pythagoras

lingkaran

diagonal ruang

Rumus penting

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema Pythagoras. Kuadratkan kedua kaki, jumlahkan, lalu tarik akarnya. Itulah panjang sisi miring.

$$c = m^2 + n^2$$

Pabrik tripel Euclid. Pilih dua bilangan m dan n . Sisi miringnya $m^2 + n^2$, sedangkan kakinya $m^2 - n^2$ dan $2mn$.

$$d = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Diagonal ruang kotak. Tongkat terpanjang yang muat di kotak = akar dari jumlah kuadrat panjang, lebar, dan tinggi.

Jangan sampai terjebak

- Hipotenusa tidak selalu digambar miring atau di sebelah kanan.
- Saat menguji jenis segitiga, yang dikuadratkan dan dibandingkan harus sisi terpanjang.

Teka-teki untuk Bab 19

Pak Darto punya sawah berbentuk segi empat tak beraturan dengan sisi 30 m, 40 m, 48 m, dan 14 m. Sebuah pematang lurus sepanjang 50 m menghubungkan dua pojok yang berseberangan, membelah sawah menjadi segitiga 30–40–50 dan segitiga 14–48–50. Bisakah kamu menghitung luas sawahnya tanpa alat ukur luas apa pun?

▼ Intip petunjuk

Cek kedua segitiga dengan kebalikan Teorema Pythagoras: apakah $30^2 + 40^2 = 50^2$? Apakah $14^2 + 48^2 = 50^2$? Kalau keduanya siku-siku, luas masing-masing = $\frac{1}{2} \times \text{kaki} \times \text{kaki}$. Bab 19 membahas luas bangun datar sampai rumus Heron untuk segitiga yang tidak siku-siku!

19

Keliling & Luas: Potong, Geser, Tempel!

Berapa meter pagar untuk mengelilingi kebun? Berapa keramik untuk menutup lantai? Dengan gunting imajiner, hampir setiap bangun datar bisa diubah menjadi persegi panjang, dan rahasia luasnya pun terbongkar.

Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan **keliling** dan **luas** beserta satuannya (cm dan cm^2);
- menurunkan rumus luas persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang dengan **potong-geser-tempel**;
- menghitung keliling dan luas **bangun gabungan** dengan cara memotong atau menambal;
- memakai **rumus Heron** untuk segitiga yang hanya diketahui ketiga sisinya;
- menghitung luas poligon di kertas berpetak dengan **teorema Pick**.

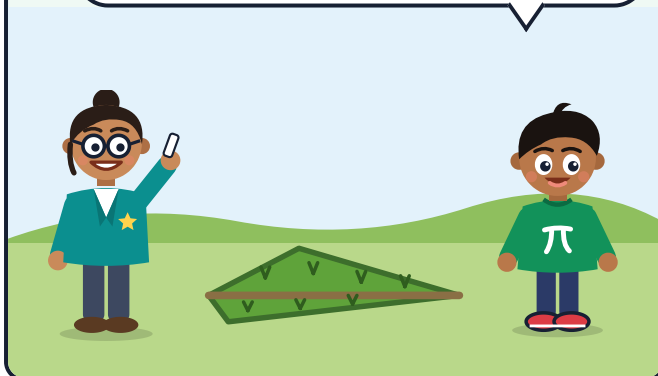
SAWAH MENCONG PAK DARTO

KOMIK • 4 PANEL

Minggu pagi, di sawah Pak Darto

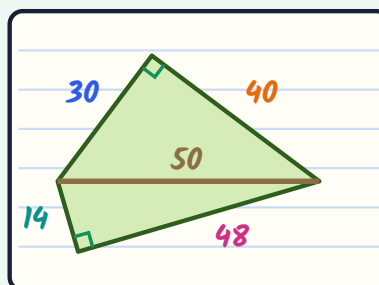
DIMAS

Kak, sawah Pak Darto bentuknya mencong begini. Mana bisa dihitung luasnya?



AYU

Pematang lurus 50 m membelahnya jadi dua segitiga: 30-40-50 dan 14-48-50. Dua-duanya tripel Pythagoras, berarti siku-siku!



KAK LINTANG

Segitiga siku-siku itu separuh persegi panjang. Jadi $\frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ dan $\frac{1}{2} \times 14 \times 48 = 336$.



$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 &= 600 \\ \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 48 &= 336 \\ \hline \text{jumlah } 936 \text{ m}^2\end{aligned}$$

CLING!**Dari balik rumpun padi...****ANCIL**

Totalnya 936 m^2 , hampir sepersepuluh hektare! Jurusnya: potong bentuk yang sulit menjadi bentuk-bentuk yang mudah.

DIMAS

Kalau sawahnya lebih mencong lagi, bagaimana?

**Tebak Dulu!**

Dimas dan Ayu masing-masing punya 24 m kawat untuk memagari kandang ayam berbentuk persegi panjang. Dimas membuat kandang $11 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, sedangkan Ayu membuat kandang $6 \text{ m} \times 6 \text{ m}$. Kandang siapa yang lebih luas?

Sama luas, karena panjang kawatnya sama.

Kandang Dimas, karena lebih panjang.

Kandang Ayu.

Tidak bisa ditentukan tanpa mengetahui harga kawatnya.

Jawabannya: kandang Ayu. Kelilingnya memang sama-sama 24 m, tetapi luas kandang Dimas hanya $11 \times 1 = 11 \text{ m}^2$, sedangkan kandang Ayu $6 \times 6 = 36 \text{ m}^2$, lebih dari tiga kali lipat! Keliling yang sama *tidak* menjamin luas yang sama. Di subbab 19.2 kamu akan menyeret pojok kandang sendiri dan menemukan bentuk juaranya.

19.1 Keliling dan luas: dua ukuran yang berbeda

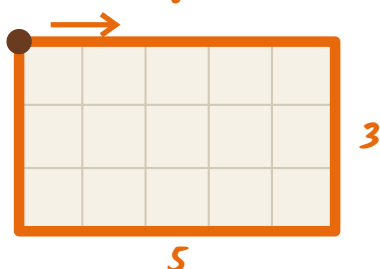
Bayangkan seekor semut berjalan menyusuri tepi sebuah ubin sampai kembali ke titik awal. Panjang jalan yang ditempuhnya disebut **keliling**. Sekarang bayangkan seluruh permukaan ubin itu dicat. Banyaknya permukaan yang tertutup cat disebut **luas**. Keliling mengukur **pinggiran**, luas mengukur **isi**.



DEFINISI

Keliling bangun datar adalah panjang seluruh batas (tepi) bangun itu. Satuannya satuan panjang: cm, m, km. **Luas** adalah banyaknya **persegi satuan** yang dapat menutupi daerah bangun itu tanpa celah dan tanpa tumpang tindih. Satuannya satuan persegi: cm^2 , m^2 , km^2 . Satu cm^2 adalah luas sebuah persegi bersisi 1 cm.

KELILING = jalan semut



$$5 + 3 + 5 + 3 = 16 \text{ satuan}$$

satuan panjang: cm, m, km

LUAS = ubin penutup

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

$$3 \text{ baris} \times 5 \text{ kolom} = 15 \text{ petak}$$

satuan persegi: cm^2 , m^2 , km^2

Bangun yang sama punya dua ukuran berbeda: keliling 16 satuan (panjang garis jingga) dan luas 15 satuan persegi (banyak petak hijau).

Bahasa sederhana • Gampangnya: **keliling = pagar**, **luas = ubin**. Kalau kamu ingin tahu berapa meter tali untuk mengelilingi lapangan, hitunglah kelilingnya. Kalau ingin tahu berapa banyak rumput untuk menutupi lapangan, hitunglah luasnya.

Luas

12 petak

Keliling

14 sisi

Target

luas 12, keliling 20

Keadaan

Luas sudah pas ✓

Klik atau seret di kisi untuk menanam dan mencabut petak. Mulailah dari kebun 4×3 (luas 12, keliling 14). Bisakah kamu membuat kebun berluas 12 dengan keliling 20? Dengan keliling 26? Bentuk seperti apa yang kelilingnya paling kecil? Tekan  **Target baru** untuk tantangan lain.

**AWAS JEBAKAN**

Keliling bersatuan panjang (cm), sedangkan luas bersatuan persegi (cm^2), jadi jangan sampai tertukar. Hati-hati juga saat mengubah satuan luas: $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, tetapi $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} = 10.000 \text{ cm}^2$, bukan 100 cm^2 .

**TANGGA SATUAN LUAS**

Pada satuan panjang, setiap turun satu anak tangga ($\text{km} \rightarrow \text{hm} \rightarrow \text{dam} \rightarrow \text{m} \rightarrow \text{dm} \rightarrow \text{cm} \rightarrow \text{mm}$) dikali 10. Pada satuan luas, setiap turun satu anak tangga dikali **100**, karena panjang dan lebarnya sama-sama dikali 10. Petani memakai **hektare**: $1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10.000 \text{ m}^2$, hampir satu setengah kali luas lapangan sepak bola. Ada juga **are**: $1 \text{ are} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$.

19.2 Persegi panjang dan persegi

Mengapa luas persegi panjang sama dengan panjang $\times$ lebar? Tutupi persegi panjang $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ dengan persegi satuan: ada 3 baris, dan tiap baris berisi 5 persegi. Jadi luasnya $3 \times 5 = 15 \text{ cm}^2$. Rumus luas hanyalah cara cepat **menghitung ubin** tanpa menghitungnya satu per satu.



RUMUS PERSEGI PANJANG DAN PERSEGI

Untuk persegi panjang dengan panjang p dan lebar l , serta persegi dengan sisi s :

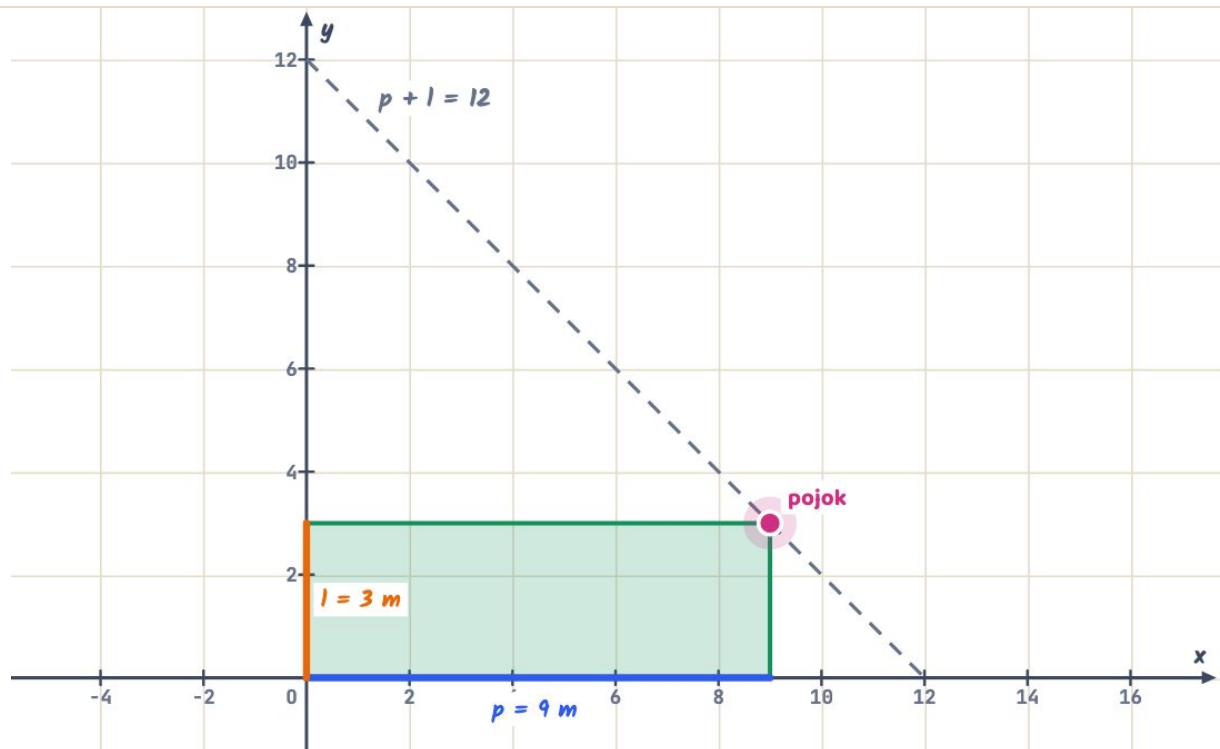
$$\text{Persegi panjang: } K = 2(p + l), \quad L = p \times l$$

$$\text{Persegi: } K = 4s, \quad L = s^2$$

Persegi adalah persegi panjang istimewa dengan $p = l = s$. Itulah sebabnya s^2 dibaca "s kuadrat": *quadratus* dalam bahasa Latin berarti persegi!

$$K = 2(p + l) = 24 \implies l = 12 - p$$

$$L = p \times l = 9 \times 3 = 27 \text{ m}^2$$



Panjang

9 m

Lebar

3 m

Keliling

24 m

Luas

27 m²

Seret pojok kandang (titik magenta) di sepanjang garis putus-putus. Semua pojok di garis itu memberi keliling tepat 24 m. Di mana luasnya paling besar? Apa bentuk kandangnya saat itu?



LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA PERSEGI SELALU JUARA?

Misalkan keliling K tetap, jadi $p + l = \frac{K}{2}$. Perhatikan identitas

$$p \cdot l = \left(\frac{p+l}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-l}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{16} - \left(\frac{p-l}{2}\right)^2.$$

Suku pertama tetap, sedangkan suku kedua tidak pernah negatif. Luas terbesar terjadi saat suku kedua nol, yaitu saat $p = l$: **persegi**. Untuk pagar 24 m, luas terbesarnya $\frac{24^2}{16} = 36 \text{ m}^2$. Jurus "tulis sebagai kuadrat dikurangi sesuatu yang tak negatif" ini adalah senjata andalan olimpiade.

CONTOH**Keramik kamar Ayu**

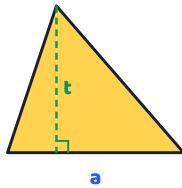
Lantai kamar Ayu berukuran $4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ akan dipasang keramik persegi bersisi 40 cm . Satu dus berisi 6 keramik. Berapa keramik dan berapa dus yang perlu dibeli?

- 1 Samakan satuan dulu: $40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$. Luas lantai $= 4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$, luas satu keramik $= 0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ m}^2$.
- 2 Banyak keramik $= 12 : 0,16 = 75$. Cek: sepanjang 4 m muat 10 keramik dan sepanjang 3 m muat 7,5 keramik, jadi $10 \times 7,5 = 75$ (baris terakhir dipotong setengah).
- 3 Banyak dus $= 75 : 6 = 12,5$. Dus tidak bisa dibeli setengah, jadi dibulatkan **ke atas** menjadi 13 dus.

Perlu 75 keramik, yaitu 13 dus. Sisanya 3 keramik bisa disimpan sebagai cadangan kalau ada yang retak.

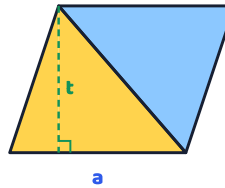
19.3 Segitiga: separuh jajargenjang

Gunting selembar kertas persegi panjang menurut diagonalnya. Kamu mendapat dua segitiga siku-siku yang kembar, jadi luas segitiga siku-siku tepat setengah luas persegi panjang. Bagaimana dengan segitiga yang tidak siku-siku? Ikuti animasi ini.



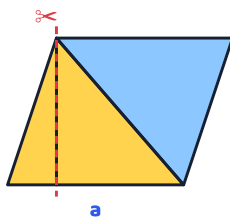
Segitiga: alas a , tinggi t .
Tinggi = jarak tegak lurus dari puncak ke alas.

Langkah 1. Ini segitiga dengan alas a dan tinggi t . Tinggi selalu diukur tegak lurus dari puncak ke garis alas.



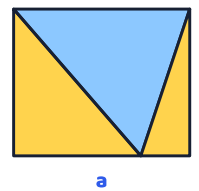
Buat kembarannya,
putar 180° pada titik tengah sisi kanan.
Jadilah jajargenjang!

Langkah 2. Buat segitiga kembar (biru), lalu putar 180° terhadap titik tengah sisi kanannya. Dua segitiga kembar itu menempel menjadi **jajargenjang** beralas a dan bertinggi t .



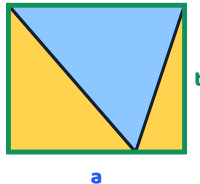
Gunting di sepanjang
garis tinggi (merah).

Langkah 3. Gunting jajargenjang di sepanjang garis tinggi. Terpotonglah sebuah segitiga siku-siku kecil di sebelah kiri.



Geser potongan ke kanan
sejauh a . Jadilah
persegi panjang $a \times t$!

Langkah 4. Geser potongan itu ke kanan sejauh a . Tidak ada kertas yang hilang, dan jajargenjang berubah menjadi persegi panjang $a \times t$.



persegi panjang = 2 segitiga
 $a \times t = 2 \times L$
 $L = \frac{1}{2} \times a \times t$

Langkah 5. Persegi panjang itu terdiri atas **dua** segitiga kembar, jadi satu segitiga luasnya $\frac{1}{2} \times a \times t$. Sekaligus terbukti: luas jajargenjang = $a \times t$.



LUAS DAN KELILING SEGITIGA

Untuk segitiga dengan sisi a, b, c , alas a , dan tinggi t (jarak tegak lurus dari puncak ke garis alas):

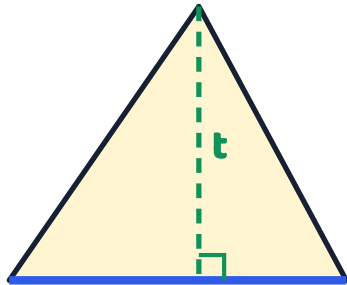
$$L = \frac{1}{2} \times a \times t, \quad K = a + b + c$$

Sisi mana pun boleh dijadikan alas, asalkan tingginya diukur tegak lurus terhadap sisi itu.

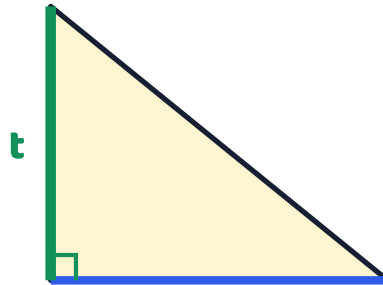
▼ Bukti lain: belah dengan garis tinggi

Jika kaki garis tinggi jatuh di dalam alas, garis tinggi membelah segitiga menjadi dua segitiga siku-siku beralas x dan $a - x$. Masing-masing separuh persegi panjang, jadi $L = \frac{1}{2}xt + \frac{1}{2}(a - x)t = \frac{1}{2}at$.

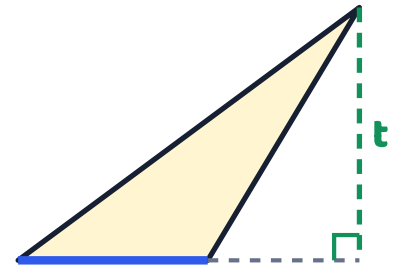
Jika kaki garis tinggi jatuh di luar alas (segitiga tumpul), segitiga itu adalah **selisih** dua segitiga siku-siku:
 $L = \frac{1}{2}(a + y)t - \frac{1}{2}yt = \frac{1}{2}at$. Rumusnya tetap sama!



lancip: tinggi di dalam



siku-siku: tinggi = sisi tegak



tumpul: tinggi di luar

Alas digambar biru dan tinggi hijau. Pada segitiga tumpul, garis tinggi jatuh pada perpanjangan alas (garis putus-putus abu-abu).

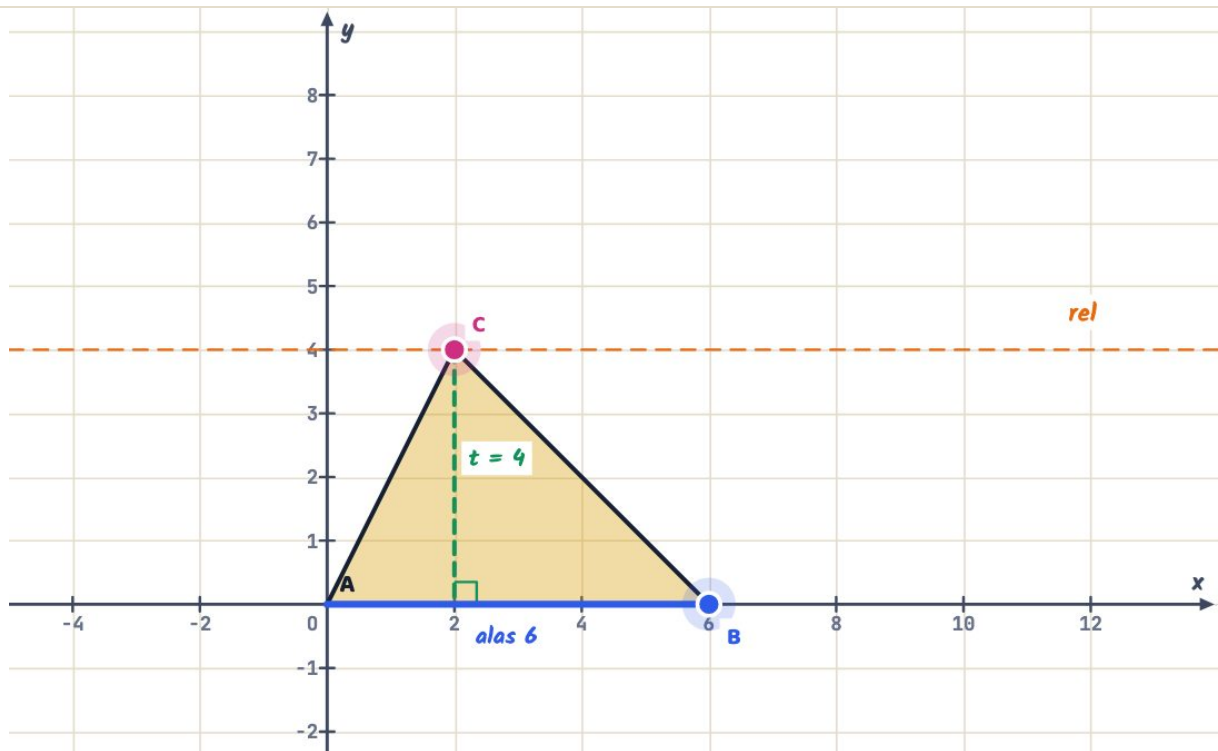


AWAS JEBAKAN

Tinggi segitiga harus tegak lurus terhadap alas, bukan sisi miringnya. Pada segitiga tumpul, garis tinggi bahkan jatuh di **luar** segitiga, pada perpanjangan alas. Rumus $\frac{1}{2} \times a \times t$ tetap berlaku.

$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



Alas
6

Tinggi
4

Luas
12

Keliling
16, 13

Seret puncak C ke kiri dan ke kanan di sepanjang rel jingga. Kelinginya berubah-ubah, tetapi luasnya tidak bergeming! Mengapa? Lalu seret C ke atas atau ubah titik B: kapan luasnya berubah?

Ingat komik di awal bab: sawah Pak Darto bersisi 30 m, 40 m, 48 m, dan 14 m, dengan pematang lurus 50 m yang menghubungkan dua pojok berseberangan. Hitung luas dan keliling sawah itu, lalu perkirakan hasil panennya jika setiap m^2 sawah menghasilkan sekitar 0,6 kg gabah.

- 1 Uji segitiga pertama dengan kebalikan Teorema Pythagoras (Bab 18): $30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 = 50^2$. Siku-siku!
- 2 Segitiga kedua: $14^2 + 48^2 = 196 + 2304 = 2500 = 50^2$. Siku-siku juga!
- 3 Pada segitiga siku-siku, kedua kaki saling tegak lurus, jadi satu kaki menjadi alas dan kaki lainnya menjadi tinggi: $L = \frac{1}{2} \times 30 \times 40 + \frac{1}{2} \times 14 \times 48 = 600 + 336 = 936 \text{ m}^2$.
- 4 Keliling = $30 + 40 + 48 + 14 = 132 \text{ m}$. Pematang 50 m tidak dihitung karena berada di dalam sawah.
- 5 Panen $\approx 936 \times 0,6 \approx 562 \text{ kg}$ gabah.

Luas sawah 936 m^2 (hampir 0,1 hektare), kelilingnya 132 m, dan panennya sekitar 5,6 kuintal gabah.

19.4 Jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang

Keempat bangun segi empat ini punya satu rahasia: dengan sedikit potong, geser, dan tempel, mereka bisa diubah menjadi persegi panjang. Luasnya tidak berubah, karena tidak ada kertas yang hilang atau bertambah.



Tebak Dulu!

Bingkai foto dibuat dari empat bilah kayu (dua bilah 8 cm dan dua bilah 6 cm) yang disambung dengan paku keling sehingga pojoknya bisa bergerak. Mula-mula bingkai berbentuk persegi panjang. Kalau bingkai didorong makin miring, apa yang terjadi?

Keliling dan luasnya tetap.

Kelilingnya tetap, luasnya makin kecil.

Kelilingnya tetap, luasnya makin besar.

Keliling dan luasnya sama-sama makin kecil.

Jawabannya: keliling tetap, luas makin kecil. Panjang keempat bilah tidak berubah, jadi kelilingnya tetap 28 cm. Tetapi luas jajargenjang = alas $\times$ **tinggi**, dan tinggi bingkai makin rendah saat didorong miring. Kalau didorong sampai gepeng, luasnya hampir nol! Itulah sebabnya rangka bangunan diberi batang silang agar tidak "melipat".

LAB MINI

Mesin potong-geser-tempel

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19

Luas awal

24 satuan²

Luas akhir

—

Keadaan



memotong...

Pilih bentuknya, lalu tekan ► **Jalankan**. Gunting memotong di sepanjang garis merah, lalu potongan merah muda digeser atau diputar 180°. Seret titik ungu untuk memiringkan bangun. Hitunglah kotak satuannya: apakah luasnya berubah?



RUMUS LUAS SEGI EMPAT ISTIMEWA

- **Jajargenjang** beralas a dan bertinggi t : $L = a \times t$.
- **Trapesium** dengan sisi sejajar a dan b serta tinggi t : $L = \frac{1}{2} \times (a + b) \times t$.
- **Belah ketupat** dan **layang-layang** dengan diagonal d_1 dan d_2 : $L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$.

Kelilingnya selalu jumlah keempat sisi. Untuk jajargenjang dan layang-layang bersisi a dan b : $K = 2(a + b)$; untuk belah ketupat bersisi s : $K = 4s$.

▼ Bukti rumus trapesium dengan trapesium kembar

Buat trapesium kembar, putar 180° , lalu tempelkan pada salah satu kakinya. Sisi a bersambung dengan sisi b milik kembarannya, sehingga terbentuk jajargenjang beralas $a + b$ dan bertinggi t . Luas jajargenjang itu $(a + b) \times t$, dan isinya dua trapesium. Jadi satu trapesium luasnya $\frac{1}{2}(a + b)t$. Lab Mini di atas memakai cara lain: memotong di setengah tinggi, lalu memutar bagian atasnya. Dua cara, satu rumus!



RUMUS HIDUP Luas trapesium

$$L = \frac{1}{2} \times (a + b) \times t$$

Jumlahkan kedua sisi sejajar, kalikan dengan tinggi, lalu ambil separuhnya. Sama saja dengan rata-rata kedua sisi sejajar dikali tinggi.

a Sisi sejajar bawah m

b Sisi sejajar atas m

t Tinggi m

L Luas m²

LUAS

66

m²

Rata-rata sisi sejajar $(14 + 8) : 2 = 11$ m, dikali tinggi **6** m, hasilnya **66** m². Geser b ke 0: trapesium berubah menjadi segitiga. Samakan b dengan a: trapesium menjadi jajargenjang!

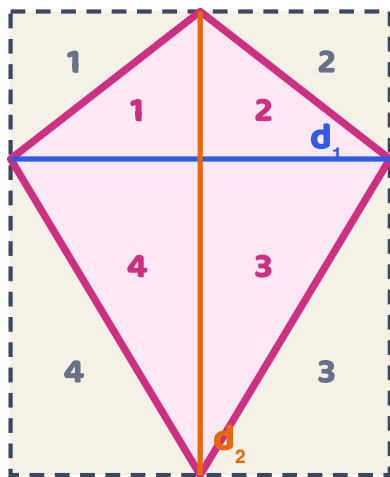
Cek satuan: $m + m = m$, lalu $m \times m = m^2$. Satuan luas selalu satuan panjang yang dikuadratkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRAPESIUM-LUAS

**ADU CEPAT****Luas trapesium kilat**ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-19**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

Rata-ratakan dua sisi sejajar, lalu kalikan tinggi. Contoh: 6 dan 10 rata-ratanya 8; dengan tinggi 5, luasnya 40.

Bagaimana dengan layang-layang? Gambarlah persegi panjang yang membungkusnya, dengan sisi-sisi sejajar kedua diagonal. Kedua diagonal membagi persegi panjang itu menjadi empat kotak kecil, dan setiap sisi layang-layang membelah satu kotak menjadi dua segitiga kembar: satu di dalam, satu di luar.



Persegi panjang pembungkus: $d_1 \times d_2$.

Tiap kotak kecil dibelah dua oleh sisi layang-layang: bagian dalam (merah muda) = bagian luar (abu-abu).

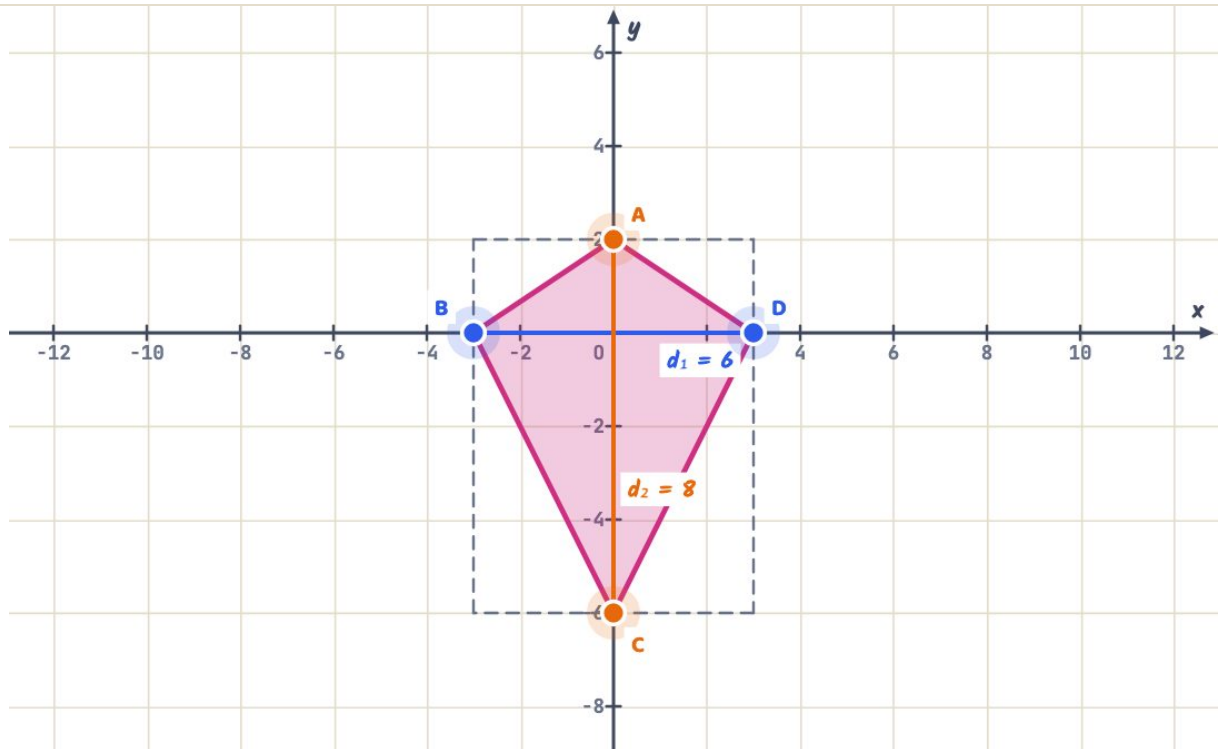
$$L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

Berlaku juga untuk belah ketupat dan persegi.

Pasangan bernomor sama adalah segitiga kembar. Jadi layang-layang tepat separuh persegi panjang pembungkusnya.

$$L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$L = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$



layang-layang: satu diagonal membagi dua diagonal lainnya

d₁

6

d₂

8

Luas layangan

24

Luas pembungkus

48

Seret keempat ujung layangan. Luasnya selalu tepat separuh persegi panjang putus-putus. Buatlah belah ketupat, lalu persegi. Coba juga bentuk "miring" yang bukan layang-layang: apakah rumusnya masih benar?

Dimas membuat layangan dari dua bilah bambu yang bersilangan tegak lurus. Bilah mendatar sepanjang 60 cm diikat tepat di tengahnya pada bilah tegak sepanjang 80 cm, di titik yang berjarak 20 cm dari ujung atas. Berapa luas kertas minyak yang diperlukan, dan berapa panjang benang hias untuk menyusuri tepinya?

1 Bilah bambu adalah diagonal: $d_1 = 60$ cm dan $d_2 = 80$ cm. Luas = $\frac{1}{2} \times 60 \times 80 = 2400$ cm².

2 Sisi atas: segitiga siku-siku berkaki 30 (setengah bilah mendatar) dan 20, jadi panjangnya $\sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300} \approx 36,06$ cm.

3 Sisi bawah: kakinya 30 dan $80 - 20 = 60$, jadi panjangnya $\sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{4500} \approx 67,08$ cm.

4 Keliling = $2 \times (36,06 + 67,08) \approx 206,3$ cm.

Kertas minyaknya 2.400 cm² (ditambah sedikit lebih untuk dilem), dan benang hiasnya sekitar 2,1 m.

Bangun	Keliling	Luas	Asal-usul rumus luas
Persegi panjang	$2(p + l)$	$p \times l$	baris $\times$ kolom petak satuan
Persegi	$4s$	s^2	persegi panjang dengan $p = l$
Segitiga	$a + b + c$	$\frac{1}{2} \times a \times t$	separuh jajargenjang
Jajargenjang	$2(a + b)$	$a \times t$	digeser menjadi persegi panjang
Trapesium	jumlah 4 sisi	$\frac{1}{2}(a + b) \times t$	dua kembar menjadi jajargenjang
Belah ketupat	$4s$	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$	separuh persegi panjang pembungkus
Layang-layang	$2(a + b)$	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$	separuh persegi panjang pembungkus



TRIK KAK LINTANG

Cukup ingat **satu** rumus: persegi panjang $p \times l$. Sisanya turunan: jajargenjang = persegi panjang yang digeser ($a \times t$); segitiga = separuh jajargenjang ($\frac{1}{2}at$); trapesium = "jajargenjang rata-rata" ($\frac{a+b}{2} \times t$); belah ketupat dan layang-layang = separuh persegi panjang pembungkusnya ($\frac{1}{2}d_1d_2$). Lupa rumus? Gambar, potong, geser!

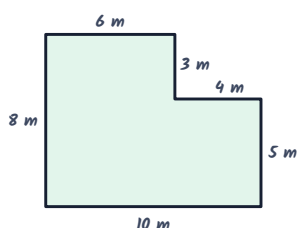


AWAS JEBAKAN

Luas jajargenjang memakai tinggi, bukan sisi miring. Jajargenjang beralas 10 cm dengan sisi miring 8 cm dan tinggi 6 cm luasnya $10 \times 6 = 60 \text{ cm}^2$, bukan $10 \times 8 = 80 \text{ cm}^2$. Hal yang sama berlaku untuk trapesium: kakinya yang miring tidak dipakai untuk luas.

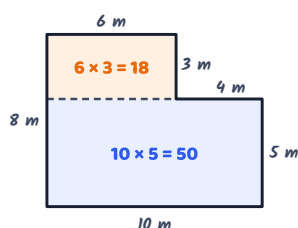
19.5 Bangun gabungan dan daerah diarsir

Denah rumah, lapangan, dan taman jarang berbentuk sederhana. Kuncinya ada dua jurus: **potong** bangun menjadi bagian-bagian sederhana lalu jumlahkan, atau **tambal** menjadi bangun sederhana lalu kurangi tambahannya.



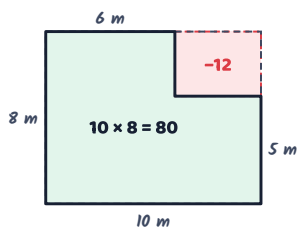
Lantai rumah berbentuk L.
Berapa luas dan kelilingnya?

Langkah 1. Denah lantai berbentuk huruf L dan semua pojoknya siku-siku. Tidak ada rumus "luas huruf L". Lalu bagaimana?



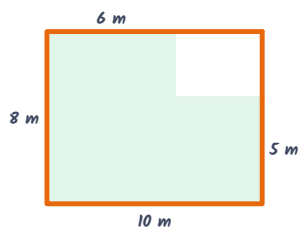
Cara 1 • Potong:
 $50 + 18 = 68 \text{ m}^2$

Langkah 2. Cara potong: belah menjadi dua persegi panjang, 10×5 dan 6×3 . Luasnya $50 + 18 = 68 \text{ m}^2$.



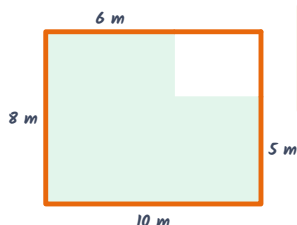
Cara 2 • Tambal, lalu kurangi:
 $80 - 12 = 68 \text{ m}^2$

Langkah 3. Cara tambal: lengkapi menjadi persegi panjang $10 \times 8 = 80 \text{ m}^2$, lalu kurangi tambahannya $4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$. Hasilnya sama: 68 m^2 .



Keliling: geser sisi lekukan ke luar. Jadilah tepi persegi panjang 10×8 :
 $K = 2 \times (10 + 8) = 36 \text{ m}$

Langkah 4. Trik keliling: geser kedua sisi lekukan ke luar. Panjangnya tidak berubah, dan tepinya kini persis tepi persegi panjang 10×8 . Jadi $K = 2 \times (10 + 8) = 36 \text{ m}$.



Luas: potong atau tambal, hasilnya sama-sama 68 m^2 .
Keliling bangun "tangga" = keliling persegi panjang pembungkusnya.

Langkah 5. Untuk luas, pilih jurus yang lebih mudah: potong atau tambal. Untuk keliling bangun "tangga" (semua pojok siku-siku, tanpa lekukan berbentuk huruf U), kelilingnya sama dengan keliling persegi panjang pembungkusnya.

Satu dinding kamar berukuran $6 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. Di dinding itu ada pintu $0,9 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ dan jendela $1,2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Satu liter cat cukup untuk 10 m^2 sekali lapis, dan dinding akan dicat dua lapis. Berapa liter cat yang dibutuhkan?

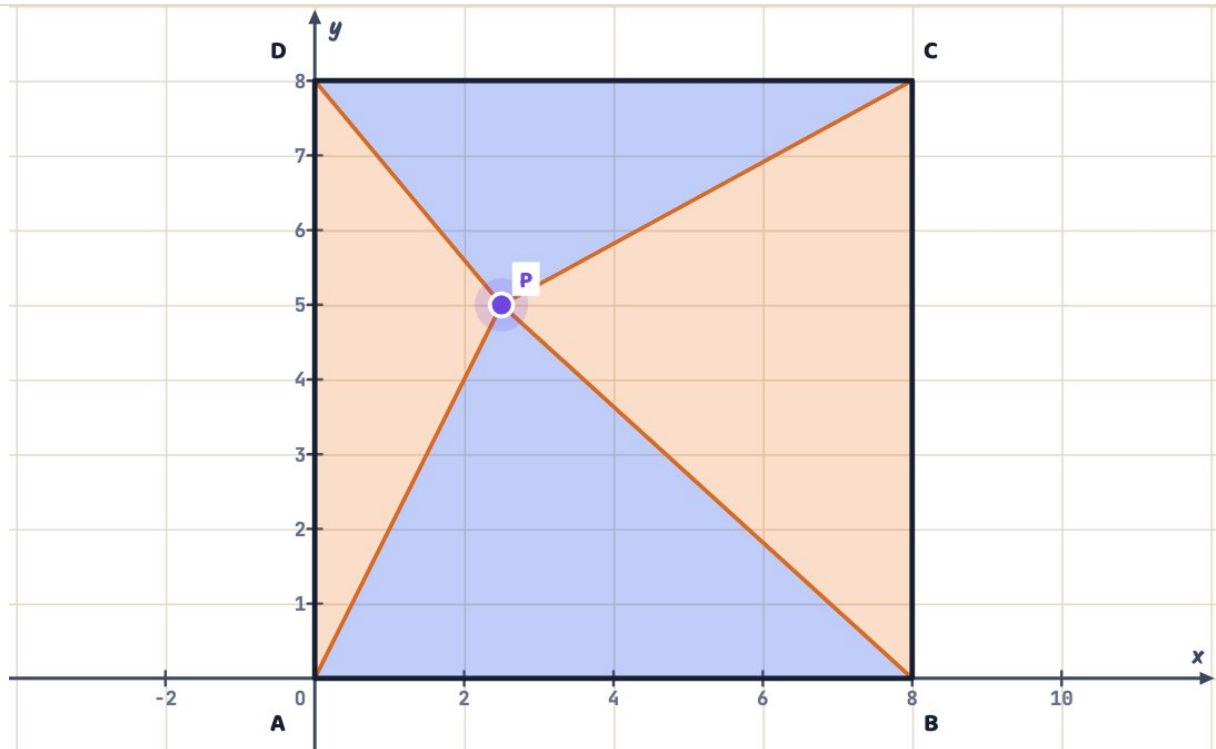
- 1 Luas dinding utuh $= 6 \times 3 = 18 \text{ m}^2$.
- 2 Kurangi bagian yang tidak dicat: pintu $0,9 \times 2 = 1,8 \text{ m}^2$ dan jendela $1,2 \times 1 = 1,2 \text{ m}^2$. Luas yang dicat $= 18 - 1,8 - 1,2 = 15 \text{ m}^2$.
- 3 Dua lapis berarti $2 \times 15 = 30 \text{ m}^2$, jadi catnya $30 : 10 = 3$ liter.

Dibutuhkan 3 liter cat. Jurus "luas utuh dikurangi lubang" inilah inti bangun gabungan.

Soal olimpiade sering meminta luas daerah diarsir yang tampak rumit. Rahasiannya biasanya **simetri** atau **menggeser potongan** tanpa mengubah luasnya. Contoh cantiknya ada di Grafik Hidup berikut.

$$L_{PAB} + L_{PCD} = \frac{1}{2} \times \text{luas persegi}$$

$$L_{PAB} + L_{PCD} = 20 + 12 = 32$$



PAB
20

PCD
12

PAB + PCD
32

PBC + PDA
32

Persegi $ABCD$ bersisi 8 (luas 64). Seret titik P ke mana saja. Luas dua segitiga biru selalu 32, separuh persegi! Mengapa? Kedua segitiga biru beralas 8, dan tinggi keduanya selalu berjumlah 8.

MITOS

"Kalau kelilingnya sama, luasnya pasti sama."

MITOS

"Luas jajargenjang = alas $\times$ sisi miring."

FAKTA

Kandang $11 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ dan $6 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ sama-sama berkeliling 24 m, tetapi luasnya 11 m^2 dan 36 m^2 . Di antara persegi panjang yang kelilingnya sama, persegilah yang paling luas.

FAKTA

Yang dipakai adalah **tinggi**, yang tegak lurus alas. Bingkai yang didorong miring sisi-sisinya tetap, tetapi luasnya menyusut karena tingginya turun.

MITOS

"Kalau semua sisi digandakan, luasnya ikut menjadi dua kali lipat."

FAKTA

Luasnya menjadi

empat

kali lipat (

2×2

). Persegi $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ digandakan menjadi $2 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ m}^2$. Kalau semua sisi dikali tiga, luasnya menjadi sembilan kali lipat.



MATEMATIKA NUSANTARA

Jauh sebelum hektare dikenal, petani Nusantara sudah punya satuan luas sendiri. Di Jawa dikenal **bahu** (sekitar 0,7 hektare) dan **ru** (sekitar 14 m^2), sedangkan di tanah Sunda dikenal **tumbak** (juga sekitar 14 m^2). Sampai sekarang, iklan tanah di beberapa daerah masih mencantumkan harga "per tumbak" atau "per ru". Di Bali, petak-petak sawah terasering diairi bersama melalui sistem *subak*, yang membagi air secara adil ke setiap petak.



Keramik lantai

Tukang membagi luas lantai dengan luas satu keramik, lalu menambah sedikit cadangan untuk potongan di tepi ruangan.



Cat tembok

Kaleng cat mencantumkan daya sebar per m^2 . Luas dinding dikurangi pintu dan jendela menentukan banyak kaleng yang dibeli.



Sawah & pupuk

Kebutuhan benih dan pupuk dihitung per hektare. Petani yang tahu luas sawahnya bisa membeli secukupnya, tidak kurang dan tidak mubazir.



Layangan

Luas kertas minyak sama dengan setengah hasil kali panjang kedua bilah bambu yang bersilangan.



Sertifikat tanah

Luas tanah tercantum dalam m^2 , dan harganya biasanya dihitung per m^2 . Juru ukur memecah bidang tanah yang tak beraturan menjadi segitiga-segitiga.



Penjahit & kain batik

Penjahit menaksir luas pola baju untuk menentukan berapa meter kain batik yang harus dibeli.

Bagaimana kalau kita hanya tahu ketiga sisi sebuah segitiga, tanpa tingginya? Misalnya taman segitiga di pertigaan jalan: sisi-sisinya mudah diukur dengan meteran, tetapi tingginya sulit karena harus tegak lurus. Untunglah ada rumus yang hanya memerlukan sisi.



RUMUS HERON

Segitiga dengan sisi a, b, c dan **setengah keliling** $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ memiliki luas

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

▼ Bukti singkat dengan Pythagoras

Jadikan c sebagai alas dan misalkan kaki garis tinggi h membagi alas sehingga salah satu bagiannya x .

Dari dua segitiga siku-siku: $h^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$, sehingga $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. Maka

$$4c^2h^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)$$

Uraikan setiap selisih kuadrat: hasilnya $(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c) = 2(s - b) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - a) \cdot 2s$. Karena $L = \frac{1}{2}ch$, kita dapat $16L^2 = 4c^2h^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$. Terbukti! ■

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Hitung setengah keliling s . Kurangi s dengan tiap sisi, kalikan keempat bilangan itu, lalu tarik akarnya. Tidak perlu tinggi sama sekali!

a Sisi a m

b Sisi b m

c Sisi c m

L Luas segitiga m^2

LUAS SEGITIGA

84

m^2

✨ luasnya bulat: segitiga Heron!

Setengah keliling $s = 21$. Selisihnya: $s - a = 8$, $s - b = 7$, $s - c = 6$. Hasil kali keempatnya **7.056**, dan akarnya **84** m^2 . Jika muncul '-', salah satu selisih negatif: ketiga sisi itu tidak bisa membentuk segitiga.

Cek satuan: Di dalam akar ada $m \times m \times m \times m = m^4$, dan akar dari m^4 adalah m^2 . Satuannya pas!

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-HERON-TIGA-SISI](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-heron-tiga-sisi)



TAMU DARI MASA LALU

Menghitung luas ladang termasuk matematika tertua. Di Mesir kuno, banjir Sungai Nil sering menghapus batas-batas ladang sehingga juru ukur harus mengukur ulang, dan papirus Rhind (± 1650 SM) memuat soal-soal luas ladang segitiga dan persegi panjang. Sekitar abad pertama Masehi, **Heron dari Aleksandria** menulis buku *Metrica* yang memuat rumus luas segitiga dari ketiga sisinya. Rumus itu kini memakai namanya, walaupun para sejarawan menduga Archimedes sudah mengetahuinya lebih dulu.

COBA SENDIRI Taman segitiga di pertigaan

Di sebuah pertigaan ada taman berbentuk segitiga dengan sisi 13 m, 14 m, dan 15 m. Pengurus RW ingin menanaminya rumput gajah mini seharga Rp35.000 per m². Tidak ada alat untuk mengukur tinggi segitiga. Berapa biayanya?

1 Setengah keliling: $s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$.

2 Heron: $L = \sqrt{21 \times (21 - 13) \times (21 - 14) \times (21 - 15)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ m}^2$.

3 Cek dengan cara lain: segitiga ini adalah gabungan segitiga 5-12-13 dan 9-12-15 yang ditempel pada tinggi 12, jadi $\frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$. Cocok!

4 Biaya = $84 \times \text{Rp}35.000 = \text{Rp}2.940.000$.

Luas taman 84 m², dan biaya rumputnya Rp2.940.000. Rumus Heron menyelamatkan kita dari mengukur tinggi!

Sekarang cara yang sama sekali berbeda. Di toko mainan edukatif ada **papan paku** (*geoboard*): papan berisi paku-paku yang tersusun berpetak, tempat karet gelang dikaitkan membentuk poligon. Paku-paku itu menempati **titik letis**, yaitu titik yang kedua koordinatnya bilangan bulat. Ternyata luas poligon bisa ditebak hanya dengan **menghitung paku!**



TEOREMA PICK

Untuk poligon sederhana (tidak memotong dirinya sendiri) yang semua titik sudutnya titik letis, dengan I = banyak titik letis di **dalam** poligon dan B = banyak titik letis pada **tepi** poligon (termasuk titik sudutnya),

$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

▼ Cek pada persegi panjang (dan ide buktinya)

Ambil persegi panjang $m \times n$ yang sisinya mengikuti garis kisi. Titik di dalamnya $I = (m - 1)(n - 1)$ dan titik di tepinya $B = 2m + 2n$. Maka $I + \frac{B}{2} - 1 = mn - m - n + 1 + m + n - 1 = mn$. Cocok! Sifat istimewanya: jika dua poligon ditempel sepanjang satu sisi, rumus Pick tetap berlaku untuk gabungannya. Karena setiap poligon bisa dipotong menjadi segitiga, cukup dibuktikan untuk segitiga, dan setiap segitiga bisa diperoleh dari persegi panjang dengan memotong segitiga siku-siku.

B (di tepi)

11

I (di dalam)

23

 $I + B/2 - 1$

27,5

Luas (tali sepatu)

27,5

Keadaan

cocok ✓

Seret paku ungu untuk mengubah bentuk karet gelang. Titik **hijau** = paku yang tersentuh karet (B), titik **jingga** = paku yang terkurung di dalam (I). Apa pun bentuknya, $I + \frac{B}{2} - 1$ selalu sama dengan luasnya. Coba buat karetnya menyilang: apa yang terjadi?



MENGHITUNG B TANPA REPOT

Pada sisi dari (x_1, y_1) ke (x_2, y_2) terdapat $\text{FPB}(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$ ruas kecil di antara titik-titik letisnya. Jadi B sama dengan jumlah FPB itu untuk semua sisi. Contoh: sisi dari $(0, 0)$ ke $(6, 4)$ memuat $\text{FPB}(6, 4) = 2$ ruas, dengan titik letis $(0, 0)$, $(3, 2)$, dan $(6, 4)$.

$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

Hitung paku di dalam (I) dan paku yang tersentuh karet (B). Luasnya: I ditambah separuh B , lalu dikurangi satu.

I Titik di dalam titik

B Titik di tepi titik

L Luas poligon satuan²

LUAS POLIGON

11

satuan²

7 titik di dalam dan 10 titik di tepi: $7 + 5 - 1 = 11$ satuan luas. Setiap titik di dalam bernilai 1, setiap titik di tepi bernilai $\frac{1}{2}$, lalu dikurangi 1.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PICK-PETAK



TAMU DARI MASA LALU

Teorema ini ditemukan oleh matematikawan Austria **Georg Alexander Pick** pada tahun 1899. Walaupun sangat sederhana, teorema ini nyaris terlupakan dan baru terkenal luas setengah abad kemudian setelah dimuat dalam buku matematika populer karya Hugo Steinhaus.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

RUMUS TALI SEPATU (SHOELACE FORMULA)

Jika titik-titik sudut poligon $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ditulis berurutan mengelilingi poligon, maka

$$L = \frac{1}{2} |(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_n y_1 - x_1 y_n)|.$$

Coba pada sawah Pak Darto. Letakkan pojok siku-siku segitiga 30-40-50 di titik asal: $A(0, 30)$, $B(0, 0)$, $C(40, 0)$, dan pojok keempat $D(11, 2; 38, 4)$. Hasilnya $\frac{1}{2} |0 + 0 + 40 \cdot 38,4 + 11,2 \cdot 30| = \frac{1}{2} (1536 + 336) = 936 \text{ m}^2$, sama dengan hasil komik! Namanya "tali sepatu" karena pola perkalian silangnya mirip tali sepatu yang dianyam. Rumus inilah yang dipakai aplikasi peta untuk menghitung luas bidang tanah dari koordinat GPS.

Cek Cepat

Keliling persegi panjang berukuran 9 cm x 4 cm adalah...

36 cm

13 cm

26 cm

52 cm

Jajargenjang dengan alas 10 cm, tinggi 6 cm, dan sisi miring 8 cm memiliki luas...

60 cm²

80 cm²

30 cm²

48 cm²

Karet gelang di papan paku menyentuh 6 paku di tepinya dan mengurung 4 paku di dalamnya.
Luas poligonnya...

10

7

9

6

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. A • 3. D



Tantangan Rumah: berapa luas telapak tanganmu?

Bahan: buku tulis berpetak (kotak 0,5 cm atau 1 cm), pensil, benang, penggaris.

1. Letakkan telapak tanganmu (jari dirapatkan) di atas kertas berpetak, lalu jiplak tepinya dengan pensil.
2. Hitung petak yang tertutup **penuh** dan beri tanda centang.
3. Hitung petak yang tertutup **sebagian** dan beri tanda titik. Anggaplah rata-rata setengahnya tertutup.
4. Taksiran luas $\approx$ (petak penuh + $\frac{1}{2} \times$ petak sebagian) $\times$ luas satu petak.
5. Untuk keliling, letakkan benang menyusuri garis jiplakan, lalu ukur panjang benangnya dengan penggaris.

Pertanyaan: Bandingkan tanganmu dengan tangan anggota keluarga lain. Apakah tangan yang kelilingnya lebih panjang selalu lebih luas? Bagaimana cara membuat taksiranmu lebih teliti? (Petunjuk: apa yang terjadi jika petaknya lebih kecil?)



RINGKASAN KILAT

Bab 19 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- membedakan **keliling** dan **luas** beserta satuannya (cm dan cm^2)
- menurunkan rumus luas persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang dengan **potong-geser-tempel**
- menghitung keliling dan luas **bangun gabungan** dengan cara memotong atau menambal
- memakai **rumus Heron** untuk segitiga yang hanya diketahui ketiga sisinya
- menghitung luas poligon di kertas berpetak dengan **teorema Pick**



Istilah kunci

keliling

luas

Keliling

Luas

persegi satuan

setengah keliling

papan paku

titik letis



Rumus penting

$$L = \frac{1}{2} \times (a + b) \times t$$

Luas trapesium. Jumlahkan kedua sisi sejajar, kalikan dengan tinggi, lalu ambil separuhnya. Sama saja dengan rata-rata kedua sisi sejajar dikali tinggi.

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Rumus Heron. Hitung setengah keliling s. Kurangi s dengan tiap sisi, kalikan keempat bilangan itu, lalu tarik akarnya. Tidak perlu tinggi sama sekali!

$$L = I + \frac{B}{2} - 1$$

Teorema Pick. Hitung paku di dalam (I) dan paku yang tersentuh karet (B). Luasnya: I ditambah separuh B, lalu dikurangi satu.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Keliling bersatuan panjang (cm), sedangkan luas bersatuan persegi (cm^2), jadi jangan sampai tertukar.
- Tinggi segitiga harus tegak lurus terhadap alas, bukan sisi miringnya.
- Luas jajargenjang memakai tinggi, bukan sisi miring.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=19

🧩 Teka-teki untuk Bab 20

Dimas naik motor dari Jakarta ke Bandung, menempuh sekitar 150 km. Roda motornya (termasuk ban) berdiameter kira-kira 60 cm. Berapa kali roda itu berputar sepanjang perjalanan? Semua rumus di bab ini memakai sisi lurus, padahal roda tidak punya sisi lurus sama sekali!

▼ Intip petunjuk

Satu putaran roda menempuh jarak sepanjang **keliling lingkaran**, yaitu sekitar $3,14 \times \text{diameter}$. Hitung keliling roda dalam cm, ubah 150 km menjadi cm, lalu bagi. Hasilnya puluhan ribu putaran! Bab 20 mengungkap dari mana bilangan ajaib 3,14 (bilangan π) berasal.

20

Lingkaran: Bundar, Sempurna, dan Penuh Rahasia π

Mengapa keliling tutup botol, roda motor, sampai bedug masjid selalu sedikit lebih dari tiga kali garis tengahnya? Bagaimana sepotong martabak bisa membuktikan rumus luas lingkaran? Ayo menggelinding ke dunia π !

Setelah bab ini, kamu bisa

- menyebutkan **unsur-unsur lingkaran**: pusat, jari-jari, diameter, tali busur, apotema, busur, juring, dan tembereng;
- menjelaskan dari mana **bilangan π** berasal, lalu menghitung **keliling** dan **luas** lingkaran;
- menghitung **panjang busur**, **luas juring**, dan **luas tembereng**;
- memakai hubungan **sudut pusat dan sudut keliling** serta sifat **garis singgung**;
- mengubah derajat ke **radian** dan memakai rumus $s = r\theta$.

BERAPA KALI RODA BERPUTAR?

KOMIK • 4 PANEL

Minggu pagi, di bengkel dekat rumah

DIMAS

Kak, teka-teki Ancil bikin pusing: berapa kali roda motor berputar dari Jakarta ke Bandung? Mana mungkin dihitung!

BENGKEL



AYU

Sekali berputar penuh, roda maju sejauh kelilingnya. Jadi cukup cari keliling rodanya!



1 putaran = 1 keliling

KAK LINTANG

Lilitkan tali pada benda bulat apa saja, lalu bagi kelilingnya dengan diameternya. Hasilnya selalu sekitar 3,14!

WAAH!

$$K \div d \approx 3,14$$

Ancil muncul membawa kalkulator...**ANCIL**

Roda bergaris tengah 60 cm kelilingnya $\pm 1,88$ m. Jakarta-Bandung ± 150 km, jadi rodanya berputar hampir 80 ribu kali!

DIMAS

Tapi kenapa selalu 3,14 ya?!

BANDUNG
 ± 150 km**Tebak Dulu!**

Sebuah gelas tinggi berukuran tinggi 15 cm dengan garis tengah mulut 6,5 cm. Mana yang lebih panjang: tinggi gelas atau keliling mulut gelas?

Tinggi gelas, jelas jauh lebih panjang.

Keduanya hampir sama panjang.

Keliling mulut gelas lebih panjang.

Tidak bisa ditentukan tanpa mengukur langsung.

Jawabannya: keliling mulut gelas. Keliling lingkaran kira-kira 3,14 kali garis tengahnya: $3,14 \times 6,5 \approx 20,4$ cm, lebih panjang daripada tinggi 15 cm. Mata kita mudah tertipu karena keliling itu melengkung. Coba lilitkan benang di mulut gelas di rumah, lalu bentangkan di samping gelas!

20.1**Mengenal lingkaran dan unsur-unsurnya**

Tancapkan paku di papan, ikatkan seutas tali, lalu putar pensil di ujung tali yang lain sambil menjaga tali tetap tegang. Jadilah sebuah **lingkaran**. Setiap titik yang digambar pensil berjarak **sama** dari paku. Jangka di kotak pensilmu bekerja dengan cara yang persis sama.

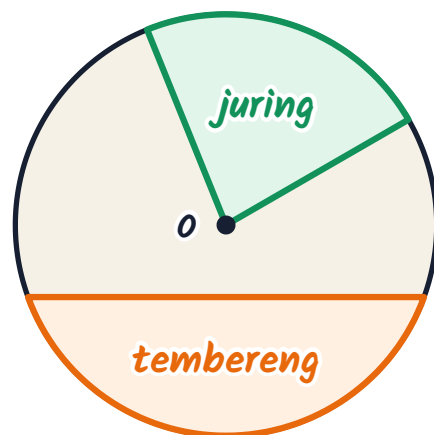
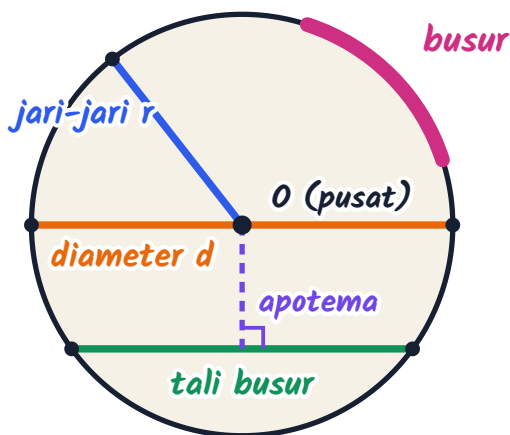


DEFINISI

Lingkaran adalah kumpulan semua titik pada bidang datar yang jaraknya sama terhadap satu titik tetap. Titik tetap itu disebut **pusat** (biasanya O), dan jarak yang sama itu disebut **jari-jari** (r). Ruas garis yang melalui pusat dan menghubungkan dua titik pada lingkaran disebut **diameter** atau garis tengah: $d = 2r$.

Selain pusat, jari-jari, dan diameter, lingkaran punya beberapa "anggota keluarga" lagi:

- **Tali busur** (*chord*): ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran. Diameter adalah tali busur terpanjang.
- **Busur** (*arc*): bagian lengkung lingkaran di antara dua titik.
- **Apotema**: jarak terpendek dari pusat ke sebuah tali busur (tegak lurus tali busur).
- **Juring** (*sector*): daerah yang dibatasi dua jari-jari dan sebuah busur, seperti sepotong martabak.
- **Tembereng** (*segment*): daerah yang dibatasi sebuah tali busur dan busurnya.



Kiri: unsur yang berupa garis dan lengkungan. Kanan: dua daerah di dalam lingkaran, yaitu juring (menyentuh pusat) dan tembereng (tidak menyentuh pusat).

Bahasa sederhana • Gampangnya: **jari-jari** itu dari tengah ke pinggir, **diameter** itu dari pinggir ke pinggir lewat tengah, jadi panjangnya dua kali jari-jari. **Juring** bentuknya seperti potongan martabak (ujungnya di tengah), sedangkan **tembereng** seperti pinggiran semangka yang dipotong lurus.



AWAS JEBAKAN

Juring selalu punya "ujung lancip" di pusat lingkaran, sedangkan tembereng tidak menyentuh pusat sama sekali. Jangan tertukar: juring dibatasi **dua jari-jari + busur**, tembereng dibatasi **tali busur + busur**.

20.2

Bilangan π : rahasia semua benda bulat

Kak Lintang benar. Ambil tutup botol, piring, atau roda sepeda. Ukur kelilingnya K dengan tali, ukur juga diameternya d , lalu hitung $K \div d$. Hasilnya selalu sedikit di atas 3, sekitar 3,14. Mengapa? Karena semua

lingkaran **sebangun**: lingkaran besar hanyalah lingkaran kecil yang diperbesar. Kalau diameternya dikali 10, kelilingnya juga dikali 10, sehingga perbandingannya tidak berubah.

Perbandingan tetap itu diberi nama π (dibaca "pi"), huruf Yunani yang dipopulerkan oleh William Jones (1706) dan Leonhard Euler.

$$\pi = \frac{K}{d} = 3,14159\,26535\,89793\ldots$$

LAB MINI

Gelindingkan, lalu ukur!

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

diameter d

keliling K

$K \div d$

Keadaan

66 cm

—

—

menggelinding... 40%

Pilih benda, lalu tekan ► **Jalankan** (atau seret rodanya). Benda menggelinding tepat satu putaran sambil "mengecat" kelilingnya di tanah. Setelah itu, tongkat sepanjang diameter dijejerkan di atas jejak cat. Berapa tongkat yang muat? Apakah jawabannya berubah untuk benda yang lebih besar?

Jejak cat selalu memuat **tiga** tongkat diameter ditambah sepotong kecil (sekitar 0,14 diameter). Sepotong kecil itulah yang membuat π bukan bilangan bulat. Lebih hebat lagi, π adalah bilangan **irasional**: angka di belakang komanya tidak pernah berhenti dan tidak pernah berulang membentuk pola.

Siapa dan kapan	Nilai π yang dipakai	Desimal
Babilonia (±1900–1600 SM)	$3\frac{1}{8}$	3,125
Mesir, Papyrus Rhind (±1650 SM)	$(\frac{16}{9})^2$	3,1605...

Archimedes (± 250 SM)	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$	3,1408... s.d. 3,1428...
Zu Chongzhi, Tiongkok (abad ke-5)	$\frac{355}{113}$	3,1415929...
Al-Kashi, Samarkand (1424)	16 angka desimal benar	3,1415926535897932
Komputer masa kini	lebih dari 100 triliun digit	tidak pernah berhenti



TAMU DARI MASA LALU

Archimedes dari Syrakusa (± 287 – 212 SM) tidak punya kalkulator, tetapi ia punya ide cemerlang: **mengepung** lingkaran. Ia menggambar segi-6 beraturan di dalam lingkaran dan segi-6 lain di luarnya. Keliling lingkaran pasti terletak di antara keliling kedua segi banyak itu. Lalu ia menggandakan sisinya: 12, 24, 48, sampai 96 sisi! Hasilnya, $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Batas atas $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ inilah yang sampai sekarang kita pakai sebagai pendekatan π .

LAB MINI Mengepung π ala Archimedes

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

keliling dalam $\div$ d
3

keliling luar $\div$ d
3,4641

lebar "pagar"
0,4641

Tekan **x2 sisi** berulang kali seperti Archimedes: $6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48 \rightarrow 96$. Segi banyak biru ada di dalam lingkaran, yang oranye di luar. Perhatikan "pagar" kedua bilangan makin rapat mengepung π . Nyalakan **kaca pembesar** untuk melihat celahnya.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

RESEP ARCHIMEDES TANPA π

Misalkan diameter lingkaran 1. Tulis a_n = keliling segi- n di luar lingkaran dan b_n = keliling segi- n di dalamnya. Untuk segi-6, $a_6 = 2\sqrt{3} \approx 3,4641$ dan $b_6 = 3$. Archimedes (dalam bahasa modern) memakai dua langkah penggandaan:

$$a_{2n} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} \quad (\text{rata-rata harmonik}), \quad b_{2n} = \sqrt{a_{2n} b_n} \quad (\text{rata-rata geometrik}).$$

Lima kali penggandaan memberi $b_{96} \approx 3,14103$ dan $a_{96} \approx 3,14271$. Hebatnya, resep ini **tidak memakai π sama sekali**, hanya akar kuadrat! Archimedes membulatkan akar-akarnya dengan hati-hati ke arah yang aman, sehingga batasnya sedikit lebih longgar: $3,1408 < \pi < 3,1429$.

20.3 Keliling dan luas lingkaran

Dari definisi $\pi = K/d$ langsung didapat rumus keliling. Rumus luasnya lebih mengejutkan: ia bisa dibuktikan dengan sepotong martabak manis!



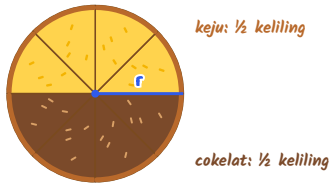
RUMUS KELILING DAN LUAS LINGKARAN

Untuk lingkaran berjari-jari r dan berdiameter $d = 2r$:

$$K = \pi d = 2\pi r \qquad L = \pi r^2$$

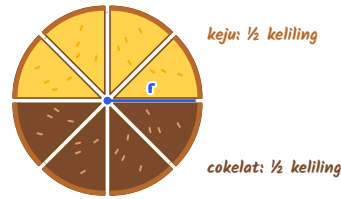
Dalam kata-kata: *keliling adalah π kali diameter; luas adalah π kali kuadrat jari-jari.*

Martabak manis berjari-jari r



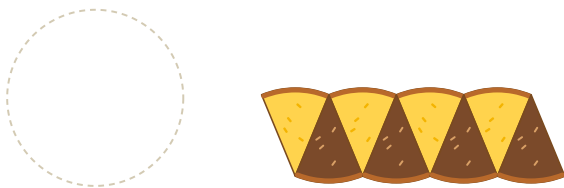
Langkah 1. Sebuah martabak manis berjari-jari r : setengah bagian atas rasa keju, setengah bagian bawah rasa cokelat. Kelilingnya $2\pi r$, jadi pinggiran keju sepanjang πr dan pinggiran cokelat juga πr .

Potong jadi 8 juring sama besar



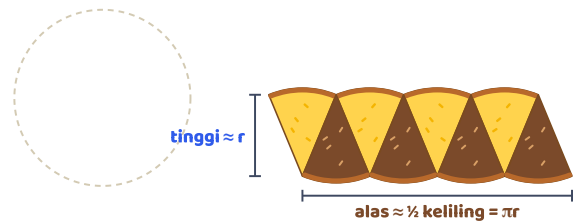
Langkah 2. Potong martabak menjadi 8 juring yang sama besar. Luas totalnya tidak berubah.

Susun selang-seling: atas-bawah



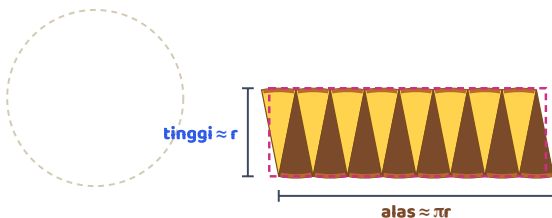
Langkah 3. Susun selang-seling: juring keju menghadap ke bawah, juring cokelat menghadap ke atas, rapat berdampingan. Juring hanya dipindah dan diputar, tidak ada yang hilang.

Hampir jajargenjang!

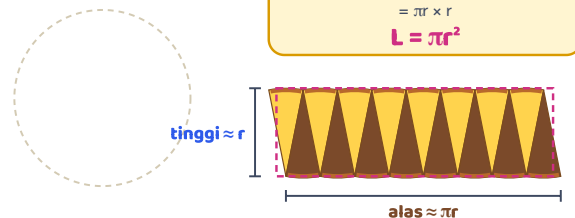


Langkah 4. Bentuknya mirip jajargenjang bergelombang. Alasnya terbuat dari pinggiran cokelat ($\approx \pi r$), sisi atasnya dari pinggiran keju ($\approx \pi r$), dan tingginya hampir sama dengan jari-jari r .

16 juring: makin mirip persegi panjang



Langkah 5. Kalau dipotong lebih banyak, misalnya 16 juring, tepinya makin lurus dan bentuknya makin mirip persegi panjang (garis putus-putus) berukuran $\pi r \times r$.



Langkah 6. Luas persegi panjang = alas $\times$ tinggi = $\pi r \times r = \pi r^2$. Itulah luas lingkaran!

▼ Bukti kedua: kupas bawang menjadi segitiga

Bayangkan lingkaran tersusun atas banyak sekali gelang tipis, seperti irisan bawang. Gelang yang berjarak x dari pusat panjangnya $2\pi x$. Gunting setiap gelang di satu tempat lalu luruskan, dan susun dari yang terpendek (di pusat, panjang 0) sampai yang terpanjang (di tepi, panjang $2\pi r$). Hasilnya sebuah segitiga dengan alas $2\pi r$ dan tinggi r :

$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2.$$

Ide "potong tipis-tipis lalu jumlahkan" ini adalah benih kalkulus integral yang akan kamu temui di Bab 30.

LAB MINI Potong martabaknya, susun ulang!

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

alas (lurus) $\div r$
3,0615

tinggi $\div r$
0,9239

alas $\times$ tinggi $\div r^2$
2,8284

luas martabak $\div r^2$
3,1416

Atur banyak potongan, lalu tekan ► **Jalankan** atau geser slider **Susun ulang**. Dengan 8 potong, bentuknya masih bergelombang. Coba 48 potong: masihkah kamu bisa membedakannya dari persegi panjang $\pi r \times r$?

$$L = \pi r^2$$

Luas lingkaran adalah π kali jari-jari kuadrat, sedangkan kelilingnya 2π kali jari-jari.

r Jari-jari cm

L Luas lingkaran cm^2

LUAS LINGKARAN

153,94

cm^2

r kelipatan 7: pakai $\pi \approx 22/7$ agar hitungan tangan bulat

Jari-jari **7** cm berarti diameter **14** cm dan keliling $2\pi r \approx 43,982$ cm. Luasnya $\pi r^2 \approx 153,94$ cm^2 . Coba gandakan r : keliling ikut menjadi 2 kali, tetapi luas menjadi 4 kali!

Cek satuan: keliling memakai cm (panjang), luas memakai cm^2 (banyaknya petak $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LINGKARAN-LUAS](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-LINGKARAN-LUAS)



AWAS JEBAKAN

Rumus luas memakai **jari-jari**, padahal soal sering memberi **diameter**. Untuk tampah bergaris tengah 56 cm, jari-jarinya 28 cm, jadi $L = \frac{22}{7} \times 28^2 = 2.464 \text{ cm}^2$, bukan $\frac{22}{7} \times 56^2$ yang empat kali lebih besar.



TRIK KAK LINTANG

Pilih pendekatan π yang membuat hitungan ringan. Kalau jari-jari atau diameternya kelipatan 7 (7, 14, 21, 28, 35), pakai $\frac{22}{7}$ karena angka 7 langsung "dicoret". Kalau kelipatan 10 atau angka lain, pakai 3,14. Kalau soal meminta jawaban eksak, biarkan saja π -nya: $L = 49\pi \text{ cm}^2$ adalah jawaban yang sempurna.

CONTOH Seratus putaran roda sepeda

Roda sepeda Ayu bergaris tengah 70 cm. Berapa meter Ayu maju jika rodanya berputar 100 kali? (Pakai $\pi = \frac{22}{7}$.)

1 Satu putaran = satu keliling: $K = \pi d = \frac{22}{7} \times 70 = 220$ cm.

2 100 putaran: $100 \times 220 = 22.000$ cm.

3 22.000 cm = 220 m.

Ayu maju 220 m. Inilah cara kerja meteran jarak (odometer) pada sepeda dan motor: menghitung putaran roda, lalu mengalikannya dengan keliling roda.

RUMUS HIDUP Penghitung putaran roda

$$n = \frac{s}{\pi d}$$

Satu putaran berarti maju sejauh satu keliling. Jadi banyak putaran sama dengan jarak tempuh dibagi keliling roda.

s Jarak tempuh km

d Diameter roda cm

n Banyak putaran kali

BANYAK PUTARAN

79.577

kali

 teka-teki Ancil: Jakarta-Bandung $\approx$ 80 ribu putaran!

Keliling roda = $\pi \times 60$ cm $\approx 188,496$ cm. Jarak 150 km = $1,5 \times 10^7$ cm, jadi roda berputar sekitar **79.577** kali.

Cek satuan: samakan satuan dulu: 1 km = 100.000 cm.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PUTARAN-RODA](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-putaran-roda)



Tebak Dulu!

Seutas tali dililitkan pas mengelilingi khatulistiwa Bumi (± 40.000 km). Tali itu diperpanjang 1 meter, lalu diatur melingkar dengan celah yang sama tinggi di mana-mana. Seberapa tinggi celah antara tali dan tanah?

Setipis rambut, kurang dari 1 mm.

Sekitar 16 cm, cukup untuk seekor kucing menyelip.

Sekitar 1 m.

Sekitar 1 km.

Jawabannya: sekitar 16 cm! Kalau jari-jari bertambah Δr , keliling bertambah $2\pi \Delta r$. Jadi $2\pi \Delta r = 1$ m, sehingga $\Delta r = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16$ m. Ukuran Bumi sama sekali tidak berpengaruh: tali di sekeliling bola pingpong pun naik 16 cm jika diperpanjang 1 m.

KERJAKAN BERSAMA

Jalan setapak di tepi kolam

Kolam ikan berbentuk lingkaran berjari-jari 10 m. Di sekelilingnya dibuat jalan setapak selebar 2 m. Berapa luas jalan setapak itu? (Pakai $\pi = 3,14$.)

1 Jalan setapak = lingkaran besar dikurangi lingkaran kolam. Jari-jari lingkaran besar $10 + 2 = 12$ m.

2 $L = \pi \cdot 12^2 - \pi \cdot 10^2 = \pi(144 - 100) = 44\pi$.

3 $44 \times 3,14 = 138,16 \text{ m}^2$.

Luas jalan setapak $\pm 138,16 \text{ m}^2$. Bentuk seperti cincin ini disebut *gelang lingkaran* (anulus); luasnya selalu $\pi(R^2 - r^2)$.

**ADU CEPAT****Luas lingkaran kilat (awas: yang diberikan diameter!)**ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

Bagi dulu diameternya dengan 2, lalu kuadratkan. Ketik jawaban dengan π , misalnya 36π , atau desimal dengan $\pi \approx 3,14$.

COBA SENDIRI**Satu martabak besar atau dua martabak kecil?**

Penjual martabak manis menawarkan dua pilihan dengan harga sama: satu martabak bergaris tengah 30 cm, atau dua martabak bergaris tengah 20 cm. Pilihan mana yang memberi martabak lebih banyak (tebal sama)?

- 1 Satu martabak besar: $r = 15$, $L = \pi \cdot 15^2 = 225\pi \approx 706,9 \text{ cm}^2$.
- 2 Dua martabak kecil: $r = 10$, $L = 2 \times \pi \cdot 10^2 = 200\pi \approx 628,3 \text{ cm}^2$.
- 3 Selisihnya $25\pi \approx 78,5 \text{ cm}^2$, kira-kira seluas satu martabak mini bergaris tengah 10 cm.

Satu martabak besar lebih banyak! Garis tengah $30 < 20 + 20$, tetapi luas bergantung pada kuadrat jari-jari, jadi yang besar "menang banyak".

MITOS

" π itu sama dengan $22/7$."

MITOS

"Kalau diameternya dua kali lipat, luasnya juga dua kali lipat."

FAKTA

Hanya mendekati.

$$\frac{22}{7} = 3,142857\dots$$

, sedangkan

$$\pi = 3,141592\dots$$

, sudah berbeda di angka desimal ketiga. π irasional: tidak ada pecahan yang tepat sama dengannya.

FAKTA

Kelilingnya memang dua kali, tetapi luasnya

empat

kali, karena

$$\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$$

. Itu sebabnya satu martabak besar bisa mengalahkan dua martabak kecil.

MITOS

"Suatu hari angka di belakang koma π akan habis atau berulang."

FAKTA

Tidak akan pernah. Johann Lambert membuktikan pada 1761 bahwa π irasional. Komputer sudah menghitung lebih dari 100 triliun digitnya tanpa menemukan ujung atau pengulangan.

20.4 Busur, juring, dan tembereng

Sepotong martabak dari 8 potongan yang sama adalah $\frac{1}{8}$ martabak. Sudut di ujungnya $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Jadi pecahannya bisa dibaca dari sudut pusat: $\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$. Busur dan luas juring mengikuti pecahan yang sama.



PANJANG BUSUR DAN LUAS JURING

Untuk juring dengan sudut pusat θ (dalam derajat) pada lingkaran berjari-jari r :

$$\text{panjang busur} = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r \qquad \text{luas juri}$$

Luas tembereng = luas juring – luas segitiga yang dibentuk dua jari-jari dan tali busurnya.

Bahasa sederhana • Cara gampang mengingatnya: tanyakan "**juring ini berapa bagian dari lingkaran?**" Juring 90° itu seperempat lingkaran, jadi busurnya seperempat keliling dan luasnya seperempat luas lingkaran.

$$L_{\text{juring}} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

Juring adalah pecahan lingkaran. Pecahannya $\theta/360^\circ$, jadi luas juring = pecahan itu dikali luas lingkaran.

θ Sudut pusat $^\circ$

r Jari-jari cm

L_{juring} Luas juring cm^2

LUAS JURING

62,83

cm^2

Juring ini adalah **0,2** bagian lingkaran. Panjang busurnya $\approx$ **12,566** cm, luas juringnya $\approx$ **62,83** cm^2 , dan luas temberengnya (juring dikurangi segitiga) $\approx$ **15,279** cm^2 .

Cek satuan: busur dalam cm (panjang), juring dan tembereng dalam cm^2 (luas).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUSUR-JURING

CONTOH Ujung jarum menit

Jarum menit sebuah jam dinding panjangnya 21 cm. Berapa jauh ujung jarum itu bergerak selama 20 menit? (Pakai $\pi = \frac{22}{7}$.)

- 1 Dalam 60 menit jarum menit berputar 360° , jadi dalam 20 menit ia berputar $\frac{20}{60} \times 360^\circ = 120^\circ$.
- 2 Panjang busur = $\frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = \frac{1}{3} \times 132 = 44$ cm.

Ujung jarum menit menempuh 44 cm. Jarum yang lebih panjang menempuh busur lebih panjang dalam waktu yang sama, walaupun sudutnya sama.

Kaca di atas pintu masjid berbentuk tembereng dari lingkaran berjari-jari 14 dm dengan sudut pusat 90° . Berapa luas kacanya? (Pakai $\pi = \frac{22}{7}$.)

1 Luas juring = $\frac{90^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 14^2 = \frac{1}{4} \times 616 = 154 \text{ dm}^2$.

2 Segitiga dengan dua jari-jari yang saling tegak lurus: luas = $\frac{1}{2} \times 14 \times 14 = 98 \text{ dm}^2$.

3 Luas tembereng = $154 - 98 = 56 \text{ dm}^2$.

Luas kaca $56 \text{ dm}^2 = 0,56 \text{ m}^2$. Kunci tembereng: juring dikurangi segitiga.



MATEMATIKA NUSANTARA

Di puncak Candi Borobudur (abad ke-8-9) terdapat tiga teras berbentuk lingkaran yang mengelilingi stupa induk. Di atasnya berdiri 72 stupa berlubang: 32 stupa di teras terbawah, 24 di tengah, dan 16 di teras teratas. Agar jaraknya rata, setiap stupa harus menempati juring yang sama besar: $\frac{360^\circ}{32} = 11,25^\circ$, $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$, dan $\frac{360^\circ}{16} = 22,5^\circ$. Membagi lingkaran sama rata adalah keterampilan yang dikuasai para perancang candi lebih dari seribu tahun lalu.

20.5 Sudut pusat dan sudut keliling

Ada dua cara "memandang" sebuah busur AB . Dari pusat O , kita mendapat **sudut pusat** $\angle AOB$. Dari sebuah titik P pada lingkaran, kita mendapat **sudut keliling** $\angle APB$, yang kaki-kakinya berupa tali busur. Keduanya ternyata selalu berhubungan dengan cara yang sangat rapi.



TEOREMA SUDUT KELILING

Sudut keliling sama dengan **setengah** sudut pusat yang menghadap busur yang sama:

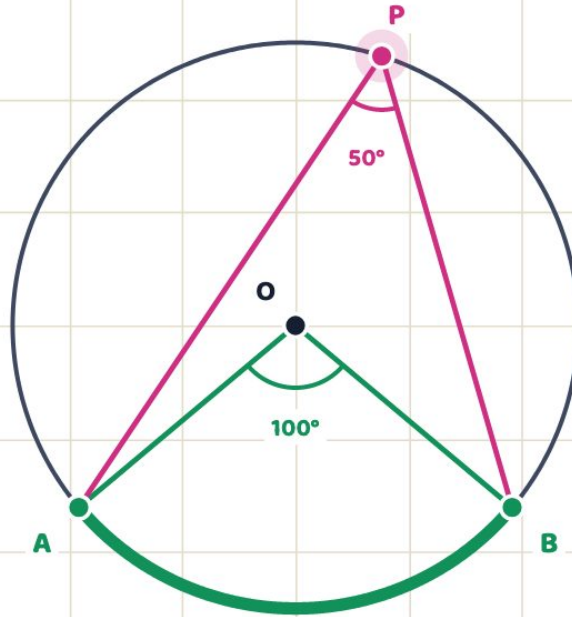
$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

Akibatnya:

- Semua sudut keliling yang menghadap busur yang sama besarnya **sama**.
- Sudut keliling yang menghadap **diameter** selalu 90° (teorema Thales).
- Pada **segi empat tali busur** (*cyclic quadrilateral*), jumlah dua sudut yang berhadapan selalu 180° .

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

$$\angle APB = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$$



$\angle AOB$ (sudut pusat)

100 °

$\angle APB$ (diukur)

50 °

$\frac{1}{2} \times \angle AOB$

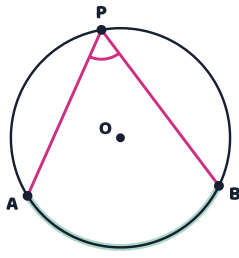
50 °

P berada di

busur seberang AB

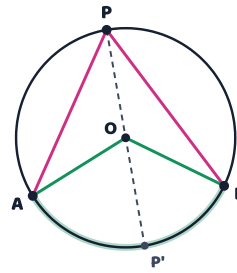
Seret titik magenta P berkeliling di busur atas: angka sudutnya tidak berubah sedikit pun! Geser slider sudut pusat sampai 180° untuk melihat teorema Thales. Lalu seret P masuk ke busur hijau: apa yang terjadi?

Mengapa selalu setengah? Buktinya hanya memakai dua fakta dari Bab 17: segitiga sama kaki punya dua sudut alas yang sama, dan sudut luar segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam yang tidak bersebelahan.



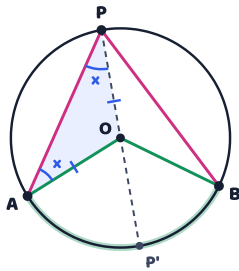
Sudut keliling $\angle APB$ (magenta)
dan sudut pusat $\angle AOB$ menghadap
busur AB yang sama (hijau).
Mau dibuktikan:
 $\angle AOB = 2 \times \angle APB$

Langkah 1. Sudut keliling $\angle APB$ dan sudut pusat $\angle AOB$ sama-sama menghadap busur AB (hijau). Kita akan membuktikan $\angle AOB = 2\angle APB$.



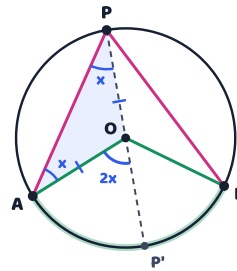
Tarik garis dari P lewat pusat O
sampai menembus lingkaran di P' .
Tarik juga jari-jari OA dan OB .

Langkah 2. Tarik garis dari P melalui pusat O sampai memotong lingkaran di P' . Tarik juga jari-jari OA dan OB .



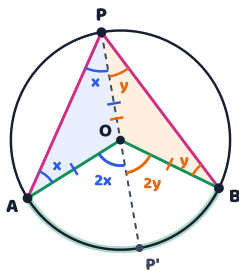
Segitiga OPA sama kaki:
 $OP = OA = r$ (sama-sama jari-jari).
Jadi dua sudut alasnya sama,
kita sebut x .

Langkah 3. Segitiga OPA sama kaki karena $OP = OA = r$.
Jadi kedua sudut alasnya sama; sebut saja x .



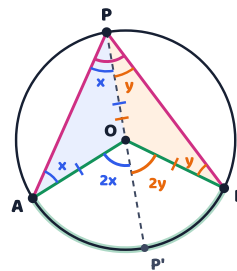
Sudut luar segitiga = jumlah dua
sudut dalam yang tidak bersebelahan:
 $\angle AOP' = x + x = 2x$

Langkah 4. $\angle AOP'$ adalah sudut luar segitiga OPA ,
sehingga $\angle AOP' = x + x = 2x$.



Sama untuk segitiga OPB :
 $OP = OB$, sudut alasnya y ,
sehingga $\angle P'OB = 2y$.

Langkah 5. Dengan cara yang sama, segitiga OPB sama kaki
dengan sudut alas y , dan $\angle P'OB = 2y$.



Terbukti! Berapa pun letak P
di busur besar, hasilnya sama.

$$\begin{aligned}\angle AOB &= 2x + 2y = 2(x + y) \\ \text{dan } \angle APB &= x + y, \text{ jadi} \\ \angle AOB &= 2 \angle APB\end{aligned}$$

Langkah 6. $\angle AOB = 2x + 2y = 2(x + y) = 2\angle APB$.
Terbukti!



TAMU DARI MASA LALU

Menurut tradisi Yunani, Thales dari Miletus (± 624 – 546 SM) adalah orang pertama yang **membuktikan** bahwa sudut keliling yang menghadap diameter selalu siku-siku. Konon ia begitu gembira sampai mempersembahkan seekor sapi sebagai syukuran. Teorema kecil ini dianggap salah satu bukti matematika tertua yang tercatat.



TRIK KAK LINTANG

"Mata di pusat melihat dua kali lebih lebar." Pusat lebih dekat ke busur, jadi sudut pandangnya dua kali sudut pandang dari tepi lingkaran. Untuk mencari sudut keliling, cari dulu sudut pusat yang menghadap busur yang sama, lalu bagi dua.



AWAS JEBAKAN

Pastikan sudut keliling dan sudut pusat menghadap busur yang **sama**. Jika titik P berada pada busur AB itu sendiri (busur kecil), maka $\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$, bukan $\frac{1}{2}\angle AOB$.

KERJAKAN BERSAMA

Berburu sudut

Titik A, B, C, D terletak pada lingkaran berpusat O dengan $\angle AOB = 130^\circ$. Titik C berada pada busur besar AB , sedangkan D pada busur kecil AB . Tentukan $\angle ACB$ dan $\angle ADB$.

- 1 $\angle ACB$ menghadap busur kecil AB , yang juga dihadap sudut pusat 130° . Jadi $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ$.
- 2 $ACBD$ adalah segi empat tali busur, dan C, D saling berhadapan. Jadi $\angle ADB = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.
- 3 Cek dengan cara lain: $\angle ADB$ menghadap busur besar yang sudut pusatnya $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$, jadi $\angle ADB = \frac{1}{2} \times 230^\circ = 115^\circ$. Cocok!

$\angle ACB = 65^\circ$ dan $\angle ADB = 115^\circ$. Teorema sudut keliling tetap berlaku untuk sudut pusat lebih dari 180° .



LANJUT • IB & OLIMPIADE

SEGI EMPAT TALI BUSUR DAN TEOREMA PTOLEMY

Jika $ABCD$ segi empat tali busur, $\angle A$ menghadap busur BCD dan $\angle C$ menghadap busur BAD . Kedua busur itu bersama-sama membentuk lingkaran penuh, jadi $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$. Kebalikannya juga benar, dan inilah alat favorit olimpiade untuk membuktikan bahwa empat titik terletak pada satu lingkaran.

Ptolemy (± 150 M) menemukan hubungan panjang yang indah: pada segi empat tali busur, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. Terapkan pada persegi panjang bersisi a, b , dan diagonal c : $c \cdot c = a \cdot a + b \cdot b$. Teorema Pythagoras muncul lagi!

20.6 Garis singgung lingkaran

Sebuah roda yang menggelinding di jalan hanya menyentuh jalan di satu titik. Garis yang menyentuh lingkaran tepat di satu titik disebut **garis singgung** (*tangent*), dan titik sentuhnya disebut **titik singgung**.



SIFAT GARIS SINGGUNG

- Garis singgung selalu **tegak lurus** terhadap jari-jari di titik singgungnya.
- Dari sebuah titik T di luar lingkaran, dapat ditarik tepat dua garis singgung, dan keduanya **sama panjang**:

$$TS_1 = TS_2 = \sqrt{OT^2 - r^2}$$

▼ Mengapa tegak lurus dan sama panjang?

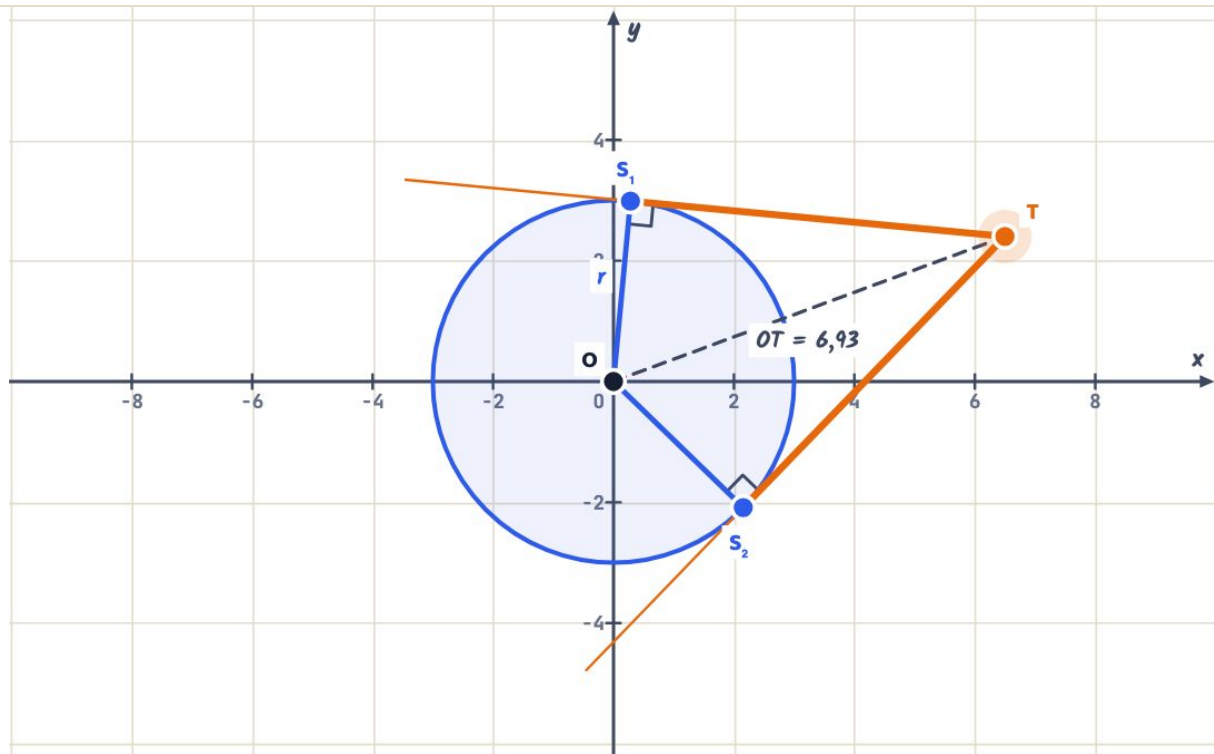
Tegak lurus. Semua titik pada garis singgung, kecuali titik singgung S , berada di luar lingkaran, jadi jaraknya ke O lebih dari r . Artinya OS adalah jarak *terpendek* dari O ke garis itu. Jarak terpendek dari sebuah titik ke garis selalu diukur tegak lurus, jadi $OS \perp$ garis singgung.

Sama panjang. Segitiga OS_1T dan OS_2T sama-sama siku-siku (di S_1 dan S_2), punya sisi miring yang sama (OT), dan kaki yang sama ($OS_1 = OS_2 = r$). Menurut Pythagoras, $TS_1 = \sqrt{OT^2 - r^2} = TS_2$.



$$TS_1 = TS_2 = \sqrt{OT^2 - r^2}$$

$$TS_1 = TS_2 = \sqrt{6,93^2 - 3^2} \approx 6,25$$



OT
6,93

$TS_1 = TS_2$
6,25

$r^2 + TS^2$
48,01

OT^2
48,01

Seret titik oranye T . Kedua ruas oranye selalu sama panjang, dan tanda siku di S_1, S_2 tidak pernah hilang. Coba dorong T masuk ke dalam lingkaran: mengapa ia tertahan?



AWAS JEBAKAN

Panjang garis singgung dari T **bukan** $OT - r$. Ruas $OT - r$ adalah jarak T ke titik terdekat pada lingkaran, yang letaknya di garis OT , bukan di garis singgung. Hitunglah dengan Pythagoras: $\sqrt{OT^2 - r^2}$.

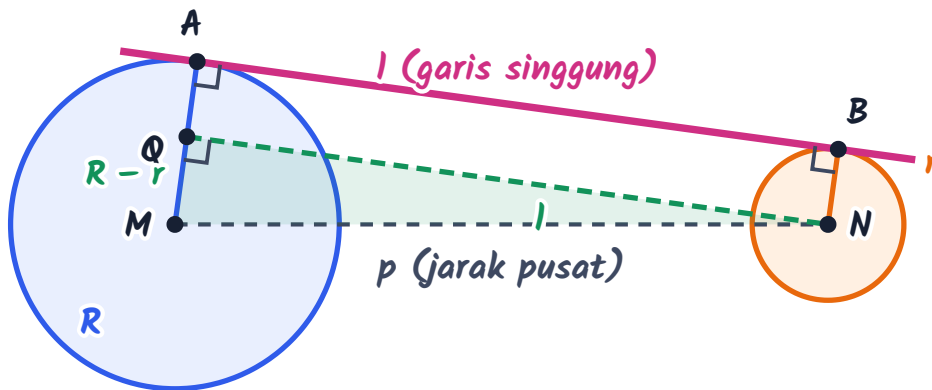
CONTOH Panjang garis singgung

Titik T berjarak 10 cm dari pusat lingkaran berjari-jari 6 cm. Berapa panjang garis singgung dari T ke lingkaran?

- 1 Jari-jari OS tegak lurus garis singgung TS , jadi segitiga OST siku-siku di S dengan sisi miring $OT = 10$.
- 2 $TS = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm.

Panjang garis singgung 8 cm. Segitiga 6–8–10 adalah tripel 3–4–5 yang dikali 2.

Dua lingkaran juga bisa punya garis singgung bersama, yang disebut **garis singgung persekutuan**. Sabuk karet pada dua roda puli mesin penggiling padi mengikuti garis singgung persekutuan **luar**. Untuk jari-jari R dan r dengan jarak pusat p :



Geser garis singgung AB sejajar sampai melewati pusat N : terbentuk segitiga siku-siku MQN dengan sisi miring p , kaki $R - r$, dan kaki l .

$$l_{\text{luar}} = \sqrt{p^2 - (R - r)^2}$$

$$l_{\text{dalam}} = \sqrt{p^2 - (R + r)^2}$$

Dua roda puli berjari-jari 9 cm dan 4 cm dihubungkan sabuk karet. Jarak kedua pusatnya 13 cm. Berapa panjang bagian sabuk yang lurus di antara kedua roda (satu sisi)?

1 Bagian lurus sabuk mengikuti garis singgung persekutuan luar: $l = \sqrt{p^2 - (R - r)^2}$.

2 $l = \sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$.

Setiap bagian lurus sabuk panjangnya 12 cm. Untuk garis singgung persekutuan dalam (sabuk menyilang membentuk huruf X), ganti $R - r$ dengan $R + r$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

KUASA TITIK

Tarik garis apa saja dari titik T di luar lingkaran yang memotong lingkaran di A dan B . Ajaibnya, hasil kali $TA \cdot TB$ selalu sama, berapa pun kemiringan garisnya, dan sama dengan kuadrat garis singgungnya:

$$TA \cdot TB = TS^2 = OT^2 - r^2.$$

Bilangan tetap ini disebut **kuasa titik** T . Untuk titik P di dalam lingkaran, dua tali busur AB dan CD yang melalui P memenuhi $PA \cdot PB = PC \cdot PD = r^2 - OP^2$. Contoh: $OT = 10$, $r = 6$, jadi $TS^2 = 64$. Jika sebuah garis dari T memotong lingkaran pertama kali pada jarak $TA = 4$, titik potong keduanya pasti di $TB = 64 : 4 = 16$. Buktinya memakai segitiga sebangun dan teorema sudut keliling (coba di Tangga Latihan Lv 6!).

20.7

Radian: mengukur sudut dengan jari-jari

Mengapa satu putaran 360° ? Angka itu warisan bangsa Babilonia yang gemar bilangan 60. Ada cara yang lebih "alami": ukur sudut dengan **berapa jari-jari** panjang busur yang dihadapinya.



DEFINISI

Sudut **satu radian** adalah sudut pusat yang menghadap busur sepanjang jari-jari. Satu putaran penuh menghadap busur sepanjang keliling $2\pi r$, yaitu 2π kali jari-jari, jadi

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad 180^\circ = \pi \text{ rad} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Dalam radian, rumus busur dan juring menjadi sangat ringkas, tanpa " $\frac{\theta}{360^\circ}$ ":

$$s = r\theta$$

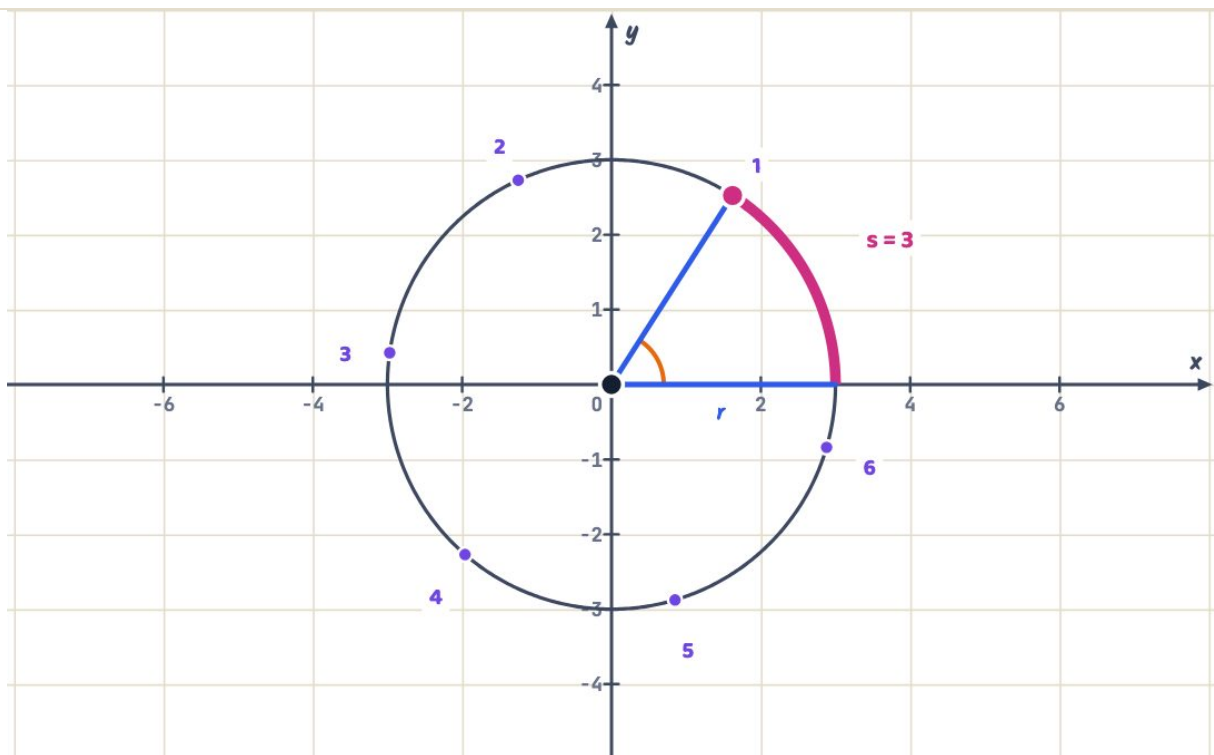
$$L_{\text{juring}} = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (\theta \text{ dalam radian})$$

GRAFIK HIDUP Satu radian: busur sepanjang jari-jari

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-20

$$s = r\theta \quad (\theta \text{ dalam radian})$$

$$s = r\theta = 3 \times 1 = 3 \quad \theta = 1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$$



$\theta = 1 \text{ rad}$: busur tepat sepanjang jari-jari ($\approx 57,3^\circ$)

θ (radian)
1

θ (derajat)
 $57,3^\circ$

busur $s = r\theta$
3

$s \div r$
1

Tekan ► **Jalankan**. Titik ungu menandai 1, 2, 3, ..., 6 radian. Berapa jari-jari yang muat di sekeliling lingkaran? Sedikit lebih dari 6, tepatnya $2\pi \approx 6,28$. Ubah r : apakah letak titik-titik ungu (sebagai sudut) ikut berubah?



TRIK KAK LINTANG

Ingat satu pasangan saja: **$180^\circ = \pi \text{ rad}$** . Dari derajat ke radian, kalikan $\frac{\pi}{180^\circ}$; dari radian ke derajat, kalikan $\frac{180^\circ}{\pi}$. Contoh: $60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, dan $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ$.

**AWAS JEBAKAN**

Kalkulator punya mode DEG (derajat) dan RAD (radian), dan hasil $\sin 30$ di kedua mode sangat berbeda. Rumus $s = r\theta$ dan $L = \frac{1}{2}r^2\theta$ hanya berlaku jika θ dalam radian; kalau sudutnya dalam derajat, ubah dulu.

RUMUS HIDUP**Kelajuan roda dari putaran per menit**

$$v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$$

Satu putaran sama dengan 2π radian. Kalikan banyak putaran per detik dengan 2π untuk mendapat kecepatan sudut ω , lalu kalikan jari-jari untuk mendapat kelajuan tepi roda.

n Putaran per menit rpm

r Jari-jari roda m

v Kelajuan km/jam

KELAJUAN

56,5

km/jam

**kelajuan wajar motor di jalan kota**

500 putaran per menit berarti kecepatan sudut $\omega \approx \mathbf{52,36}$ rad/s. Kelajuan titik di tepi roda $v = \omega r \approx \mathbf{15,708}$ m/s $\approx \mathbf{56,5}$ km/jam. Itulah juga kelajuan motor di jalan (kalau rodanya tidak selip).

Cek satuan: $\text{rpm} \div 60 = \text{putaran per detik}$; 1 putaran = 2π rad; 1 m/s = 3,6 km/jam.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RODA-RPM

Motor melaju 60 km/jam. Jari-jari rodanya 0,3 m. Berapa kecepatan sudut roda (rad/s) dan berapa putaran per menit?

1 $60 \text{ km/jam} = \frac{60.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} \approx 16,67 \text{ m/s}.$

2 $\omega = \frac{v}{r} = \frac{16,67}{0,3} \approx 55,6 \text{ rad/s}.$

3 Satu putaran = 2π rad, jadi putaran per detik = $\frac{55,6}{2\pi} \approx 8,84$, dan per menit $\approx 8,84 \times 60 \approx 530$ rpm.

Roda berputar $\pm 55,6 \text{ rad/s}$ atau sekitar 530 putaran per menit. Cek dengan Rumus Hidup di atas: $n = 530$, $r = 0,3$ memberi $\pm 59,9 \text{ km/jam}$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA MATEMATIKAWAN CINTA RADIAN?

Untuk sudut kecil, busur dan tali busurnya hampir sama panjang, sehingga $\sin \theta \approx \theta$ **asalkan θ dalam radian**. Contoh: $\sin(0,01) = 0,0099998 \dots$ Dalam derajat, hubungan itu berantakan: $\sin 1^\circ \approx 0,01745$, bukan 1. Karena itu, di kalkulus (Bab 28) turunan $\sin x$ adalah $\cos x$ hanya jika x dalam radian. Radian bukan satuan aneh, melainkan cara sudut "berbicara" dengan panjang.



Speedometer motor

Alat ini menghitung putaran roda, lalu mengalikannya dengan keliling roda. Ganti ban dengan ukuran berbeda, angkanya bisa meleset.



Bedug masjid

Kulit bedug dipotong melingkar sedikit lebih lebar daripada mulut bedug agar tepinya bisa dipasak di sekeliling badan bedug.



Jam Gadang

Setiap 5 menit, jarum menit jam mana pun, termasuk Jam Gadang di Bukittinggi, menyapu juring 30° .



Bundaran lalu lintas

Kendaraan di bundaran menempuh busur, bukan keliling penuh. Jalur luar lebih panjang daripada jalur dalam untuk sudut yang sama.



Satelit cuaca

Satelit geostasioner menempuh 2π radian dalam ± 24 jam, sama dengan putaran Bumi, sehingga tampak diam di atas Indonesia.



Membagi martabak

Membagi martabak menjadi 8 sama besar berarti setiap potong punya sudut pusat 45° , sedangkan 6 potong berarti 60° .

Cek Cepat

Keliling lingkaran yang diameternya 14 cm adalah... ($\pi = \frac{22}{7}$)

22 cm

154 cm

44 cm

88 cm

Sudut pusat $\angle AOB = 140^\circ$. Besar sudut keliling $\angle ACB$ dengan C pada busur besar AB adalah...

70°

140°

280°

110°

Satu radian kira-kira sama dengan...

1°

3,14°

180°

57,3°

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: berburu π di dapur

Bahan: benang atau tali rafia, penggaris atau meteran jahit, spidol, dan 5 benda bulat (tutup toples, piring, gelas, tutup panci, uang logam).

1. Lilitkan benang satu kali tepat di tepi benda pertama. Tandai titik pertemuan ujungnya dengan spidol.
2. Bentangkan benang dan ukur panjangnya sampai tanda: itulah keliling K .
3. Ukur diameter d : jarak terlebar dari tepi ke tepi yang melewati tengah benda.
4. Hitung $K \div d$ dengan kalkulator HP dan catat dalam tabel.
5. Ulangi untuk semua benda, lalu hitung rata-ratanya.

Pertanyaan: Berapa rata-rata $K \div d$ milikmu? Benda mana yang hasilnya paling dekat dengan 3,14, dan mengapa benda kecil (seperti uang logam) biasanya memberi hasil yang paling meleset?

RINGKASAN KILAT Bab 20 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- menyebutkan **unsur-unsur lingkaran**: pusat, jari-jari, diameter, tali busur, apotema, busur, juring, dan tembereng
- menjelaskan dari mana **bilangan π** berasal, lalu menghitung **keliling** dan **luas** lingkaran
- menghitung **panjang busur**, **luas juring**, dan **luas tembereng**
- memakai hubungan **sudut pusat dan sudut keliling** serta sifat **garis singgung**
- mengubah derajat ke **radian** dan memakai rumus $s = r\theta$

Istilah kunci

lingkaran

Lingkaran

pusat

jari-jari

diameter

Tali busur

Busur

Apotema

Juring

Tembereng

π

irasional

sudut pusat

sudut keliling

segi empat tali busur

garis singgung

Rumus penting

$$L = \pi r^2$$

Keliling & luas lingkaran. Luas lingkaran adalah π kali jari-jari kuadrat, sedangkan kelilingnya 2π kali jari-jari.

$$n = \frac{s}{\pi d}$$

Penghitung putaran roda. Satu putaran berarti maju sejauh satu keliling. Jadi banyak putaran sama dengan jarak tempuh dibagi keliling roda.

$$L_{\text{juring}} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

Busur, juring, dan tembereng. Juring adalah pecahan lingkaran. Pecahannya $\theta/360^\circ$, jadi luas juring = pecahan itu dikali luas lingkaran.

$$v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$$

Kelajuan roda dari putaran per menit. Satu putaran sama dengan 2π radian. Kalikan banyak putaran per detik dengan 2π untuk mendapat kecepatan sudut ω , lalu kalikan jari-jari untuk mendapat kelajuan tepi roda.

Jangan sampai terjebak

- Juring selalu punya "ujung lancip" di pusat lingkaran, sedangkan tembereng tidak menyentuh pusat sama sekali.
- Rumus luas memakai jari-jari, padahal soal sering memberi diameter.
- Pastikan sudut keliling dan sudut pusat menghadap busur yang sama.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=20

Teka-teki untuk Bab 21

Tandon air di atap rumah Ayu berbentuk tabung. Alasnya lingkaran bergaris tengah 1 m dan tingginya 1,2 m. Kalau terisi penuh, berapa liter air yang ditampungnya? Cukupkah untuk 4 orang yang masing-masing memakai ± 100 liter sehari?

▼ Intip petunjuk

Hitung dulu luas alasnya dengan rumus luas lingkaran (jari-jarinya 0,5 m!), lalu kalikan dengan tinggi tandon. Ingat, $1 \text{ m}^3 = 1.000$ liter. Bab 21 akan membahas volume tabung, kerucut, bola, dan bangun ruang lainnya.

21 Bangun Ruang: Berapa Isinya, Seberapa Luas Kulitnya?

Berapa liter air di tandon di atas rumahmu? Mengapa tumpeng hanya sepertiga dari "tabung" nasi yang sama tinggi? Di bab ini kamu akan membungkus, menuang, memotong, dan memperbesar bangun ruang.

Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **jaring-jaring** kubus, balok, prisma, tabung, dan kerucut;
- menghitung **luas permukaan** dan **volume** kubus, balok, prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola, lengkap dengan satuan liter;
- menjelaskan mengapa volume limas dan kerucut tepat **sepertiga** dari prisma dan tabung pasangannya;
- memakai **faktor skala k** : luas menjadi k^2 kali, volume menjadi k^3 kali, juga pada bangun gabungan;
- memeriksa **rumus Euler** $T - R + S = 2$ pada berbagai polihedron.

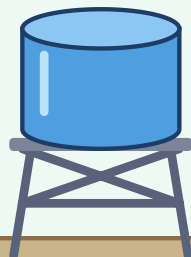
MISTERI TANDON DI MENARA AIR

KOMIK • 4 PANEL

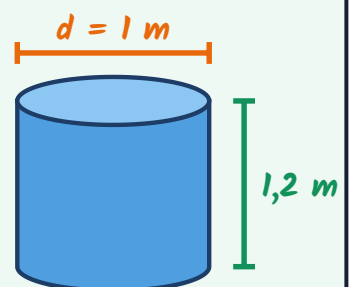
Minggu pagi, di halaman rumah Ayu

DIMAS

Wah, tandon di menara itu pasti muat 5.000 liter! Besar banget!

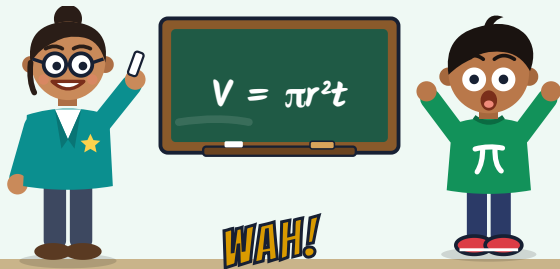
**AYU**

Menebak boleh, tapi ukur dulu.
Diameternya 1 meter, tingginya 1,2 meter.



KAK LINTANG

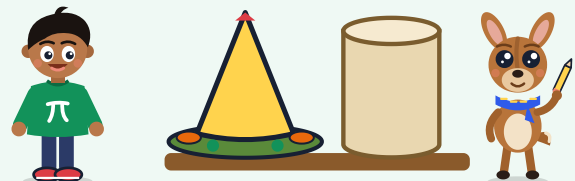
Volume tabung = luas alas $\times$ tinggi. $\pi \times 0,5^2 \times 1,2 \approx 0,94 \text{ m}^3$. Jadi sekitar 942 liter, bukan 5.000!

**Ancil datang membawa tumpeng****ANCIL**

Tumpeng ini kerucut. Kalau alas dan tingginya sama dengan sebuah tabung, isinya cuma sepertiga!

DIMAS

Sepertiga? Bukan setengah?!

**Tebak Dulu!**

Sebuah bak mandi berbentuk kubus berukuran $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Berapa liter air yang dapat ditampungnya jika penuh?

100 liter, karena $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$.

1.000 liter.

10.000 liter.

1.000.000 liter.

Jawabannya: 1.000 liter. Satu liter adalah isi kubus bersisi 10 cm (1 dm). Kubus bersisi 1 m memuat $10 \times 10 \times 10 = 1.000$ kubus seperti itu. Jebakannya: mengubah satuan panjang cukup dikali 100, tetapi satuan **volume** berubah tiga kali lipat lebih cepat: $1 \text{ m}^3 = 100^3 \text{ cm}^3 = 1.000.000 \text{ cm}^3$.

21.1 Kubus dan balok: membungkus dan mengisi

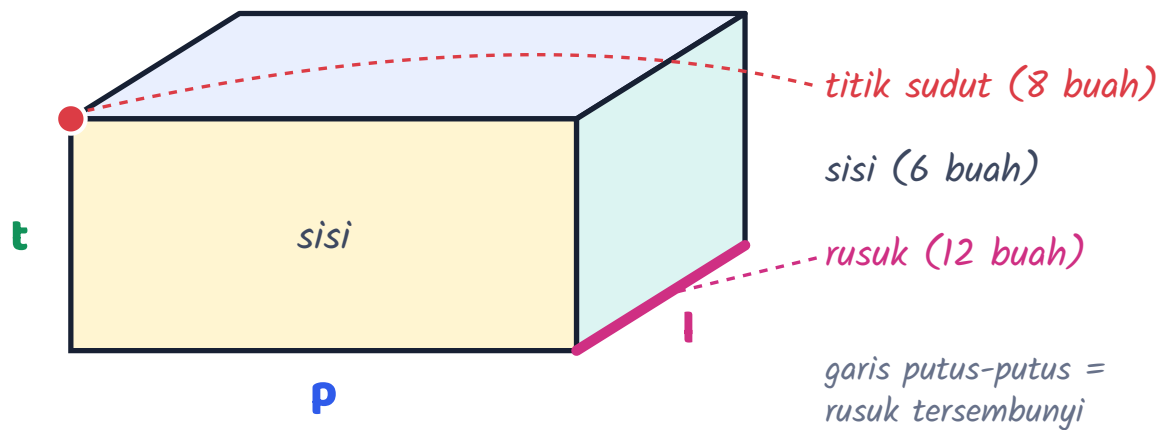
Kardus mi instan, kotak susu, dadu, dan lemari: semuanya **bangun ruang**, benda tiga dimensi yang punya panjang, lebar, dan tinggi. Untuk setiap bangun ruang ada dua pertanyaan besar. Berapa banyak karton yang dibutuhkan untuk **membungkusnya**? Berapa banyak isi yang **muat di dalamnya**?



DEFINISI

Bangun ruang dibatasi oleh **sisi** (bidang), **rusuk** (garis pertemuan dua sisi), dan **titik sudut** (pojok tempat rusuk-rusuk bertemu).

- **Luas permukaan** adalah jumlah luas semua sisinya, yaitu luas "kulit" atau luas **jaring-jaringnya**. Satuannya cm^2 , m^2 , dan seterusnya.
- **Volume** adalah banyaknya kubus satuan yang tepat mengisi bangun itu. Satuannya cm^3 , m^3 , atau liter.



Balok $p \times l \times t$: 6 sisi berbentuk persegi panjang yang berpasangan, 12 rusuk, dan 8 titik sudut.

Bahasa sederhana • Bayangkan kamu membungkus kado berbentuk kotak. Kertas kado yang kamu pakai mengukur **luas permukaan**. Kalau kotaknya kamu isi kelereng atau air, banyaknya isi itu mengukur **volume**. Bungkus = luas, isi = volume.

Gunting rusuk-rusuk sebuah kardus lalu bentangkan: kamu mendapat **jaring-jaring**. Kubus punya tepat **11** jaring-jaring yang berbeda. Tetapi tidak setiap susunan enam persegi bisa dilipat menjadi kubus. Coba sendiri!

Sudut lipat

36 °

Hasil

sedang melipat

Pilih sebuah pola. **Tebak dulu** apakah pola itu akan menutup menjadi kubus, lalu tekan ► **Jalankan** atau geser slider sudut lipat. Seret gambar untuk memutar. Ada 15 pola: 11 jaring-jaring kubus dan 4 jebakan. Bisakah kamu menemukan keempat jebakannya, dan apa kesamaan mereka?



RUMUS KUBUS DAN BALOK

Bangun	Luas permukaan	Volume
Kubus bersisi s	$L = 6s^2$	$V = s^3$
Balok $p \times l \times t$	$L = 2(pl + pt + lt)$	$V = p \times l \times t$

Volume balok bercerita: ada $p \times l$ kubus satuan di lapisan dasar, dan ada t lapisan.

$$V = p \times l \times t$$

Isi balok = banyaknya kubus satuan = panjang $\times$ lebar $\times$ tinggi. Kulitnya terdiri atas enam persegi panjang yang berpasangan.



Kardus $30 \times 20 \times 15$ cm memuat $9.000 \text{ cm}^3 = 9$ liter. Kartonnya (tanpa lidah lem) seluas $2(pl + pt + lt) = 2.700 \text{ cm}^2$.

Cek satuan: $\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^3$, dan $1.000 \text{ cm}^3 = 1$ liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BALOK-KARDUS

CONTOH Kotak nasi untuk syukuran

Kotak nasi berbentuk balok berukuran $20 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Berapa volumenya, dan berapa luas karton untuk membuatnya (abaikan lidah lem)?

- 1 Volume: $V = 20 \times 15 \times 6 = 1.800 \text{ cm}^3$, kira-kira 1,8 liter.
- 2 Tiga pasang sisi: $pl = 300$, $pt = 120$, $lt = 90 \text{ cm}^2$.
- 3 Luas permukaan: $L = 2(300 + 120 + 90) = 2 \times 510 = 1.020 \text{ cm}^2$.

Volume 1.800 cm^3 dan luas karton 1.020 cm^2 . Perhatikan satuannya: volume memakai cm^3 , luas memakai cm^2 .



TRIK KAK LINTANG

Ingat satu kubus ajaib: **kubus bersisi 10 cm memuat tepat 1 liter**. Dari situ semuanya mengalir: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$, $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, dan $1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ L}$. Setiap naik satu "anak tangga" satuan panjang ($\times 10$), volumenya naik $\times 1.000$.



ADU CEPAT

Kubus kilat: dari volume ke luas

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

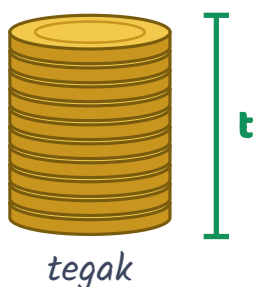
Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari dulu rusuknya: bilangan yang dipangkatkan tiga menghasilkan V (mis. $64 = 4^3$). Lalu luas permukaan = $6 \times \text{rusuk}^2$.

21.2

Prisma dan tabung: luas alas kali tinggi

Ambil satu koin dan tumpuk sepuluh koin yang sama di atasnya. Isi tumpukan itu = isi satu koin $\times$ banyaknya lapisan. Begitulah cara kerja semua **prisma**: bangun ruang yang alas dan tutupnya kongruen dan sejajar, dengan "lapisan" yang sama di setiap ketinggian. Balok adalah prisma beralas persegi panjang. **Tabung** adalah "prisma" beralas lingkaran.



Sepuluh koin yang sama.

Didorong miring pun,
isinya tidak berubah.

$$V = \text{luas alas} \times t$$

Prinsip Cavalieri: dua bangun yang luas irisannya sama di setiap ketinggian punya volume yang sama, walaupun yang satu miring.



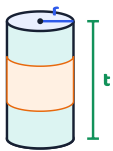
VOLUME PRISMA DAN TABUNG

Untuk setiap prisma (tegak maupun miring) dengan luas alas L_a dan tinggi t :

$$V = L_a \times t, \quad V_{\text{tabung}} = \pi r^2 t$$

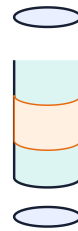
Luas permukaan tabung: $L = 2\pi r^2 + 2\pi r t$ (dua tutup lingkaran + selimut).

Dari mana rumus luas tabung? Buka saja kalengnya seperti di animasi ini.



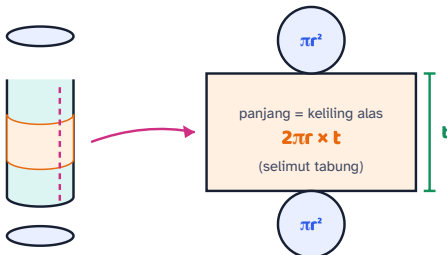
Kaleng berbentuk tabung:
jari-jari alas r , tinggi t .
Kulitnya terdiri atas tiga bagian.

Langkah 1. Sebuah kaleng berbentuk tabung dengan jari-jari alas r dan tinggi t .

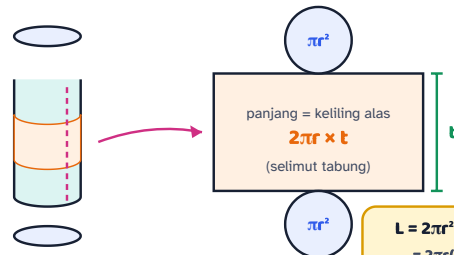


Lepaskan tutup atas dan bawah:
dua lingkaran berjari-jari r ,
masing-masing luasnya πr^2 .

Langkah 2. Lepaskan tutup atas dan tutup bawah. Keduanya lingkaran berjari-jari r , luas masing-masing πr^2 .



Langkah 3. Gunting selimutnya lurus ke bawah, lalu bentangkan. Hasilnya persegi panjang setinggi t yang panjangnya sama dengan keliling alas, $2\pi r$.



Langkah 4. Jumlahkan ketiga bagian: $L = 2\pi r^2 + 2\pi r t = 2\pi r(r + t)$. Tanpa tutup (seperti gelas), cukup $\pi r^2 + 2\pi r t$.

$$V = \pi r^2 t$$

Luas lingkaran alas dikali tinggi. Bagi dengan 1.000 untuk mengubah cm^3 menjadi liter.

 r

Jari-jari alas cm

 t

Tinggi cm

 V

Volume liter

VOLUME

942,5

liter

Luas alas $\pi \times 50^2 \approx 7.853,982 \text{ cm}^2$. Dikali tinggi **120** cm lalu dibagi 1.000, volumenya $\approx$ **942,5** liter: cukup untuk mengisi **49** galon air 19 liter sampai penuh.

Cek satuan: $\text{cm}^2 \times \text{cm} = \text{cm}^3$; $1.000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ liter}$ dan $1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ liter}$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TABUNG-TANDON

CONTOH

Jawaban teka-teki tandon

Tandon di komik berbentuk tabung dengan diameter 1 m dan tinggi 1,2 m. Berapa liter isinya bila penuh? Berapa galon air 19 liter yang dibutuhkan untuk mengisinya?

1 Jari-jari $r = 0,5 \text{ m}$. Luas alas $\pi r^2 = 0,25\pi \approx 0,785 \text{ m}^2$.

2 $V = 0,25\pi \times 1,2 = 0,3\pi \approx 0,942 \text{ m}^3$.

3 $1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ L}$, jadi $V \approx 942 \text{ liter}$. Banyak galon: $942 : 19 \approx 49,6$.

Tandon memuat ≈ 942 liter, setara hampir 50 galon. Tebakan Dimas (5.000 liter) lebih dari lima kali terlalu besar!



AWAS JEBAKAN

Samakan dulu satuannya sebelum mengalikan. Jari-jari 50 cm dan tinggi 1,2 m tidak boleh langsung dikalikan menjadi $\pi \times 50^2 \times 1,2$. Ubah semuanya ke cm (atau semuanya ke m), baru hitung. Ingat juga: $1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ liter}$, bukan 100 liter.



ADU CEPAT

Tabung kilat: isi kotaknya

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tulis angka di depan π saja, yaitu $r \times r \times t$. Contoh: $r = 3$ dan $t = 5$ memberi $V = 45\pi$, jadi ketik 45.

21.3 Limas dan kerucut: misteri sepertiga

Jika semua titik pada tepi alas dihubungkan ke satu titik puncak, kita mendapat **limas** (alas segi banyak) atau **kerucut** (alas lingkaran). Tumpeng adalah kerucut, piramida Mesir adalah limas segi empat.



Tebak Dulu!

Sebuah kerucut dan sebuah tabung punya jari-jari alas dan tinggi yang sama. Kerucut diisi air sampai penuh lalu dituang ke tabung. Berapa kali menuang agar tabung penuh?

2 kali, karena kerucut itu "setengah tabung".

3 kali.

4 kali.

π kali, karena alasnya lingkaran.

Jawabannya: tepat 3 kali. Kerucut tampak seperti setengah tabung, tetapi bagian dekat puncaknya sangat ramping. Irisan di tengah tinggi kerucut jari-jarinya hanya setengah, jadi luasnya cuma seperempat alas. Akibatnya isi kerucut tepat $\frac{1}{3}$ isi tabung. Lihat sendiri di Lab Mini berikut.

V kerucut

314,2 cm³

V tabung

942,5 cm³

Tuangan selesai

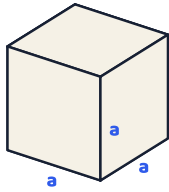
0

Tabung terisi

0 %

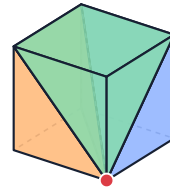
Tekan ► **Jalankan:** kerucut diisi dari keran lalu dituang ke tabung. Hitung berapa kali menuang sampai penuh. Ubah jari-jari dan tinggi sesukamu. Apakah jawabannya pernah berubah?

Untuk limas ada bukti tanpa kata yang indah: **sebuah kubus bisa dibelah menjadi tiga limas yang sama persis.**



Kubus bersisi a .
Volumenya $a \times a \times a = a^3$.

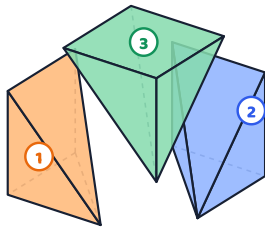
Langkah 1. Mulai dari kubus bersisi a . Volumennya a^3 .



Pilih satu pojok (titik merah).
Hubungkan ke semua pojok lain:
kubus terbelah menjadi 3 limas.

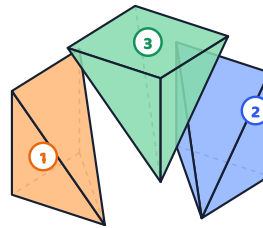
titik puncak bersama

Langkah 2. Pilih satu pojok sebagai puncak bersama. Tarik garis dari pojok itu ke semua pojok lain: kubus terbelah menjadi tiga limas (biru, oranye, hijau).



Uraikan ketiganya!
Setiap limas beralas persegi $a \times a$ dan tingginya a . Ketiganya kembar.

Langkah 3. Uraikan ketiganya. Setiap limas beralas salah satu sisi kubus ($a \times a$) dan puncaknya tepat di atas salah satu pojok alas, setinggi a . Ketiganya kongruen.



3 limas kembar = 1 kubus

$V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} \times a^2 \times a$
 $= \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$

Langkah 4. Tiga limas kembar mengisi satu kubus, jadi satu limas bervolume $\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3} \times a^2 \times a$, yaitu sepertiga luas alas kali tinggi.



VOLUME DAN LUAS LIMAS SERTA KERUCUT

Untuk limas dan kerucut dengan luas alas L_a dan tinggi t :

$$V = \frac{1}{3} L_a \times t, \quad V_{\text{kerucut}} = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$

Luas permukaan kerucut: $L = \pi r^2 + \pi r s$, dengan **garis pelukis** $s = \sqrt{r^2 + t^2}$ (Pythagoras dari Bab 18). Luas limas = luas alas + jumlah luas segitiga sisi tegaknya.

▼ Bukti dengan irisan tipis (untuk yang sudah kenal jumlah kuadrat)

Potong limas setinggi t menjadi n lempeng setebal t/n . Lempeng ke- k dari puncak berukuran k/n kali alas, jadi luasnya $(k/n)^2 L_a$. Jumlah volume lempeng:

$$V \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 L_a \cdot \frac{t}{n} = L_a t \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = L_a t \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Untuk n yang makin besar, pecahan terakhir mendekati $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Jadi $V = \frac{1}{3} L_a t$ untuk **alas apa pun**, termasuk lingkaran. Inilah ide awal kalkulus integral (Bab 30).

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

Sepertiga dari tabung yang alas dan tingginya sama.

r Jari-jari alas cm

t Tinggi cm

V Volume tumpeng cm^3

VOLUME TUMPENG

4.712

cm^3

✨ garis pelukis bulat: ada tripel Pythagoras!

Tabung yang alas dan tingginya sama berisi **14.137,167** cm^3 . Tumpengnya sepertiganya: **4.712** $\text{cm}^3 \approx 4,712$ liter nasi. Garis pelukis $s = \sqrt{(r^2 + t^2)} = 25$ cm, jadi selimut yang dihias lauk seluas $\pi rs \approx 1.178,097$ cm^2 .

Cek satuan: $\text{cm}^2 \times \text{cm} = \text{cm}^3$; bagi 1.000 untuk liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KERUCUT-TUMPENG

Tumpeng berbentuk kerucut dengan jari-jari alas 15 cm dan tinggi 20 cm. Berapa liter nasinya? Berapa luas selimut yang ditutup daun pisang?

1 Volume: $V = \frac{1}{3}\pi \times 15^2 \times 20 = \frac{1}{3}\pi \times 4.500 = 1.500\pi \approx 4.712 \text{ cm}^3 \approx 4,7$ liter.

2 Garis pelukis: $s = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ cm (tripel 3-4-5 dikali 5).

3 Luas selimut: $\pi rs = \pi \times 15 \times 25 = 375\pi \approx 1.178 \text{ cm}^2$.

Nasinya $\pm 4,7$ liter dan daun pisangnya $\pm 1.178 \text{ cm}^2$. Perhatikan: luas selimut memakai garis pelukis 25 cm, bukan tinggi 20 cm.



AWAS JEBAKAN

Luas selimut kerucut memakai **garis pelukis** s , bukan tinggi t . Tinggi berdiri tegak di dalam kerucut, sedangkan garis pelukis menempel di kulitnya. Hitung dulu $s = \sqrt{r^2 + t^2}$.



MATEMATIKA NUSANTARA

Tumpeng hadir dalam syukuran di banyak daerah di Indonesia. Bentuk kerucutnya sering dimaknai sebagai gunung yang menjulang. Bagi juru masak, bentuk ini juga hemat: kerucut setinggi 20 cm hanya butuh sepertiga nasi dari "tabung nasi" seukuran, tetapi tetap tampak megah karena tingginya. Cetakan tumpeng dari anyaman bambu (kukusan) pun berbentuk kerucut.

21.4

Bola: kulit jeruk dan makam Archimedes

Bola adalah kumpulan semua titik di ruang yang jaraknya tepat r dari satu titik pusat. Kelereng, bola sepak, dan buah jeruk berbentuk (hampir) bola. Bola tidak punya rusuk dan tidak punya titik sudut, hanya satu sisi lengkung.



LUAS DAN VOLUME BOLA

Untuk bola berjari-jari r :

$$L = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Kulit bola tepat sama dengan **empat** lingkaran terbesarnya. Coba kupas jeruk dan susun kulitnya: potongan kulit itu cukup untuk menutup sekitar empat lingkaran seukuran jeruk!

Bahasa sederhana • Cara mudah mengingat: **kulit** diukur dengan pangkat dua (r^2), **isi** diukur dengan pangkat tiga (r^3). Angka di depannya: kulit "4", isi "4 per 3".



TAMU DARI MASA LALU

Archimedes dari Syrakusa (± 287 –212 SM) membuktikan bahwa bola yang pas di dalam tabung (tinggi tabung = diameter bola) punya volume **dan** luas permukaan tepat $\frac{2}{3}$ dari tabung itu. Ia begitu bangga sehingga meminta gambar bola di dalam tabung dipahat di makamnya. Menurut Cicero, negarawan Romawi, makam itu ia temukan kembali sekitar tahun 75 SM, tertutup semak, dan ia mengenalinya dari gambar tersebut.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

BOLA = TABUNG – KERUCUT (IDE ARCHIMEDES)

Letakkan setengah bola berjari-jari r di samping sebuah tabung (jari-jari r , tinggi r) yang di dalamnya dilubangi kerucut terbalik (puncak di dasar). Iris keduanya pada ketinggian h . Irisan setengah bola adalah lingkaran berjari-jari $\sqrt{r^2 - h^2}$, luasnya $\pi(r^2 - h^2)$. Irisan tabung berlubang adalah cincin dengan jari-jari luar r dan jari-jari dalam h , luasnya $\pi r^2 - \pi h^2$. **Sama di setiap ketinggian!** Menurut prinsip Cavalieri volumenya sama:

$$V_{\frac{1}{2}\text{bola}} = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3 \implies V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

RUMUS HIDUP

Volume dan luas bola

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pangkat tiga untuk isi, pangkat dua untuk kulit: $L = 4\pi r^2$, empat kali luas lingkaran terbesarnya.

r Jari-jari cm V Volume cm³

VOLUME
5.575,3
cm³

seukuran bola sepak

Kulit bola **1.520,531** cm², tepat 4 × luas lingkaran terbesarnya (**380,133** cm²). Tabung pembungkusnya (jari-jari **11** cm, tinggi **22** cm) bervolume **8.362,92** cm³, dan bola mengisi tepat **66,667%** tabung itu.

Cek satuan: cm³ untuk isi, cm² untuk kulit.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BOLA-VOLUME](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-BOLA-VOLUME)

Bola sepak berjari-jari ± 11 cm. Berapa luas kulitnya dan berapa liter udara di dalamnya?

- 1 Luas: $L = 4\pi \times 11^2 = 484\pi \approx 1.520,5 \text{ cm}^2$.
- 2 Volume: $V = \frac{4}{3}\pi \times 11^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1.331 \approx 5.575 \text{ cm}^3$.
- 3 Dalam liter: $5.575 : 1.000 \approx 5,6$ liter.

Kulitnya $\pm 1.520 \text{ cm}^2$ dan isinya $\pm 5,6$ liter udara, hampir sama dengan isi empat botol air mineral 1,5 liter.



MATEMATIKA NUSANTARA

Di tiga teras melingkar paling atas Candi Borobudur berdiri **72 stupa berterawang** (32, 24, dan 16 buah), mengelilingi satu stupa induk yang besar. Bentuk stupa mirip lonceng: kira-kira setengah bola di atas alas, dengan puncak meruncing. Arsitek modern memakai rumus bangun gabungan (setengah bola + tabung + kerucut) untuk memperkirakan volume batu dalam bangunan seperti ini. Bedug di masjid juga contoh tabung: kulit penutupnya berupa lingkaran dengan luas πr^2 .

Bangun	Luas permukaan	Volume
Kubus (rusuk s)	$6s^2$	s^3
Balok	$2(pl + pt + lt)$	plt
Prisma	$2L_a + K_a \times t$	$L_a \times t$
Tabung	$2\pi r^2 + 2\pi rt$	$\pi r^2 t$
Limas	$L_a + \text{luas sisi-sisi tegak}$	$\frac{1}{3} L_a \times t$
Kerucut	$\pi r^2 + \pi rs$	$\frac{1}{3} \pi r^2 t$
Bola	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3} \pi r^3$

(L_a = luas alas, K_a = keliling alas, s = garis pelukis.)

21.5 Bangun gabungan dan perbesaran: k , k^2 , k^3

Benda nyata jarang berbentuk satu bangun saja. Es krim kerucut adalah kerucut + setengah bola. Kapsul obat adalah tabung + dua setengah bola. Kuncinya: **pecah menjadi bangun-bangun dasar, hitung masing-masing**,

lalu jumlahkan (atau kurangkan untuk bagian yang berlubang).

COBA SENDIRI Es krim kerucut

Cone es krim berbentuk kerucut dengan jari-jari 3 cm dan tinggi 10 cm, terisi penuh, lalu di atasnya ada satu sendok es krim berbentuk setengah bola berjari-jari 3 cm. Berapa volume es krim seluruhnya?

- 1 Bagian kerucut: $\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi \text{ cm}^3$.
- 2 Bagian setengah bola: $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$.
- 3 Jumlah: $30\pi + 18\pi = 48\pi \approx 150,8 \text{ cm}^3$.

Volume es krim $48\pi \approx 150,8 \text{ cm}^3$ ($\pm 151 \text{ mL}$). Menyimpan π sampai akhir membuat hitungan rapi dan tepat.



Tebak Dulu!

Semua rusuk sebuah kubus diperpanjang menjadi 2 kali semula. Volumennya menjadi berapa kali semula?

2 kali.

4 kali.

6 kali.

8 kali.

Jawabannya: 8 kali. Kubus bersisi 2 tersusun atas $2 \times 2 \times 2 = 8$ kubus bersisi 1. Panjang dikali 2 di tiga arah sekaligus, jadi volume dikali $2^3 = 8$. Luas permukaannya hanya dikali $2^2 = 4$.

Luas permukaan = $6k^2$ **54 persegi**Volume = k^3 **27 kubus**Luas ÷ volume = $6/k$ **2**

Geser k dan bandingkan tiga batang di kiri: panjang tumbuh $\times k$, luas $\times k^2$, volume $\times k^3$. Lalu tekan  **Cat lalu potong**: kubus besar dicat di semua sisi, kemudian dipotong menjadi kubus satuan. Pakai slider **Urai** dan pilihan **Tampilkan** untuk menghitung kubus yang 3, 2, 1, dan 0 sisinya bercat.

**SIFAT PERBESARAN (BANGUN SEBANGUN)**

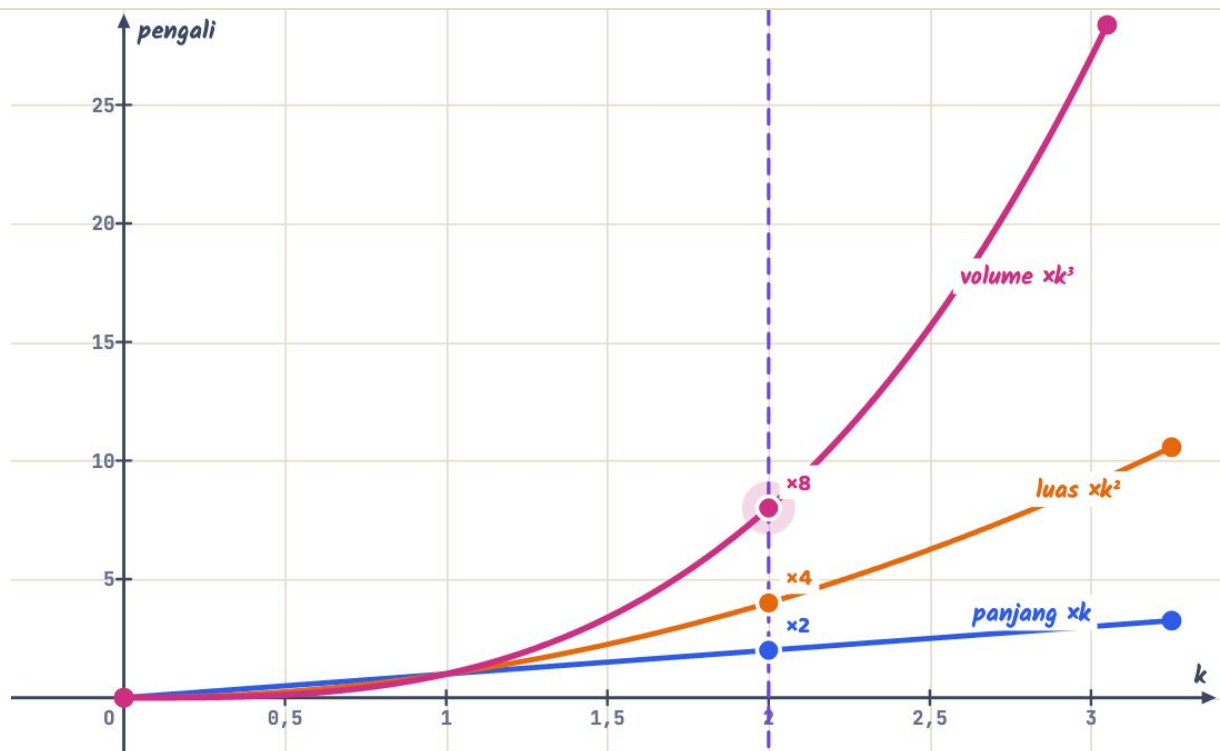
Jika semua ukuran panjang sebuah bangun dikali faktor skala k , maka

$$\text{panjang} \times k, \quad \text{luas} \times k^2, \quad \text{volume} \times k^3.$$

Sifat ini berlaku untuk bangun apa pun (tumpeng, galon, patung), selama bentuknya sebangun.

$$y = k, \quad y = k^2, \quad y = k^3$$

$$k = 2 : \quad \times 2, \quad \times 4, \quad \times 8$$



k > 1: diperbesar, volume melesat paling cepat

Panjang $\times$
2

Luas $\times$
4

Volume $\times$
8

Seret titik magenta di sepanjang kurva volume. Cari nilai k yang membuat volume tepat 8 kali, lalu 27 kali. Apa yang terjadi pada ketiga kurva saat $k < 1$?

$$V' = k^3 \times V$$

Jika semua panjang dikali k , luas dikali k^2 dan volume dikali k^3 .

k Faktor skala kali

V Volume awal liter

V' Volume baru liter

VOLUME BARU

12

liter

$\times 2$ panjang $\Rightarrow \times 8$ isi

Tumpeng **1,5** liter dibuat ulang dengan bentuk sama: tingginya $\times 2$, daun pisang pembungkusnya $\times 4$, dan nasinya $\times 8$. Butuh **12** liter nasi!

Cek satuan: Faktor skala tidak bersatuan, jadi satuan volume baru sama dengan satuan volume awal.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SKALA-K3

Tumpeng mini setinggi 10 cm butuh 0,5 liter nasi dan 300 cm² daun pisang. Untuk acara desa dibuat tumpeng sebangun setinggi 30 cm. Berapa nasi dan daun pisang yang dibutuhkan?

- 1 Faktor skala $k = 30 : 10 = 3$.
- 2 Daun pisang (luas): $300 \times 3^2 = 2.700 \text{ cm}^2$.
- 3 Nasi (volume): $0,5 \times 3^3 = 13,5 \text{ liter}$.

Tingginya hanya 3 kali, tetapi nasinya 27 kali: 13,5 liter! Daun pisangnya 9 kali: 2.700 cm².

MITOS

"Kalau semua rusuk dijadikan 2 kali, volumenya juga 2 kali."

MITOS

"Bangun yang kulitnya lebih luas pasti isinya lebih banyak."

FAKTA

Volume menjadi

$$2^3 = 8$$

kali, karena panjang, lebar, dan tinggi masing-masing dikali 2. Luas permukaannya menjadi

$$2^2 = 4$$

kali.

FAKTA

Balok $1 \times 1 \times 20$ cm luasnya 82 cm^2 tetapi isinya 20 cm^3 . Kubus bersisi 3 cm luasnya hanya 54 cm^2 , tetapi isinya 27 cm^3 .

MITOS

"Volume kerucut itu setengah volume tabung."

FAKTA

Sepertiga! Kerucut sangat ramping di dekat puncak. Tiga kerucut penuh tepat mengisi satu tabung yang alas dan tingginya sama.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

KALENG PALING HEMAT BAHAN

Pabrik ingin membuat kaleng tertutup bervolume V dengan bahan seminimal mungkin. Dari $V = \pi r^2 t$ diperoleh $t = V/(\pi r^2)$, sehingga luas bahannya

$$L(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r t = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

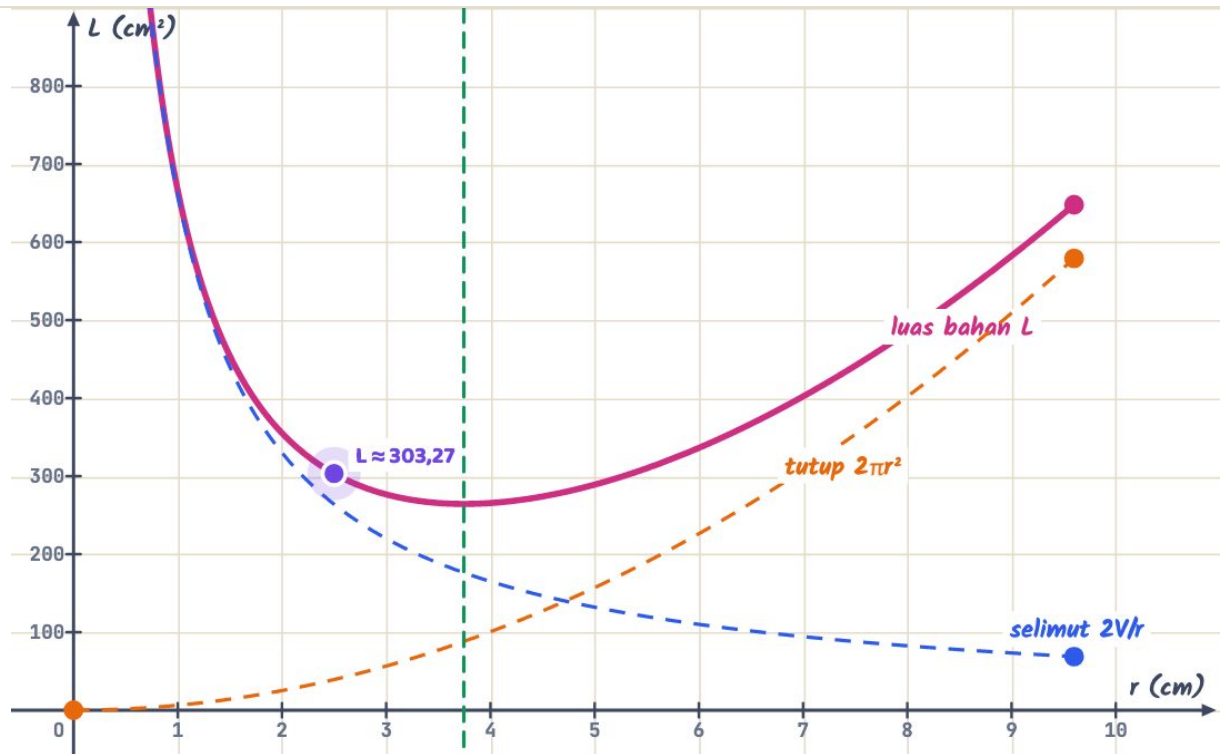
Jari-jari kecil membuat kaleng tinggi dengan selimut luas; jari-jari besar membuat tutup yang lebar.

Dengan turunan, $L'(r) = 4\pi r - 2V/r^2 = 0$ memberi $r^3 = \frac{V}{2\pi}$. Akibatnya $t = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$:

kaleng paling hemat tingginya sama dengan diameternya. Kaleng minuman di toko lebih langsing karena alasan lain, misalnya tutup yang lebih tebal dan mudah digenggam.

$$L(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$V = 330 \text{ mL}, r = 2,5 \text{ cm} \Rightarrow t = 16,81 \text{ cm}, L = 303,27 \text{ cm}^2$$



Tinggi t
16,81 cm

Luas L
303,3 cm²

$t : r$
6,72

r paling hemat
3,74 cm

Seret titik ungu menuruni lembah kurva magenta. Di titik terendah, berapa perbandingan $t : r$? Ubah V : apakah perbandingannya ikut berubah?

21.6 Rumus Euler: $T - R + S = 2$

Bangun ruang yang semua sisinya datar (segi banyak) disebut **polihedron**. Kubus, prisma, dan limas adalah polihedron; tabung, kerucut, dan bola bukan, karena punya sisi lengkung. Hitunglah titik sudut (T), rusuk (R), dan sisi (S) sebuah kubus: $8 - 12 + 6 = 2$. Prisma segitiga: $6 - 9 + 5 = 2$. Kebetulan?

LAB MINI Mesin polihedron: hitung T , R , dan S

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-21

Titik sudut T
12

Rusuk R
18

Sisi S
8

$T - R + S$
2

Pilih bangun dan ubah n . Seret untuk memutar, nyalakan nomor titik sudut, lalu hitung sendiri sebelum membaca angka di panel. Bisakah kamu menemukan bangun yang membuat $T - R + S$ bukan 2?



RUMUS EULER UNTUK POLIHEDRON

Untuk setiap polihedron konveks (tidak berlubang dan tidak cekung) dengan T titik sudut, R rusuk, dan S sisi berlaku

$$T - R + S = 2$$

Di buku berbahasa Inggris rumus ini ditulis $V - E + F = 2$ (*vertices, edges, faces*).

Polihedron	T	R	S	$T - R + S$
Kubus / balok	8	12	6	2
Prisma segitiga	6	9	5	2

Limas segi empat	5	8	5	2
Tetrahedron (limas segitiga)	4	6	4	2
Oktahedron	6	12	8	2
Dodekahedron	20	30	12	2
Ikosahedron	12	30	20	2
Prisma segi- n	$2n$	$3n$	$n + 2$	2
Limas segi- n	$n + 1$	$2n$	$n + 1$	2

COBA SENDIRI Bola sepak klasik

Bola sepak klasik dijahit dari 12 segi lima dan 20 segi enam. Berapa banyak rusuk (jahitan) dan titik sudutnya? Apakah rumus Euler berlaku?

- 1 Banyak sisi: $S = 12 + 20 = 32$.
- 2 Setiap jahitan dipakai bersama oleh dua potongan: $R = \frac{12 \times 5 + 20 \times 6}{2} = \frac{180}{2} = 90$.
- 3 Di setiap titik sudut bertemu tiga potongan: $T = \frac{180}{3} = 60$.
- 4 Cek Euler: $T - R + S = 60 - 90 + 32 = 2$. ✓

Ada 90 jahitan dan 60 titik sudut. Lebih hebat lagi: dari rumus Euler bisa dibuktikan bahwa bola yang dijahit hanya dari segi lima dan segi enam (tiga potongan di tiap titik) selalu memakai tepat 12 segi lima!



TAMU DARI MASA LALU

Leonhard Euler (1707-1783), matematikawan Swiss yang tetap produktif bahkan setelah kehilangan penglihatannya, menulis hubungan $T - R + S = 2$ dalam suratnya kepada Christian Goldbach sekitar tahun 1750. Rumus sederhana ini menjadi salah satu benih *topologi*, cabang matematika yang mempelajari sifat bangun yang tidak berubah walaupun bangunnya ditekuk atau diregangkan.

**MENGAPA BANGUN PLATON HANYA ADA LIMA?**

Bangun Platon adalah polihedron yang semua sisinya segi- p beraturan yang sama, dengan q sisi bertemu di setiap titik sudut ($p, q \geq 3$). Setiap rusuk dimiliki dua sisi dan menghubungkan dua titik sudut, jadi $pS = 2R$ dan $qT = 2R$. Masukkan ke rumus Euler:

$$\frac{2R}{q} - R + \frac{2R}{p} = 2 \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{R} > \frac{1}{2}.$$

Pasangan (p, q) yang memenuhi hanya $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$: tetrahedron, oktahedron, kubus, ikosahedron, dan dodekahedron. Tidak mungkin ada yang keenam!

**Tumpeng**

Kerucut nasi: volumenya menentukan banyak beras yang dimasak, luas selimutnya menentukan banyak daun dan lauk penghias.

**Tandon air**

Tandon tabung 1.000 liter di atap rumah dipilih dari hitungan $\pi r^2 t$ dan kebutuhan air harian keluarga.

**Kemasan susu kotak**

Pabrik memilih ukuran balok yang memuat 200 mL dengan karton sesedikit mungkin, karena luas permukaan berarti biaya.

**Bedug masjid**

Badan bedug berbentuk tabung; luas kulit penutupnya πr^2 , dan isinya ikut menentukan dalamnya dentuman.

**Stupa Borobudur**

Stupa berbentuk lonceng dapat didekati sebagai bangun gabungan setengah bola, tabung, dan kerucut.

**Es serut vs balok es**

Es serut cepat mencair karena perbandingan luas terhadap volume sangat besar (ingat $6/k$ pada kubus).

**Cek Cepat**

Volume kubus yang rusuknya 4 cm adalah...

16 cm³

48 cm³

64 cm³

96 cm³

Kerucut dan tabung memiliki jari-jari alas dan tinggi yang sama. Volume tabung 90 cm³. Volume kerucut adalah...

30 cm³

45 cm³

90 cm³

270 cm³

Jari-jari sebuah bola dijadikan 3 kali semula. Volumennya menjadi...

3 kali

6 kali

9 kali

27 kali

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. A • 3. D



Tantangan Rumah: buktikan sendiri misteri sepertiga

Bahan: karton bekas (kotak sereal), gunting, selotip, penggaris, jangka atau tutup gelas, beras atau pasir, busur derajat.

1. Buat tabung tanpa tutup atas: alas lingkaran berjari-jari 4 cm, selimut persegi panjang $25,1 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ (karena $2\pi \times 4 \approx 25,1$), plus sedikit lebih untuk selotip.
2. Buat kerucut tanpa alas dengan jari-jari 4 cm dan tinggi 10 cm. Garis pelukisnya $\sqrt{4^2 + 10^2} \approx 10,8 \text{ cm}$, jadi gambar juring lingkaran berjari-jari 10,8 cm dengan sudut pusat sekitar 134° (lihat Bab 20), gulung, dan rekatkan.
3. Isi kerucut dengan beras sampai rata dengan bibirnya, lalu tuang ke tabung. Ulangi sambil menghitung.
4. Catat berapa kali menuang sampai tabung penuh rata.

Pertanyaan: Berapa kali kamu menuang? Jika hasilnya tidak tepat 3, sebutkan dua penyebab yang mungkin (petunjuk: tebal karton, beras yang memadat, bibir kerucut yang kurang rata). Mengapa sudut juringnya kira-kira 134° ?



RINGKASAN KILAT

Bab 21 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- mengenali **jaring-jaring** kubus, balok, prisma, tabung, dan kerucut
- menghitung **luas permukaan** dan **volume** kubus, balok, prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola, lengkap dengan satuan liter
- menjelaskan mengapa volume limas dan kerucut tepat **sepertiga** dari prisma dan tabung pasangannya
- memakai **faktor skala** k : luas menjadi k^2 kali, volume menjadi k^3 kali, juga pada bangun gabungan
- memeriksa **rumus Euler** $T - R + S = 2$ pada berbagai polihedron



Istilah kunci

bangun ruang

sisi

rusuk

titik sudut

Luas permukaan

jaring-jaring

Volume

prisma

Tabung

limas

kerucut

garis pelukis

Bola

polihedron



Rumus penting

$$V = p \times l \times t$$

Volume dan luas permukaan balok. Isi balok = banyaknya kubus satuan = panjang $\times$ lebar $\times$ tinggi. Kulitnya terdiri atas enam persegi panjang yang berpasangan.

$$V = \pi r^2 t$$

Volume tabung (tandon air). Luas lingkaran alas dikali tinggi. Bagi dengan 1.000 untuk mengubah cm^3 menjadi liter.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

Volume kerucut (tumpeng). Sepertiga dari tabung yang alas dan tingginya sama.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Volume dan luas bola. Pangkat tiga untuk isi, pangkat dua untuk kulit: $L = 4\pi r^2$, empat kali luas lingkaran terbesarnya.

$$V' = k^3 \times V$$

Perbesaran: luas $\times k^2$, volume $\times k^3$. Jika semua panjang dikali k , luas dikali k^2 dan volume dikali k^3 .

⚠ Jangan sampai terjebak

- Samakan dulu satuannya sebelum mengalikan.
- Luas selimut kerucut memakai garis pelukis s , bukan tinggi t .

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=21

Teka-teki untuk Bab 22

Pohon kelapa di pantai terlalu tinggi untuk diukur dengan meteran. Pukul tiga sore, tongkat pramuka setinggi 1,5 m yang ditancapkan tegak membentuk bayangan sepanjang 2 m. Pada saat yang sama, bayangan pohon kelapa panjangnya 16 m. Bisakah kamu menghitung tinggi pohon itu tanpa memanjatnya?

▼ Intip petunjuk

Sinar matahari datang sejajar, jadi tongkat dan bayangannya membentuk segitiga yang **sebangun** dengan segitiga pohon dan bayangannya. Faktor skalanya $k = 16 : 2 = 8$, sama seperti k di bab ini, tetapi sekarang untuk bangun datar. Bab 22 membahas kesebangunan dan transformasi geometri!

22 Sebangun & Bertransformasi: dari Bayangan Pohon sampai Motif Batik

Bagaimana mengukur tinggi pohon kelapa tanpa memanjatnya? Mengapa motif kawung tetap tampak sama setelah diputar? Dua rahasia ini ternyata bersaudara: bangun yang digeser, dicerminkan, diputar, atau diperbesar.

Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan bangun **kongruen** dan **sebangun**, lalu menghitung **faktor skala** beserta pengaruhnya pada luas dan volume;
- memakai **syarat kesebangunan segitiga** untuk mencari panjang yang belum diketahui, termasuk tinggi benda dari bayangannya;
- menentukan bayangan titik dan bangun oleh **translasi**, **refleksi**, **rotasi**, dan **dilatasi**;
- menyusun **komposisi transformasi** dan mengenali **simetri** pada motif batik dan tenun.

POHON KELAPA YANG TAK PERLU DIPANJAT

KOMIK • 4 PANEL

Sore hari di kebun kelapa Pak RT

DIMAS

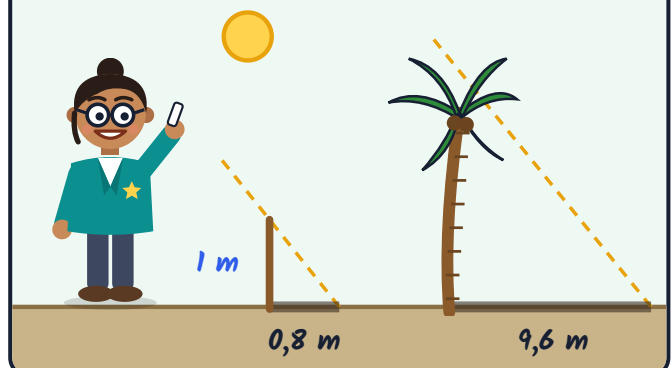
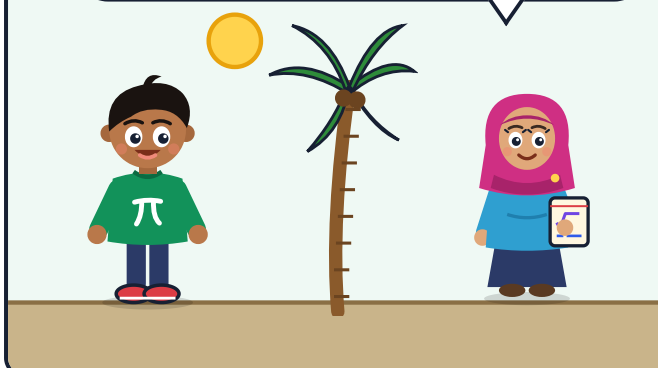
Berapa tinggi pohon kelapa ini? Aku panjat saja sambil membawa meteran!

AYU

Jangan! Ingat teka-teki kemarin: ukur pakai bayangan, bukan dipanjat.

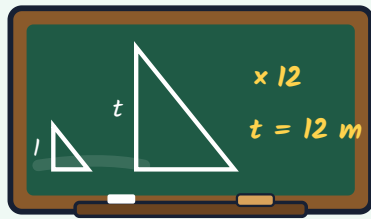
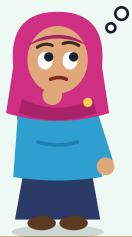
KAK LINTANG

Tak perlu memanjat. Tongkat 1 m ini bayangannya 80 cm. Bayangan pohon itu kita ukur: 9,6 m.



AYU

Sinar matahari sejajar, jadi segitiga tongkat dan segitiga pohon sebangun! $9,6 : 0,8 = 12$, berarti tingginya $12 \times 1 \text{ m} = 12 \text{ m}$.



AHA!

Tiba-tiba Ancil melompat dari balik semak...

ANCIL

Trik Thales: tunggu saat bayanganmu sama panjang dengan tinggimu. Saat itu, panjang bayangan pohon = tinggi pohon!

DIMAS

Jadi cukup menunggu jam yang pas... lalu mengukur tanah!



bayangan = tinggi



Tebak Dulu!

Dimas memfotokopi gambar peta berukuran $10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$ dengan perbesaran 200%. Luas gambar hasil fotokopinya menjadi berapa kali luas semula?

2 kali, sesuai angka 200%.

4 kali.

200 kali.

Tetap sama, hanya tampak lebih besar.

Jawabannya: 4 kali. Perbesaran 200% artinya setiap *panjang* dikali 2, jadi gambar menjadi $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Luasnya 600 cm^2 , padahal semula 150 cm^2 : empat kali lipat! Panjang dikali k , luas dikali k^2 . Itulah sebabnya tombol mesin fotokopi untuk A4 ke A3 (kertas yang luasnya dua kali) bertuliskan 141%, bukan 200%.

22.1 Kongruen dan sebangun

Ambil dua keping ubin dari dus yang sama, lalu tumpuk keduanya: pas sekali, tidak ada yang menonjol. Sekarang bandingkan pas foto 3×4 milikmu dengan foto yang sama yang dicetak 6×8 . Wajahnya sama, senyumnya sama,

hanya ukurannya berbeda. Dua pengalaman sehari-hari ini punya nama dalam matematika.

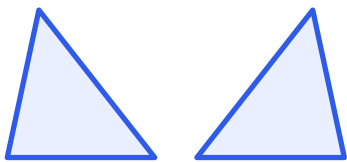


DEFINISI

Dua bangun disebut **kongruen** (lambang $\cong$) jika bentuk **dan** ukurannya sama persis, sehingga yang satu dapat menutupi yang lain setelah digeser, diputar, atau dibalik.

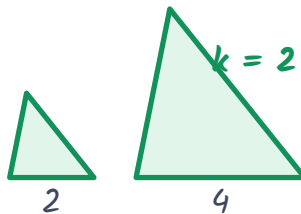
Dua bangun disebut **sebangun** (lambang $\sim$) jika bentuknya sama, sedangkan ukurannya boleh berbeda: **sudut-sudut yang bersesuaian sama besar** dan **sisi-sisi yang bersesuaian sebanding**. Perbandingan sisi bayangan terhadap sisi asli disebut **faktor skala k** .

Kongruen ($\cong$)



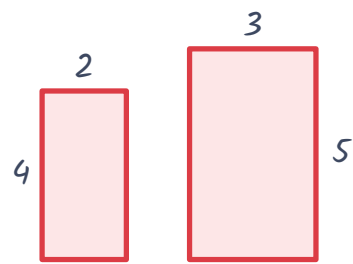
bentuk sama, ukuran sama

Sebangun ($\sim$)



bentuk sama, ukuran beda

Tidak sebangun



$2 : 4 \neq 3 : 5$

Segitiga kiri yang satu adalah cerminan yang lain, tetapi tetap kongruen. Segitiga tengah sebangun karena semua sisinya dikali 2. Dua persegi panjang kanan sama-sama bersudut 90° , tetapi tidak sebangun.

Bahasa sederhana • Gampangnya: **sebangun itu seperti foto yang diperbesar atau diperkecil**. Kalau hasilnya tampak gepeng atau melar, berarti tidak sebangun. Kongruen itu seperti dua kue dari cetakan yang sama: kembar persis.



SIFAT FAKTOR SKALA

Jika dua bangun sebangun dengan faktor skala k , maka

- setiap **panjang** (sisi, keliling, tinggi) dikali k ;
- setiap **luas** dikali k^2 ;
- setiap **volume** (untuk bangun ruang) dikali k^3 .

Alasannya sederhana: persegi satuan 1×1 menjadi $k \times k$, dan kubus satuan menjadi $k \times k \times k$. Bangun sebangun dengan $k = 1$ adalah bangun kongruen.

$$k = \frac{p'}{p}$$

Bagi panjang pada bayangan dengan panjang yang bersesuaian pada bangun asli. Semua pasangan sisi memberi k yang sama.

p Panjang asli cm

p' Panjang bayangan cm

k Faktor skala

FAKTOR SKALA

2,5

Sisi **4** cm menjadi **10** cm, jadi setiap panjang dikali $k = 2,5$. Luasnya ikut dikali $k^2 = 6,25$, dan volume (untuk bangun ruang) dikali $k^3 = 15,625$. **Ini perbesaran.**

Cek satuan: k tidak bersatuan karena cm dibagi cm. Itu sebabnya k tetap sama walaupun kamu mengukur dalam mm atau m.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-FAKTOR-SKALA

CONTOH Mencetak ulang foto

Foto berukuran **4 cm × 6 cm** dicetak ulang sehingga lebarnya menjadi **10 cm**, tanpa ada bagian yang terpotong atau melar. Berapa tinggi foto barunya?

1 Agar tidak melar, foto baru harus sebangun dengan foto lama. Faktor skalanya $k = \frac{10}{4} = 2,5$.

2 Tinggi juga dikali k : $6 \times 2,5 = 15$ cm.

Foto baru berukuran **10 cm × 15 cm**. Luasnya **150 cm²**, yaitu $2,5^2 = 6,25$ kali luas foto lama (24 cm²).



AWAS JEBAKAN

Untuk segi empat, sudut yang sama besar belum menjamin sebangun. Persegi 3×3 dan persegi panjang 3×6 sama-sama bersudut 90° , tetapi bentuknya jelas berbeda. Sebaliknya, belah ketupat bersisi 5 dan persegi bersisi 5 punya sisi sebanding, tetapi sudutnya berbeda. Pada segi empat, **kedua syarat** (sudut sama dan sisi sebanding) harus dicek. Segitiga lebih istimewa, seperti yang akan kamu lihat berikutnya.

22.2 Syarat dua segitiga sebangun



Tebak Dulu!

Ayu menggambar segitiga bersudut 40° , 60° , dan 80° dengan sisi terpendek 3 cm. Dimas menggambar segitiga dengan sudut yang sama, tetapi sisi terpendeknya 30 cm. Apa hubungan kedua segitiga itu?

Kongruen, karena ketiga sudutnya sama.

Sebangun dengan faktor skala 10, tetapi tidak kongruen.

Tidak sebangun, karena ukurannya jauh berbeda.

Belum bisa ditentukan sebelum semua sisinya diukur.

Jawabannya: sebangun, tidak kongruen. Pada segitiga, cukup dua pasang sudut yang sama (sudut ketiga pasti ikut sama karena jumlahnya 180°) untuk menjamin kedua segitiga sebangun. Sudut menentukan *bentuk*, bukan *ukuran*. Jadi sisi-sisi segitiga Dimas otomatis 10 kali sisi segitiga Ayu.



SYARAT KESEBANGUNAN DAN KONGRUENAN SEGITIGA

Dua segitiga **sebangun** jika memenuhi salah satu syarat berikut.

- **Sd-Sd** (sudut-sudut): dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar.
- **S-S-S** sebanding: ketiga pasang sisi yang bersesuaian sebanding, $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$.
- **S-Sd-S**: dua pasang sisi sebanding dan sudut yang diapitnya sama besar.

Dua segitiga **kongruen** jika memenuhi S-S-S, S-Sd-S, Sd-S-Sd, atau Sd-Sd-S dengan sisi yang *sama panjang* (faktor skala 1).

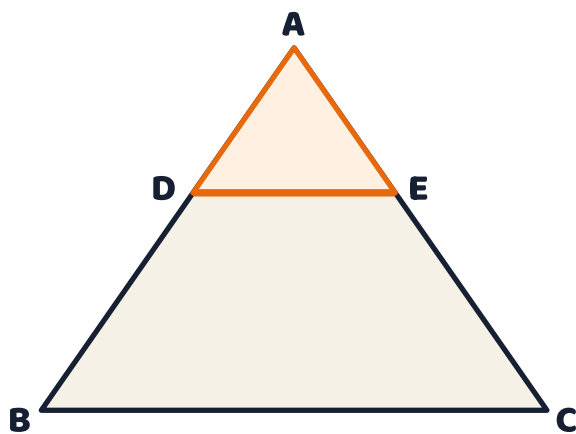
Yang diketahui
sama/sebanding

Cukup untuk
sebangun?

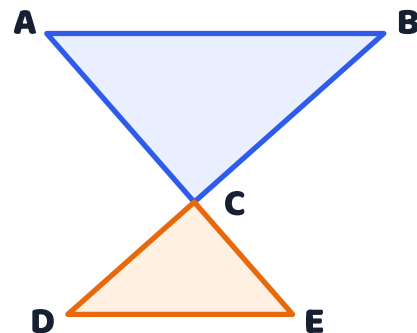
Cukup untuk kongruen?

Dua pasang sudut	✓ ya (Sd-Sd)	✗ belum, ukuran bisa beda
Tiga pasang sisi	✓ jika sebanding	✓ jika sama panjang (S-S-S)
Dua sisi + sudut apitnya	✓ jika sisinya sebanding	✓ jika sisinya sama (S-Sd-S)
Dua sisi + sudut yang <i>tidak</i> diapit	✗ tidak selalu	✗ tidak selalu (bisa ada dua segitiga berbeda)

Ada dua "pola" yang sangat sering muncul. Pada **pola A**, garis yang sejajar alas memotong segitiga besar menjadi segitiga kecil di puncaknya. Pada **pola X**, dua garis berpotongan di antara dua ruas yang sejajar, seperti jam pasir.



Pola A: $DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$



Pola X: $AB \parallel DE \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC$

Pada pola A, sudut A dimiliki bersama dan sudut-sudut sehadap sama besar. Pada pola X, sudut di C bertolak belakang dan sudut-sudut dalam berseberangan sama besar. Keduanya memenuhi Sd-Sd.



TEOREMA GARIS SEJAJAR (PROPORSI)

Jika $DE \parallel BC$ dengan D pada AB dan E pada AC , maka

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{dan juga} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

▼ Bukti dengan luas (gaya Euclid)

Tulis $[XYZ]$ untuk luas segitiga XYZ . Segitiga ADE dan BDE punya puncak yang sama, yaitu E , dengan alas AD dan DB pada satu garis, jadi tingginya sama: $\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{AD}{DB}$. Dengan cara yang sama (puncak D): $\frac{[ADE]}{[CDE]} = \frac{AE}{EC}$.

Segitiga BDE dan CDE beralas sama, yaitu DE , dan puncaknya B serta C terletak pada garis yang sejajar DE , sehingga tingginya sama: $[BDE] = [CDE]$. Akibatnya $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. ■



TRIK KAK LINTANG

Tuliskan $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ itu peta harta karun! Urutan hurufnya menunjukkan pasangan: $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$. Jadi sisi AB berpasangan dengan PQ , dan BC dengan QR . Untuk menyusun perbandingan, tutup saja huruf yang sama posisinya: $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC}$.



AWAS JEBAKAN

Pasangan sisi ditentukan oleh sudut, bukan oleh posisi pada gambar. Pada pola X, segitiga kecil sering tampak terbalik, sehingga sisi yang di atas berpasangan dengan sisi yang di bawah. Pada pola A, bandingkan AD dengan AB (sisi utuh), bukan dengan DB (potongannya).

KERJAKAN BERSAMA

Kuda-kuda atap rumah

Rangka atap berbentuk segitiga ABC dengan alas $BC = 8$ m. Sebuah balok mendatar DE dipasang sejajar BC , dengan D pada AB , E pada AC , $AD = 2$ m, dan $AB = 5$ m. Berapa panjang balok DE ?

- 1 $DE \parallel BC$, jadi $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (pola A).
- 2 Faktor skala dari segitiga besar ke kecil: $k = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4$.
- 3 $DE = 0,4 \times BC = 0,4 \times 8 = 3,2$ m.

Balok DE panjangnya 3,2 m. Tukang kayu memakai perbandingan ini untuk memotong kayu sebelum naik ke atap.

ADU CEPAT

Sisi bersesuaian kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari dulu faktor skalanya dari pasangan yang lengkap. Contoh: $4 \leftrightarrow 6$ berarti $k = 1,5$, jadi $10 \leftrightarrow 15$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TIGA SEGITIGA SEBANGUN DALAM SATU SEGITIGA SIKU-SIKU

Pada segitiga ABC yang siku-siku di C , tarik garis tinggi CD ke sisi miring AB . Terbentuk tiga segitiga yang saling sebangun: $\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$ (semuanya siku-siku dan berbagi satu sudut lancip). Dari kesebangunan itu diperoleh

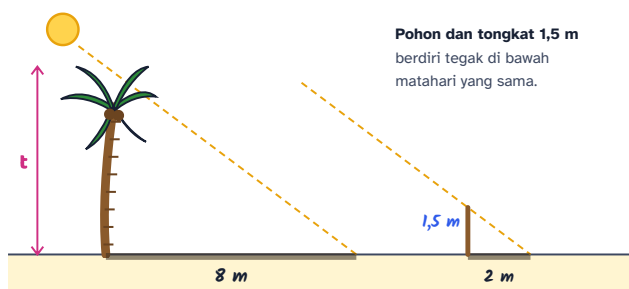
$$CD^2 = AD \cdot DB, \quad AC^2 = AD \cdot AB, \quad BC^2 = BD \cdot BA.$$

Jumlahkan dua rumus terakhir: $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$. Inilah bukti Teorema Pythagoras (Bab 18) yang hanya memakai kesebangunan! Rumus pertama mengatakan bahwa garis tinggi adalah *rataan geometrik* kedua potongan sisi miring.

22.3

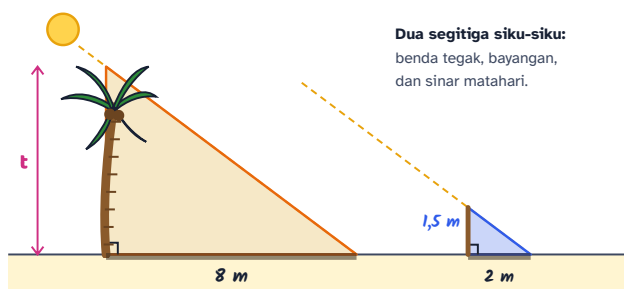
Mengukur tinggi dengan bayangan

Kembali ke kebun Pak RT. Matahari sangat jauh, sehingga sinar-sinar matahari yang sampai ke Bumi praktis **sejajar**. Akibatnya, pada saat yang sama, setiap benda tegak membentuk segitiga dengan bayangannya, dan semua segitiga itu sebangun. Lihat langkah demi langkah:



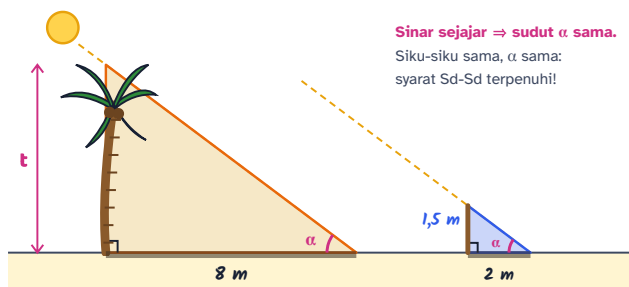
Pohon dan tongkat 1,5 m berdiri tegak di bawah matahari yang sama.

Langkah 1. Pohon dan tongkat setinggi 1,5 m berdiri tegak. Bayangan pohon 8 m, bayangan tongkat 2 m. Berapa tinggi pohon t ?



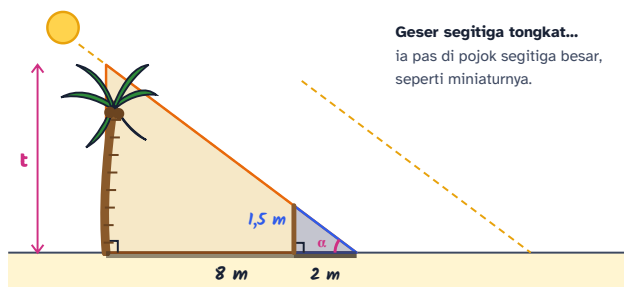
Dua segitiga siku-siku: benda tegak, bayangan, dan sinar matahari.

Langkah 2. Benda tegak, bayangannya, dan sinar matahari membentuk segitiga siku-siku, baik untuk pohon maupun untuk tongkat.



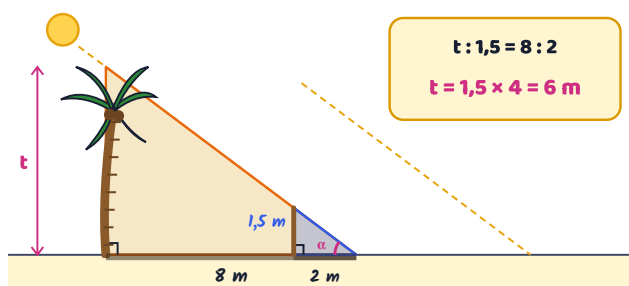
Sinar sejajar $\Rightarrow$ sudut α sama.
Siku-siku sama, α sama:
syarat Sd-Sd terpenuhi!

Langkah 3. Sinar matahari datang sejajar, jadi sudut elevasi α di ujung kedua bayangan sama besar. Siku-siku sama, α sama: kedua segitiga **sebangun** (Sd-Sd).



Geser segitiga tongkat...
ia pas di pojok segitiga besar,
seperti miniaturnya.

Langkah 4. Geser segitiga tongkat ke ujung bayangan pohon. Ia pas berada di pojok segitiga besar, seperti miniaturnya.



$$t : 1,5 = 8 : 2$$

$$t = 1,5 \times 4 = 6 \text{ m}$$

Langkah 5. Sisi-sisi yang bersesuaian sebanding: $\frac{t}{1,5} = \frac{8}{2}$,
jadi $t = 1,5 \times 4 = 6 \text{ m}$. Tanpa memanjat!

$$T = t \times \frac{B}{b}$$

Tinggi benda sama dengan tinggi tongkat dikali berapa kali bayangan benda lebih panjang daripada bayangan tongkat.

 t

Tinggi tongkat m

 b

Bayangan tongkat m

 B

Bayangan benda m

 T

Tinggi benda m

TINGGI BENDA

132

m

 setinggi Monas (± 132 m)!

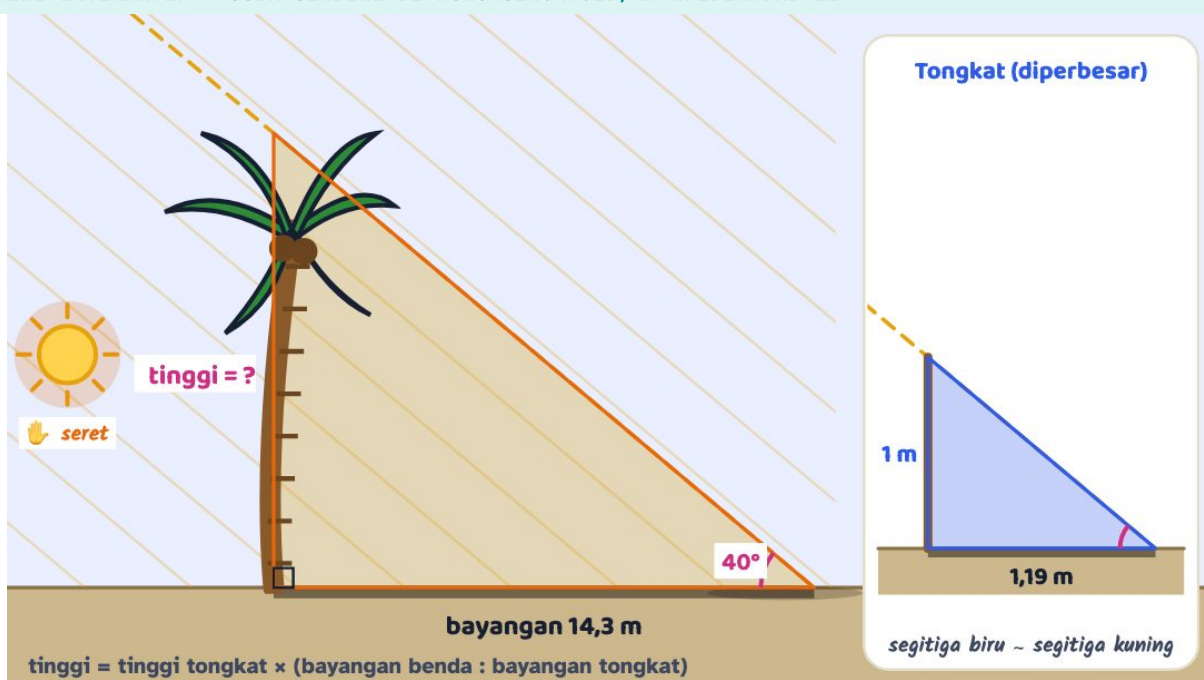
Bayangan benda **88** kali bayangan tongkat, jadi tinggi benda juga **88** kali tinggi tongkat:
 $1,5 \times 88 = 132$ m.

Cek satuan: Semua panjang harus memakai satuan yang sama (semuanya m atau semuanya cm).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TINGGI-BAYANGAN

LAB MINI Pengukur tinggi tanpa memanjat

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22



Bayangan tongkat
1,19 m

Bayangan benda
14,3 m

Bayangan benda : bayangan tongkat
12

Tinggi benda
??? (hitung dulu!)

Seret matahari naik-turun (atau geser slider). Bayangan memanjang saat matahari rendah, tetapi **perbandingan** bayangan benda : bayangan tongkat tidak pernah berubah. Pakai angka di bawah kanvas untuk menghitung tinggi benda, lalu matikan "Rahasiakan" untuk mengecek. Coba juga tombol **Jam Thales!**

KERJAKAN BERSAMA Bayangan Monas

Pada suatu sore di Lapangan Monas, bayangan Ayu (tinggi 1,5 m) sepanjang 2 m, sedangkan bayangan Monas sepanjang 176 m. Berapa tinggi Monas?

- 1 Pada saat yang sama, segitiga Ayu-bayangan dan segitiga Monas-bayangan sebangun.
- 2 Faktor skala $k = \frac{176}{2} = 88$.
- 3 Tinggi Monas = $88 \times 1,5 = 132$ m.

Monas setinggi ±132 m, termasuk lidah apinya. Cukup dengan meteran dan sedikit matematika!

Hari mendung, tidak ada bayangan. Dimas meletakkan cermin kecil mendatar di tanah, 15 m dari pangkal tiang bendera. Ia mundur sampai melihat puncak tiang tepat di tengah cermin; saat itu kakinya 2,4 m dari cermin. Mata Dimas 1,6 m di atas tanah. Berapa tinggi tiang?

1 Cahaya dari puncak tiang memantul di cermin ke mata Dimas. Sudut datang sama dengan sudut pantul, sehingga dua segitiga siku-siku di kiri dan kanan cermin sebangun (Sd-Sd).

2 $\frac{T}{15} = \frac{1,6}{2,4}$.

3 $T = 15 \times \frac{1,6}{2,4} = 10 \text{ m.}$

Tiang bendera setinggi 10 m. Cobalah sendiri di halaman sekolah: cara ini bekerja walaupun matahari bersembunyi.



TAMU DARI MASA LALU

Thales dari Miletus (± 624 – 546 SM) konon mengukur tinggi Piramida Agung Mesir dengan bayangan. Menurut kisah yang dicatat penulis Yunani berabad-abad kemudian, ia menunggu saat panjang bayangan tubuhnya sama dengan tinggi badannya, lalu mengukur bayangan piramida. Versi lain menyebut ia memakai tongkat dan perbandingan, persis seperti cara di bab ini. Beberapa abad kemudian, Eratosthenes memakai bayangan untuk memperkirakan keliling Bumi!

22.4 Translasi dan refleksi

Sekarang kita membuat bangun **bergerak**. Aturan yang memindahkan setiap titik bidang ke titik lain disebut **transformasi geometri**. Titik asal disebut *benda* (atau prapeta), titik hasilnya disebut **bayangan** dan diberi tanda aksent: $A \mapsto A'$.



DEFINISI: TRANSLASI

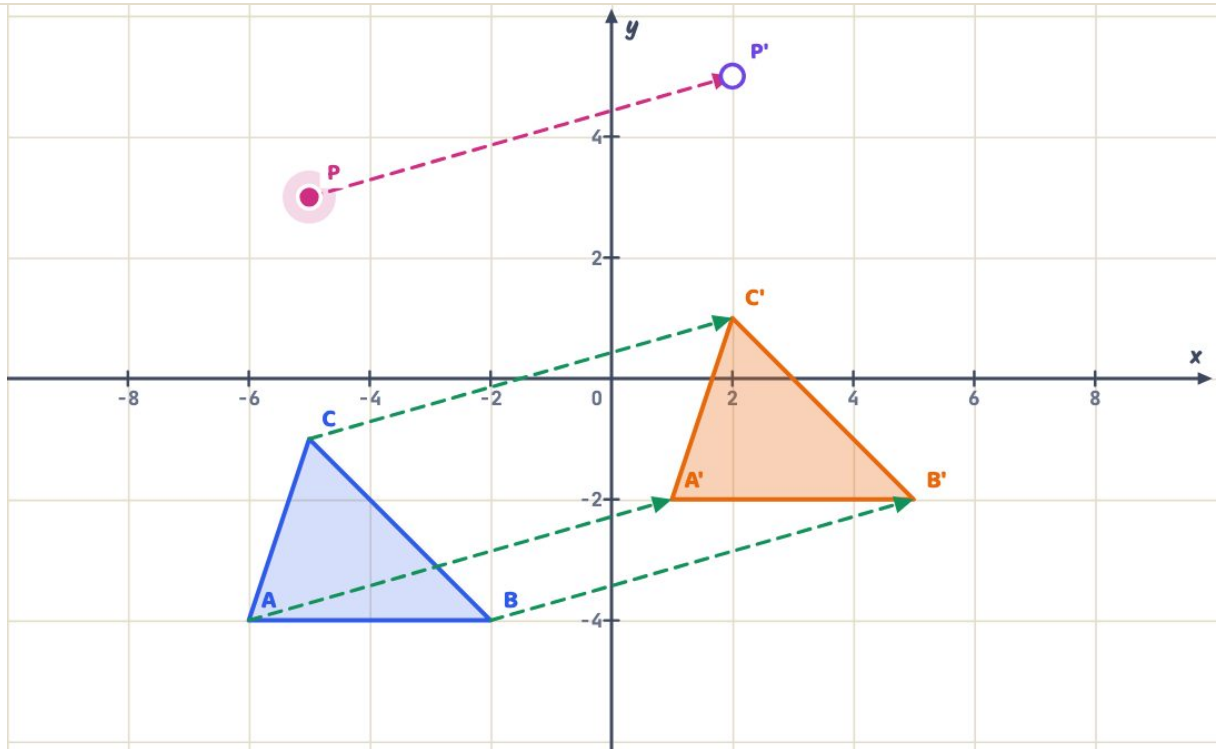
Translasi (pergeseran) oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memindahkan **setiap** titik sejauh a satuan mendatar dan b satuan tegak:

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b).$$

$a > 0$ berarti ke kanan, $a < 0$ ke kiri, $b > 0$ ke atas, $b < 0$ ke bawah.

$$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : (x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

$$A(-6, -4) \mapsto A'(1, -2) \quad P(-5, 3) \mapsto P'(2, 5)$$



Vektor translasi
(7, 2)

Jarak geser $AA' = BB' = PP'$
7,28

Geser slider a dan b , lalu seret titik P ke mana saja. Semua panah selalu sejajar dan sama panjang. Bentuk dan ukuran segitiga tidak berubah sedikit pun: hasil translasi selalu **kongruen** dengan bendanya.

CONTOH Menggeser segitiga

Segitiga ABC dengan $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, dan $C(2, 5)$ ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tentukan koordinat bayangannya.

1 Tambahkan -3 pada setiap koordinat- x dan 1 pada setiap koordinat- y .

2 $A'(1 - 3, 2 + 1) = (-2, 3)$, $B'(4 - 3, 2 + 1) = (1, 3)$, $C'(2 - 3, 5 + 1) = (-1, 6)$.

$A'(-2, 3)$, $B'(1, 3)$, $C'(-1, 6)$: segitiga bergeser 3 satuan ke kiri dan 1 satuan ke atas.

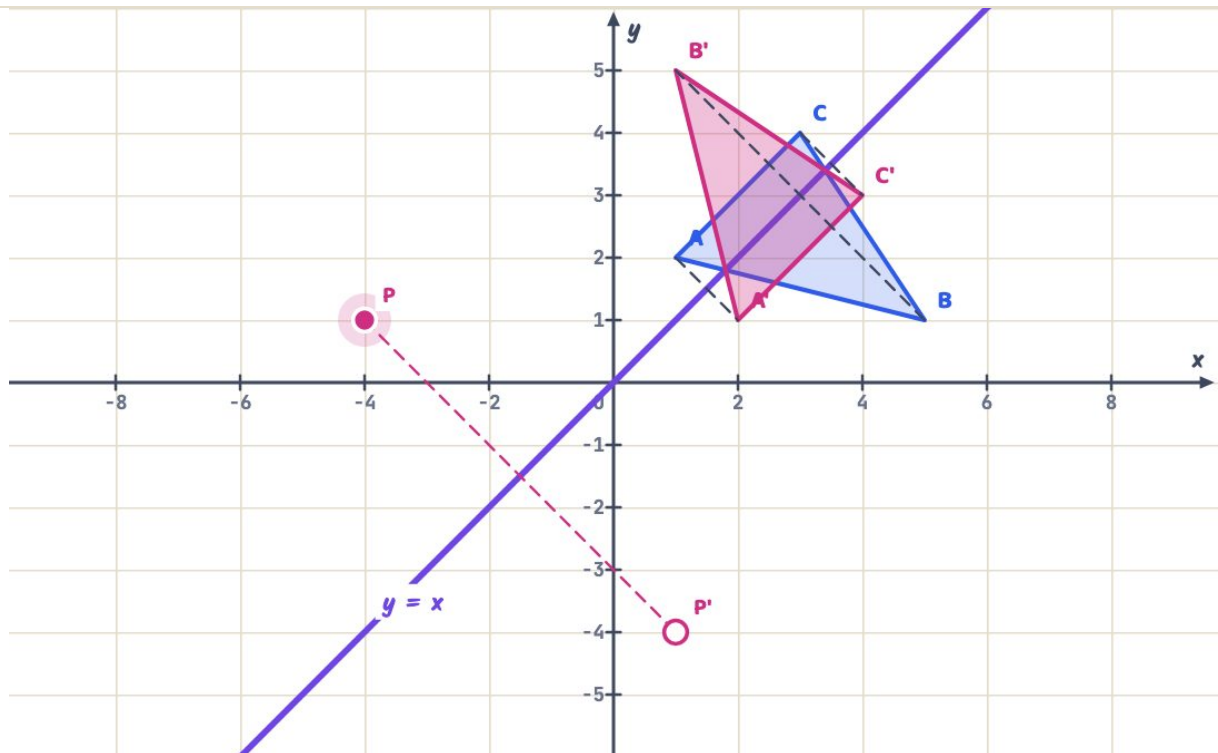
Refleksi (pencerminan) bekerja seperti cermin datar. Bayangan setiap titik berada di seberang cermin dengan jarak yang sama: garis yang menghubungkan titik dan bayangannya **tegak lurus** cermin dan **dibagi dua sama panjang** oleh cermin. Titik yang terletak tepat pada cermin tidak berpindah.

Cermin	Bayangan (x, y)	Contoh: $(3, 1)$
sumbu- x	$(x, -y)$	$(3, -1)$
sumbu- y	$(-x, y)$	$(-3, 1)$
garis $y = x$	(y, x)	$(1, 3)$
garis $y = -x$	$(-y, -x)$	$(-1, -3)$
garis $x = h$	$(2h - x, y)$	$h = 5: (7, 1)$
garis $y = k$	$(x, 2k - y)$	$k = 2: (3, 3)$
titik asal O	$(-x, -y)$	$(-3, -1)$

$$PP' \perp \text{cermin}$$

$$P(-4, 1) \mapsto P'(1, -4)$$

Garis penghubung titik dan bayangannya tegak lurus cermin dan dibagi dua sama panjang oleh cermin.



cermin $y = x$: $(x, y) \rightarrow (y, x)$

Bayangan P'
(1, -4)

Panjang PP'
7,07

Ganti nomor cermin 1-7 dan baca aturannya di label. Seret titik P sampai tepat berada di cermin: apa yang terjadi pada P' ? Perhatikan juga urutan $A \rightarrow B \rightarrow C$ pada cermin garis (nomor 1-6): pada benda berlawanan arah jarum jam, pada bayangan searah jarum jam. Cermin garis **membalik arah hadap**; cermin titik O (nomor 7) tidak, karena sama dengan rotasi 180° .



Tebak Dulu!

Sebuah segitiga dicerminkan terhadap garis $x = 1$, lalu hasilnya dicerminkan lagi terhadap garis $x = 4$. Hasil akhirnya sama dengan...

translasi 3 satuan ke kanan.

translasi 6 satuan ke kanan.

kembali ke posisi semula.

rotasi 180° .

Jawabannya: translasi 6 satuan ke kanan. Cermin pertama: $x \mapsto 2 - x$. Cermin kedua: $2 - x \mapsto 8 - (2 - x) = x + 6$. Setiap titik bergeser $6 = 2 \times 3$ satuan, yaitu **dua kali** jarak antarcermin. Dua kali membalik arah hadap berarti kembali menghadap semula, jadi hasilnya pergeseran biasa.

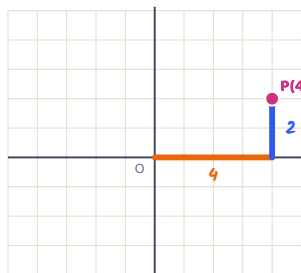
▼ Mengapa dua cermin sejajar selalu menghasilkan translasi?

Letakkan cermin pada garis $x = h_1$ dan $x = h_2$. Cermin pertama: $x \mapsto 2h_1 - x$. Cermin kedua: $2h_1 - x \mapsto 2h_2 - (2h_1 - x) = x + 2(h_2 - h_1)$. Koordinat- y tidak berubah. Jadi hasilnya translasi sejauh $2(h_2 - h_1)$, dua kali jarak antarcermin, dengan arah dari cermin pertama ke cermin kedua. ■



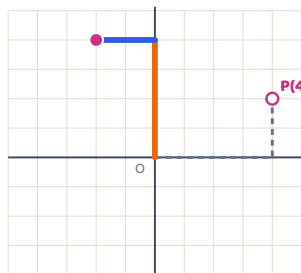
22.5 Rotasi

Jarum jam, kincir angin, dan roda motor melakukan **rotasi** (perputaran). Rotasi ditentukan oleh tiga hal: **pusat** P , **besar sudut** α , dan **arah**. Dalam matematika, sudut **positif berarti berlawanan arah jarum jam**. Setiap titik berputar mengelilingi pusat dan jaraknya ke pusat tidak berubah.



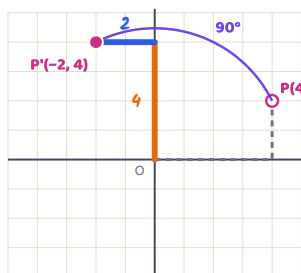
Jalur menuju $P(4, 2)$:
4 ke kanan (oranye),
lalu 2 ke atas (biru).

Langkah 1. Titik $P(4, 2)$: dari O , jalan 4 satuan ke kanan (oranye), lalu 2 satuan ke atas (biru).



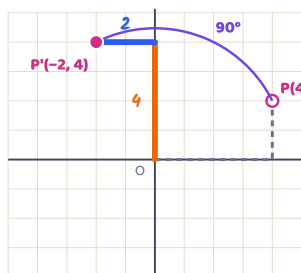
Putar seluruh jalur 90°
berlawanan arah jarum jam
dengan pusat O .

Langkah 2. Putar seluruh jalur itu 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O . Panjang setiap ruas tidak berubah.



Oranye kini ke atas (4),
biru kini ke kiri (2).
 P menempuh busur 90° .

Langkah 3. Ruas oranye kini menunjuk ke atas (4 satuan) dan ruas biru menunjuk ke kiri (2 satuan). Titik P bergerak sepanjang busur lingkaran.



$(x, y) \rightarrow (-y, x)$
 $(4, 2) \rightarrow (-2, 4)$

Langkah 4. Jadi $P'(-2, 4)$. Aturannya: $(x, y) \mapsto (-y, x)$. Tukar koordinatnya, lalu beri tanda negatif pada yang baru di depan.



ATURAN ROTASI DENGAN PUSAT $O(0, 0)$

- 90° (berlawanan arah jarum jam): $(x, y) \mapsto (-y, x)$
- 180° (setengah putaran, arah mana pun): $(x, y) \mapsto (-x, -y)$
- -90° atau 270° (searah jarum jam): $(x, y) \mapsto (y, -x)$

Untuk pusat $P(a, b)$: geser dulu sehingga P menjadi titik asal, putar, lalu geser kembali. Contohnya untuk 90° : $(x, y) \mapsto (a - (y - b), b + (x - a))$.

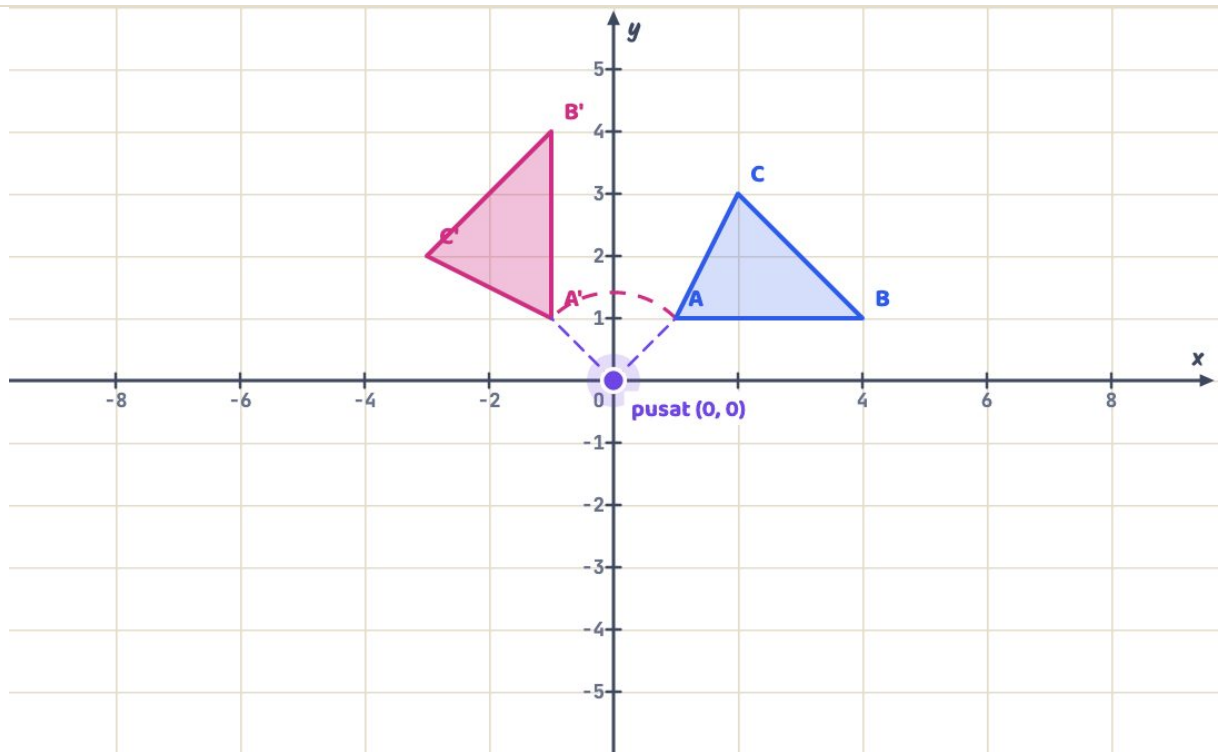


TRIK KAK LINTANG

Lupa aturan rotasi? Gambar titiknya di kertas berpetak, tusuk pusatnya dengan pensil, lalu putar kertasnya seperempat putaran. Atau hafalkan mantra "**tukar, lalu negatifkan yang di depan**" untuk 90° . Cek cepat: rotasi 90° dua kali harus sama dengan 180° . Benar: $(x, y) \mapsto (-y, x) \mapsto (-x, -y)$.
✓

$$R[P, \alpha] : PA' = PA, \quad \angle APA' = \alpha$$

$$A(1, 1) \xrightarrow{R[(0, 0), 90^\circ]} A'(-1; 1)$$



90° terhadap O: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

A'

(-1; 1)

B'

(-1; 4)

C'

(-3; 2)

Jarak pusat-A = pusat-A'

1, 41

Tekan ► **Jalankan** untuk memutar segitiga terus-menerus, lalu seret pusat putar ke tempat lain. Busur putus-putus adalah lintasan titik A: selalu bagian dari lingkaran yang berpusat di pusat putar. Coba cari sudut yang membuat A' tepat di sumbu-y!

Ujung baling-baling berada di $P(5, 3)$. Baling-baling berputar 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $C(2, 1)$. Di mana posisi ujungnya sekarang?

- 1 Geser agar pusat menjadi titik asal: $P - C = (5 - 2, 3 - 1) = (3, 2)$.
- 2 Putar 90° : $(3, 2) \mapsto (-2, 3)$.
- 3 Geser kembali: $P' = (2 + (-2), 1 + 3) = (0, 4)$.

Ujung baling-baling berada di $P'(0, 4)$. Cek: $CP = CP' = \sqrt{13}$, jaraknya ke pusat tetap.



AWAS JEBAKAN

Rotasi bersudut positif berarti berlawanan arah jarum jam, bukan searah. Ini kebalikan dari gerak jarum jam yang biasa kita lihat. Jadi $R[O, 90^\circ]$ memindahkan $(1, 0)$ ke $(0, 1)$, naik ke atas, bukan turun ke $(0, -1)$.

22.6 Dilatasi dan komposisi transformasi

Translasi, refleksi, dan rotasi tidak mengubah ukuran. Untuk memperbesar atau memperkecil, kita butuh **dilatasi**. Bayangkan proyektor di kelas: cahaya memancar dari lampu (pusat), dan gambar di layar adalah perbesaran gambar pada slide.



DEFINISI: DILATASI

Dilatasi dengan pusat $P(a, b)$ dan faktor skala k , ditulis $D[P, k]$, memetakan setiap titik X ke X' pada garis PX sehingga $\overrightarrow{PX'} = k \overrightarrow{PX}$:

$$x' = a + k(x - a), \quad y' = b + k(y - b).$$

Jika pusatnya O , cukup $(x, y) \mapsto (kx, ky)$. Untuk $k > 1$ bangun diperbesar, untuk $0 < k < 1$ diperkecil, dan untuk $k < 0$ bayangan berada di seberang pusat dalam posisi terbalik.

$$x' = a + k(x - a)$$

Ukur jarak titik dari pusat, kalikan dengan k , lalu hitung lagi dari pusat. Koordinat y dihitung dengan cara yang sama.

x x titik asal
 y y titik asal
 a x pusat
 b y pusat
 k Faktor skala

x' x bayangan

X BAYANGAN
7

Titik **(4, 3)** didilatasi dengan pusat **(1, 1)** dan faktor **2**: $x' = 7$ dan $y' = 5$, jadi bayangannya **(7; 5)**. Jaraknya ke pusat menjadi **2** kali semula.

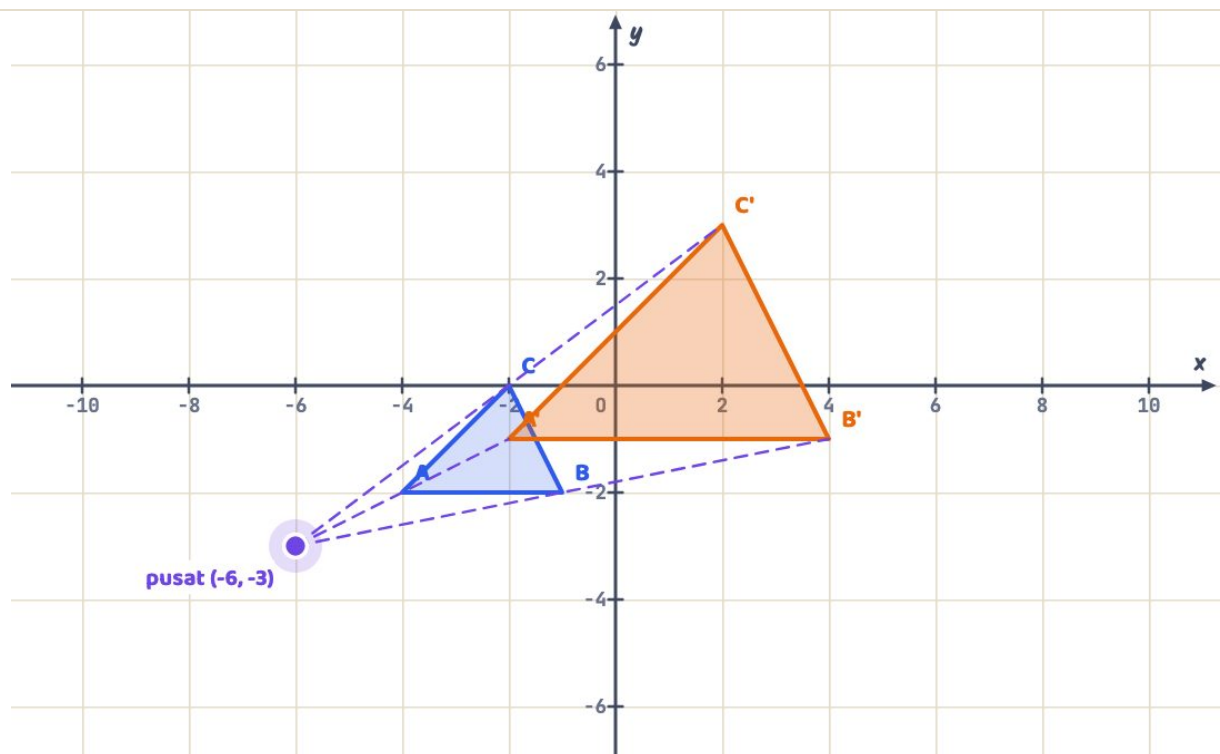
Cek satuan: Koordinat tidak bersatuan; faktor skala juga tidak.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DILATASI-TITIK

$$D[P, k] : \overrightarrow{PA'} = k \overrightarrow{PA}$$

$$A(-4, -2) \xrightarrow{D[(-6, -3), 2]} A'(-2; -1)$$

Untuk pusat $P(p, q)$: $x' = p + k(x - p)$ dan $y' = q + k(y - q)$.



$k > 1$: diperbesar

Faktor panjang $|k|$

2

Luas $\triangle ABC$

3

Luas $\triangle A'B'C' = k^2 \times 3$

12

Ubah k dari 3 turun sampai -3 . Garis putus-putus dari pusat selalu melewati titik dan bayangannya.

Perhatikan luas: saat $k = 2$, luas bayangan 4 kali; saat $k = -1$, bayangan terbalik, tetapi ukurannya sama.

Seret pusatnya ke dalam segitiga juga!

Transformasi dapat dikerjakan berturut-turut. Hasilnya disebut **komposisi transformasi**, ditulis $T_2 \circ T_1$ untuk "kerjakan T_1 dulu, lalu T_2 ". Komposisi yang paling mengejutkan adalah dua pencerminan.



DUA PENCERMINAN

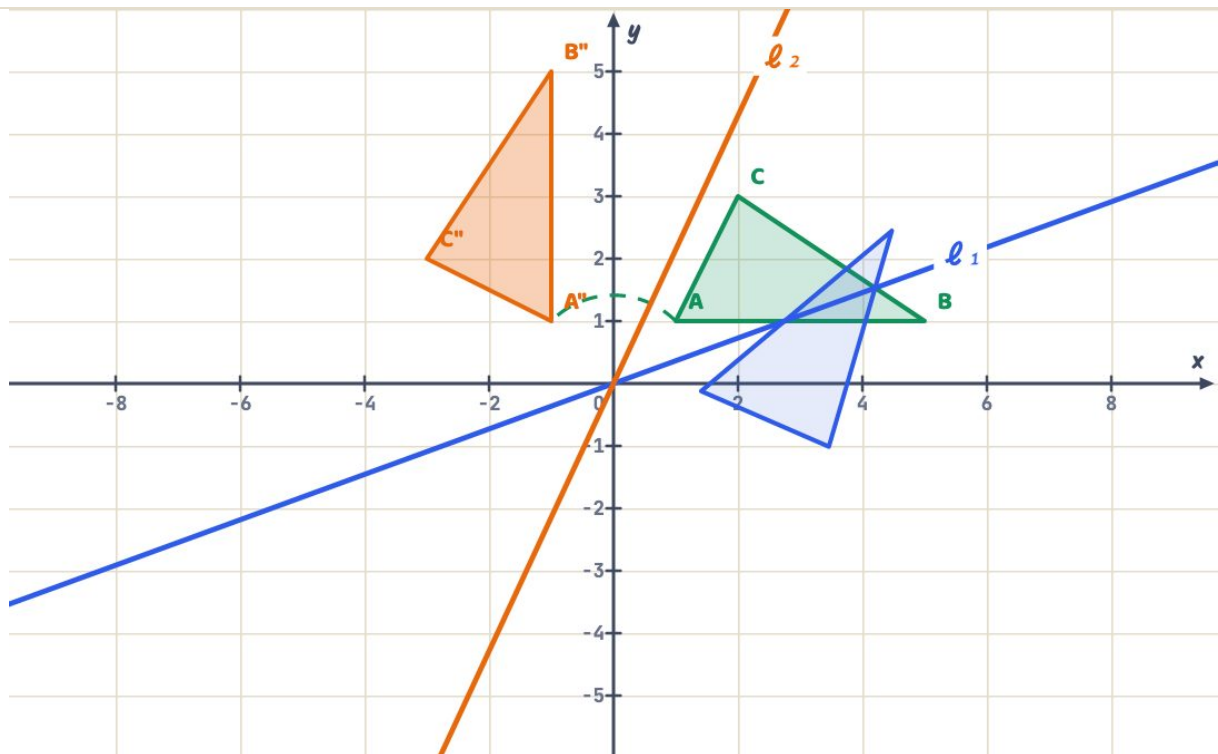
- Dua cermin **sejajar** berjarak d : hasilnya **translasi** sejauh $2d$ tegak lurus cermin.
- Dua cermin **berpotongan** di O dengan sudut θ : hasilnya **rotasi** berpusat O sebesar 2θ .

Translasi, refleksi, rotasi, dan komposisinya disebut **isometri**: jarak tidak berubah, jadi bayangannya selalu **kongruen** dengan bendanya. Jika dilatasi ikut dilibatkan, bayangannya **sebangun** dengan bendanya.

$$M_{\ell_2} \circ M_{\ell_1} = R[O, 2\theta]$$

$$2 \times (65^\circ - 20^\circ) = 90^\circ$$

Cermin ℓ_1 lalu cermin ℓ_2 sama dengan rotasi berpusat O sebesar dua kali sudut antarcermin θ .



sudut 45°: rotasi 90°

Sudut antarcermin
45 °

Hasil: rotasi sebesar
90 °

Segitiga hijau dicerminkan terhadap ℓ_1 (bayangan pucat), lalu terhadap ℓ_2 (oranye). Putar kedua cermin bersama-sama dengan sudut antarcermin tetap: hasil akhirnya tidak berubah! Yang menentukan hanyalah sudut antarcermin.

Transformasi	Bayangan (x, y)	Ukuran	Bentuk	Arah hadap
Translasi $T(a, b)$	$(x + a, y + b)$	tetap	tetap	tetap
Refleksi (contoh: sumbu- y)	$(-x, y)$	tetap	tetap	terbalik

Rotasi $R[O, 90^\circ]$	$(-y, x)$	tetap	tetap	tetap
Dilatasi $D[O, k]$	(kx, ky)	dikali $ k $	tetap	tetap

COBA SENDIRI Apakah urutan penting?

Titik $A(3, -1)$. (a) Cerminkan terhadap sumbu- y , lalu dilatasi $D[O, 2]$. Bandingkan dengan urutan terbalik. (b) Lakukan hal yang sama untuk pencerminan terhadap sumbu- y dan translasi $T(2, 0)$.

- 1 (a) Cermin lalu dilatasi: $(3, -1) \mapsto (-3, -1) \mapsto (-6, -2)$. Dilatasi lalu cermin: $(3, -1) \mapsto (6, -2) \mapsto (-6, -2)$. Hasilnya sama.
- 2 (b) Cermin lalu translasi: $(3, -1) \mapsto (-3, -1) \mapsto (-1, -1)$. Translasi lalu cermin: $(3, -1) \mapsto (5, -1) \mapsto (-5, -1)$. Hasilnya berbeda!
- 3 Pada (a), keduanya "berpusat" di O sehingga dapat bertukar urutan. Pada (b), translasi memindahkan titik ke sisi cermin yang lain sebelum dicerminkan.

Urutan komposisi umumnya penting. Ada pasangan yang dapat ditukar (komutatif), tetapi jangan mengandalkannya tanpa mengecek.



AWAS JEBAKAN

Urutan komposisi transformasi itu penting. Notasi $T_2 \circ T_1$ dibaca dari kanan: T_1 dikerjakan lebih dulu. Selalu kerjakan langkah demi langkah dan tulis bayangan antaranya.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TRANSFORMASI SEBAGAI MATRIKS

Rotasi, refleksi terhadap garis melalui O , dan dilatasi berpusat O dapat ditulis sebagai perkalian matriks $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad C_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Komposisi " M_1 lalu M_2 " adalah hasil kali $M_2 M_1$, dan urutan perkalian matriks memang tidak boleh ditukar sembarangan. Bonus: determinan matriks adalah faktor pengali **luas**. $\det D_k = k^2$ (luas dikali k^2), $\det R_\alpha = 1$ (luas tetap), dan $\det C_{y=x} = -1$ (luas tetap, tetapi arah hadap terbalik).



TAMU DARI MASA LALU

Pada 1872, matematikawan Jerman Felix Klein mengusulkan cara pandang baru yang dikenal sebagai Program Erlangen: sebuah geometri ditentukan oleh **kelompok transformasi** yang dianggap "tidak mengubah apa-apa". Geometri kekongruenan adalah ilmu tentang sifat yang tidak berubah oleh isometri (panjang, sudut, luas). Geometri kesebangunan mengizinkan dilatasi juga, sehingga yang tetap hanyalah sudut dan perbandingan panjang.

22.7 Simetri dan pola batik

Sebuah bangun memiliki **simetri** jika ada transformasi (selain "diam saja") yang memetakan bangun itu tepat ke dirinya sendiri. Jika transformasinya refleksi, kita sebut **simetri lipat** (cermin); jika rotasi, **simetri putar**. Banyaknya posisi berbeda dalam satu putaran penuh yang tampak sama disebut **orde** simetri putar.

Bahasa sederhana • Coba lipat selembar kertas, gunting sebuah bentuk, lalu buka lipatannya. Bentuk yang muncul pasti punya **simetri lipat**: sisi kiri adalah cerminan sisi kanan. Sekarang perhatikan kipas angin berbalik-balik tiga: diputar sepertiga putaran, ia tampak sama. Itulah **simetri putar** berorde 3.

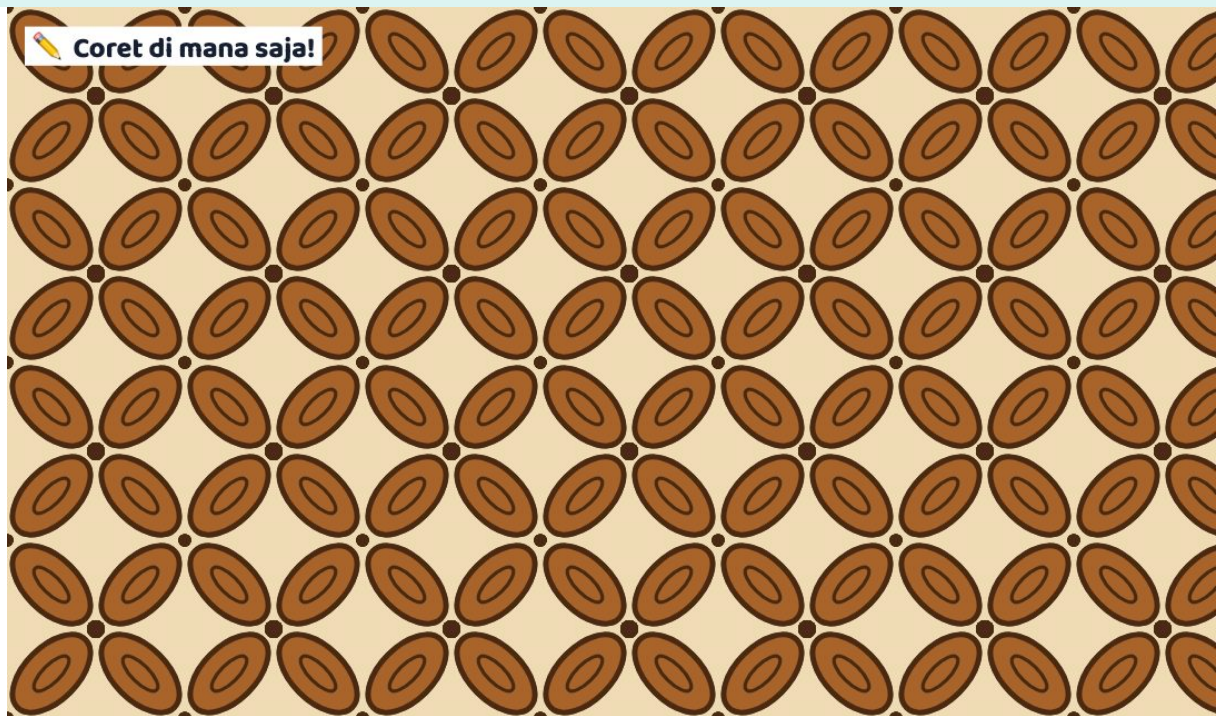


MATEMATIKA NUSANTARA

Batik adalah galeri transformasi geometri. Motif **kawung** dari Yogyakarta dan Surakarta menyusun empat bentuk lonjong, mirip irisan buah aren, mengelilingi satu titik: simetri putar orde 4 sekaligus simetri cermin. Motif **parang** mengulang pita miring berbentuk huruf S secara diagonal: translasi. Motif **ceplok** memenuhi kain dengan "bunga" yang disusun dalam kisi persegi. Tukang batik cap menekan stempel tembaga berulang-ulang, persis seperti translasi. Pola serupa muncul pada tenun ikat Sumba, songket Palembang, dan ornamen kayu masjid. Sejak 2 Oktober 2009, UNESCO mengakui batik Indonesia sebagai Warisan Budaya Takbenda Kemanusiaan, dan tanggal itu kita peringati sebagai Hari Batik Nasional.

LAB MINI Mesin batik simetri

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-22



Grup simetri
p4m

Salinan per ubin
8

Simetri putar
orde 4 (90°)

Garis cermin
4 arah

Pilih motif awal, atau pilih "Kosong" lalu **coret di mana saja** dengan mouse atau jari. Setiap coretan langsung disalin oleh aturan simetri ke seluruh kain. Ganti jenis simetri untuk motif yang sama: kapan pola terlihat seperti kawung, kapan seperti parang? Nyalakan "Tampilkan cermin & pusat putar" untuk melihat garis cermin dan pusat putarnya.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

HANYA ADA 17 JENIS POLA UBIN

Pola yang berulang ke dua arah di bidang (seperti kain batik yang tak berujung) disebut *pola wallpaper*. Pada 1891, Evgraf Fedorov membuktikan bahwa jenis simetrinya hanya ada **17**, tidak lebih dan tidak kurang. Mesin batik di atas memuat tujuh di antaranya (p1, pm, pg, p2, pmm, p4, p4m). Fakta indah lainnya: pola berulang hanya boleh memiliki simetri putar orde 2, 3, 4, atau 6, tidak pernah orde 5! Alasannya: ambil dua pusat putar orde n , yaitu A dan B , yang jaraknya d paling kecil. Putar B terhadap A sebesar $\theta = \frac{360^\circ}{n}$, dan putar A terhadap B sebesar $-\theta$. Dua titik hasilnya juga pusat putar, dan jaraknya $d|1 - 2\cos\theta|$. Jarak ini harus 0 atau paling sedikit d . Untuk $n = 5$ hasilnya $\approx 0,38d$, lebih dekat daripada d : mustahil! Hanya $n = 2, 3, 4, 6$ yang lolos.

MITOS

"Semua persegi panjang sebangun, karena sudutnya sama-sama 90° ."

MITOS

"Fotokopi 200% membuat gambar dua kali lebih besar."

FAKTA

Sudut yang sama hanya cukup untuk **segitiga**

. Persegi panjang 2×3 dan 2×6 sama-sama siku-siku, tetapi perbandingan sisinya $2 : 3 \neq 2 : 6$, jadi tidak sebangun.

FAKTA

Panjangnya memang dua kali, tetapi luasnya **empat** kali. Untuk menggandakan luas (misalnya A4 ke A3), perbesarannya cukup $\sqrt{2} \approx 141\%$.

MITOS

"Cermin menukar kiri dan kanan."

FAKTA

Cermin datar sebenarnya membalik arah **depan-belakang**, yaitu arah yang tegak lurus cermin. Tangan kananmu tetap di sisi kanan cermin; kita menyebutnya "kiri" karena membayangkan diri berbalik badan.



Fotokopi & cetak foto

Tombol 141% mengubah A4 menjadi A3, dan 71% sebaliknya. Semuanya dilatasi dengan faktor 2 atau $\frac{1}{2}$.



Peta & denah

Peta skala $1 : 50.000$ sebangun dengan wilayah aslinya. Luas di peta harus dikali 50.000^2 .



Batik cap

Stempel tembaga ditekan berulang dengan jarak tetap (translasi), kadang dibalik (refleksi) agar motifnya menyambung.



Gim & animasi

Karakter yang berbalik arah dicerminkan, roda diputar, dan kamera yang mendekat sebenarnya melakukan dilatasi.



Ornamen masjid

Bintang segi delapan pada kaligrafi dan ukiran memiliki simetri putar orde 8 dan delapan garis cermin.



Proyektor & kamera lubang jarum

Bayangan terbentuk oleh dilatasi berfaktor negatif, sehingga pada kamera lubang jarum gambarnya terbalik.

Cek Cepat

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ dengan faktor skala 3. Jika luas $\triangle ABC = 5 \text{ cm}^2$, luas $\triangle PQR$ adalah...

15 cm^2

45 cm^2

8 cm^2

125 cm^2

Bayangan titik $(2, 7)$ oleh pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah...

$(7, 2)$

$(-2, 7)$

$(2, -7)$

$(-7, -2)$

Transformasi manakah yang dapat mengubah ukuran bangun?

translasi

refleksi

rotasi

dilatasi

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. A · 3. D



Tantangan Rumah: detektif tinggi tiang bendera

Bahan: meteran, tongkat atau gagang sapu, cermin kecil, buku catatan, teman.

1. **Cara bayangan.** Pada hari cerah, berdirikan tongkat tegak di dekat tiang bendera sekolah atau pohon. Ukur tinggi tongkat, panjang bayangannya, dan panjang bayangan tiang pada waktu yang hampir bersamaan.
2. Hitung tinggi tiang dengan $T = t \times \frac{B}{b}$.
3. **Cara cermin.** Letakkan cermin mendatar di tanah. Mundurlah sampai puncak tiang tampak di tengah cermin. Ukur tinggi matamu, jarak kakimu ke cermin, dan jarak cermin ke tiang.
4. Hitung lagi tinggi tiang dan bandingkan dengan hasil cara bayangan.
5. Ulangi cara bayangan pada jam yang berbeda (pagi dan siang).

Pertanyaan: Apakah kedua cara memberi hasil yang mirip? Mana yang menurutmu lebih teliti, dan mengapa? Mengapa pengukuran bayangan sebaiknya tidak dilakukan tepat tengah hari di Indonesia?



RINGKASAN KILAT

Bab 22 dalam 3 menit

✓ **Kamu sekarang bisa...**

- membedakan bangun **kongruen** dan **sebangun**, lalu menghitung **faktor skala** beserta pengaruhnya pada luas dan volume
- memakai **syarat kesebangunan segitiga** untuk mencari panjang yang belum diketahui, termasuk tinggi benda dari bayangannya
- menentukan bayangan titik dan bangun oleh **translasi**, **refleksi**, **rotasi**, dan **dilatasi**
- menyusun **komposisi transformasi** dan mengenali **simetri** pada motif batik dan tenun



Istilah kunci

kongruen

sebangun

faktor skala

transformasi geometri

bayangan

Translasi

Rumus penting

$$k = \frac{p'}{p}$$

Faktor skala bangun sebangun. Bagi panjang pada bayangan dengan panjang yang bersesuaian pada bangun asli. Semua pasangan sisi memberi k yang sama.

$$T = t \times \frac{B}{b}$$

Tinggi benda dari bayangannya. Tinggi benda sama dengan tinggi tongkat dikali berapa kali bayangan benda lebih panjang daripada bayangan tongkat.

$$x' = a + k(x - a)$$

Dilatasi sebuah titik. Ukur jarak titik dari pusat, kalikan dengan k , lalu hitung lagi dari pusat. Koordinat y dihitung dengan cara yang sama.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Untuk segi empat, sudut yang sama besar belum menjamin sebangun.
- Pasangan sisi ditentukan oleh sudut, bukan oleh posisi pada gambar.
- Rotasi bersudut positif berarti berlawanan arah jarum jam, bukan searah.

🏞 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=22

🧩 Teka-teki untuk Bab 23

Di peta kota bergrid, sarang Ancil berada di $A(1, 3)$ dan rumah neneknya di $B(7, 5)$. Sungai mengalir sepanjang sumbu- x . Ancil ingin mampir minum di sungai lalu ke rumah nenek. Di titik mana ia harus minum agar perjalanannya sependek mungkin, dan berapa panjang perjalanan itu?

▼ Intip petunjuk

Pakai trik bab ini: cerminkan B terhadap sungai menjadi $B'(7, -5)$. Jalan $A \rightarrow$ sungai $\rightarrow B$ sama panjang dengan jalan $A \rightarrow$ sungai $\rightarrow B'$, dan jalan terpendek ke B' adalah garis lurus! Untuk menghitung panjangnya kamu perlu **rumus jarak dua titik**, salah satu bintang Bab 23 tentang geometri koordinat dan vektor.

23 Koordinat & Vektor: Bahasa Panah Penunjuk Arah

Mengapa ojek menempuh 700 m padahal peta bilang warung bakso hanya 500 m? Bagaimana feri di Selat Sunda tiba tepat di dermaga walau arus terus mendorongnya ke samping? Jawabannya ada pada panah-panah kecil bernama vektor.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menghitung **jarak** dan **titik tengah** dua titik, serta membedakan jarak lurus dengan jarak taksi;
- menulis dan membaca **persamaan lingkaran** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, termasuk dari bentuk umumnya;
- menyatakan perpindahan sebagai **vektor**, menuliskannya sebagai vektor kolom, dan menghitung panjangnya;
- menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan vektor dengan skalar, termasuk menghitung **resultan** kecepatan kapal dan arus;
- memakai **vektor posisi** untuk membagi ruas garis, serta memakai **hasil kali titik** untuk menghitung sudut dan menguji ketegaklurusan.

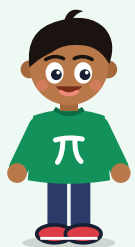
JALAN PINTAS KE WARUNG BAKSO

KOMIK • 4 PANEL

Pulang sekolah, perut keroncongan

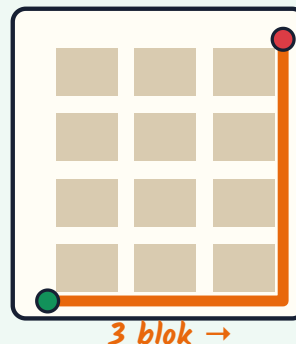
DIMAS

Kata peta di HP, warung bakso cuma 500 m dari sini. Kok aplikasi ojeknya bilang 700 m? Curang, nih!



AYU

Motor harus ikut jalan: 3 blok ke timur, lalu 4 blok ke utara. Satu blok 100 m, jadi totalnya 700 m.

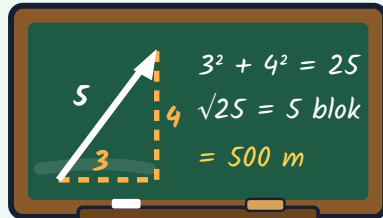


4 blok ↑



KAK LINTANG

Peta HP mengukur garis lurus, seperti burung terbang: 5 blok, alias 500 m. Ojek mengikuti jalan: 700 m. Dua-duanya benar!



AHA!

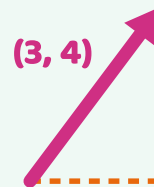
Ancil muncul dari balik gerobak bakso...

ANCIL

Seluruh perjalanan itu bisa diringkas jadi satu panah: $(3, 4)$, artinya 3 ke timur dan 4 ke utara. Namanya vektor!

DIMAS

Panahnya bisa dijumlahkan juga?!

**Tebak Dulu!**

Ojek berangkat dari titik start menuju warung yang letaknya 3 blok ke timur dan 4 blok ke utara. Ojek hanya boleh lewat jalan dan hanya bergerak ke timur atau ke utara. Rute mana yang paling pendek?

Rute zig-zag (timur, utara, timur, utara, ...), karena paling mirip garis lurus.

Lurus ke timur dulu 3 blok, baru ke utara 4 blok.

Semua rute seperti itu sama panjang: 7 blok.

Ke utara dulu 4 blok, baru ke timur 3 blok.

Jawabannya: semuanya sama, 7 blok. Setiap rute yang hanya bergerak ke timur dan ke utara pasti memuat tepat 3 langkah ke timur dan 4 langkah ke utara. Yang berbeda hanya urutannya. Rute zig-zag tampak "lebih lurus", tetapi panjangnya tetap 7 blok. Ternyata ada 35 rute terpendek seperti itu (cara menghitungnya ada di Bab 32). Jarak "versi jalan" ini disebut **jarak taksi**. (Teka-teki sungai Ancil dari Bab 22 justru memakai jarak lurus: $AB' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ satuan, dengan titik minum $(\frac{13}{4}, 0)$.)

23.1 Jarak, jarak taksi, dan titik tengah

Di Bab 18 kamu sudah memakai Teorema Pythagoras untuk menghitung jarak lurus antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$. Kaki-kakinya adalah selisih mendatar $\Delta x = x_2 - x_1$ dan selisih tegak $\Delta y = y_2 - y_1$. Komik di atas

menunjukkan bahwa di kota bergrid ada *dua* cara mengukur jarak yang sama-sama masuk akal.



RUMUS JARAK DAN TITIK TENGAH

Untuk dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$:

- **Jarak lurus** (jarak Euclid): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- **Jarak taksi** (lewat jalan bergrid): $d_T = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.
- **Titik tengah** ruas garis AB : $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

▼ Mengapa titik tengah adalah "rata-rata"?

Untuk pergi dari A ke B , koordinat x bertambah $x_2 - x_1$. Titik tengah dicapai setelah menempuh **setengah** perjalanan, jadi

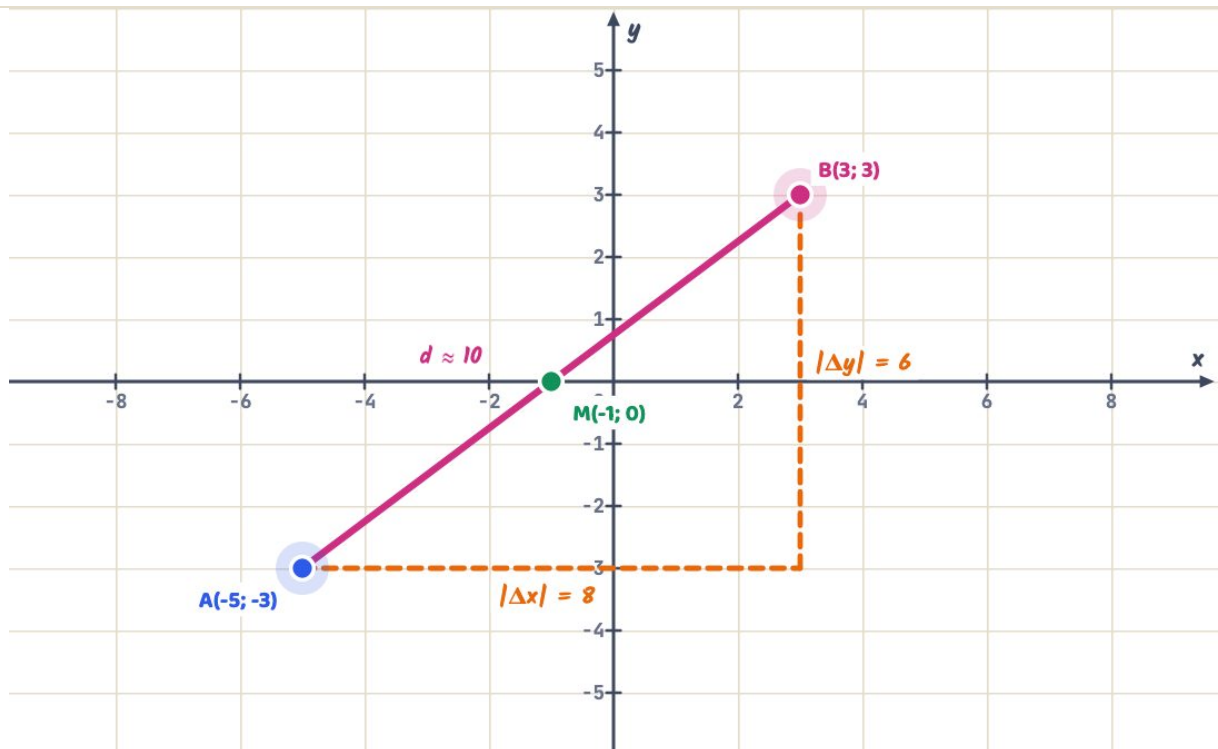
$$x_M = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Hal yang sama berlaku untuk y . Dengan rumus jarak, $AM = MB = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}d$. Jadi M memang tepat di tengah.

Bahasa sederhana • Titik tengah itu seperti tempat janji yang adil: kamu dan temanmu sama-sama berjalan setengah jalan. Caranya gampang: jumlahkan kedua koordinat x lalu bagi dua, kemudian jumlahkan kedua koordinat y lalu bagi dua.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{-5 + 3}{2}; \frac{-3 + 3}{2} \right) = (-1; 0)$$



✨ jarak lurusnya bulat: ada tripel Pythagoras tersembunyi!

Jarak lurus d
10

Jarak ojek $|\Delta x| + |\Delta y|$
14

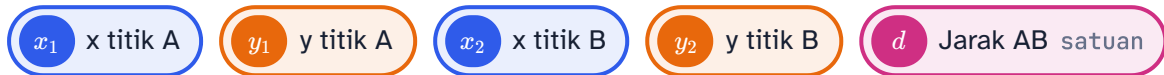
Titik tengah M
(-1; 0)

Ojek ÷ lurus
1,4

Seret titik A dan B. Garis oranye putus-putus adalah rute ojek di jalan bergrid; garis magenta adalah jarak lurus; titik hijau adalah titik tengah. Kapan jarak ojek sama dengan jarak lurus? Kapan perbandingan "ojek ÷ lurus" paling besar?

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jarak lurus adalah sisi miring segitiga siku-siku yang kakinya selisih x dan selisih y . Titik tengahnya cukup rata-rata koordinat.



✨ jaraknya bulat

Selisih $x = 8$, selisih $y = -6$. Kuadratnya **64** dan **36**, jumlahnya **100**, jadi $d = 10$. Titik tengahnya $M(2; 0)$, dan jarak taksinya **14**.

Cek satuan: Satuan jarak sama dengan satuan sumbu: km di peta berskala km, satuan petak di kertas berpetak.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOORDINAT-JARAK-TENGAH

CONTOH Warung di tengah jalan

Pada peta bersatuan km, rumah Dimas berada di $A(-2, 3)$ dan sekolahnya di $B(6, -3)$. Ibu ingin membuka warung tepat di tengah-tengah ruas AB . Di mana warung itu, dan berapa jarak lurus rumah ke sekolah?

1 Titik tengah: $M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+(-3)}{2} \right) = (2, 0)$.

2 Selisih: $\Delta x = 6 - (-2) = 8$ dan $\Delta y = -3 - 3 = -6$.

3 Jarak: $d = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Warung berada di $(2, 0)$, dan jarak lurus rumah-sekolah 10 km. Cek kewajaran: jarak A ke M adalah $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ km, tepat setengahnya.



TRIK KAK LINTANG

Titik tengah = **rata-rata**. Kalau yang diketahui titik tengah M dan satu ujung A , ujung lainnya cukup dicari dengan "loncat dua kali": $B = 2M - A$. Contoh: $M(1, 4)$ dan $A(-3, 2)$ memberi $B = (2 - (-3), 8 - 2) = (5, 6)$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

SEBERAPA "RUGI" OJEK DIBANDING DRONE?

Tulis $p = |\Delta x|$ dan $q = |\Delta y|$. Maka $d_T^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \geq p^2 + q^2 = d^2$, jadi $d_T \geq d$. Di sisi lain, $(p-q)^2 \geq 0$ memberi $2pq \leq p^2 + q^2$, sehingga $d_T^2 \leq 2(p^2 + q^2) = 2d^2$. Kesimpulannya

$$d \leq d_T \leq \sqrt{2}d.$$

Ojek paling "rugi" (sekitar 1,41 kali) ketika $|\Delta x| = |\Delta y|$, yaitu saat tujuannya tepat di arah serong 45° . Coba buktikan sendiri di Grafik Hidup di atas!

23.2 Persamaan lingkaran

Sebuah menara BTS memancarkan sinyal sampai jarak 5 km ke segala arah. Daerah tepi jangkauannya berbentuk lingkaran. Di Bab 18 kamu melihat lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$: $x^2 + y^2 = r^2$. Tetapi menara jarang berdiri tepat di titik asal peta. Bagaimana kalau pusatnya pindah ke (a, b) ?



DEFINISI

Lingkaran adalah himpunan semua titik yang jaraknya **sama** terhadap satu titik tetap. Titik tetap itu disebut **pusat**, dan jarak yang sama itu disebut **jari-jari** r .



PERSAMAAN LINGKARAN

Lingkaran yang berpusat di $C(a, b)$ dengan jari-jari r mempunyai persamaan

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jika pusatnya $O(0, 0)$, persamaannya menjadi $x^2 + y^2 = r^2$.

▼ Bukti: persamaan lingkaran = rumus jarak

Titik $P(x, y)$ terletak pada lingkaran jika dan hanya jika jaraknya ke pusat sama dengan r :

$$CP = r \iff \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

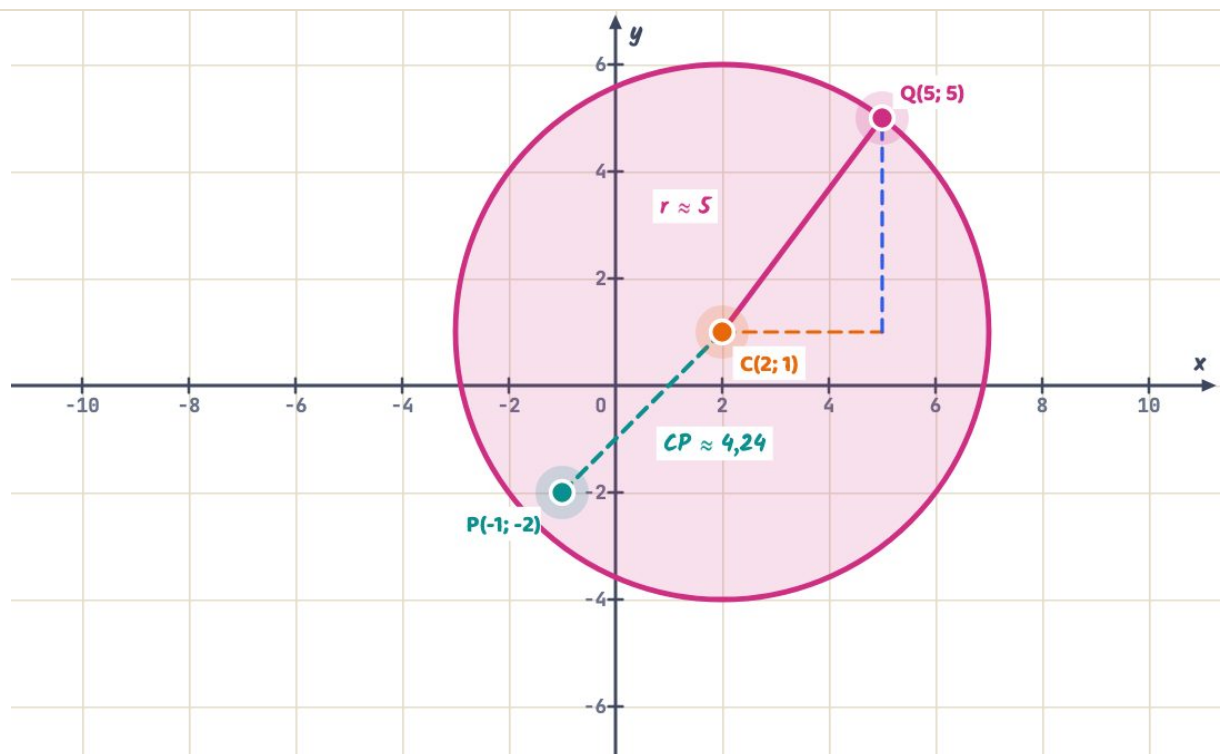
Langkah terakhir sah karena kedua ruas tidak negatif, sehingga boleh dikuadratkan tanpa menambah jawaban palsu.



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Lingkaran ini selalu melewati titik Q. Jari-jarinya dihitung dengan rumus jarak dari pusat C ke Q.



P di dalam lingkaran: $18 < r^2 = 25$

r^2
25

Jari-jari r
5

$(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2$
18

Bentuk umum

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

Seret pusat C (oranye), titik Q (magenta) yang dilalui lingkaran, dan titik uji P (hijau toska). Perhatikan rumus di atas berubah. Bisakah kamu menaruh P tepat *pada* lingkaran tanpa menebak, hanya dengan menghitung?



AWAS JEBAKAN

Pada $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$, pusatnya $(-3, 2)$, bukan $(3, -2)$, dan jari-jarinya 4, bukan 16. Ingat bentuknya " x **dikurangi** a ": $x + 3 = x - (-3)$, jadi $a = -3$. Ruas kanan adalah r^2 , jadi tarik akarnya dulu.

Kalau persamaan lingkaran dijabarkan, tanda kurungnya hilang dan muncul **bentuk umum**:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 - \underbrace{2ax}_D - \underbrace{2by}_E +$$

Untuk kembali dari bentuk umum ke pusat dan jari-jari, pakai teknik **melengkapkan kuadrat** yang kamu pelajari di Bab 11. Hasilnya: pusat $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ dan $r = \sqrt{(\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F}$.

RUMUS HIDUP

Pusat & jari-jari dari bentuk umum lingkaran

$$r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$$

Dari $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$: pusatnya $(-D/2, -E/2)$, dan jari-jarinya akar dari $(D/2)^2 + (E/2)^2 - F$.

D Koefisien x

E Koefisien y

F Konstanta

r Jari-jari satuan

JARI-JARI

6

satuan

✨ jari-jarinya bulat

Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ berpusat di **(3; -4)**. Nilai $r^2 = (D/2)^2 + (E/2)^2 - F = 36$, jadi $r = 6$. Tanda '-' muncul jika $r^2 \leq 0$: tidak ada lingkaran nyata (paling banter hanya sebuah titik).

Cek satuan: Jari-jari memakai satuan yang sama dengan sumbu koordinat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOORDINAT-LINGKARAN-UMUM

Sebuah menara BTS berada di $(3, -2)$ pada peta bersatuan km, dengan jangkauan sinyal 5 km. (a) Tuliskan persamaan lingkaran tepi jangkauannya. (b) Rumah Ayu di $(0, 1)$ dan rumah Dimas di $(7, 2)$. Siapa yang mendapat sinyal?

1 (a) Pusat $(3, -2)$, $r = 5$: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

2 (b) Rumah Ayu: $(0 - 3)^2 + (1 + 2)^2 = 9 + 9 = 18 < 25$. Di dalam lingkaran.

3 Rumah Dimas: $(7 - 3)^2 + (2 + 2)^2 = 16 + 16 = 32 > 25$. Di luar lingkaran.

Ayu mendapat sinyal (jaraknya $\sqrt{18} \approx 4,24$ km dari menara); Dimas tidak (jaraknya $\sqrt{32} \approx 5,66$ km).

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.

1 Kelompokkan: $(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 11$.

2 Lengkapi kuadrat: tambahkan $\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$ dan $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$ di **kedua** ruas: $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 11 + 9 + 16$.

3 $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$.

Pusat $(3, -4)$ dan jari-jari $\sqrt{36} = 6$. Cek dengan Rumus Hidup di atas: $D = -6$, $E = 8$, $F = -11$.



TRIK KAK LINTANG

Untuk menguji apakah sebuah titik di dalam, pada, atau di luar lingkaran, **tidak perlu menarik akar**. Cukup bandingkan $(x - a)^2 + (y - b)^2$ dengan r^2 : lebih kecil berarti di dalam, sama berarti pada lingkaran, lebih besar berarti di luar.

**PANJANG GARIS SINGGUNG DARI TITIK DI LUAR**

Garis singgung lingkaran selalu tegak lurus jari-jari di titik singgungnya (Bab 20). Jadi pusat C , titik singgung T , dan titik luar $P(x_0, y_0)$ membentuk segitiga siku-siku di T , dan

$$PT = \sqrt{CP^2 - r^2} = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2}.$$

Besaran di bawah tanda akar disebut **kuasa titik** P terhadap lingkaran: positif di luar, nol pada lingkaran, negatif di dalam. Contoh: dari $P(5, 8)$ ke lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, panjang garis singgungnya $\sqrt{25 + 64 - 25} = \sqrt{64} = 8$.

23.3 Vektor: panah perpindahan

Kalau temanmu berkata, "Harta karunya 5 langkah dari pohon mangga," kamu tetap bingung: 5 langkah *ke mana*? Ada besaran yang cukup dinyatakan dengan satu bilangan, misalnya massa atau suhu. Ada juga besaran yang butuh **arah**, misalnya perpindahan, kecepatan, dan gaya.

**DEFINISI**

Vektor adalah besaran yang mempunyai **besar** (panjang) dan **arah**. Vektor digambar sebagai panah: pangkalnya titik awal, ujungnya titik akhir. Besaran yang hanya mempunyai besar disebut **skalar**. Vektor dari A ke B ditulis $\vec{AB}$; vektor juga boleh diberi nama satu huruf, $\vec{a}$ atau $\mathbf{a}$. Di bidang koordinat, vektor ditulis sebagai **vektor kolom**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j},$$

dengan x = perpindahan mendatar (positif ke kanan/timur) dan y = perpindahan tegak (positif ke atas/utara). Supaya hemat tempat, bab ini kadang menuliskannya mendatar: $\vec{v} = (x, y)$.

Skalar (cukup satu bilangan)**Vektor (butuh besar dan arah)**

massa beras 5 kg

gaya berat 50 N ke bawah

jarak tempuh 10 km

perpindahan 10 km ke utara

kelajuan 60 km/jam

kecepatan 60 km/jam ke timur

suhu 30 °C, waktu 2 jam

angin 20 km/jam dari barat

Dua hal paling penting tentang sebuah vektor adalah komponennya dan panjangnya.

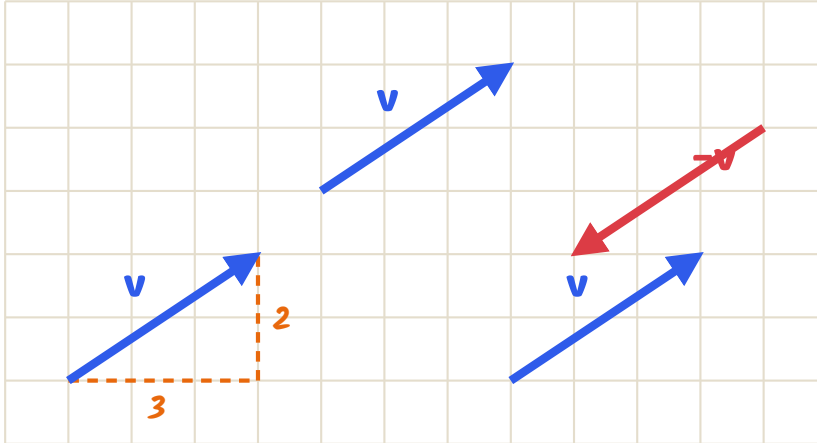


KOMPONEN DAN PANJANG VEKTOR

Untuk $A(x_A, y_A)$ dan $B(x_B, y_B)$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad (\text{ujung dikurangi pangkal}), \quad |\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Panjang vektor tidak lain adalah rumus jarak dari Bab 18.



Tiga panah biru:

arah sama, panjang sama.

Jadi ketiganya vektor yang sama: $v = (3, 2)$.

Panah merah:

$-v = (-3, -2)$, panjang sama, arah berlawanan.

$$|v| = \sqrt{13} \approx 3,61$$

Vektor tidak terikat pada tempat: yang menentukan hanyalah arah dan panjangnya. Panah yang sama boleh digeser ke mana saja tanpa diputar, persis seperti translasi di Bab 22.

Beberapa vektor istimewa: **vektor nol** $\vec{0} = (0, 0)$ (tidak berpindah, tanpa arah), **vektor negatif** $-\vec{v}$ (panjang sama, arah berlawanan), dan **vektor satuan** yang panjangnya 1, misalnya $\mathbf{i} = (1, 0)$ ke timur dan $\mathbf{j} = (0, 1)$ ke utara. Setiap vektor bukan nol bisa "disatukan": $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Bahasa sederhana • Vektor itu seperti petunjuk harta karun: "3 langkah ke timur, 2 langkah ke utara." Petunjuk ini tidak peduli kamu mulai dari mana; ia hanya memberi tahu **arah** dan **seberapa jauh**. Angka atas = ke kanan (minus berarti ke kiri), angka bawah = ke atas (minus berarti ke bawah).

CONTOH Dari A ke B

Diketahui $A(1, 2)$ dan $B(4, 6)$. Tentukan $\vec{AB}$, $|\vec{AB}|$, dan $\vec{BA}$.

- 1 Ujung dikurangi pangkal: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- 2 Panjangnya: $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- 3 Arah sebaliknya: $\vec{BA} = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{AB}$.

$\vec{AB} = (3, 4)$ dengan panjang 5, sedangkan $\vec{BA} = (-3, -4)$: panjangnya sama, arahnya berlawanan.

**TRIK KAK LINTANG**

Ingat semboyan "**UKP: Ujung Kurang Pangkal**". Vektor $\vec{AB}$ berpangkal di A dan berujung di B , jadi komponennya $B - A$. Tukar urutannya, maka tandanya ikut berbalik.

**AWAS JEBAKAN**

Hati-hati dengan nama arah angin. "Angin barat" adalah angin yang bertiup **dari** barat **ke** timur, jadi vektor kecepatannya menunjuk ke *timur*, misalnya $(20, 0)$ km/jam. Peta cuaca BMKG menggambar panah ke arah angin bertiup, sedangkan namanya menyebut asal angin.

**ADU CEPAT** Panjang vektor kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-23)

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tanda minus hilang saat dikuadratkan. Cari tripel Pythagoras yang tersembunyi: $(-6, 8)$ adalah $(3, 4)$ dikali 2, jadi panjangnya 10.



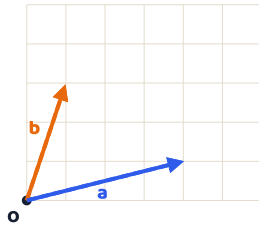
TAMU DARI MASA LALU

Pada 1637, René Descartes menerbitkan *La Géométrie* yang menyatukan aljabar dan geometri: setiap titik menjadi pasangan bilangan, dan setiap kurva menjadi persamaan. Pierre de Fermat menemukan gagasan serupa pada masa yang hampir bersamaan. Konon, Descartes mendapat ilham saat berbaring sambil mengamati seekor lalat yang merayap di langit-langit kamarnya. Gagasan vektor matang lebih lambat. Simon Stevin dari Belanda (sekitar 1586) sudah menyusun gaya-gaya dengan segitiga. William Rowan Hamilton dan Hermann Grassmann mengembangkannya pada 1840-an, lalu Josiah Willard Gibbs dan Oliver Heaviside (sekitar 1880-an) merapkannya menjadi notasi vektor dan hasil kali titik yang kita pakai sekarang.

23.4

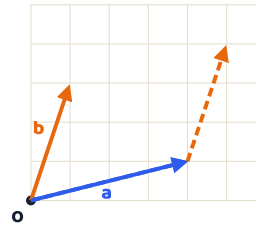
Operasi vektor: menjumlah, mengurangi, mengalikan

Ojek berjalan $\vec{a} = (4, 1)$, lalu $\vec{b} = (1, 3)$. Di mana ia berakhir? Cukup sambung panahnya: **pangkal panah kedua ditempelkan ke ujung panah pertama**. Panah dari titik awal ke titik akhir disebut **resultan**.



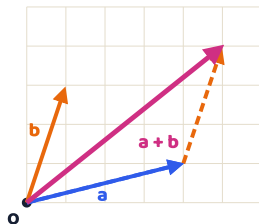
Dua perpindahan:
 $a = (4, 1)$: 4 kanan, 1 atas
 $b = (1, 3)$: 1 kanan, 3 atas

Langkah 1. Dua perpindahan dari titik O : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.



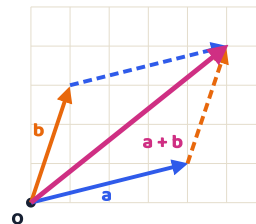
Geser b tanpa memutar sampai pangkalnya menempel di ujung a (ujung ke pangkal).

Langkah 2. Geser $\vec{b}$ (tanpa diputar) sehingga pangkalnya menempel di ujung $\vec{a}$. Inilah aturan **ujung ke pangkal** (aturan segitiga).



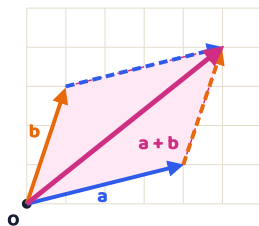
Panah dari O ke ujung terakhir:
 $a + b = (4 + 1, 1 + 3)$
 $a + b = (5, 4)$

Langkah 3. Resultan adalah panah dari O ke ujung terakhir:
 $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 + 1 \\ 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Komponennya cukup dijumlahkan!



Balik urutannya: **b dulu, baru a.**
 Panah biru pindah ke ujung b...
ujungnya sama: $b + a = a + b$

Langkah 4. Kalau $\vec{b}$ dijalani lebih dulu, lalu $\vec{a}$, ujungnya tepat sama. Jadi $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$ (komutatif).



Resultan = diagonal jajargenjang
 $|a + b| = \sqrt{41} \approx 6,40$
 $|a| + |b| = \sqrt{17} + \sqrt{10} \approx 7,29$
jalan pintas selalu lebih pendek!

Langkah 5. Kedua jalur membentuk **jajargenjang**, dan resultan adalah diagonalnya. Perhatikan: $|\vec{a} + \vec{b}| \approx 6,40$ lebih kecil daripada $|\vec{a}| + |\vec{b}| \approx 7,29$.



SIFAT-SIFAT OPERASI VEKTOR

Untuk $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, dan bilangan real k :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}, \quad k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}.$$

Berlaku $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, dan $|k\vec{a}| = |k| |\vec{a}|$. Dua vektor bukan nol **sejajar** jika salah satunya kelipatan yang lain: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Operasi

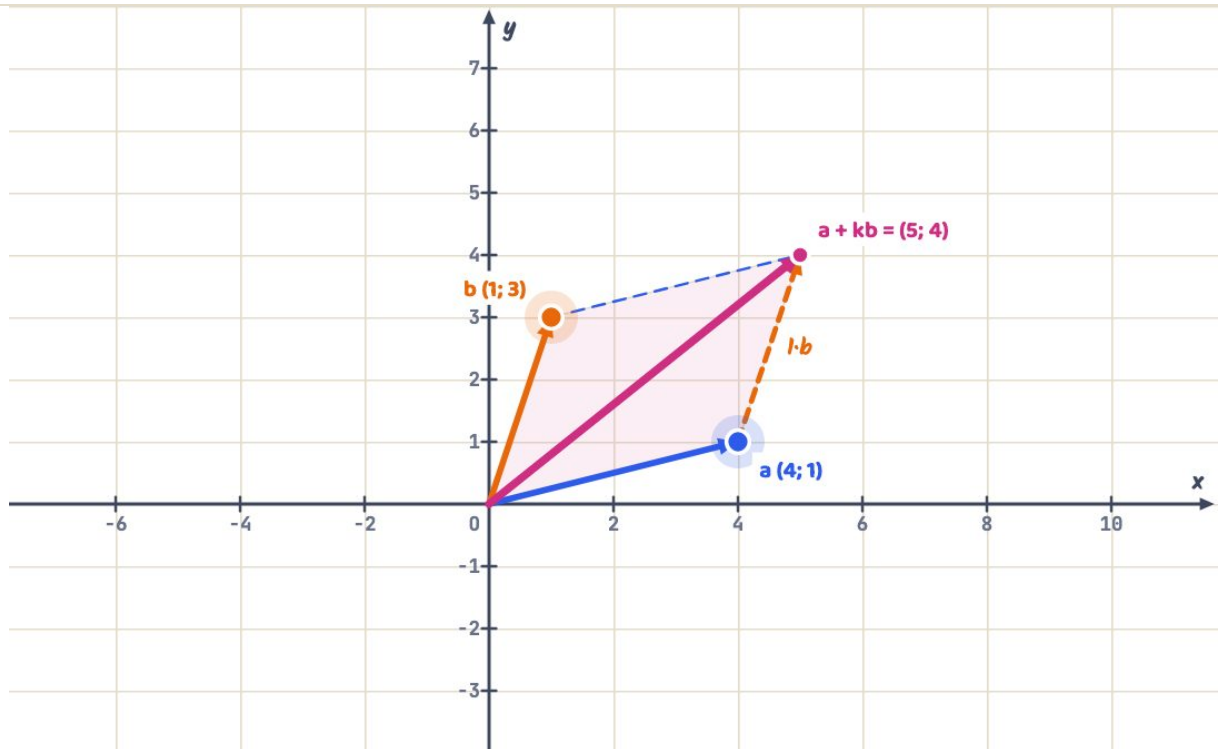
Komponen

Arti gambarnya

$\vec{a} + \vec{b}$	jumlahkan komponen	ujung ke pangkal, atau diagonal jajargenjang
$\vec{a} - \vec{b}$	kurangkan komponen	$\vec{a} + (-\vec{b})$; panah dari ujung $\vec{b}$ ke ujung $\vec{a}$
$k\vec{a}, k > 0$	kalikan tiap komponen	arah tetap, panjang dikali k
$k\vec{a}, k < 0$	kalikan tiap komponen	arah berbalik, panjang dikali $ k $
$ \vec{a} $	$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	panjang panah (Pythagoras)

$$\vec{r} = \vec{a} + k\vec{b}$$

$$\vec{a} + 1\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



k = 1: jumlah biasa $\vec{a} + \vec{b}$, diagonal jajargenjang

$|\vec{a}|$

4,123

$|\vec{b}|$

3,162

$|\vec{a} + k\vec{b}|$

6,403

$|\vec{a}| + |k|\cdot|\vec{b}|$

7,285

Seret ujung panah $\vec{a}$ (biru) dan $\vec{b}$ (oranye), lalu geser k . Coba $k = -1$: panah magenta berubah menjadi $\vec{a} - \vec{b}$. Kapan $|\vec{a} + \vec{b}|$ tepat sama dengan $|\vec{a}| + |\vec{b}|$?

Perahu motor di Sungai Kapuas bergerak 12 km/jam ke utara terhadap air, sedangkan arus sungai mengalir 5 km/jam ke timur. Berapa kelajuan perahu terhadap tepi sungai? Di mana perahu setelah 2 jam?

- 1 Kecepatan terhadap tanah = kecepatan terhadap air + kecepatan arus: $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ km/jam.
- 2 Kelajuannya: $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ km/jam.
- 3 Setelah 2 jam: perpindahan $2 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$ km, berjarak $2 \times 13 = 26$ km dari titik awal.

Perahu melaju 13 km/jam, sedikit serong ke timur dari arah utara (sekitar 22,6°; cara menghitung sudutnya ada di Bab 24). Setelah 2 jam ia berada 10 km ke timur dan 24 km ke utara dari titik awal.



Tebak Dulu!

Feri dari Merak ingin tiba di dermaga yang tepat berseberangan, padahal arus laut mengalir ke timur. Ke mana nakhoda harus mengarahkan haluan (moncong) kapal?

Lurus tegak ke seberang; arus tidak berpengaruh pada kapal sebesar itu.

Sedikit ke timur, searah arus, supaya lebih cepat.

Sedikit ke barat, melawan arus.

Tidak mungkin; feri pasti meleset.

Jawabannya: sedikit melawan arus. Kecepatan feri terhadap air dan kecepatan arus dijumlahkan sebagai vektor. Agar resultannya tepat menunjuk ke seberang, komponen ke barat dari kecepatan feri harus menghapus arus ke timur. Hasilnya, moncong kapal menghadap agak serong, padahal kapalnya bergerak lurus. Coba sendiri di Lab Mini berikut!

Kelajuan resultan

20,62 km/jam

Arah lintasan (dari utara)

14 °

Waktu menyeberang

90 menit

Meleset dari dermaga

7,5 km

Status

berlayar... 27 menit

Atur kelajuan feri, sudut haluan, dan kuat arus, lalu tekan ► **Jalankan**. Kamu juga bisa menyeret ujung panah biru pada segitiga kecepatan. Tantangan: (1) tiba tepat di Bakauheni; (2) menyeberang secepat mungkin. Apakah kedua tujuan itu dicapai dengan haluan yang sama? (Model ini menyederhanakan selat menjadi jalur lurus selebar 30 km dengan arus seragam ke timur.)

**TRIK KAK LINTANG**

Kecepatan selalu "menumpang": **kecepatan terhadap tanah = kecepatan terhadap air (atau udara) + kecepatan arus (atau angin)**. Pilot pesawat, nakhoda feri, sampai pelari di atas eskalator berjalan memakai rumus vektor yang sama.

Penjumlahan dan perkalian skalar bisa digabung. Dengan dua "jurus" saja, misalnya $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, kamu bisa mencapai banyak titik dengan bentuk $m\vec{a} + n\vec{b}$, yang disebut **kombinasi linear**. Ancil menantangmu di permainan berikut.

Posisi Ancil
 $(0, 0)$

Harta di
 $(-8, 6)$

Jarak ke harta
10

Harta ditemukan
0

Kamu hanya boleh melangkah dengan jurus $\vec{a}$ dan jurus $\vec{b}$ (boleh mundur dengan bilangan negatif). Atur m dan n sampai Ancil menginjak harta karun. Titik-titik ungu adalah semua tempat yang bisa dicapai.

Bingung? Tekan 💡 **Bisikan Ancil:** menemukan m dan n sama dengan menyelesaikan sistem persamaan linear dari Bab 10!

MITOS

"Panah (3, 4) di pojok kiri dan panah (3, 4) di pojok kanan adalah dua vektor yang berbeda."

MITOS

"Panjang
 $\vec{a} + \vec{b}$
selalu sama dengan
 $|\vec{a}| + |\vec{b}|$
."

FAKTA

Keduanya vektor yang

sama

. Vektor hanya ditentukan oleh panjang dan arah, bukan letaknya. Yang punya letak tetap adalah *vektor posisi*

(subbab 23.5), yang selalu berpangkal di

O

.

FAKTA

Hanya jika

$\vec{a}$

dan

$\vec{b}$

searah. Contoh:

$$(3, 0) + (0, 4) = (3, 4)$$

panjangnya 5, bukan

$$3 + 4 = 7$$

. Secara umum

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

(ketaksamaan segitiga).

MITOS

"Kapal yang moncongnya menghadap ke utara pasti bergerak ke utara."

FAKTA

Belum tentu! Arah haluan adalah arah kecepatan *terhadap air*

. Jika ada arus, gerak sebenarnya adalah resultan kecepatan kapal dan kecepatan arus, sehingga kapal bisa bergerak serong.

23.5 Vektor posisi dan pembagian ruas garis

Vektor bebas boleh digeser ke mana saja. Tetapi untuk "menandai" letak sebuah titik, kita pakai panah yang **selalu berpangkal di titik asal O** .



DEFINISI

Vektor posisi titik A adalah $\vec{a} = \vec{OA}$. Jika $A(x, y)$, maka $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: komponennya sama dengan koordinat titiknya. Untuk dua titik A dan B berlaku

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Dengan vektor posisi, titik tengah menjadi sangat ringkas: $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Bagaimana jika titik P tidak tepat di tengah, misalnya $AP : PB = 2 : 1$?



RUMUS PEMBAGIAN RUAS GARIS

Jika titik P terletak pada ruas garis AB dengan $AP : PB = m : n$, maka

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$

Dalam koordinat: $x_P = \frac{nx_A + mx_B}{m + n}$ dan $y_P = \frac{ny_A + my_B}{m + n}$. Untuk $m = n$, rumus ini menjadi rumus titik tengah.

▼ Bukti dengan vektor

Karena $AP : PB = m : n$, titik P berada $\frac{m}{m+n}$ bagian dari perjalanan A ke B : $\vec{AP} = \frac{m}{m+n}\vec{AB} = \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$. Maka

$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{(m+n)\vec{a} + m\vec{b} - m\vec{a}}{m+n} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}.$$



TRIK KAK LINTANG

Ingat **pikulan** tukang bakso! Bahu harus berada di titik seimbang, lebih dekat ke keranjang yang *lebih berat*. Rumus pembagian bekerja sama: bobot n dipasang di A dan bobot m di B (**bersilang!**). Kalau $AP : PB = 2 : 1$, titik P lebih dekat ke B , jadi B mendapat bobot yang lebih besar, yaitu 2.

$$x_P = \frac{n x_A + m x_B}{m + n}$$

Jika $AP : PB = m : n$, koordinat A diberi bobot n dan koordinat B diberi bobot m (bersilang), lalu dibagi $m + n$.

x_A x titik A

x_B x titik B

m Bagian AP

n Bagian PB

x_P Koordinat x titik P

KOORDINAT X TITIK P

5

koordinatnya bulat

$AP : PB = 2 : 1$, jadi P berada $\frac{2}{3}$ bagian dari perjalanan A ke B. $x_P = (1 \times (-1) + 2 \times (8)) \div 3 = 5$. Rumus yang sama berlaku untuk koordinat y.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VEKTOR-TITIK-PEMBAGI

Diketahui $A(-1, 2)$ dan $B(8, -4)$. Titik P pada ruas AB memenuhi $AP : PB = 2 : 1$. Tentukan koordinat P , lalu periksa jawabanmu.

1 $m = 2, n = 1: \vec{p} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3}.$

2 $x_P = \frac{-1 + 16}{3} = 5$ dan $y_P = \frac{2 + (-8)}{3} = -2$. Jadi $P(5, -2)$.

3 Periksa: $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ dan $\vec{PB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ternyata $\vec{AP} = 2 \vec{PB}$: searah dan dua kali lebih panjang.

$P(5, -2)$. Pemeriksaan dengan vektor membuktikan bahwa P terletak pada AB dan $AP : PB = 2 : 1$.

Pemeriksaan di contoh tadi memakai ide penting: **tiga titik** A, B, C **segaris (kolinear)** jika dan hanya jika $\vec{AC} = k \vec{AB}$ untuk suatu bilangan k . Dengan cara yang sama, titik berat segitiga ABC mempunyai vektor posisi $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$: rata-rata ketiga titik sudutnya.

Bahasa sederhana • Gampangnya begini: kalau kamu berjalan dari A ke B dan berhenti setelah dua pertiga jalan, kamu berada di titik P dengan $AP : PB = 2 : 1$. Hitung saja "dua pertiga dari perpindahan", lalu tambahkan ke titik awal A .



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TIGA GARIS BERAT SELALU BERTEMU DI SATU TITIK

Garis berat dari A menuju titik tengah BC , yaitu $\vec{m}_a = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Titik yang membagi garis berat itu dengan perbandingan $2 : 1$ dari A adalah

$$\frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

Hasilnya **simetris** terhadap $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, jadi garis berat dari B dan dari C juga melewati titik yang sama. Tanpa satu gambar pun, kita membuktikan bahwa ketiga garis berat berpotongan di titik berat G , dan G membagi setiap garis berat dengan perbandingan $2 : 1$. Inilah kekuatan vektor di soal olimpiade geometri.

23.6

Hasil kali titik dan sudut antarvektor



Tebak Dulu!

Vektor $\vec{a} = (3, 4)$ dan $\vec{b} = (-4, 3)$ digambar dari titik pangkal yang sama. Berapa sudut di antara keduanya?

Kira-kira 45° .

Tepat 90° .

180° , karena ada tanda negatif.

Tidak bisa ditentukan tanpa busur derajat.

Jawabannya: tepat 90° . Hitung $3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = 0$. Di subbab ini kamu akan tahu mengapa hasil nol itu berarti tegak lurus, tanpa busur sama sekali.

Ada satu cara "mengalikan" dua vektor yang hasilnya **bilangan biasa**. Hasil itu ternyata menyimpan informasi tentang sudut di antara kedua vektor.



DEFINISI

Hasil kali titik (*dot product*, disebut juga hasil kali skalar) dari $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ adalah bilangan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Kalikan komponen yang "sepasang", lalu jumlahkan. Hasilnya skalar, bukan vektor.



KENALAN SINGKAT DENGAN COS θ

Pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip θ , **cos θ** adalah perbandingan sisi di samping sudut itu terhadap sisi miring. Nilainya tidak bergantung pada ukuran segitiga, hanya pada sudutnya, dan bisa dicari dengan tombol **cos** di kalkulator (sudut dari nilai cos: tombol **cos⁻¹**). Beberapa nilai penting: $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 60^\circ = 0,5$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 120^\circ = -0,5$, $\cos 180^\circ = -1$. Untuk sudut tumpul, cos bernilai negatif. Perkenalan resminya ada di Bab 24 dan Bab 26.



HASIL KALI TITIK DAN SUDUT

Jika θ adalah sudut di antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ (keduanya bukan nol, berpangkal di titik yang sama, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$), maka

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Akibatnya: $\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; sudutnya lancip jika $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ dan tumpul jika $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; serta $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

▼ Bukti dengan Pythagoras dua kali

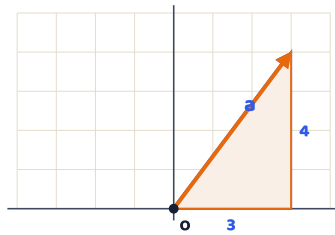
Misalkan $\vec{a} = \vec{OA}$ dan $\vec{b} = \vec{OB}$ dengan sudut θ di O . Jatuhkan garis tegak lurus dari B ke garis OA , dengan kaki F . Pada segitiga siku-siku OFB : $OF = |\vec{b}| \cos \theta$ dan $FB^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$. Pada segitiga siku-siku AFB :

$$AB^2 = AF^2 + FB^2 = (|\vec{a}| - |\vec{b}| \cos \theta)^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta.$$

Di sisi lain, $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, sehingga dengan komponen

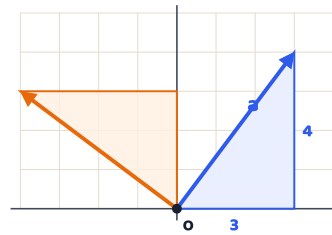
$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2).$$

Bandingkan kedua hasil: $a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$. Untuk θ tumpul, F jatuh pada perpanjangan OA ke belakang O dan $\cos \theta$ negatif; perhitungannya tetap sama. ■



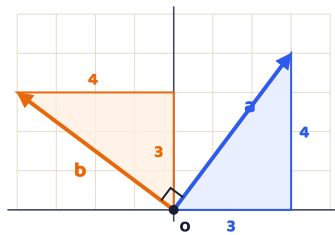
Vektor $a = (3, 4)$:
3 ke kanan, 4 ke atas.
Segitiga tangganya
berkaki 3 dan 4.

Langkah 1. Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bersama "segitiga tangganya": 3 satuan ke kanan, 4 satuan ke atas.



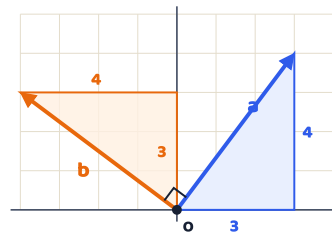
Putar segitiga itu 90°
berlawanan arah jarum jam,
dengan poros di O.

Langkah 2. Putar seluruh segitiga 90° berlawanan arah jarum jam, dengan poros di O.



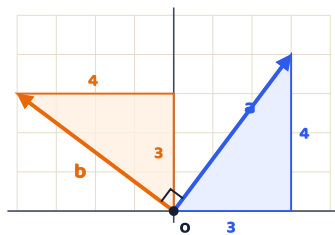
Kaki 3 kini tegak,
kaki 4 kini mendatar ke kiri:
 $b = (-4, 3)$

Langkah 3. Kaki mendatar 3 kini tegak ke atas, kaki tegak 4 kini mendatar ke kiri. Panah barunya $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, dan sudut di O tepat 90° .



Hitung hasil kali titiknya:
 $a \cdot b = 3(-4) + 4(3)$
 $= -12 + 12 = 0$

Langkah 4. Hasil kali titiknya: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3(-4) + 4(3) = -12 + 12 = 0$.

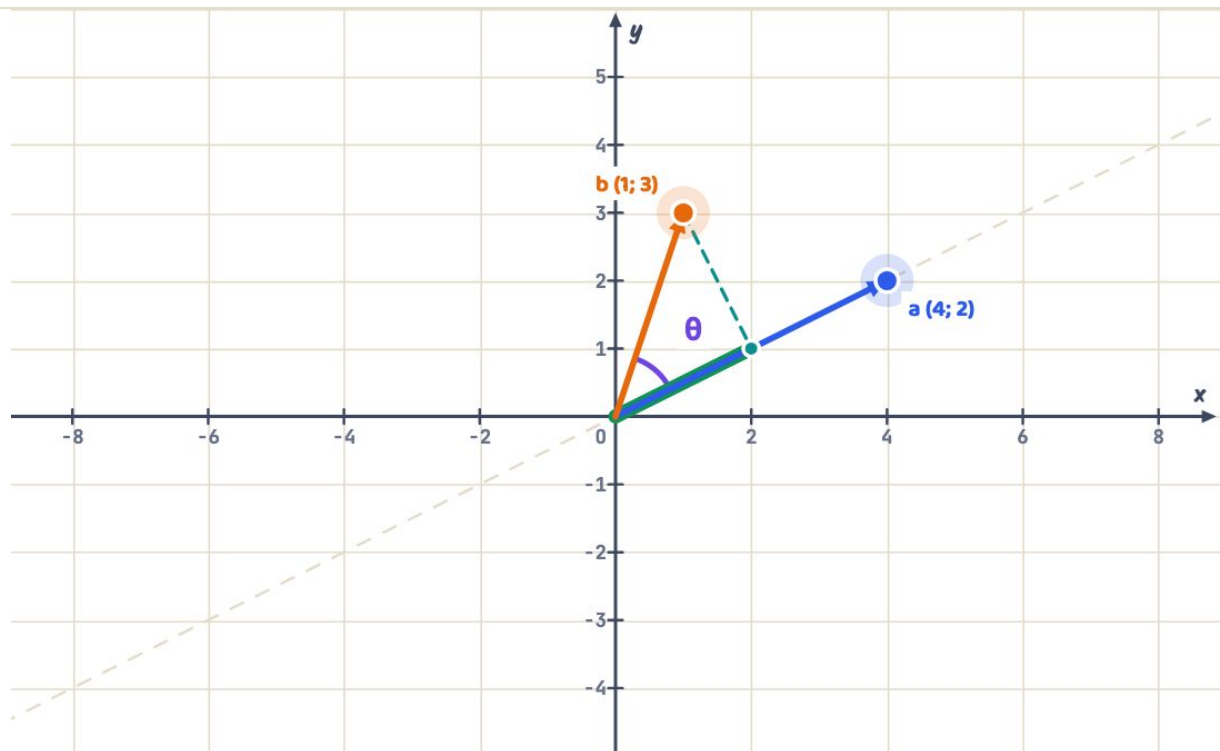


putar 90° : $(x, y) \rightarrow (-y, x)$
 $x(-y) + y \cdot x = 0$, selalu!
tegak lurus $\Leftrightarrow a \cdot b = 0$

Langkah 5. Ini bukan kebetulan. Memutar (x, y) sebesar 90° selalu menghasilkan $(-y, x)$, dan $x(-y) + y(x) = 0$. Tegak lurus $\Leftrightarrow$ hasil kali titik nol.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4)(1) + (2)(3) = 10, \quad \cos \theta = \frac{10}{4,47 \cdot 3,16} \approx 0,71$$



$\vec{a} \cdot \vec{b}$ positif $\Rightarrow$ sudut lancip

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

10

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

14,142

$\cos \theta$

0,707

Sudut θ

45 °

Proyeksi b pada a (hijau)

2,236

Seret ujung kedua panah. Ruas hijau tebal adalah **proyeksi** (bayangan) $\vec{b}$ pada garis $\vec{a}$: hasil kali titik sama dengan $|\vec{a}|$ dikali panjang bayangan itu (bertanda negatif jika bayangannya jatuh ke belakang). Buat sudut tepat 90° dengan komponen bulat. Jika salah satu vektor nol, sudutnya tidak terdefinisi dan tampil "—".

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Kalikan kedua panjang, lalu kalikan dengan $\cos$ sudut di antaranya. Sudut lancip memberi hasil positif, siku-siku memberi nol, tumpul memberi negatif.

$|\vec{a}|$ Panjang a

$|\vec{b}|$ Panjang b

θ Sudut di antaranya °

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ Hasil kali titik

HASIL KALI TITIK

10

Dengan $|a| = 4$, $|b| = 5$, dan $\theta = 60^\circ$: $\cos \theta \approx 0,5$, jadi $a \cdot b = 4 \times 5 \times \cos \theta = 10$. Nilai terbesarnya **20** (saat $\theta = 0^\circ$) dan terkecilnya **-20** (saat $\theta = 180^\circ$). **Sudut lancip: hasilnya positif.**

Cek satuan: Jika vektornya gaya (N) dan perpindahan (m), hasil kali titiknya adalah usaha dalam joule (N·m).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VEKTOR-HASIL-KALI-TITIK

Tentukan sudut antara $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- 1 Hasil kali titik: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$.
- 2 Panjang: $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ dan $|\vec{b}| = \sqrt{10}$.
- 3 $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$.

$\theta = 45^\circ$ (kalkulator: $\cos^{-1} 0,707 \approx 45^\circ$). Cek kewajaran: $\vec{a}$ agak landai, $\vec{b}$ agak curam, dan sudut **45°** di antaranya memang masuk akal.

Tentukan k agar $\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ tegak lurus $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1 Tegak lurus berarti hasil kali titiknya nol: $3k + 2(-6) = 0$.

2 $3k - 12 = 0$, jadi $k = 4$.

$k = 4$. **Cek:** $(4, 2) \cdot (3, -6) = 12 - 12 = 0$. ✓



TRIK KAK LINTANG

Butuh vektor yang tegak lurus (a, b) dengan cepat? **Tukar kedua komponen, lalu ubah satu tandanya:** $(-b, a)$ atau $(b, -a)$. Contoh: tegak lurus $(5, 2)$ adalah $(-2, 5)$, karena $5(-2) + 2(5) = 0$.



AWAS JEBAKAN

Sudut antara dua vektor diukur ketika **keduanya berpangkal di titik yang sama**. Pada segitiga ABC , sudut di B dihitung dari $\vec{BA}$ dan $\vec{BC}$, bukan dari $\vec{AB}$ dan $\vec{BC}$. Memakai $\vec{AB}$ memberi sudut pelurusnya ($180^\circ - \angle B$), dan tanda hasil kali titiknya terbalik.



ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-23

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan yang atas dengan yang atas, yang bawah dengan yang bawah, lalu jumlahkan. Hati-hati dengan tanda: negatif kali negatif positif.



VEKTOR TIGA DIMENSI DAN PERSAMAAN GARIS

Semua rumus bab ini bekerja di ruang tiga dimensi dengan menambah komponen ketiga: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dan $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Garis yang melewati titik berposisi $\vec{a}$ dengan arah $\vec{d}$ ditulis $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{d}$, dengan λ bilangan real (gaya IB). Sudut antara dua garis adalah sudut antara vektor-vektor arahnya. Contoh: arah $(1, 2, 2)$ dan $(2, -1, 2)$ memberi $\cos \theta = \frac{2 - 2 + 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$, jadi $\theta \approx 63,6^\circ$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

HUKUM JAJARGENJANG

Dari $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ dan sifat distributif,

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2.$$

Artinya: jumlah kuadrat kedua diagonal jajargenjang sama dengan jumlah kuadrat keempat sisinya. Terapkan pada segitiga dengan sisi 13, 14, 15: garis berat ke sisi 14 adalah setengah diagonal jajargenjang bersisi 13 dan 15, sehingga $(2m)^2 + 14^2 = 2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 15^2$, memberi $m^2 = 148$ dan $m = 2\sqrt{37} \approx 12,17$.



MATEMATIKA NUSANTARA

Pelaut Bugis, Makassar, dan Mandar sejak berabad-abad lalu mengarungi Nusantara dengan perahu layar seperti pinisi dan sandeq. Mereka memanfaatkan **angin muson**: angin barat (sekitar Desember–Maret) dan angin timur (sekitar Juni–September). Saat harus melawan angin, perahu berlayar zig-zag. Setiap lintasan miring adalah sebuah vektor, dan jumlah vektor-vektor itu tetap membawa perahu maju ke tujuan. Kini wilayah Indonesia pun dinyatakan dengan koordinat bola Bumi: kira-kira dari 6° LU sampai 11° LS dan dari 95° BT sampai 141° BT.



Ojek daring & GPS

Aplikasi menghitung jarak lurus dengan rumus jarak untuk perkiraan cepat, sedangkan tarif dihitung dari rute jalan yang lebih panjang, mirip jarak taksi.



Feri Merak–Bakauheni

Nakhoda mengarahkan haluan sedikit melawan arus agar resultan kecepatan kapal tepat menuju dermaga tujuan.



Peta angin BMKG

Ribuan panah kecil di peta cuaca adalah vektor: arah panah menunjukkan arah angin, panjang atau warnanya menunjukkan kecepatannya.



Angin samping di bandara

Pilot menguraikan vektor angin menjadi komponen searah landasan dan komponen tegak lurus landasan (*crosswind*) sebelum mendarat.



Gim & animasi

Setiap bingkai, posisi tokoh diperbarui: posisi baru = posisi lama + kecepatan $\times$ waktu. Itu penjumlahan vektor puluhan kali per detik.



Tarik tambang 17-an

Gaya kedua regu adalah vektor yang berlawanan arah. Tali bergerak ke arah resultannya, yaitu ke regu yang total gayanya lebih besar.

Cek Cepat

Titik tengah ruas garis yang menghubungkan $(2, 5)$ dan $(8, -1)$ adalah...

$(3, 3)$

$(10, 4)$

$(6, -6)$

$(5, 2)$

Pusat dan jari-jari lingkaran $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ adalah...

$(2, -1)$ dan 3

$(-2, 1)$ dan 9

$(-2, 1)$ dan 3

$(2, -1)$ dan 9

Vektor $(1, 2)$ dan $(4, -2)$ membentuk sudut...

0° (searah)

90° (tegak lurus)

lancip, tetapi bukan 0°

180° (berlawanan arah)

Kunci Cek Cepat: 1. D • 2. C • 3. B



Tantangan Rumah: peta harta karun vektor

Bahan: koin atau benda kecil sebagai "harta", kapur atau selotip kertas, meteran (atau langkah kakimu), kompas di HP (opsional), buku catatan, seorang teman.

1. Tandai titik awal O di halaman atau lantai rumah. Tentukan arah "timur" ($+x$) dan "utara" ($+y$); pakai kompas HP atau pilih saja sebuah dinding sebagai utara.
2. Sembunyikan harta, lalu tulis petunjuk berupa tiga vektor langkah, misalnya $(4, 1)$, $(-2, 3)$, lalu $(1, 2)$.
3. Minta temanmu mengikuti petunjuk itu dari O . Apakah ia menemukan harta?
4. Jumlahkan ketiga vektor: $(4 - 2 + 1, 1 + 3 + 2) = (3, 6)$. Minta temanmu kembali ke O dan berjalan memakai resultan itu saja. Apakah ia tiba di tempat yang sama?
5. Ukur jarak lurus dari O ke harta dengan meteran, lalu bandingkan dengan $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} \approx 6,7$ kali panjang satu langkah.

Pertanyaan: Apakah urutan ketiga vektor memengaruhi tempat akhir? Mengapa panjang total lintasan berliku selalu lebih dari atau sama dengan jarak lurus O ke harta? Kaitkan dengan ketaksamaan segitiga.



RINGKASAN KILAT

Bab 23 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- menghitung **jarak** dan **titik tengah** dua titik, serta membedakan jarak lurus dengan jarak taksi
- menulis dan membaca **persamaan lingkaran** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, termasuk dari bentuk umumnya
- menyatakan perpindahan sebagai **vektor**, menuliskannya sebagai vektor kolom, dan menghitung panjangnya
- menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan vektor dengan skalar, termasuk menghitung **resultan** kecepatan kapal dan arus
- memakai **vektor posisi** untuk membagi ruas garis, serta memakai **hasil kali titik** untuk menghitung sudut dan menguji ketegaklurusan



Istilah kunci

Jarak lurus

Jarak taksi

Titik tengah

Lingkaran

bentuk umum

Vektor

skalar

vektor kolom

vektor nol

vektor negatif

vektor satuan

resultan

kombinasi linear

Vektor posisi

Hasil kali titik



Rumus penting

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jarak dua titik (bonus: titik tengah). Jarak lurus adalah sisi miring segitiga siku-siku yang kakinya selisih x dan selisih y. Titik tengahnya cukup rata-rata koordinat.

$$r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$$

Pusat & jari-jari dari bentuk umum lingkaran.

Dari $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$: pusatnya $(-D/2, -E/2)$, dan jari-jarinya akar dari $(D/2)^2 + (E/2)^2 - F$.

$$x_P = \frac{n x_A + m x_B}{m + n}$$

Titik pembagi ruas garis. Jika $AP : PB = m : n$, koordinat A diberi bobot n dan koordinat B diberi bobot m (bersilang), lalu dibagi $m + n$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Hasil kali titik dari panjang & sudut. Kalikan kedua panjang, lalu kalikan dengan cos sudut di antaranya. Sudut lancip memberi hasil positif, siku-siku memberi nol, tumpul memberi negatif.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Pada $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$, pusatnya $(-3, 2)$, bukan $(3, -2)$, dan jari-jarinya 4, bukan 16.
- Hati-hati dengan nama arah angin.
- Sudut antara dua vektor diukur ketika keduanya berpangkal di titik yang sama.

🏔 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=23

🧩 Teka-teki untuk Bab 24

Ayu berdiri 100 m dari kaki Monas. Dari matanya (1,5 m di atas tanah), garis pandang ke puncak tugu adalah vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ x \end{pmatrix}$ meter, dengan x tinggi puncak di atas mata. Ayu tidak bisa memanjat, tetapi dengan busur derajat dan sedotan ia bisa mengukur sudut garis pandang itu terhadap tanah: $52,5^\circ$. Bisakah kamu menghitung tinggi Monas hanya dari jarak dan sudut?

▼ Intip petunjuk

Semua segitiga siku-siku dengan sudut $52,5^\circ$ saling sebangun (Bab 22), jadi perbandingan $x : 100$ selalu sama, berapa pun ukuran segitiganya. Perbandingan "sisi tegak : sisi datar" itu diberi nama **tangen**, dan $\tan 52,5^\circ \approx 1,30$. Hitung x , jangan lupa tambahkan tinggi mata Ayu. Bab 24 membahas sinus, kosinus, dan tangen secara tuntas!

24 Trigonometri: Mengukur Monas Tanpa Memanjat

Bagaimana cara mengetahui tinggi Monas, menara masjid, atau pohon kelapa tanpa memanjatnya? Cukup sebuah jarak, sebuah sudut, dan tiga perbandingan ajaib bernama sinus, kosinus, dan tangen.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menunjuk **sisi depan**, **sisi samping**, dan **sisi miring** terhadap sebuah sudut, lalu menghitung **sin**, **cos**, dan **tan**;
- menurunkan nilai eksak **sudut istimewa** 30° , 45° , dan 60° dari setengah persegi dan setengah segitiga sama sisi;
- mencari **sisi atau sudut** yang belum diketahui pada segitiga siku-siku, termasuk memakai $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, dan $\tan^{-1}$;
- menyelesaikan soal **sudut elevasi dan depresi**, misalnya mengukur tinggi Monas dengan klinometer buatan sendiri;
- membuktikan dan memakai **identitas** $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

MENGUKUR MONAS TANPA MEMANJAT

KOMIK • 4 PANEL

Minggu pagi di Lapangan Monas, Jakarta

DIMAS

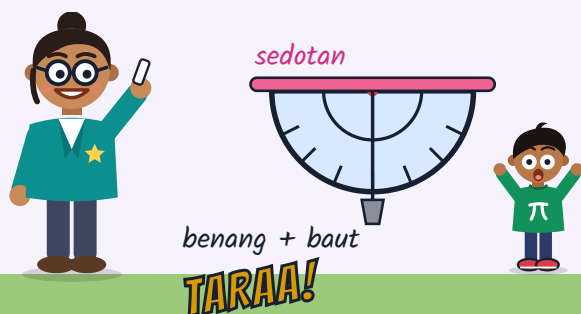
Kak, Monas itu tingginya berapa, sih? Aku panjat saja, ya, sambil bawa meteran!

AYU

Mana boleh, Dimas! Lagi pula meteranmu cuma 5 meter.

**KAK LINTANG**

Tidak perlu memanjat! Busur, sedotan, benang, dan sebuah baut sudah cukup untuk membuat **klinometer**, si pengukur sudut.

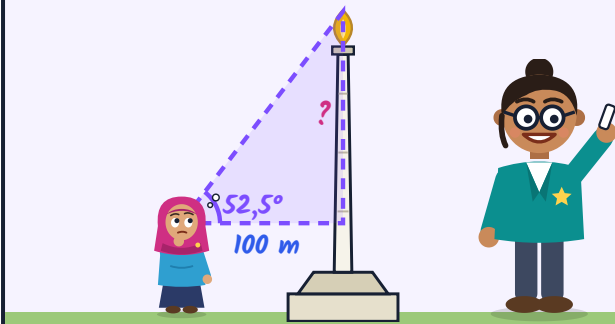


AYU

Dari jarak 100 m, sudut ke puncaknya $52,5^\circ$. Ada segitiga siku-siku raksasa di udara!

KAK LINTANG

Tepat! Tinggi $\approx 100 \times \tan 52,5^\circ + \text{tinggi mata} \approx 132 \text{ m}$.



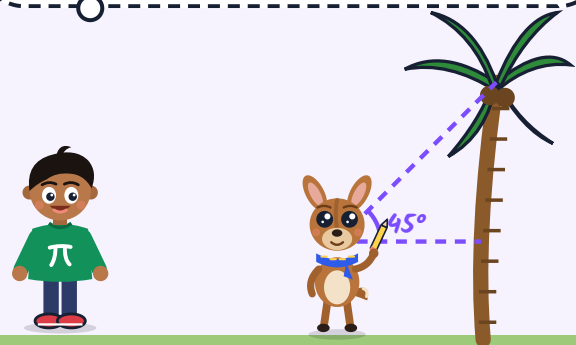
Sementara itu, di kebun kelapa...

ANCIL

Trik kancil: mundur sampai puncak kelapa terlihat dengan sudut 45° . Karena $\tan 45^\circ = 1$, tinggi pohon = jarakmu + tinggi matamu!

DIMAS

Tanpa kalkulator?! Cerdik sekali...



Tebak Dulu!

Dimas menggambar segitiga siku-siku kecil dengan sudut 30° . Ayu menggambar segitiga siku-siku yang sepuluh kali lebih besar, juga dengan sudut 30° . Bagaimana perbandingan sisi di depan sudut 30° terhadap sisi miring pada kedua segitiga?

Milik Ayu sepuluh kali lebih besar.

Milik Dimas lebih besar karena segitiganya kecil.

Sama persis, yaitu 1 : 2.

Tidak bisa ditentukan tanpa mengukurnya.

Jawabannya: sama persis, 1 : 2. Kedua segitiga itu *sebangun* (Bab 22): semua sisinya membesar dengan faktor yang sama, sehingga perbandingannya tidak berubah. Perbandingan itu hanya bergantung pada **sudutnya**. Inilah rahasia yang membuat trigonometri bekerja!

24.1 Tiga perbandingan ajaib: sin, cos, tan

Ambil segitiga siku-siku apa pun yang punya sudut lancip θ (dibaca "teta"). Besar atau kecil, perbandingan sisi-sisinya hanya ditentukan oleh θ . Karena itu, para matematikawan memberi nama khusus pada tiga perbandingan terpenting. Namun, sebelumnya kita harus memberi nama pada sisi-sisinya **dilihat dari sudut** θ .



DEFINISI

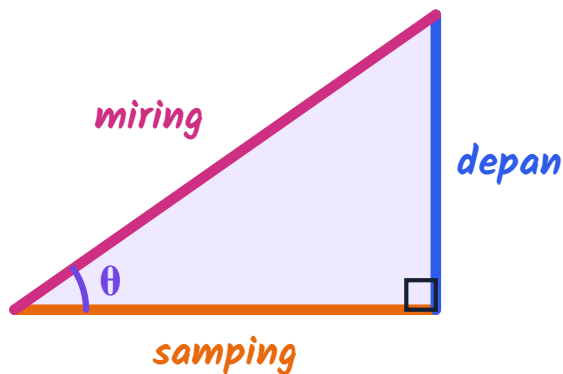
Pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip θ :

- **sisi miring** (hipotenusa) adalah sisi di depan sudut siku-siku, sisi terpanjang;
- **sisi depan** adalah sisi yang **berhadapan** dengan sudut θ ;
- **sisi samping** adalah sisi yang **mengapit** sudut θ dan bukan sisi miring.

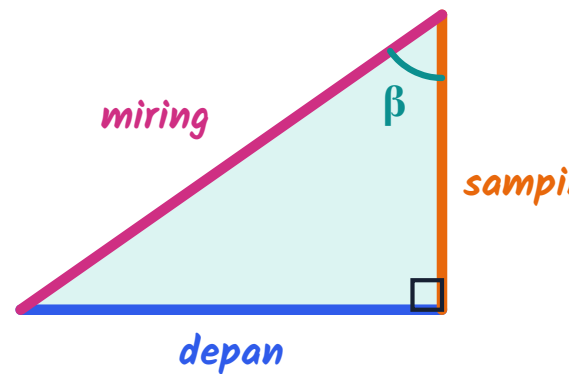
Ketiga perbandingannya disebut **sinus**, **kosinus**, dan **tangen**:

$$\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}, \quad \tan$$

Dilihat dari sudut θ



Dilihat dari sudut β



Segitiga yang sama, dua sudut pandang. Sisi miring tidak pernah berubah, tetapi sisi depan dan sisi samping **bertukar tempat** ketika sudutnya berganti.

Bahasa sederhana • Gampangnya begini: berdirilah di pojok sudut θ . Sisi yang jauh di seberangmu adalah **sisi depan**. Sisi yang menempel di sebelahmu (dan bukan sisi terpanjang) adalah **sisi samping**. Sisi terpanjang di seberang kotak siku-siku adalah **sisi miring**.



TRIK KAK LINTANG

Hafalkan mantra **SINDEMI - KOSAMI - TANDESA**: **sin** = **depan**/**miring**, **kos** = **samping**/**miring**, **tan** = **depan**/**samping**. Teman-temanmu di sekolah internasional memakai versi Inggrisnya, **SOH-CAH-TOA** (*Sine = Opposite/Hypotenuse*, dan seterusnya). Isinya persis sama!

LAB MINI Segitiga ajaib: seret sudutnya!

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24

depan	samping	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
4,59 cm	6,55 cm	0,574	0,819	0,7

Seret titik ungu ke mana saja. Ubah **sudutnya**, lalu ubah **ukurannya** saja dengan tombol 🔍. Ketika hanya ukurannya yang berubah, apakah nilai $\sin$, $\cos$, dan $\tan$ ikut berubah? Coba juga cari sudut yang membuat $\tan \theta = 1$.



AWAS JEBAKAN

Sisi depan dan sisi samping selalu ditentukan dari sudut yang sedang kamu pakai. Pada gambar di atas, sisi yang menjadi "depan" bagi θ justru menjadi "samping" bagi β . Selain itu, $\sin \theta$ adalah **satu bilangan** (sebuah perbandingan), bukan "sin dikali θ ". Jadi $\sin 2\theta$ tidak sama dengan $2 \sin \theta$.

CONTOH Membaca $\sin$, $\cos$, $\tan$ dari segitiga 6–8–10

Sebuah segitiga siku-siku memiliki sisi 6 cm, 8 cm, dan 10 cm. Sudut θ berhadapan dengan sisi 6 cm. Tentukan $\sin \theta$, $\cos \theta$, dan $\tan \theta$.

1 Sisi terpanjang (10 cm) adalah sisi miring. Sisi depan θ adalah 6 cm, jadi sisi samping 8 cm.

2 $\sin \theta = \frac{6}{10} = 0,6$, $\cos \theta = \frac{8}{10} = 0,8$, $\tan \theta = \frac{6}{8} = 0,75$.

$\sin \theta = 0,6$, $\cos \theta = 0,8$, $\tan \theta = 0,75$. Dengan kalkulator, $\sin^{-1}(0,6) \approx 36,9^\circ$: itulah besar sudut θ .



TAMU DARI MASA LALU

Astronom Yunani **Hipparkhos** (± 190 – 120 SM) menyusun tabel panjang "tali busur" lingkaran untuk menghitung posisi bintang. Ia sering disebut bapak trigonometri. Di India, **Aryabhata** (476–550 M) memakai setengah tali busur yang disebut *jya*, cikal bakal sinus modern. Menurut kisah yang populer, penerjemah Arab menuliskannya *jiba*, yang kemudian terbaca *jaib* (lipatan). Penerjemah Latin abad ke-12 mengartikannya sebagai *sinus*, yang juga berarti "lekukan". Ilmuwan Muslim seperti **al-Battani** (± 858 – 929) juga menyusun tabel "bayangan" yang menjadi cikal bakal tangen.

24.2

Sudut istimewa: 30° , 45° , dan 60°

Kebanyakan nilai sinus adalah bilangan desimal tak berujung yang perlu kalkulator. Namun, ada tiga sudut yang nilainya bisa ditemukan hanya dengan Pythagoras dan sedikit akal: 30° , 45° , dan 60° . Itulah **sudut istimewa**.



Tebak Dulu!

Karena $60^\circ = 2 \times 30^\circ$, apakah $\sin 60^\circ = 2 \times \sin 30^\circ$?

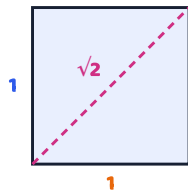
Ya. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, jadi $\sin 60^\circ = 1$.

Tidak. $\sin 60^\circ \approx 0,87$, kurang dari 1.

Tidak. $\sin 60^\circ$ juga sama dengan $\frac{1}{2}$.

Ya, karena sinus selalu sebanding dengan sudutnya.

Jawabannya: tidak. Kalau $\sin 60^\circ = 1$, sisi depan sama panjang dengan sisi miring, dan itu mustahil pada segitiga. Sinus **tidak** sebanding dengan sudut: ia naik cepat di awal, lalu melambat mendekati 1. Animasi di bawah menunjukkan nilai tepatnya, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

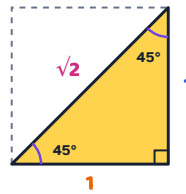


Mulai dari persegi bersisi 1

Diagonalnya, menurut Pythagoras:

$$\sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$$

Langkah 1. Mulai dari persegi bersisi 1. Diagonalnya adalah sisi miring segitiga siku-siku dengan kaki 1 dan 1, jadi panjangnya $1^2 + 1^2 = 2$.



Segitiga 45°-45°-90°

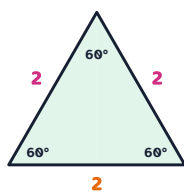
dengan sisi 1, 1, dan $\sqrt{2}$

$$\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$$

$$\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$$

$$\tan 45^\circ = 1/1 = 1$$

Langkah 2. Potong persegi lewat diagonal. Kita mendapat segitiga siku-siku sama kaki dengan sudut 45°, 45°, 90° dan sisi 1, 1, $\sqrt{2}$. Bacalah: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dan $\tan 45^\circ = 1$.

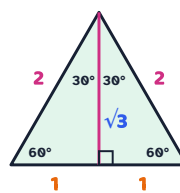


Segitiga sama sisi bersisi 2

Ketiga sudutnya sama besar:

$$180^\circ : 3 = 60^\circ$$

Langkah 3. Sekarang ambil segitiga sama sisi bersisi 2. Ketiga sudutnya sama besar, masing-masing $180^\circ : 3 = 60^\circ$.



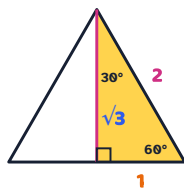
Tarik garis tinggi

Alas terbelah menjadi 1 dan 1.

Sudut puncak menjadi 30° + 30°.

$$\text{Tinggi} = \sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$$

Langkah 4. Tarik garis tinggi dari puncak. Garis ini membelah alas menjadi 1 dan 1, serta membelah sudut puncak menjadi 30° dan 30°. Tingginya $2^2 - 1^2 = 3$.



Segitiga 30°-60°-90°:

sisi 1, $\sqrt{3}$, dan 2

$$\sin 30^\circ = 1/2$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

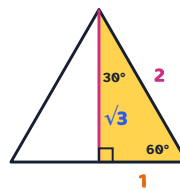
$$\cos 60^\circ = 1/2$$

$$\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Lihat: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$!

Langkah 5. Ambil separuhnya: segitiga 30°-60°-90° dengan sisi 1, $\sqrt{3}$, dan 2. Dari sudut 30°, sisi depannya 1. Dari sudut 60°, sisi depannya $\sqrt{3}$.



Pola cantik nilai sinus

$$\sin 0^\circ = \sqrt{0}/2 = 0$$

$$\sin 30^\circ = \sqrt{1}/2 = 1/2$$

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\sin 90^\circ = \sqrt{4}/2 = 1$$

Kosinus: pola sama, urutan dibalik!

Langkah 6. Kumpulkan hasilnya. Sinus 0°, 30°, 45°, 60°, 90° membentuk pola $\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{2}$. Pola sekecil ini menyimpan seluruh tabel sudut istimewa!

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tidak terdefinisi

Sudut 0° dan 90° adalah kasus batas: segitiganya "gepeng" menjadi sebuah garis. Pada 90°, sisi samping menyusut menjadi 0, sehingga $\tan 90^\circ = \frac{\text{depan}}{0}$ tidak terdefinisi.



TRIK KAK LINTANG

Tulis angka **0, 1, 2, 3, 4** di bawah sudut $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Tarik akarnya, lalu bagi 2: itulah nilai **sinus**. Untuk **kosinus**, baca barisan yang sama dari kanan ke kiri. Untuk **tangen**, bagi sinus dengan kosinus. Satu baris angka, lima belas nilai!



SIFAT SUDUT BERPENYIKU

Dua sudut lancip pada segitiga siku-siku selalu berjumlah 90° (saling *berpenyiku*). Untuk setiap sudut lancip θ ,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta,$$

Itulah sebabnya $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ dan $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$. Nama "kosinus" pun berasal dari "sinus sudut **komplemen** (penyiku)".

▼ Bukti singkat

Pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip θ dan β , berlaku $\theta + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, jadi $\beta = 90^\circ - \theta$. Sisi depan β adalah sisi samping θ , dan sebaliknya, sedangkan sisi miringnya sama. Maka $\sin \beta = \frac{\text{samping } \theta}{\text{miring}} = \cos \theta$, $\cos \beta = \sin \theta$, dan $\tan \beta = \frac{\text{samping } \theta}{\text{depan } \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$.



ADU CEPAT

Kartu sudut istimewa

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Jawab dalam bentuk eksak, misalnya $1/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{2}/2$, atau $1/\sqrt{3}$ (desimal 2 angka juga diterima). Ingat pola sinus $\sqrt{0}/2$, $\sqrt{1}/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{4}/2$.

**MENEMUKAN TAN 15° DENGAN SEBATANG PENGGARIS**

Ambil segitiga $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ dengan sudut 30° di A , sisi depan $BC = 1$, sisi samping $AC = \sqrt{3}$, dan sisi miring $AB = 2$. Perpanjang CA melewati A sejauh $AD = AB = 2$. Segitiga ABD sama kaki, sehingga dua sudut alasnya sama besar dan jumlahnya sama dengan sudut luar $\angle BAC = 30^\circ$. Jadi $\angle BDC = 15^\circ$, dan

$$\tan 15^\circ = \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268.$$

Dari segitiga yang sama, $\tan 75^\circ = \frac{DC}{BC} = 2 + \sqrt{3}$. Trik "perpanjang sisi sejauh sisi miring" selalu **membelah sudut** menjadi dua dan sering muncul di soal olimpiade.

24.3**Mencari sisi dan sudut yang hilang**

Trigonometri seperti pisau lipat dengan tiga mata pisau. Untuk memilih yang tepat, tanyakan dua hal: **sisi apa yang sudah aku tahu**, dan **sisi apa yang aku cari**? Pilih perbandingan yang memuat keduanya.

Diketahui (terhadap θ)	Dicari	Pakai
sisi miring	sisi depan	depan = miring $\times \sin \theta$
sisi miring	sisi samping	samping = miring $\times \cos \theta$
sisi samping	sisi depan	depan = samping $\times \tan \theta$
sisi depan	sisi miring	miring = depan : $\sin \theta$
dua sisi	sudut θ	$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, atau $\tan^{-1}$

$$t = L \sin \alpha$$

Tali yang terentang lurus adalah sisi miring dan tinggi layangan adalah sisi depan sudut.
Jadi $\text{tinggi} = \text{panjang tali} \times \sin \text{sudutnya}$.

L Panjang tali m

α Sudut tali dengan tanah °

t Tinggi layangan m

TINGGI LAYANGAN

50

m

30°: tinggi tepat setengah panjang tali ($\sin 30^\circ = 1/2$)

Tali **100** m dengan sudut **30°**: $\sin 30^\circ \approx 0,5$, jadi layangan berada **50** m di atas tangan.
Jarak mendatarnya **86,603** m (yang ini memakai cos!).

Cek satuan: Panjang tali dalam meter, jadi tingginya juga dalam meter. Sinus tidak punya satuan karena ia perbandingan dua panjang.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LAYANGAN-SIN

Bagaimana kalau yang dicari justru **sudutnya**? Kita perlu kebalikan sinus, kosinus, dan tangen, yang disebut **invers trigonometri**. Di kalkulator tombolnya tertulis $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, dan $\tan^{-1}$ (sering lewat tombol SHIFT).

$$\tan \theta = x \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \tan^{-1} x \quad (\text{untuk } 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{t}{p} \right)$$

Bagi tinggi ram dengan panjang mendatarnya untuk mendapat $\tan \theta$, lalu tekan $\tan^{-1}$ untuk mendapat sudutnya.

t Tinggi ram m

p Panjang mendatar m

θ Sudut kemiringan °

SUDUT KEMIRINGAN

4,76

°

 Landai: nyaman untuk kursi roda

$\tan \theta = 0,5 : 6 \approx 0,083$, jadi $\theta = \tan^{-1}(0,083) \approx 4,76^\circ$. Panjang permukaan ramnya $\sqrt{(0,5^2 + 6^2)} \approx 6,021$ m.

Cek satuan: Tinggi dan panjang harus satuannya sama (keduanya meter) karena yang dipakai adalah perbandingannya.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-RAM](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-sudut-ram)

Pintu masuk sebuah sekolah 0,6 m lebih tinggi daripada halaman. Pengelola ingin membuat ram dengan sudut kemiringan 5° . Berapa panjang permukaan ram dan jarak mendatar yang dibutuhkan?

1 Tinggi 0,6 m adalah sisi depan sudut 5° . Panjang permukaan ram adalah sisi miring, jadi pakai $\sin$: $\sin 5^\circ = \frac{0,6}{L}$.

2 $L = \frac{0,6}{\sin 5^\circ} \approx \frac{0,6}{0,0872} \approx 6,88 \text{ m}$.

3 Jarak mendatar adalah sisi samping, jadi pakai $\tan$: $p = \frac{0,6}{\tan 5^\circ} \approx \frac{0,6}{0,0875} \approx 6,86 \text{ m}$.

Ramnya sekitar 6,9 m dan membutuhkan halaman sepanjang $\pm 6,9 \text{ m}$. Untuk naik 60 cm saja, ram yang ramah kursi roda harus sepanjang itu!



AWAS JEBAKAN

Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD). Dalam mode RAD, kalkulator menganggap "30" sebagai 30 radian, sehingga $\sin 30$ menghasilkan $-0,988$, bukan 0,5. Biasakan mengecek dengan $\sin 30 = 0,5$ sebelum ujian.



TRIK KAK LINTANG

Sebelum menekan tombol, **perkirakan** dulu. Sudut kecil berarti sisi depan pendek. Sudut di atas 45° berarti sisi depan lebih panjang daripada sisi samping ($\tan > 1$). Kalau kalkulator memberi jawaban yang bertentangan dengan perkiraanmu, periksa lagi pilihan $\sin/\cos/\tan$ atau mode kalkulatornya.

MITOS

"Segitiga yang lebih besar punya nilai sinus yang lebih besar."

MITOS

"Nilai sinus bisa lebih dari 1 kalau segitiganya tinggi."

FAKTA

Nilai sinus hanya bergantung pada

sudut

. Segitiga yang diperbesar tetap sebangun, jadi semua perbandingan sisinya sama.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

di buku tulis maupun di Monas.

FAKTA

Sisi depan tidak pernah lebih panjang daripada sisi miring, jadi untuk sudut lancip

$$0 < \sin \theta < 1$$

dan

$$0 < \cos \theta < 1$$

. Yang boleh lebih dari 1 hanyalah

$\tan \theta$

, yaitu saat

$$\theta > 45^\circ$$

.

MITOS

"Kalau sudutnya dua kali lipat, sinusnya juga dua kali lipat."

FAKTA

$$\sin 30^\circ = 0,5$$

, tetapi

$$\sin 60^\circ \approx 0,87$$

, bukan 1. Sinus tidak sebanding dengan sudut.

Hubungan sebenarnya untuk sudut ganda akan kamu temui di Bab 26.

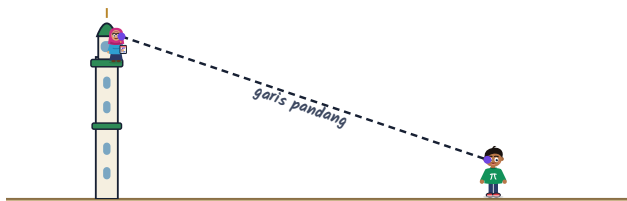
24.4 Sudut elevasi dan sudut depresi

Saat kamu mendongak ke puncak menara, matamu membentuk sudut dengan garis mendatar. Saat pilot menatap landasan di bawahnya, matanya juga membentuk sudut. Kedua sudut ini punya nama.



DEFINISI

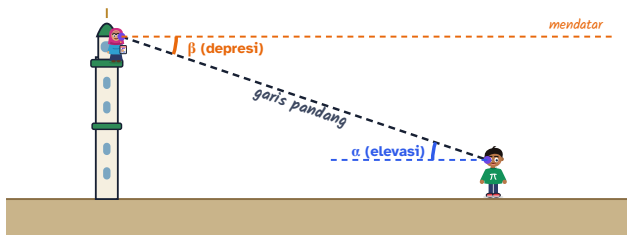
Sudut elevasi adalah sudut antara garis mendatar dan garis pandang ke **atas**. **Sudut depresi** adalah sudut antara garis mendatar dan garis pandang ke **bawah**. Keduanya selalu diukur dari garis **mendatar**, bukan dari garis tegak.



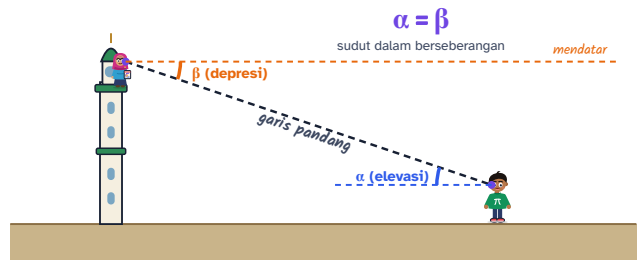
Langkah 1. Ayu berdiri di balkon menara masjid, Dimas berdiri di tanah. Mereka saling memandang lewat garis pandang yang sama.



Langkah 2. Ayu melihat ke bawah. Sudut antara garis mendatar di matanya dan garis pandang disebut **sudut depresi** β .



Langkah 3. Dimas melihat ke atas. Sudut antara garis mendatar di matanya dan garis pandang disebut **sudut elevasi** α .



Langkah 4. Dua garis mendatar itu sejajar, dan garis pandang memotong keduanya seperti huruf Z. Jadi α dan β adalah sudut dalam berseberangan: $\alpha = \beta$. Sudut depresi selalu sama dengan sudut elevasi pasangannya!

Inilah cara mengukur tinggi tanpa memanjat. Berdirilah pada jarak d dari kaki benda, ukur sudut elevasi α ke puncaknya, lalu pakai tangen. Jangan lupa: sudut diukur dari mata, jadi tambahkan tinggi mata h .

$$H = d \tan \alpha + h$$

Tinggi benda sama dengan jarak mendatar dikali tangen sudut elevasi, lalu ditambah tinggi mata pengamat.

 d

Jarak ke kaki benda m

 α

Sudut elevasi °

 h

Tinggi mata m

 H

Tinggi benda m

TINGGI BENDA

131,8

m

🗿 hampir sama dengan tinggi Monas (± 132 m)!

Dari jarak **100** m dengan sudut **52,5°**: $\tan 52,5^\circ \approx 1,303$, jadi bagian di atas mata **130,323** m. Ditambah tinggi mata **1,5** m, tinggi bendanya **131,8** m.

Cek satuan: Jarak dan tinggi mata dalam meter, jadi tingginya juga dalam meter. Sudut ditulis dalam derajat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TINGGI-ELEVASI

CONTOH

Tinggi Monas tanpa memanjat

Ayu berdiri 100 m dari kaki Monas. Dengan klinometer, ia mengukur sudut elevasi puncak Monas sebesar 52,5°. Mata Ayu berada 1,5 m di atas tanah. Berapa tinggi Monas?

1. Garis mendatar dari mata Ayu, sumbu tegak Monas, dan garis pandang membentuk segitiga siku-siku. Jarak 100 m adalah sisi samping sudut 52,5°, dan bagian Monas di atas mata adalah sisi depannya.

2. $\tan 52,5^\circ = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 100 \times \tan 52,5^\circ \approx 100 \times 1,303 = 130,3$ m.

3. Tambahkan tinggi mata: $130,3 + 1,5 = 131,8$ m.

Tinggi Monas ± 132 m, cocok dengan data resminya. Teka-teki Bab 23 terpecahkan tanpa memanjat satu anak tangga pun!



AWAS JEBAKAN

Hasil $d \tan \alpha$ hanyalah tinggi benda **di atas mata** pengamat. Banyak orang lupa menambahkan tinggi mata. Untuk Monas selisihnya kecil, tetapi untuk tiang bendera sekolah setinggi 8 m, lupa 1,5 m berarti salah hampir 20%!

KERJAKAN BERSAMA

Dari balkon menara masjid

Mata Ayu berada 40 m di atas tanah, di balkon menara masjid. Ia melihat Dimas di halaman dengan sudut depresi 25° . Berapa jarak Dimas dari kaki menara?

1 Sudut depresi 25° sama dengan sudut elevasi dari Dimas ke Ayu (sudut dalam berseberangan).

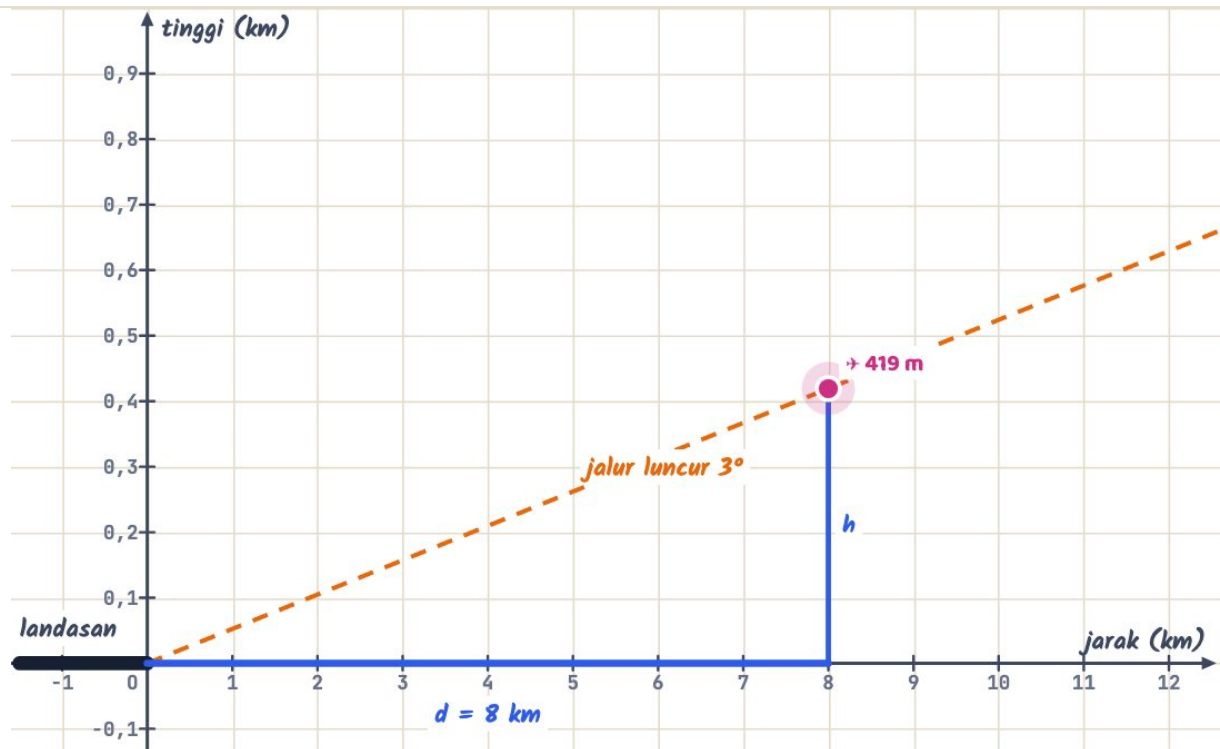
2 Dari posisi Dimas, tinggi 40 m adalah sisi depan dan jarak x adalah sisi samping: $\tan 25^\circ = \frac{40}{x}$.

3 $x = \frac{40}{\tan 25^\circ} \approx \frac{40}{0,4663} \approx 85,8 \text{ m}$.

Dimas berdiri sekitar 85,8 m dari kaki menara. (Untuk menyederhanakan, tinggi mata Dimas diabaikan.)

$$h = d \tan \alpha$$

$$h = 8 \text{ km} \times \tan 3^\circ \approx 0,42 \text{ km} \approx 419 \text{ m}$$



3°: sudut luncur yang lazim di banyak bandara

Tinggi pesawat
419 m

dalam kaki
1.376 ft

Sudut depresi pilot ke titik sentuh
3 °

Seret pesawat di sepanjang jalur luncur, atau ubah sudutnya. Sudut luncur sama dengan sudut depresi pilot ke titik sentuh (ingat huruf Z!). **Catatan:** skala tegak sengaja diperbesar beberapa kali agar jalurnya terlihat; sudut sebenarnya jauh lebih landai. Pada sudut 3° , berapa meter pesawat turun untuk setiap 1 km mendarat?

COBA SENDIRI Dua sudut, satu menara

Dari titik A , puncak sebuah menara terlihat dengan sudut elevasi 30° . Setelah berjalan 40 m lurus mendekati menara sampai titik B , sudut elevasinya menjadi 60° . Tinggi mata diabaikan. Berapa tinggi menara?

1 Misalkan tinggi menara t dan jarak B ke kaki menara x . Dari B : $t = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.

2 Dari A : $t = (x + 40) \tan 30^\circ = \frac{x + 40}{\sqrt{3}}$.

3 Samakan: $x\sqrt{3} = \frac{x + 40}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3x = x + 40 \Rightarrow x = 20$ m.

4 $t = 20\sqrt{3} \approx 34,6$ m.

Tinggi menara $20\sqrt{3} \approx 34,6$ m. Bonus: sudut di puncak pada segitiga A - B -puncak adalah $60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, jadi segitiga itu sama kaki dan jarak B ke puncak juga 40 m. Cek: $40 \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$. ✓

24.5 Identitas Pythagoras: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Ingat Bab 18? Pada segitiga siku-siku, $\text{depan}^2 + \text{samping}^2 = \text{miring}^2$. Kalau kita membagi semuanya dengan miring^2 , Teorema Pythagoras menjelma menjadi hubungan antara sinus dan kosinus.



IDENTITAS TRIGONOMETRI DASAR

Untuk setiap sudut lancip θ ,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{dan} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Penulisan $\sin^2 \theta$ berarti $(\sin \theta)^2$. Persamaan yang benar untuk *semua* sudut seperti ini disebut **identitas trigonometri**.

▼ Bukti dengan Pythagoras

Misalkan sisi depan a , sisi samping b , dan sisi miring c . Menurut Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Bagi kedua ruas dengan c^2 :

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \implies \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

Untuk identitas kedua: $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan \theta$. ■



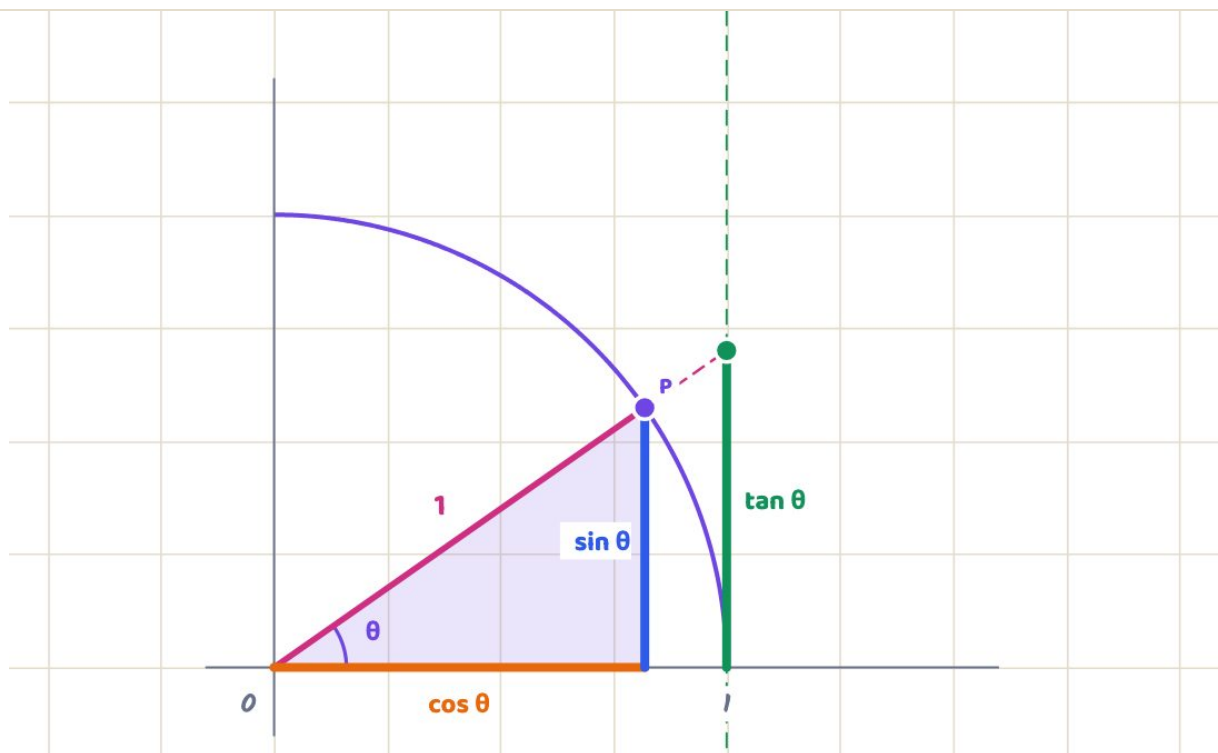
GRAFIK HIDUP

Lingkaran satuan: sin, cos, dan tan menjadi panjang garis

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-24

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\theta = 35^\circ : (0,82)^2 + (0,57)^2 = 1$$



$\sin \theta$
0,574

$\cos \theta$
0,819

$\tan \theta$
0,7

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$
1

Jika sisi miringnya 1, maka sisi depan *sama dengan* $\sin \theta$ dan sisi samping *sama dengan* $\cos \theta$. Tekan ►
Jalankan: segitiga berubah bentuk, tetapi $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ tetap 1. Garis hijau di $x = 1$ panjangnya tepat $\tan \theta$. Kapan garis hijau lebih panjang daripada jari-jari?

Diketahui θ sudut lancip dan $\sin \theta = \frac{3}{5}$. Tentukan $\cos \theta$ dan $\tan \theta$ tanpa mencari besar sudutnya.

1 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Karena θ lancip, $\cos \theta$ positif: $\cos \theta = \frac{4}{5}$.

2 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$.

$\cos \theta = \frac{4}{5}$ dan $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Diam-diam, ini segitiga 3-4-5 dari Bab 18!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TIGA SAUDARA KEBALIKAN

Selain $\sin$, $\cos$, dan $\tan$, ada tiga perbandingan kebalikan: **sekan** $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, **kosekan** $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, dan **kotangen** $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$. Membagi $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ dengan $\cos^2 \theta$ dan dengan $\sin^2 \theta$ menghasilkan dua identitas baru:

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

Di IB dan di Bab 26, definisi $\sin$ dan $\cos$ diperluas ke sudut berapa pun lewat **lingkaran satuan** seperti grafik di atas: $\cos \theta$ dan $\sin \theta$ adalah koordinat titik P .

24.6

Klinometer buatan sendiri dan trigonometri di sekitarmu

Klinometer Kak Lintang hanyalah busur derajat yang dibalik. Sedotan ditempel di sisi lurusya sebagai pembidik, dan benang berbandul baut digantung dari titik pusat busur. Saat sedotan diarahkan ke puncak benda, benang tetap tegap lurus ke bawah karena gravitasi, dan busur ikut miring. Dari situ lah sudut elevasi terbaca.

Bacaan busur

60 °

Tinggi menurut bidikan

59,2 m

Status

bidikan terlalu rendah

Pilih benda, atur jarakmu, lalu **seret di langit** (atau geser slider) sampai garis bidik tepat mengenai titik merah di puncak. Perhatikan bacaan busur di kotak kiri bawah. Hitung tingginya, lalu nyalakan "Ungkap tinggi sebenarnya" untuk mengecek. Apa yang terjadi kalau kamu berdiri terlalu dekat dengan Monas?

**AWAS JEBAKAN**

Klinometer busur tidak langsung menunjukkan sudut elevasi. Saat sedotan mendatar, benang menunjuk angka 90° pada busur. Saat sedotan mendongak sebesar α , benang menunjuk $90^\circ - \alpha$. Jadi sudut elevasinya adalah $\alpha = 90^\circ - \text{bacaan}$ (atau $\text{bacaan} - 90^\circ$ jika skala busurmu terbalik).

Bahasa sederhana • Ringkasnya: **ukur jarak** ke kaki benda, **bidik puncaknya** lewat sedotan, **baca sudutnya**, lalu kalikan jarak dengan tangen sudut itu dan tambahkan tinggi matamu. Empat langkah, tanpa memanjat!



LANJUT · IB & OLIMPIADE

MENGAPA 45° ADALAH SUDUT TERBAIK?

Misalkan klinometermu meleset $\Delta\alpha$ (dalam radian). Bagian tinggi di atas mata $y = d \tan \alpha$ akan meleset kira-kira $\Delta y \approx d \sec^2 \alpha \Delta\alpha$. Galat relatifnya

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\sec^2 \alpha}{\tan \alpha} \Delta\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \Delta\alpha}{\sin 2\alpha},$$

yang paling kecil ketika $\sin 2\alpha = 1$, yaitu $\alpha = 45^\circ$. Salah baca 1° pada sudut 45° menghasilkan galat sekitar 3,5%, tetapi pada sudut 15° atau 75° galatnya membengkak menjadi sekitar 7%. Jadi, ambil posisi yang membuat sudut elevasinya mendekati 45° . Trik kancil di komik ternyata juga yang paling teliti!



MATEMATIKA NUSANTARA

Di banyak pesantren, trigonometri dipelajari lewat **ilmu falak** untuk menentukan arah kiblat dan waktu salat. Alat tradisionalanya antara lain **tongkat istiwa** (tongkat tegak untuk mengamati bayangan) dan **bencet**, jam matahari sederhana yang masih dapat dijumpai di halaman beberapa pesantren dan masjid tua di Jawa. Panjang bayangan tongkat setinggi t saat matahari pada sudut elevasi α adalah $\frac{t}{\tan \alpha}$. Menurut salah satu pendapat fikih, awal waktu Asar ditandai saat bayangan benda sama dengan tinggi bendanya ditambah panjang bayangan tengah hari. Dua kali setahun, sekitar 27–28 Mei dan 15–16 Juli, matahari tepat berada di atas Kakbah, sehingga bayangan tongkat tegak di Indonesia menunjuk tepat ke arah kiblat. Peristiwa itu disebut *rashdul kiblat*.



Landasan pesawat

Pesawat mendarat mengikuti jalur lurus sekitar 3° . Lampu pemandu di tepi landasan berubah warna bila sudut pesawat terlalu tinggi atau terlalu rendah.



Ram kursi roda

Pedoman aksesibilitas bangunan di Indonesia membatasi kemiringan ram sekitar 7° di dalam gedung dan 6° di luar gedung, supaya pengguna kursi roda bisa naik sendiri dengan aman.



Atap genteng

Atap genteng dibuat miring $\pm 30^\circ$ – 40° agar air hujan cepat turun. Panjang kaso dihitung dari setengah lebar rumah dibagi $\cos$ sudut atap.



Rambu tanjakan

Rambu "tanjakan 10%" di jalan pegunungan berarti naik 10 m tiap 100 m mendatar: $\tan \theta = 0,1$, sehingga $\theta \approx 5,7^\circ$.



Pos pengamatan gunung api

Petugas memperkirakan tinggi kolom abu letusan dari jarak pos ke kawah dan sudut pandang ke ujung kolom, persis seperti mengukur tinggi Monas.

Cek Cepat

Segitiga siku-siku bersisi 5, 12, dan 13. Sudut θ berhadapan dengan sisi 5. Nilai $\cos \theta$ adalah...

Nilai $\tan 60^\circ$ adalah...

Dari jarak 20 m, puncak tiang bendera terlihat dengan sudut elevasi 45° . Tinggi mata pengamat 1,5 m. Tinggi tiang bendera adalah...

21,5 m

20 m

18,5 m

28,3 m

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A

Tantangan Rumah: klinometer sedotan

Bahan: busur derajat plastik, sedotan, selotip, benang ± 25 cm, sebuah baut atau mur sebagai bandul, meteran (atau langkah kakimu), buku catatan.

1. Tempelkan sedotan di sepanjang sisi lurus busur. Ikat benang di lubang pusat busur dan gantungkan baut di ujungnya.
2. Uji alatmu: bidik sesuatu yang setinggi matamu. Benang harus menunjuk angka 90° .
3. Berdirilah pada jarak tertentu dari tiang bendera sekolah atau pohon kelapa. Ukur jaraknya (kalau memakai langkah kaki, ukur dulu panjang satu langkahmu).
4. Bidik puncaknya lewat sedotan. Minta temanmu membaca angka yang ditunjuk benang, lalu hitung $\alpha = 90^\circ - \text{bacaan}$.
5. Hitung tinggi = jarak $\times \tan \alpha$ + tinggi matamu. Ulangi dari dua jarak lain, termasuk jarak saat α mendekati 45° .

Pertanyaan: Apakah ketiga hasilmu sama? Hasil dari jarak mana yang paling kamu percaya, dan mengapa? Bandingkan juga dengan trik Ancil: mundur sampai sudutnya tepat 45° .

RINGKASAN KILAT Bab 24 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- menunjuk **sisi depan, sisi samping, dan sisi miring** terhadap sebuah sudut, lalu menghitung **sin, cos, dan tan**
- menurunkan nilai eksak **sudut istimewa** 30° , 45° , dan 60° dari setengah persegi dan setengah segitiga sama sisi
- mencari **sisi atau sudut** yang belum diketahui pada segitiga siku-siku, termasuk memakai $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, dan $\tan^{-1}$

- menyelesaikan soal **sudut elevasi dan depresi**, misalnya mengukur tinggi Monas dengan klinometer buatan sendiri
- membuktikan dan memakai **identitas** $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Istilah kunci

sisi miring

sisi depan

sisi samping

sinus

kosinus

tangen

sudut istimewa

invers trigonometri

Sudut elevasi

Sudut depresi

identitas trigonometri

Rumus penting

$$t = L \sin \alpha$$

Tinggi layangan dari panjang tali. Tali yang terentang lurus adalah sisi miring dan tinggi layangan adalah sisi depan sudut. Jadi tinggi = panjang tali $\times$ sinus sudutnya.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{t}{p} \right)$$

Sudut kemiringan ram kursi roda. Bagi tinggi ram dengan panjang mendatarnya untuk mendapat $\tan \theta$, lalu tekan $\tan^{-1}$ untuk mendapat sudutnya.

$$H = d \tan \alpha + h$$

Tinggi benda dari sudut elevasi. Tinggi benda sama dengan jarak mendatar dikali tangen sudut elevasi, lalu ditambah tinggi mata pengamat.

Jangan sampai terjebak

- Sisi depan dan sisi samping selalu ditentukan dari sudut yang sedang kamu pakai.
- Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD).
- Hasil $d \tan \alpha$ hanyalah tinggi benda di atas mata pengamat.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=24

Teka-teki untuk Bab 25

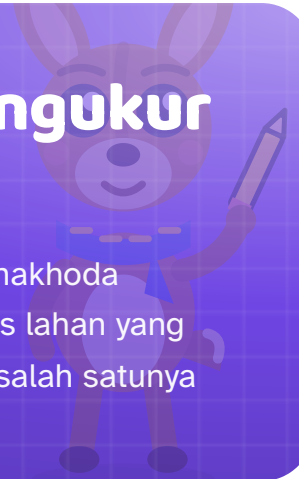
Pak Made punya kebun berbentuk segitiga. Dua sisinya 50 m dan 80 m, dan sudut di antara kedua sisi itu 60° . Ia ingin memagari sisi ketiga, tetapi sungai di tengah kebun membuatnya tidak bisa mengukur langsung. Tidak ada sudut siku-siku di segitiga itu, jadi SINDEMI-KOSAMI-TANDESA tidak bisa langsung dipakai. Berapa panjang sisi ketiga?

▼ Intip petunjuk

Ciptakan sendiri sudut siku-sikunya! Tarik garis tinggi dari ujung sisi 50 m ke sisi 80 m. Garis tinggi itu panjangnya $50 \sin 60^\circ$, dan kakinya berjarak $50 \cos 60^\circ = 25$ m dari titik sudut. Lalu pakai Pythagoras pada segitiga siku-siku yang tersisa. (Jawabannya bilangan bulat yang cantik.) Di Bab 25, trik ini menjadi rumus serbaguna bernama **aturan kosinus**.

25 Aturan Sinus & Kosinus: Mengukur Segitiga Apa Saja

SOHCAHTOA hanya bekerja pada segitiga siku-siku. Lalu bagaimana nakhoda menghitung jarak pulang ke pelabuhan, atau juru ukur menghitung luas lahan yang miring-miring? Dua aturan sederhana membuka semua segitiga, dan salah satunya ternyata Pythagoras yang sedang menyamar.



Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai **aturan sinus** untuk mencari sisi atau sudut bila diketahui pasangan sisi dan sudut yang berhadapan;
- mengenali **kasus ambigu** (dua sisi dan satu sudut yang tidak diapit) dan menemukan semua segitiga yang mungkin;
- memakai **aturan kosinus** dan menjelaskan mengapa Teorema Pythagoras adalah kasus khususnya;
- menghitung **luas segitiga** dengan rumus $\frac{1}{2}ab \sin C$;
- menyelesaikan soal **bearing** (navigasi) dan soal tiga dimensi dengan memilih aturan yang tepat.

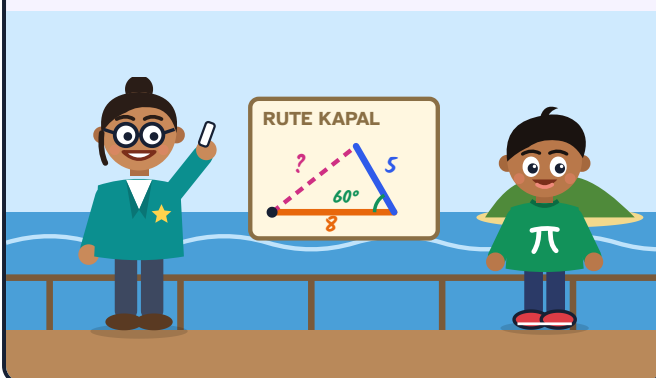
JALAN PULANG KAPAL FERI

KOMIK • 4 PANEL

Di dek kapal feri antarpulau, Nusa Tenggara

KAK LINTANG

Dari pelabuhan, kapal kita melaju 8 km, lalu berbelok dan melaju 5 km lagi. Sudut di tikungannya 60° .

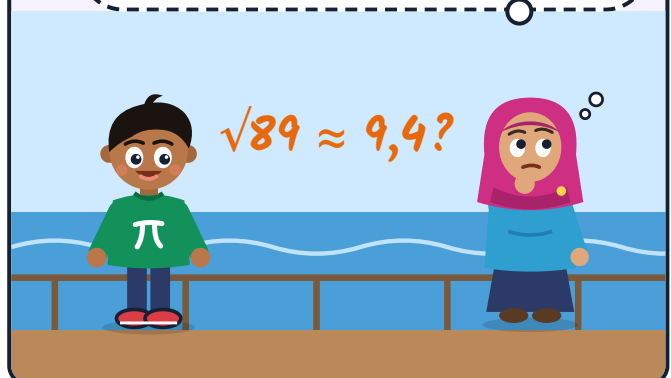


DIMAS

Jarak kita ke pelabuhan? Pakai Pythagoras saja: $\sqrt{(8^2 + 5^2)} \approx 9,4$ km!

AYU

Hmm... bukankah Pythagoras hanya untuk segitiga siku-siku?



KAK LINTANG

Tepat, Ayu! Sudutnya 60° , bukan 90° . Untuk segitiga sembarang, Pythagoras perlu satu suku koreksi.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

↑ suku koreksi

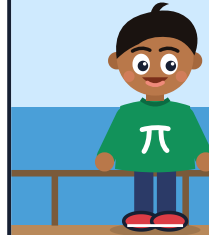
NAH!

Ternyata Ancil ikut menumpang...**ANCIL**

Koreksinya $2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ = 40$.
Jadi $c^2 = 64 + 25 - 40 = 49$. Jaraknya pas 7 km!

DIMAS

Lebih dekat 2,4 km daripada tebakanku...

**Tebak Dulu!**

Kapal yang sama melaju 8 km, berbelok, lalu melaju 5 km. Kali ini sudut di tikungannya 120° , bukan 60° . Berapa jarak kapal dari pelabuhan sekarang?

Tetap 7 km, karena panjang kedua lintasannya sama.

Dua kali lipat, yaitu 14 km, karena sudutnya dua kali lipat.

Sekitar 11,4 km: lebih jauh, tetapi tidak sampai dua kali lipat.

Lebih dekat daripada 7 km, karena kapal berbelok lebih tajam.

Jawabannya: sekitar 11,4 km. Sudut tikungan 120° berarti kapal hanya berbelok sedikit, sehingga rutennya lebih "lurus" dan ujungnya makin jauh dari pelabuhan. Namun jaraknya tidak sebanding dengan sudut: untuk 60° jaraknya 7 km, untuk 120° jaraknya $\sqrt{129} \approx 11,4$ km, dan untuk 180° (tidak berbelok sama sekali) paling jauh $8 + 5 = 13$ km. Aturan kosinus di subbab 25.3 menghitung semuanya dengan satu rumus.

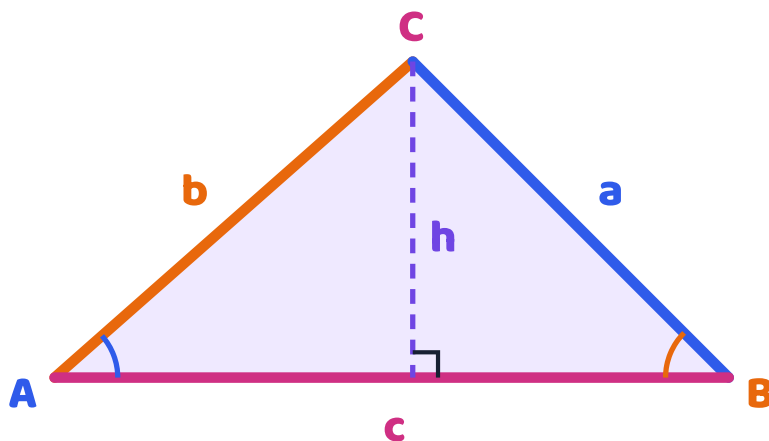
25.1 Aturan sinus: satu garis tinggi, dua cerita

Di Bab 24 kamu menaklukkan segitiga siku-siku dengan SOHCAHTOA. Namun segitiga di dunia nyata jarang punya pojok 90° : rute kapal, lahan warisan, rangka jembatan. Kabar baiknya, setiap segitiga bisa **dibuat** punya sudut siku-siku. Caranya cukup dengan menarik satu garis tinggi. Dari trik kecil itu lahir dua aturan besar.



DEFINISI · NAMA SISI DAN SUDUT

Pada segitiga ABC , besar sudut di titik A, B, C ditulis A, B, C . Sisi di **depan** setiap sudut diberi huruf kecil yang sama: $a = BC$ berhadapan dengan sudut A , $b = CA$ berhadapan dengan sudut B , dan $c = AB$ berhadapan dengan sudut C . Sisi dan sudut yang saling berhadapan, misalnya a dan A , disebut **pasangan sisi-sudut**.



Satu tinggi, dua cara:

kiri: $h = b \sin A$

kanan: $h = a \sin B$

$$\Rightarrow a \sin B = b \sin A$$

Sisi dan sudut yang berhadapan diberi warna sama. Garis tinggi h membelah segitiga menjadi dua segitiga siku-siku yang berbagi tinggi yang sama.

Tarik garis tinggi h dari titik C . Dari segitiga siku-siku di sebelah kiri, $h = b \sin A$. Dari segitiga siku-siku di sebelah kanan, $h = a \sin B$. Karena tingginya satu dan sama, $a \sin B = b \sin A$. Bagi kedua ruas dengan $\sin A \sin B$, dan lahirlah aturan pertama.



ATURAN SINUS

Pada setiap segitiga ABC berlaku

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Dalam kata-kata: *perbandingan setiap sisi dengan sinus sudut di depannya selalu sama*. Untuk mencari sudut, bentuk kebalikannya lebih praktis: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

▼ Bukti lengkap, termasuk segitiga tumpul

Garis tinggi dari C memberi $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, seperti di atas. Garis tinggi dari A memberi $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ dengan cara yang sama, jadi ketiga perbandingan itu sama.

Bagaimana jika sudut B tumpul? Kaki garis tinggi dari C jatuh di *perpanjangan* sisi AB . Pada segitiga siku-siku yang terbentuk di luar, sudut di B adalah $180^\circ - B$, sehingga $h = a \sin(180^\circ - B) = a \sin B$. Hasilnya tetap sama!



Bahasa sederhana • Versi sederhananya: **sisi paling panjang selalu berhadapan dengan sudut paling besar**, dan sisi paling pendek berhadapan dengan sudut paling kecil. Aturan sinus mengatakan hal itu dengan angka: bagi setiap sisi dengan sinus sudut di depannya, hasilnya selalu sama.



SINUS DAN KOSINUS SUDUT TUMPUL

Segitiga sembarang bisa punya sudut tumpul, misalnya 120° . Kalkulator (mode derajat) tetap memberi nilainya: $\sin 120^\circ \approx 0,866$ dan $\cos 120^\circ = -0,5$. Pola yang perlu kamu ingat:

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x, \quad \cos(180^\circ - x) = -\cos x.$$

Jadi $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ dan $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Mengapa kosinus sudut tumpul bernilai negatif? Bab 26 akan membuka rahasianya lewat lingkaran satuan.

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Pasangan lengkap (a, A) memberi 'nilai tukar' $a : \sin A$. Kalikan nilai tukar itu dengan $\sin B$, dan kamu mendapat sisi b .

a Sisi a km

A Sudut A °

B Sudut B °

b Sisi b km

SISI B

12,847

km

$B > A \Rightarrow b > a$: sudut lebih besar, sisi di depannya lebih panjang

Sudut ketiga $C = 52^\circ$. Nilai tukar $a : \sin A = 13,856$, jadi $b = 13,856 \times \sin 68^\circ = 12,847$.
Jika muncul '-', berarti $A + B$ sudah mencapai 180° atau lebih, sehingga segitiganya tidak ada.

Cek satuan: Sisi a dan b memakai satuan yang sama (km tetap km). Sudut diukur dalam derajat.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ATURAN-SINUS

CONTOH Pulau dilihat dari dua pos pantai

Pos pengamat A dan B berada di garis pantai yang lurus dan berjarak 12 km. Sebuah pulau kecil P terlihat dari A dengan $\angle PAB = 52^\circ$ dan dari B dengan $\angle PBA = 68^\circ$. Berapa jarak pos A ke pulau?

- 1 Sudut ketiga: $\angle APB = 180^\circ - 52^\circ - 68^\circ = 60^\circ$.
- 2 Sisi $AB = 12$ berhadapan dengan $\angle P = 60^\circ$: itu **pasangan lengkap**. Sisi yang dicari, AP , berhadapan dengan $\angle B = 68^\circ$.
- 3
$$\frac{AP}{\sin 68^\circ} = \frac{12}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AP = \frac{12 \sin 68^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{12 \times 0,9272}{0,8660} \approx 12,85 \text{ km.}$$

Pulau berjarak sekitar 12,85 km dari pos A . Cek kewajaran: $\angle B = 68^\circ$ sedikit lebih besar daripada $\angle P = 60^\circ$, jadi AP memang sedikit lebih panjang daripada $AB = 12$ km. (Dengan cara yang sama, jarak dari pos B sekitar 10,92 km.)

**AWAS JEBAKAN**

Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD). Dalam mode radian, kalkulator membaca $\sin 30$ sebagai sinus dari 30 radian dan memberi $-0,988$, bukan 0,5. Satu tombol yang salah bisa membuat kapalmu tersesat puluhan kilometer!

**Tebak Dulu!**

Ayu diminta menggambar segitiga dengan $\angle A = 30^\circ$, sisi $b = AC = 10$ cm, dan sisi $a = BC = 6$ cm. Ada berapa segitiga berbeda yang bisa ia gambar?

Tepat satu, karena dua sisi dan satu sudut sudah ditentukan.

Tidak ada, karena sisi 6 cm terlalu pendek.

Dua segitiga yang berbeda bentuk.

Tak hingga banyaknya.

Jawabannya: dua. Bayangkan sisi $a = 6$ cm sebagai lengan yang berengsel di titik C . Jarak terpendek dari C ke garis dasar adalah $b \sin A = 10 \times 0,5 = 5$ cm. Lengan 6 cm lebih panjang daripada 5 cm, jadi ujungnya bisa menyentuh garis dasar. Karena lengan itu juga lebih pendek daripada $b = 10$ cm, ia menyentuh garis dasar di **dua** tempat. Coba sendiri di Lab Mini di bawah!

Data "dua sisi dan satu sudut yang **tidak** diapit kedua sisi itu" sering disingkat **SSA** (sisi–sisi–sudut), dan data ini licik. Bayangkan sisi a sebagai daun pintu yang berengsel di titik C . Daun pintu itu boleh berayun; di mana pun ujungnya menyentuh garis dasar, di situlah titik B . Ujungnya bisa tidak sampai, menyentuh tepat sekali, atau memotong dua kali. Inilah **kasus ambigu** (ambigu = bermakna ganda).

tinggi $b \sin A$

4

banyak segitiga

2

 $\angle B_1 (^\circ)$

53, 13

 $\angle B_2 (^\circ)$

126, 87

Atur $\angle A$, sisi b , dan panjang lengan a . Tekan ► **Jalankan** agar lengan berayun, atau seret sendiri ujung lengan (titik biru). Kapan lengan memotong garis dasar dua kali? Kapan hanya sekali? Kapan tidak sampai sama sekali?



SIFAT • BANYAKNYA SEGITIGA PADA KASUS SSA

Diketahui a , b , dan sudut A yang **lancip**. Bandingkan lengan a dengan tinggi $b \sin A$:

- $a < b \sin A$: **tidak ada** segitiga (lengan terlalu pendek);
- $a = b \sin A$: **tepat satu** segitiga, siku-siku di B ;
- $b \sin A < a < b$: **dua** segitiga, dengan $B_2 = 180^\circ - B_1$;
- $a \geq b$: **tepat satu** segitiga.

Jika A siku-siku atau tumpul, segitiga ada (tepat satu) hanya bila $a > b$.

Pada segitiga ABC , $\angle A = 40^\circ$, $a = 7$ cm, dan $b = 10$ cm. Tentukan semua kemungkinan besar $\angle B$ dan panjang c .

1 Cek dulu banyaknya segitiga: $b \sin A = 10 \sin 40^\circ \approx 6,43$. Karena $6,43 < 7 < 10$, ada **dua** segitiga.

2 Aturan sinus: $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{10 \sin 40^\circ}{7} \approx 0,9183$. Jadi $B_1 \approx 66,67^\circ$ atau $B_2 = 180^\circ - 66,67^\circ = 113,33^\circ$.

3 Segitiga pertama: $C_1 = 180^\circ - 40^\circ - 66,67^\circ = 73,33^\circ$, sehingga $c_1 = \frac{7 \sin 73,33^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 10,43$ cm.

4 Segitiga kedua: $C_2 = 180^\circ - 40^\circ - 113,33^\circ = 26,67^\circ$, sehingga $c_2 = \frac{7 \sin 26,67^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 4,89$ cm.

$B \approx 66,67^\circ$ dengan $c \approx 10,43$ cm, atau $B \approx 113,33^\circ$ dengan $c \approx 4,89$ cm. Kedua segitiga sah!



AWAS JEBAKAN

Tombol $\sin^{-1}$ di kalkulator hanya memberi sudut lancip. Jika $\sin B = 0,8$, sudut B bisa $53,13^\circ$ **atau** $180^\circ - 53,13^\circ = 126,87^\circ$. Selalu periksa jawaban kedua itu: ia sah jika jumlahnya dengan sudut yang sudah diketahui masih kurang dari 180° .

25.3 Aturan kosinus: Pythagoras dengan koreksi

Aturan sinus butuh pasangan sisi-sudut yang lengkap. Bagaimana jika yang diketahui hanya dua sisi dan sudut di antara keduanya, seperti rute kapal di komik? Atau malah hanya tiga sisi? Di sinilah Pythagoras dari Bab 18 kembali, kali ini dengan sedikit "tambalan".



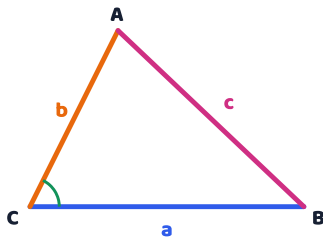
ATURAN KOSINUS

Pada setiap segitiga ABC berlaku

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Dengan cara yang sama, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ dan $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. Untuk mencari sudut dari tiga sisi, susun ulang rumusnya:

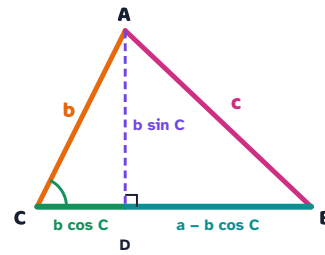
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Segitiga sembarang ABC

Tidak ada sudut siku-siku, jadi Pythagoras belum bisa dipakai langsung... atau bisa?

Langkah 1. Segitiga ABC sembarang dengan sisi $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, dan sudut C (hijau) di antara sisi a dan b .



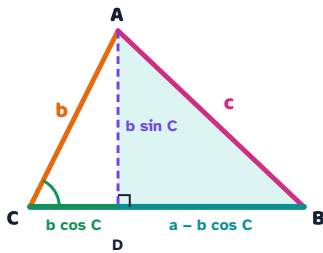
Tarik garis tinggi AD.

Muncul dua segitiga siku-siku. SOHCAHTOA (Bab 24) memberi:

$$AD = b \sin C$$

$$CD = b \cos C$$

Langkah 2. Tarik garis tinggi dari A yang tegak lurus BC di titik D . Pada segitiga siku-siku ADC : $AD = b \sin C$ dan $CD = b \cos C$.

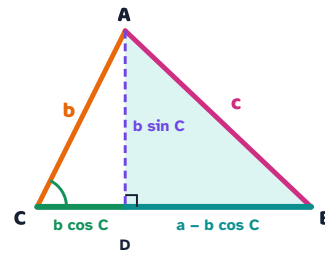


Pythagoras di segitiga ADB

$$c^2 = AD^2 + DB^2$$

$$c^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2$$

Langkah 3. Sisa alasnya $DB = a - b \cos C$. Segitiga ADB siku-siku di D , jadi Pythagoras berlaku: $c^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2$.



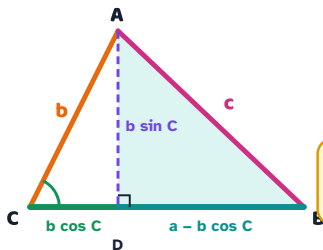
Jabarkan kuadratnya:

$$c^2 = b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2 C + a^2 - 2ab \cos C$$

Kelompokkan suku b^2 :

$$c^2 = b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) + a^2 - 2ab \cos C$$

Langkah 4. Jabarkan: $c^2 = b^2 \sin^2 C + a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C$, lalu kelompokkan suku-suku yang memuat b^2 .

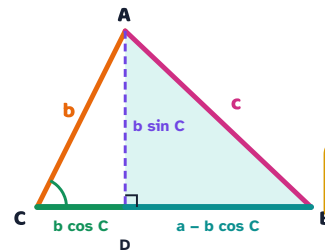


Ingat: $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ (identitas dari Bab 24), jadi kurung itu bernilai 1.

aturan kosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Langkah 5. Karena $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, diperoleh **aturan kosinus** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.



Bonus: jika $C = 90^\circ$,
 $\cos 90^\circ = 0$, koreksinya hilang:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Itulah Pythagoras!

aturan kosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Langkah 6. Saat $C = 90^\circ$, $\cos C = 0$ sehingga suku koreksi lenyap dan tersisa $c^2 = a^2 + b^2$. Pythagoras ternyata kasus khusus aturan kosinus!

▼ Bagaimana jika sudut C tumpul?

Jika C tumpul, kaki garis tinggi D jatuh di luar segitiga, pada perpanjangan BC melewati C . Sekarang $CD = b \cos(180^\circ - C) = -b \cos C$ (bilangan positif, karena $\cos C$ negatif) dan $DB = DC + CB = a - b \cos C$. Rumus untuk DB ternyata sama persis, begitu pula $AD = b \sin(180^\circ - C) = b \sin C$. Jadi seluruh perhitungan berlaku tanpa perubahan.

Bahasa sederhana • Cara mudah mengingatnya: aturan kosinus adalah **Pythagoras ditambah koreksi**. Kalau sudutnya 90° , koreksinya nol. Kalau sudutnya lebih sempit daripada 90° , sisi di depannya lebih pendek daripada hasil Pythagoras. Kalau sudutnya lebih lebar, sisi itu lebih panjang.

Ingat kebalikan Teorema Pythagoras di Bab 18? Segitiga lancip jika $a^2 + b^2 > c^2$ dan tumpul jika $a^2 + b^2 < c^2$. Aturan kosinus menjelaskan alasannya: jika C lancip, $\cos C > 0$, sehingga ada yang dikurangkan dan $c^2 < a^2 + b^2$.

b^2 . Jika C tumpul, $\cos C < 0$, sehingga "dikurangi bilangan negatif" berarti ditambah, dan $c^2 > a^2 + b^2$.

RUMUS HIDUP

Aturan kosinus: Pythagoras plus koreksi

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

Hitung dulu versi Pythagoras $a^2 + b^2$, lalu kurangi dengan koreksi $2ab \cos C$. Tarik akarnya, dan itulah sisi di depan sudut C .

a Sisi a km

b Sisi b km

C Sudut apit C°

c Sisi c km

SISI C

7

km

C lancip: koreksi positif dikurangkan, c lebih pendek daripada versi Pythagoras

⚙️ **ketiga sisi bulat!**

Versi Pythagoras: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{89} \approx 9,434$. Koreksinya $2ab \cos C = 40$, jadi $c^2 = 89 - (40) = 49$ dan $c \approx 7$.

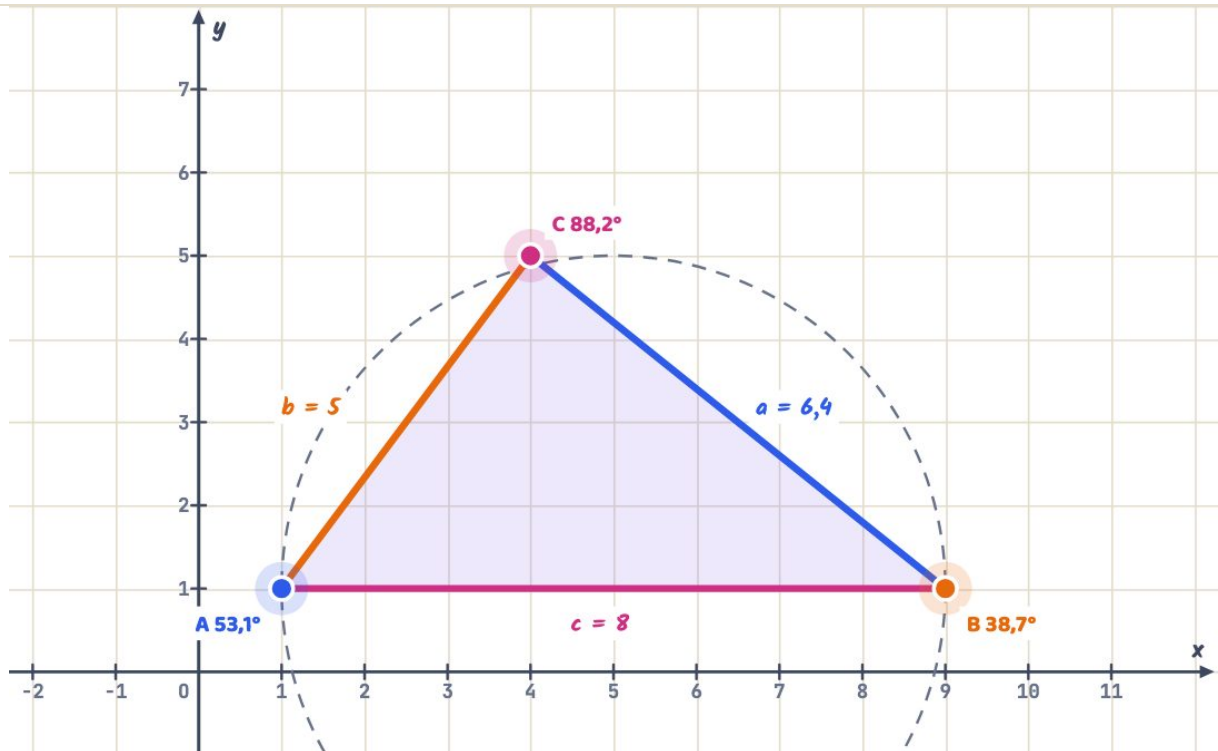
Cek satuan: Sisi a, b, dan c memakai satuan yang sama. Koreksi $2ab \cos C$ bersatuan km^2 , sama seperti a^2 dan b^2 .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ATURAN-KOSINUS

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\frac{a}{\sin A} \approx 8, \quad \frac{b}{\sin B} \approx 8, \quad \frac{c}{\sin C} \approx 8$$

Baris di atas adalah aturan sinus yang dihitung langsung dari gambar: ketiga perbandingannya selalu sama.



$\angle C$ lancip: $\cos C > 0$, jadi $c^2 < a^2 + b^2$

$a = BC$
6,4

$b = CA$
5

$c = AB$
8

$\angle A (^{\circ})$
53,1

$\angle B (^{\circ})$
38,7

$\angle C (^{\circ})$
88,2

$\angle A + \angle B + \angle C$
180

Luas = $\frac{1}{2}ab \sin C$
16

Seret titik A , B , dan C (atau geser slider). Semua sisi, sudut, dan luas berubah langsung, dan setiap sisi sewarna dengan sudut di depannya. Lingkaran putus-putus berdiameter AB : jika C tepat di atasnya, $\angle C = 90^{\circ}$; di dalamnya tumpul; di luarnya lancip. Coba cari posisi yang membuat $c^2 = a^2 + b^2$!

CONTOH Sudut lahan dari tiga sisi

Kebun Bu Ratna berbentuk segitiga dengan sisi 50 m, 70 m, dan 80 m. Berapa besar sudut di depan sisi 70 m? Berapa sudut terbesar kebun itu?

1 Sudut θ di depan sisi 70 m diapit sisi 50 m dan 80 m: $\cos \theta = \frac{50^2 + 80^2 - 70^2}{2 \cdot 50 \cdot 80} = \frac{2500 + 6400 - 4900}{8000} = \frac{4000}{8000} = 0,5$. Jadi $\theta = 60^\circ$.

2 Sudut terbesar φ berhadapan dengan sisi terpanjang (80 m): $\cos \varphi = \frac{50^2 + 70^2 - 80^2}{2 \cdot 50 \cdot 70} = \frac{1000}{7000} = \frac{1}{7}$, jadi $\varphi \approx 81,79^\circ$.

3 Sudut ketiga $= 180^\circ - 60^\circ - 81,79^\circ = 38,21^\circ$.

Sudut di depan sisi 70 m tepat 60° , dan sudut terbesarnya sekitar $81,79^\circ$. Karena kosinus sudut terbesar positif, kebun itu berbentuk segitiga lancip.



AWAS JEBAKAN

Jangan menghitung $a^2 + b^2 - 2ab$ lebih dulu lalu mengalikannya dengan $\cos C$. Suku $2ab \cos C$ adalah satu kesatuan: hitung dulu $2ab \cos C$, baru kurangkan dari $a^2 + b^2$. Untuk sudut tumpul, $\cos C$ negatif, sehingga "dikurangi bilangan negatif" berarti **ditambah**.



ADU CEPAT

Segitiga sudut 60° dan 120° kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-25](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-25)

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Untuk 60° , $\cos C = \frac{1}{2}$, jadi $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Untuk 120° , $\cos C = -\frac{1}{2}$, jadi $c^2 = a^2 + b^2 + ab$. Contoh: 3, 5, 120° memberi $9 + 25 + 15 = 49$, jadi $c = 7$.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 300 SM, Euklides menulis dua proposisi di buku *Elemen* (Buku II, proposisi 12 dan 13) yang isinya aturan kosinus dalam bahasa geometri: persegi di depan sudut tumpul *lebih luas* daripada jumlah dua persegi lainnya, dan selisihnya sama dengan dua kali luas sebuah persegi panjang tertentu. Waktu itu kata "kosinus" belum ada! Aturan sinus untuk segitiga datar dirumuskan dan dibuktikan dengan rapi oleh Nasiruddin at-Tusi di Persia pada abad ke-13. Lalu Jamsyid al-Kasyi (al-Kashi) dari Samarkand (± 1380 –1429) menuliskan aturan kosinus dalam bentuk yang siap dipakai untuk menghitung. Itu sebabnya di Prancis aturan kosinus disebut *teorema Al-Kashi*.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

ATURAN KOSINUS = HASIL KALI TITIK VEKTOR

Di Bab 23 kamu bertemu vektor. Letakkan pangkal di C , lalu misalkan $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ dan $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$. Maka $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$, sehingga

$$c^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Jadi rumus $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ dan aturan kosinus adalah satu fakta yang sama, dilihat dari dua arah. Versi vektor ini langsung berlaku di ruang tiga dimensi, misalnya untuk menghitung sudut antara dua diagonal ruang sebuah kubus: $\cos \theta = \frac{1}{3}$, jadi $\theta \approx 70,5^\circ$.

25.4

Luas segitiga tanpa mengukur tinggi

Di SD kamu belajar bahwa luas segitiga = $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$. Masalahnya, di lapangan tinggi segitiga jarang bisa diukur langsung. Coba saja ukur tinggi lahan yang ditumbuhi semak belukar! Untungnya, tinggi bisa dihitung dari sisi dan sudut. Jika alasnya $a = BC$, tinggi dari titik A ke alas itu adalah $b \sin C$ (lihat langkah 2 animasi di atas). Jadi luasnya $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin C$.



LUAS SEGITIGA DENGAN SINUS

Luas segitiga ABC adalah

$$L = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B$$

Dalam kata-kata: setengah kali dua sisi kali sinus sudut apit di antara keduanya.

Bahasa sederhana • Ingat polanya: pilih **dua sisi** dan **sudut yang diapit** kedua sisi itu. Kalikan kedua sisi, kalikan lagi dengan sinus sudutnya, lalu bagi dua. Jika sudutnya 90° , $\sin 90^\circ = 1$, dan rumusnya kembali menjadi $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$ yang sudah kamu kenal.

$$L = \frac{1}{2} a b \sin C$$

Dua sisi dan sudut yang diapitnya sudah cukup. Tinggi segitiga tersembunyi di dalam $b \sin C$.

a Sisi a m

b Sisi b m

C Sudut apit C °

L Luas m²

LUAS

1.732,1

m²

Tinggi terhadap alas a adalah $b \sin C = 69,282$ m, jadi $L = \frac{1}{2} \times 50 \times 69,282 = 1.732,1$ m², atau sekitar **0,173** hektare. Sudut **60°** dan **120°** memberi luas yang sama!

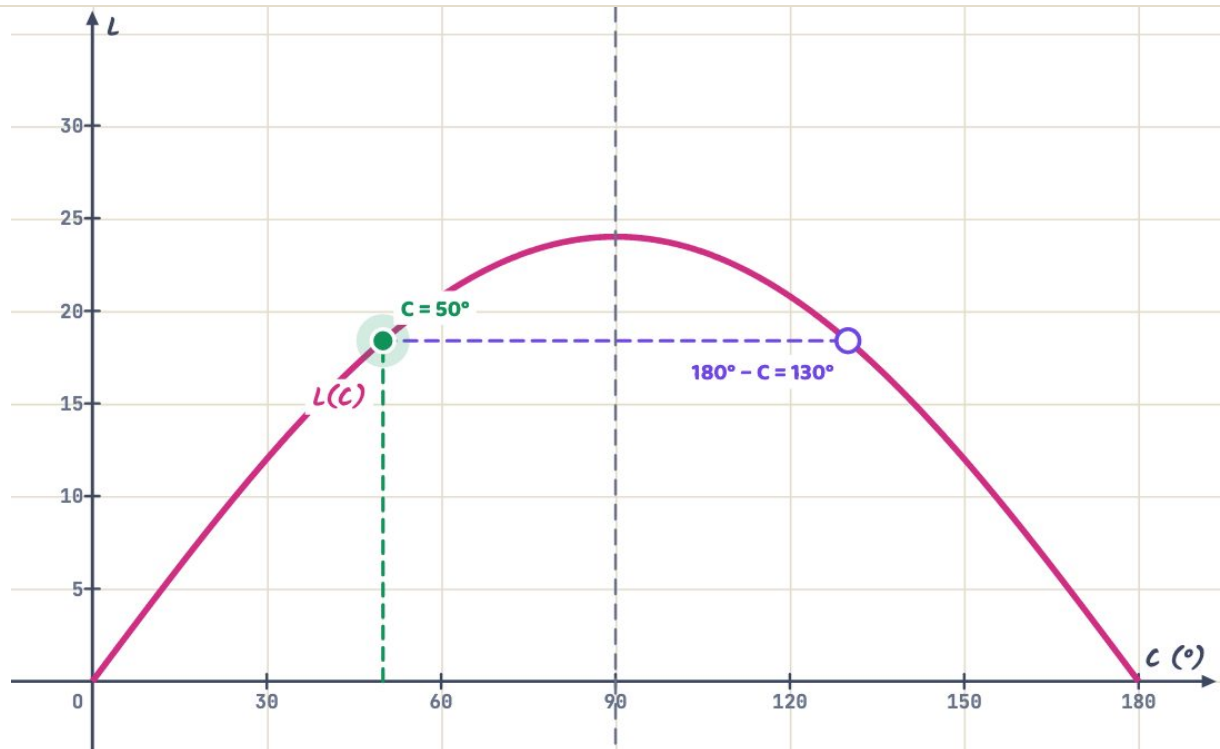
Cek satuan: Sisi dalam meter, jadi luas dalam meter persegi (m²). 1 hektare = 10.000 m².

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LUAS-SINUS

$$L(C) = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$L(50^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 50^\circ \approx 18,39$$

Sumbu mendatar: sudut apit C (derajat). Sumbu tegak: luas segitiga.



C dan $180^\circ - C$ memberi luas sama: $\sin C = \sin(180^\circ - C)$

$L(C)$

18,39

$L(180^\circ - C)$

18,39

Luas terbesar $\frac{1}{2}ab$

24

Seret titik hijau di sepanjang kurva. Titik ungu selalu berada di sudut $180^\circ - C$, dan tingginya sama persis. Inilah alasan di balik kasus ambigu: dua sudut berbeda punya sinus yang sama. Lihat juga bentuk kurvanya, karena kamu akan bertemu lagi dengannya di Bab 26.

Hitung luas kebun Bu Ratna (sisi 50 m, 70 m, dan 80 m) dari contoh di subbab 25.3.

- 1 Kita sudah tahu sudut 60° diapit oleh sisi 50 m dan 80 m.
- 2 $L = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 80 \cdot \sin 60^\circ = 2000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1000\sqrt{3} \approx 1732 \text{ m}^2$.
- 3 Cek dengan rumus Heron (lihat kotak Lanjut di bawah): $s = \frac{1}{2}(50 + 70 + 80) = 100$, $L = \sqrt{100 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 20} = \sqrt{3\,000\,000} \approx 1732 \text{ m}^2$. Cocok!

Luas kebun sekitar 1.732 m^2 , atau kira-kira 0,17 hektare.



MATEMATIKA NUSANTARA

Peta Jawa dari jaring segitiga. Pada abad ke-19, juru ukur memetakan Pulau Jawa dengan **triangulasi**: puncak-puncak gunung dan bukit dijadikan titik sudut sebuah jaringan segitiga raksasa yang membentang dari ujung barat sampai ujung timur pulau. Mereka mengukur satu **garis dasar** dengan sangat teliti, lalu hanya mengukur **sudut** dengan teodolit. Semua jarak lainnya dihitung dengan aturan sinus, segitiga demi segitiga. Sampai hari ini, juru ukur pertanahan masih memecah bidang tanah yang bentuknya tak beraturan menjadi segitiga-segitiga, lalu menjumlahkan luasnya dengan $\frac{1}{2}ab \sin C$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

RAHASIA DI BALIK ATURAN SINUS: DIAMETER 2R

Perbandingan $a/\sin A$ yang selalu sama itu ternyata punya arti geometris, yaitu **diameter lingkaran luar** segitiga:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Bukti singkat (untuk A lancip): tarik diameter BA' dari B melalui pusat lingkaran luar. Sudut $BA'C$ sama dengan A karena keduanya menghadap busur BC yang sama, dan sudut BCA' siku-siku karena menghadap diameter. Jadi $\sin A = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R}$. Dari sini lahir rumus luas yang sering muncul di olimpiade: $L = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{abc}{4R}$. Ada juga **rumus Heron** yang hanya memakai tiga sisi: $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Contoh terkenal: segitiga 13–14–15 punya $s = 21$ dan $L = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

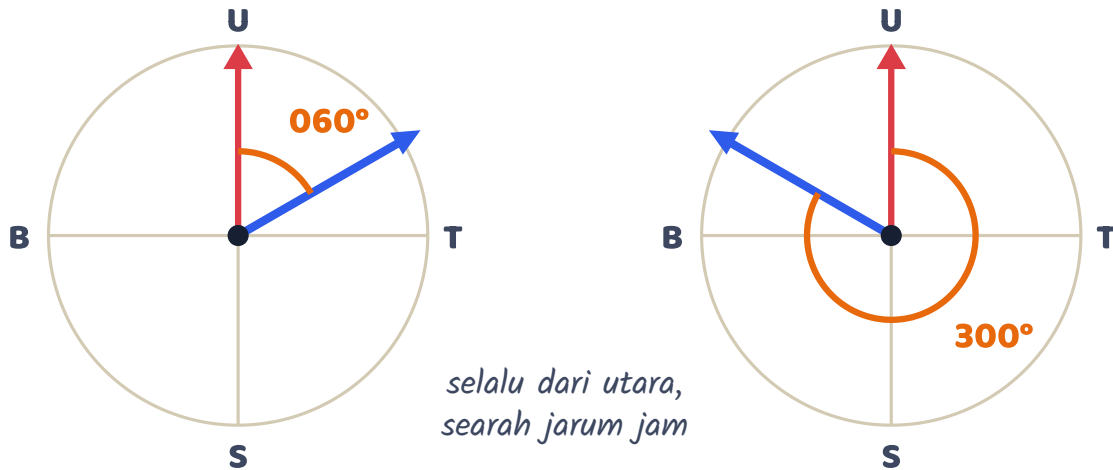
25.5 Bearing: navigasi kapal antarpulau

Indonesia punya lebih dari 17.000 pulau, dan setiap hari ratusan kapal berlayar di antaranya. Nakhoda tidak memakai kata "kanan" atau "kiri", melainkan arah kompas yang tepat.



DEFINISI • BEARING

Bearing (jurusan tiga angka) adalah arah yang diukur dari arah **utara**, **searah putaran jarum jam**, dan selalu ditulis dengan tiga angka. Contoh: timur laut = 045° , timur = 090° , selatan = 180° , barat = 270° .



Kiri: bearing 060° , yaitu 60° searah jarum jam dari utara (di antara timur laut dan timur). Kanan: bearing 300° , yaitu putaran 300° searah jarum jam dari utara, berakhir di antara barat dan barat laut.

Soal bearing selalu berujung pada sebuah segitiga. Kuncinya adalah menemukan sudut **di dalam** segitiga dari dua bearing. Gambarlah panah utara di **setiap** titik belok. Semua panah utara itu sejajar, sehingga sudut-sudut sehadap dan berseberangan dari Bab 17 bisa dipakai.



TRIK KAK LINTANG

Bearing balik = bearing pergi $\pm 180^\circ$. Jika Q terlihat dari P pada bearing 070° , maka P terlihat dari Q pada bearing $070^\circ + 180^\circ = 250^\circ$. Jika hasilnya 360° atau lebih, kurangi 360° : kebalikan dari 300° adalah $300^\circ + 180^\circ - 360^\circ = 120^\circ$. Lalu sudut di titik belok = selisih antara bearing balik dan bearing baru.

$\angle PQR (^{\circ})$

120

jarak PR (km)

60,83

bearing R dari P

095,3°

bearing pulang R $\rightarrow$ P

275,3°

Atur jarak dan bearing kedua lintasan, atau seret titik Q dan R di peta. Tekan ► **Jalankan** untuk melayarkan kapal. Panel di samping menghitung sudut di Q , jarak pulang dengan aturan kosinus, dan bearing untuk pulang. Coba tombol **Belok siku**: rumus apa yang muncul?

Sebuah kapal berangkat dari pelabuhan P , berlayar 40 km pada bearing 070° ke titik Q , lalu 30 km pada bearing 130° ke pulau R . Hitung jarak PR dan bearing R dari P .

- 1 Bearing balik dari Q ke P : $070^\circ + 180^\circ = 250^\circ$. Arah dari Q ke R : 130° . Jadi $\angle PQR = 250^\circ - 130^\circ = 120^\circ$.
- 2 Aturan kosinus: $PR^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cos 120^\circ = 1600 + 900 + 1200 = 3700$, jadi $PR = \sqrt{3700} \approx 60,83$ km.
- 3 Aturan sinus: $\sin \angle QPR = \frac{30 \sin 120^\circ}{60,83} \approx 0,4271$, jadi $\angle QPR \approx 25,28^\circ$. Sudut ini pasti lancip, karena $\angle Q$ sudah tumpul.
- 4 Kapal berbelok ke kanan (searah jarum jam), jadi bearing R dari $P = 070^\circ + 25,28^\circ \approx 095,3^\circ$.

Pulau R berjarak sekitar 60,83 km dari pelabuhan pada bearing $\pm 095,3^\circ$. Untuk pulang lurus, kapal mengambil bearing $095,3^\circ + 180^\circ = 275,3^\circ$.

25.6 Memilih aturan yang tepat dan soal tiga dimensi

Kamu kini punya empat alat: SOHCAHTOA (khusus segitiga siku-siku), aturan sinus, aturan kosinus, dan rumus luas. Yang sering sulit bukan menghitungnya, melainkan **memilih** alat yang tepat. Tabel ini membantumu.

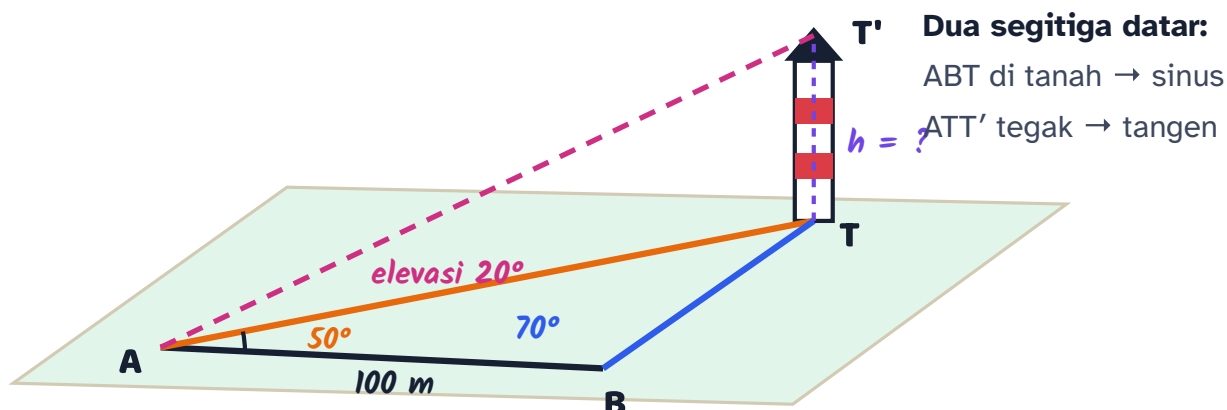
Yang diketahui	Alat pertama	Catatan
Tiga sisi (sisi-sisi-sisi)	Aturan kosinus, untuk sudut	Cari sudut terbesar dulu (di depan sisi terpanjang); sisanya aman dengan aturan sinus.
Dua sisi + sudut apit (sisi-sudut-sisi)	Aturan kosinus, untuk sisi ketiga	Luasnya langsung: $\frac{1}{2}ab \sin C$.
Dua sudut + satu sisi	Aturan sinus	Sudut ketiga = 180° dikurangi dua sudut lainnya.
Dua sisi + sudut tidak apit (SSA)	Aturan sinus	Awas kasus ambigu: bisa 0, 1, atau 2 segitiga.
Ada sudut 90°	SOHCAHTOA / Pythagoras	Paling cepat; aturan sinus dan kosinus tetap benar, hanya lebih panjang.



TRIK KAK LINTANG

Cari **pasangan lengkap**, yaitu satu sisi beserta sudut di depannya yang keduanya sudah diketahui. Ada pasangan lengkap? Pakai **aturan sinus**. Tidak ada? Pakai **aturan kosinus**. Untuk luas, cari dua sisi yang mengapit satu sudut.

Soal tiga dimensi terlihat menakutkan, padahal isinya hanya beberapa segitiga datar yang saling menempel. Strateginya: gambar ulang setiap segitiga yang kamu pakai secara terpisah dan datar, tandai yang diketahui, lalu selesaikan satu per satu.



Segitiga ABT terletak mendatar di tanah, sedangkan segitiga ATT' berdiri tegak dan siku-siku di T .
 Selesaikan satu per satu.

COBA SENDIRI Tinggi mercusuar di atas karang

Dua pengamat berdiri di titik A dan B di pantai yang datar, dengan $AB = 100$ m. Kaki mercusuar T berada di atas karang yang tidak bisa didekati, tetapi setinggi permukaan pantai. Dari A , sudut antara AB dan AT adalah 50° . Dari B , sudut antara BA dan BT adalah 70° . Dari A , puncak mercusuar T' terlihat dengan sudut elevasi 20° . Berapa tinggi mercusuar?

- 1 Segitiga datar ABT : $\angle ATB = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$.
- 2 Aturan sinus (pasangan lengkap: AB dan $\angle T$): $AT = \frac{AB \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{100 \times 0,9397}{0,8660} \approx 108,5$ m.
- 3 Segitiga tegak ATT' siku-siku di T : $h = AT \tan 20^\circ \approx 108,5 \times 0,3640 \approx 39,5$ m.

Tinggi mercusuar sekitar 39,5 m, kira-kira setinggi gedung 13 lantai, dan dihitung tanpa menyentuh mercusuarnya sama sekali!

MITOS

"Aturan sinus hanya berlaku untuk segitiga lancip."

MITOS

"Aturan kosinus adalah rumus baru yang tidak ada hubungannya dengan Pythagoras."

FAKTA

Aturan sinus berlaku untuk

semua

segitiga, termasuk yang tumpul, karena

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x$$

. Hati-hati saja saat mencari sudut: bisa ada dua jawaban.

FAKTA

Pythagoras adalah aturan kosinus untuk

$$C = 90^\circ$$

. Sebaliknya, aturan kosinus adalah Pythagoras yang diperluas ke semua segitiga dengan suku koreksi

$$-2ab \cos C$$

.

MITOS

"Dua sisi dan satu sudut selalu menentukan tepat satu segitiga."

FAKTA

Itu hanya benar jika sudutnya

diapit

kedua sisi tersebut. Jika sudutnya tidak diapit (SSA), bisa ada nol, satu, atau dua segitiga.



Navigasi antarpulau

Nakhoda menghitung jarak dan bearing pulang dari dua lintasan yang sudah ditempuh, persis seperti Lab Mini di atas.



Menara pengawas kebakaran hutan

Dua menara yang jaraknya diketahui sama-sama mencatat arah asap. Aturan sinus langsung memberi jarak titik api dari setiap menara.



Pengukuran tanah

Juru ukur memecah bidang tanah menjadi segitiga dan menghitung luas setiap bagian dengan $\frac{1}{2}ab \sin C$.



Rangka jembatan & atap

Rangka baja tersusun dari segitiga. Aturan kosinus memberi panjang batang dan sudut sambungannya.



Sudut tembak ke gawang

Dari posisi pemain, "jendela" gawang yang terlihat adalah sebuah sudut. Aturan kosinus menghitungnya dari jarak ke kedua tiang.

Cek Cepat

Pada segitiga ABC , $a = 6$, $\angle A = 30^\circ$, dan $\angle B = 90^\circ$. Panjang b adalah...

3

$6\sqrt{3}$

12

$6\sqrt{2}$

Dua sisi segitiga 4 cm dan 6 cm mengapit sudut 120° . Panjang sisi ketiga adalah...

$\sqrt{28}$ cm

$\sqrt{76}$ cm

10 cm

$\sqrt{52}$ cm

Luas segitiga dengan dua sisi 8 cm dan 9 cm yang mengapit sudut 150° adalah...

18 cm²

36 cm²

$18\sqrt{3}$ cm²

72 cm²

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. B · 3. A



Tantangan Rumah: mengukur lebar lapangan tanpa menyeberang

Bahan: meteran (atau tali 10 m), busur derajat dari kertas tebal (atau aplikasi kompas di HP), tiga pasak atau batu, buku catatan.

1. Pilih benda T di seberang lapangan atau halaman, misalnya sebatang pohon atau tiang.
2. Di sisimu, buat garis dasar AB sepanjang 10 m. Tandai A dan B dengan pasak.
3. Di A , ukur sudut antara arah B dan arah T . Lakukan hal yang sama di B .
4. Hitung sudut ketiga, lalu pakai aturan sinus untuk mencari AT dan BT .
5. Jika memungkinkan, ukur AT langsung dengan meteran dan bandingkan.

Pertanyaan: Seberapa besar selisih hasil hitunganmu dengan pengukuran langsung? Ulangi dengan garis dasar 5 m. Garis dasar mana yang memberi hasil lebih teliti, dan mengapa?



RINGKASAN KILAT

Bab 25 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- memakai **aturan sinus** untuk mencari sisi atau sudut bila diketahui pasangan sisi dan sudut yang berhadapan
- mengenali **kasus ambigu** (dua sisi dan satu sudut yang tidak diapit) dan menemukan semua segitiga yang mungkin
- memakai **aturan kosinus** dan menjelaskan mengapa Teorema Pythagoras adalah kasus khususnya
- menghitung **luas segitiga** dengan rumus $\frac{1}{2}ab \sin C$
- menyelesaikan soal **bearing** (navigasi) dan soal tiga dimensi dengan memilih aturan yang tepat



Istilah kunci

pasangan sisi-sudut

kasus ambigu

sudut apit

garis dasar

lingkaran luar

Bearing

Rumus penting

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Aturan sinus: cari sisi dari dua sudut. Pasangan lengkap (a, A) memberi 'nilai tukar' $a : \sin A$. Kalikan nilai tukar itu dengan $\sin B$, dan kamu mendapat sisi b.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

Aturan kosinus: Pythagoras plus koreksi. Hitung dulu versi Pythagoras $a^2 + b^2$, lalu kurangi dengan koreksi $2ab \cos C$. Tarik akarnya, dan itulah sisi di depan sudut C.

$$L = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Luas segitiga: $\frac{1}{2}ab \sin C$. Dua sisi dan sudut yang diapitnya sudah cukup. Tinggi segitiga tersembunyi di dalam $b \sin C$.

Jangan sampai terjebak

- Pastikan kalkulator dalam mode derajat (DEG), bukan radian (RAD).
- Tombol $\sin^{-1}$ di kalkulator hanya memberi sudut lancip.
- Jangan menghitung $a^2 + b^2 - 2ab$ lebih dulu lalu mengalikannya dengan $\cos C$.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=25

Teka-teki untuk Bab 26

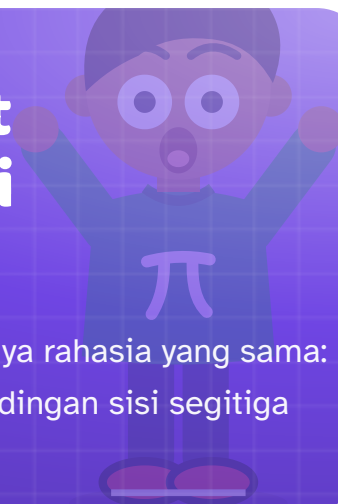
Di bab ini kamu dengan tenang menulis $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ dan $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. Padahal di Bab 24, sinus didefinisikan sebagai "depan dibagi miring" pada segitiga siku-siku, dan segitiga siku-siku tidak mungkin punya sudut 150° ! Lalu apa sebenarnya arti $\sin 150^\circ$? Sekarang bayangkan bianglala pasar malam berjari-jari 20 m. Kamu naik di kursi terbawah, lalu bianglala berputar pelan. Berapa tinggimu setelah berputar 150° ? 270° ? 400° ? Bagaimana bentuk grafik tinggimu terhadap waktu?

▼ Intip petunjuk

Letakkan pusat bianglala di titik (0, 0). Posisi kursimu setelah berputar sudut berapa pun bisa ditulis dengan $\cos$ dan $\sin$ sudut itu. Grafik tingginya naik-turun seperti gelombang, mirip kurva luas $L(C)$ yang kamu seret di subbab 25.4. Bab 26 akan membuat "sinus untuk semua sudut" masuk akal lewat lingkaran satuan.

26

Fungsi Trigonometri: Saat Lingkaran Menari Menjadi Gelombang



Kabin bianglala, ombak di pantai, dan dengung gong gamelan punya rahasia yang sama: semuanya berulang. Di bab ini, sin dan cos naik kelas, dari perbandingan sisi segitiga menjadi fungsi yang melukis gelombang.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memperluas sin, cos, dan tan ke **sudut berapa pun** memakai **lingkaran satuan** dan sudut acuan;
- mengubah derajat ke **radian** dan sebaliknya, serta menghitung panjang busur dan luas juring;
- menggambar grafik sin, cos, tan dan membaca **amplitudo, periode, geseran, dan sumbu tengah**;
- memodelkan peristiwa berulang (bianglala, pasang surut, bunyi gamelan) dengan $y = A \sin (B(x - C)) + D$;
- membuktikan dan memakai **identitas** (Pythagoras, jumlah sudut, sudut rangkap) untuk menyelesaikan **persamaan trigonometri**.

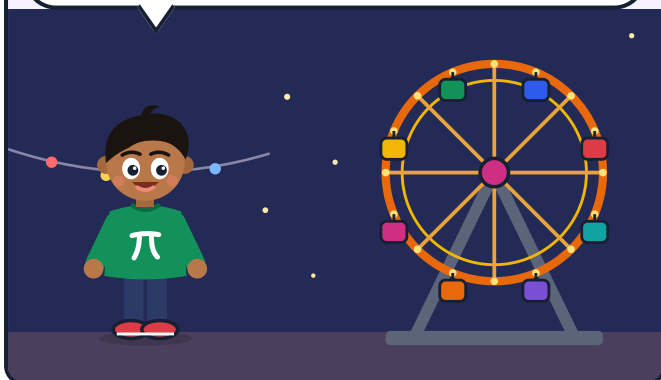
BIANGLALA PASAR MALAM

KOMIK • 4 PANEL

Malam Minggu, pasar malam di alun-alun

DIMAS

Ayo naik bianglala! Kabinnya pasti naik rata terus, kayak lift.



AYU

Kucatat tinggi kabin kita tiap 5 detik. Naiknya makin lama makin cepat!

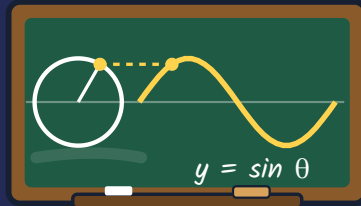
t (s)	tinggi (m)
0	2
5	3,5 +1,5
10	7,5 +4
15	13 +5,5



KAK LINTANG

Tinggi kabin mengikuti fungsi sinus.
Lingkaran yang berputar, kalau dilihat dari samping, jadi gelombang!

WUSS!



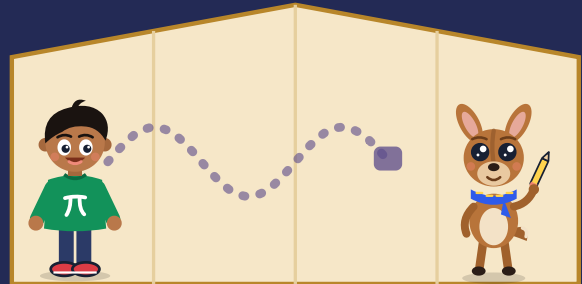
Ancil mengintip dari balik tenda lampion...

ANCIL

Lihat bayangan kabin di dinding tenda:
naik-turun persis seperti ombak di
Parangtritis!

DIMAS

Lingkaran... jadi gelombang?!



Tebak Dulu!

Bianglala berputar dengan kecepatan tetap. Jika tinggi kabin digambar terhadap waktu, grafiknya berbentuk...

garis lurus naik lalu turun, seperti atap rumah (bentuk segitiga);

gelombang mulus: lambat di dekat puncak dan dasar, paling cepat di tengah;

tangga naik dengan anak tangga yang sama tinggi;

satu parabola terbuka ke bawah, lalu berhenti.

Jawabannya: gelombang mulus. Kabin bergerak dengan laju tetap di sepanjang lingkaran, tetapi di puncak dan di dasar arah gerakannya hampir mendatar, jadi tingginya nyaris tidak berubah. Di ketinggian poros, kabin bergerak hampir tegak sehingga tingginya berubah paling cepat. Itulah sebabnya catatan Ayu bertambah 1,5 m, lalu 4 m, lalu 5,5 m. Bentuk gelombang ini bernama **sinusoid**.

26.1 Lingkaran satuan: sin dan cos untuk sudut berapa pun

Di Bab 24, sin dan cos lahir dari segitiga siku-siku, jadi sudutnya hanya boleh di antara 0° dan 90° . Padahal kabin bianglala terus berputar: 120° , 200° , bahkan 400° . Kita butuh definisi yang tidak "macet" di 90° .

Caranya: gambar lingkaran berjari-jari 1 yang berpusat di titik asal O . Lingkaran ini disebut **lingkaran satuan**. Putar ruas OP mulai dari sumbu- x positif, **berlawanan arah jarum jam**, sebesar θ .



DEFINISI

Untuk sudut θ sembarang, misalkan P titik pada lingkaran satuan sehingga OP membentuk sudut θ terhadap sumbu- x positif. Didefinisikan

$$\cos \theta = x_P, \quad \sin \theta = y_P, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0).$$

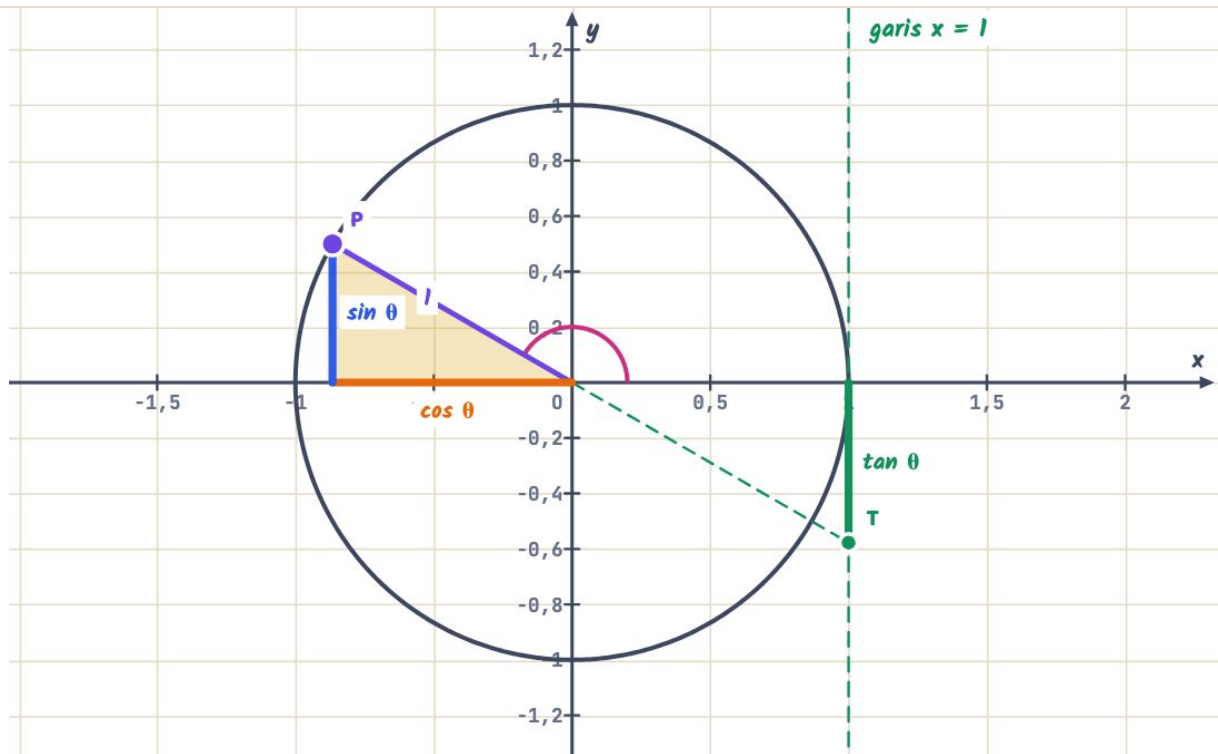
Jadi $P = (\cos \theta, \sin \theta)$. Sudut negatif berarti diputar **searah** jarum jam.

Bahasa sederhana • Gampangnya: bayangkan kamu duduk di kabin bianglala mini berjari-jari 1 meter. **sin θ** = seberapa tinggi kamu di atas poros, **cos θ** = seberapa jauh kamu ke kanan dari poros. Kalau kamu di bawah poros, tingginya negatif; kalau di kiri poros, jaraknya negatif.

Untuk $0^\circ < \theta < 90^\circ$, definisi ini cocok dengan SOHCAHTOA: segitiga di bawah OP punya sisi miring 1, sehingga sisi depannya $\sin \theta$ dan sisi sampingnya $\cos \theta$. Definisi lama tidak dibuang, hanya **diperluas**.

$$P = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\theta = 150^\circ : \quad \cos \theta = -0,87, \quad \sin \theta = 0,5, \quad \tan \theta = -0,58$$



Kuadran II: hanya sin yang positif

θ (radian)
2,618

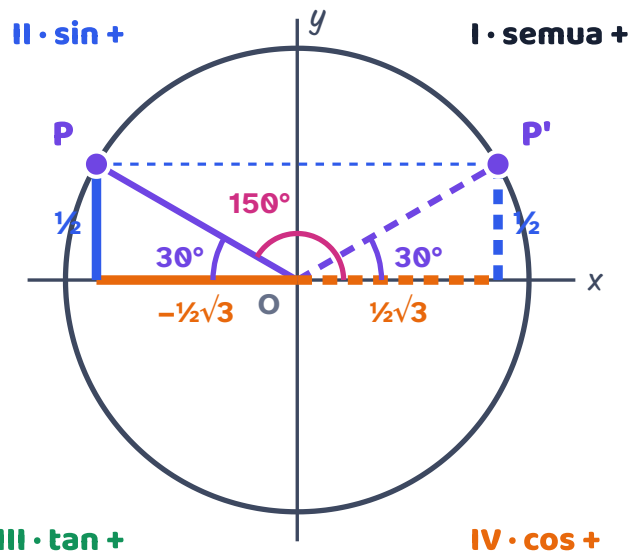
$\cos \theta$
-0,866

$\sin \theta$
0,5

$\tan \theta$
-0,5774

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$
1

Tekan ► **Jalankan** atau geser slider. Ruas **jingga** adalah $\cos \theta$, ruas **biru** adalah $\sin \theta$, dan ruas **hijau** di garis $x = 1$ adalah $\tan \theta$ (perpanjangan OP memotong garis itu di T). Tanda "-" berarti $\tan \theta$ tak terdefinisi. Perhatikan: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ **selalu** 1. Mengapa?



P (150°) dan P' (30°)

saling bercermin di sumbu-y:

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Sudut acuan 150° adalah 30°:

nilainya sama, tandanya

ditentukan oleh kuadran.

Titik P dan P' sama tinggi, jadi sinusnya sama. Jarak mendatarnya sama panjang tetapi berlawanan arah, jadi kosinusnya berlawanan tanda.



SIFAT SUDUT BERELASI (SUDUT ACUAN)

Setiap sudut punya **sudut acuan** α antara 0° dan 90° , yaitu sudut lancip antara OP dan sumbu- x . Nilai trigonometrinya sama dengan nilai sudut acuan, hanya tandanya yang mengikuti kuadran:

- Kuadran II: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.
- Kuadran III: $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$.
- Kuadran IV: $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
- Sudut negatif: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
- Satu putaran tidak mengubah apa pun: $\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$, $\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$.



TRIK KAK LINTANG

Urutan tanda positif dari kuadran I sampai IV: **Semua - Sin - Tan - Cos**. Jembatan keledai yang populer: "**S**emua **S**indik **T**angannya **K**osong" (K untuk kosinus). Untuk nilainya, ingat pola akar yang rapi: $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\sin 90^\circ$ berturut-turut sama dengan $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{4}}{2}$. Kosinus adalah pola yang sama, dibaca terbalik.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

CONTOH Sudut acuan beraksi

Tentukan nilai eksak $\sin 150^\circ$, $\cos 240^\circ$, dan $\tan 315^\circ$.

- 1 150° di kuadran II, sudut acuannya $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Sinus positif di kuadran II: $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.
- 2 240° di kuadran III, sudut acuannya $240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$. Kosinus negatif di kuadran III: $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.
- 3 315° di kuadran IV, sudut acuannya $360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$. Tangen negatif di kuadran IV: $\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$.

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$, $\tan 315^\circ = -1$. Resepnya selalu dua langkah: cari sudut acuan, lalu tentukan tanda dari kuadran.

ADU CEPAT Sinus sudut sembarang, kilat!

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari sudut acuannya (0° – 90°), lalu tentukan tanda dari kuadran. Contoh: $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\sqrt{3}/2$. Kamu boleh mengetik $\sqrt{3}/2$, $-1/2$, atau $0,87$.



AWAS JEBAKAN

Kalkulator punya mode **DEG** (derajat) dan **RAD** (radian). Kalau kamu menekan $\sin 30$ dalam mode RAD, hasilnya $-0,988$ (sinus dari 30 radian), bukan $0,5$! Selalu periksa mode kalkulator sebelum menghitung.

26.2 Radian: mengukur sudut dengan jari-jari

Angka 360° adalah warisan bangsa Babilonia yang gemar bilangan yang mudah dibagi. Namun, alam tidak peduli pada angka 360 . Ada ukuran sudut yang jauh lebih "alami": **radian**, yang mengukur sudut dengan memakai jari-jari lingkaran itu sendiri.



Tebak Dulu!

Satu radian kira-kira sama dengan berapa derajat?

Tepat 1° .

Sekitar 57° .

Tepat 180° .

Sekitar $3,14^\circ$.

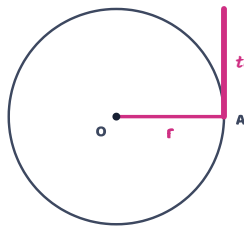
Jawabannya: sekitar $57,3^\circ$. Satu radian adalah sudut yang busurnya sepanjang jari-jari. Keliling lingkaran $2\pi r \approx 6,28r$, jadi satu putaran memuat sekitar 6,28 radian. Maka $1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ$. Angka 180° adalah π radian, bukan 1 radian.



DEFINISI

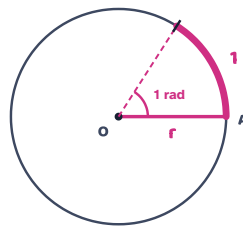
Sudut sebesar **1 radian** adalah sudut pusat lingkaran yang menghadap busur sepanjang jari-jarinya. Karena keliling lingkaran $2\pi r$, satu putaran penuh sama dengan 2π radian:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57$$



Ambil tali sepanjang r ,
lalu tempelkan melengkung
di tepi lingkaran mulai A.

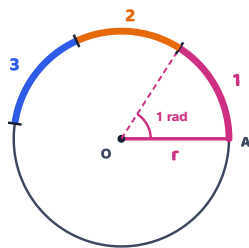
Langkah 1. Ambil seutas tali yang panjangnya sama dengan jari-jari r , lalu tempelkan melengkung di tepi lingkaran, mulai dari titik A.



Busur sepanjang r
membentuk sudut pusat
sebesar 1 radian.

$$1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$$

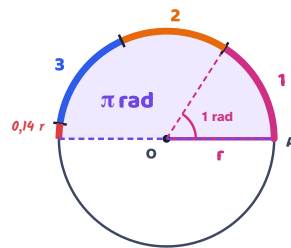
Langkah 2. Busur sepanjang r membentuk sudut pusat yang disebut **1 radian**. Ukurannya sekitar $57,3^\circ$, berapa pun besar lingkarannya.



Tempel tali ke-2 dan ke-3.

Tiga jari-jari hampir sampai
setengah lingkaran, kurang
sekitar $0,14 r$ lagi.

Langkah 3. Tempel tali kedua dan ketiga. Tiga tali hampir mencapai setengah lingkaran, tetapi masih kurang sekitar $0,14r$.

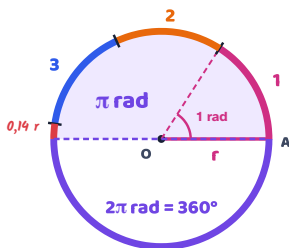


Busur setengah lingkaran

panjangnya $\pi \approx 3,14$ kali r .
Jadi setengah putaran
sama dengan π radian:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Langkah 4. Setengah lingkaran tepat memuat $\pi \approx 3,14$ tali. Jadi setengah putaran = π radian = 180° .



Satu putaran penuh

$$= 2\pi \approx 6,28 \text{ jari-jari.}$$

$$\text{satu putaran} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi \approx 57,3^\circ$$

$$1^\circ = \pi/180 \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}$$

Langkah 5. Satu putaran penuh memuat $2\pi \approx 6,28$ tali, sehingga $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Untuk mengubah derajat ke radian, kalikan dengan $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Bahasa sederhana • Jadi, radian menjawab pertanyaan: "Busurnya sepanjang **berapa kali jari-jari?**" Sudut 2 radian berarti busurnya sepanjang dua jari-jari. Sederhana, bukan?



PANJANG BUSUR DAN LUAS JURING

Pada lingkaran berjari-jari r dengan sudut pusat θ dalam radian:

$$s = r\theta \quad \text{dan} \quad L_{\text{juring}} = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

▼ Mengapa rumusnya sesederhana ini?

Busur dan juring sebanding dengan sudutnya. Satu putaran ($2\pi \text{ rad}$) memberi busur $2\pi r$ dan luas πr^2 . Jadi untuk sudut θ :

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi r = r\theta, \quad L = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

Dalam derajat, rumusnya membawa beban tambahan: $s = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot 2\pi r$. Radian membuat faktor π dan 360 lenyap.

RUMUS HIDUP Radian dan panjang busur

$$s = r\theta, \quad \theta = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

Panjang busur sama dengan jari-jari dikali sudut dalam radian. Ubah dulu derajat ke radian dengan mengalikan $\pi/180$.

r Jari-jari m θ° Sudut putar $^\circ$ s Panjang busur m

PANJANG BUSUR

11,52

m

Sudut $60^\circ = 0,333 \pi \text{ rad} \approx 1,047 \text{ rad}$. Kabin di jari-jari 11 m menempuh busur $s = 11 \times 1,047 \approx 11,52 \text{ m}$. Satu putaran penuh = $2\pi r \approx 69,115 \text{ m}$.

Cek satuan: r dalam meter dan θ dalam radian (tanpa satuan), jadi s dalam meter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUSUR-RADIAN

CONTOH Busur bianglala

Bianglala berjari-jari 11 m berputar 120° . Berapa radian sudut itu, dan berapa meter jarak yang ditempuh kabin?

1 Ubah ke radian: $120^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \approx 2,094 \text{ rad.}$

2 Panjang busur: $s = r\theta = 11 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{22\pi}{3} \approx 23,04 \text{ m.}$

Sudutnya $\frac{2\pi}{3}$ rad dan kabin menempuh $\approx 23,04 \text{ m}$. Cek: 120° adalah sepertiga putaran, dan $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 11 \approx 23,04 \text{ m.} \checkmark$

ADU CEPAT Derajat ke radian kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan dengan $\pi/180$, lalu sederhanakan. Contoh: $150^\circ = 150\pi/180 = 5\pi/6$. Ketik saja $5\pi/6$ atau $5\text{pi}/6$.



SIAPA YANG MEMBERI NAMA "RADIAN"?

Gagasan mengukur sudut dengan jari-jari sudah dipakai matematikawan Inggris Roger Cotes sekitar tahun 1714. Namun, kata "radian" baru muncul sekitar tahun 1873 pada soal ujian yang disusun James Thomson di Belfast. Jadi, radian jauh lebih muda daripada derajat yang berumur ribuan tahun.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA KALKULUS JATUH CINTA PADA RADIAN

Dalam radian, untuk sudut yang kecil berlaku $\sin x \approx x$. Coba: $\sin 0,1 \approx 0,0998$ dan $\sin 0,01 \approx 0,0099998$. Dalam derajat, hubungan secantik itu hilang: $\sin 1^\circ \approx 0,01745$, yaitu $\frac{\pi}{180}$, bukan 1. Akibatnya, rumus kalkulus seperti "turunan $\sin x$ adalah $\cos x$ " hanya berlaku bila x dalam radian; dalam derajat muncul faktor pengganggu $\frac{\pi}{180}$. Fakta $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ akan menjadi bintang di Bab 27.

26.3 Grafik sin, cos, dan tan

Sekarang kita "membuka gulungan" lingkaran. Tulis sudut θ di sumbu mendatar dan tinggi titik P di sumbu tegak. Saat P berputar, titik di grafik ikut berjalan ke kanan dan melukis **gelombang sinus**.

LAB MINI Roda yang melukis gelombang

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

θ (derajat) **41,3**
 θ (radian) **0,72**
 $\sin \theta$ **0,659**
 $\cos \theta$ **0,752**
 $\tan \theta$ **0,877**
 Letak P **Kuadran I**

Perhatikan garis putus-putus biru: tinggi titik ungu di lingkaran **sama persis** dengan tinggi titik di grafik. Seret titik ungu (atau geser di area grafik) untuk memilih sudut sendiri; sudut istimewa seperti 30° dan 45° akan "menempel" seperti magnet. Ganti pilihan ke **cos θ** : apa bedanya dengan grafik sinus?

Grafik kosinus ternyata grafik sinus yang **digeser $\frac{\pi}{2}$ ke kiri**: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Masuk akal, karena kosinus suatu sudut sama dengan sinus sudut **penyikunya** (pelengkap menuju 90°): $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$. Karena itulah namanya ko-sinus, "sinus dari sudut komplement".



SIFAT GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi	Daerah asal	Daerah hasil	Periode	Pembuat nol	Ciri khas
$y = \sin x$	semua bilangan real	$[-1, 1]$	2π (360°)	$x = k\pi$	maks 1 di $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$y = \cos x$	semua bilangan real	$[-1, 1]$	2π (360°)	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	maks 1 di $2k\pi$
$y = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	semua bilangan real	π (180°)	$x = k\pi$	asimtot tegak $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Di sini k bilangan bulat. Fungsi yang berulang dengan pola tetap disebut **fungsi periodik**, dan panjang satu ulangan disebut **periode**.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 499 M, matematikawan India **Aryabhata** menyusun tabel *jya*, yaitu panjang setengah tali busur lingkaran, yang tidak lain adalah sinus. Menurut kisah yang sering diceritakan, kata itu diserap ke bahasa Arab menjadi *jiba*, lalu terbaca sebagai *jaib* yang berarti "lipatan" atau "teluk". Penerjemah Latin abad ke-12 mengalihkannya menjadi *sinus*, yang artinya juga "lipatan" atau "teluk". Nama fungsi paling terkenal di dunia ternyata lahir dari salah baca berantai!

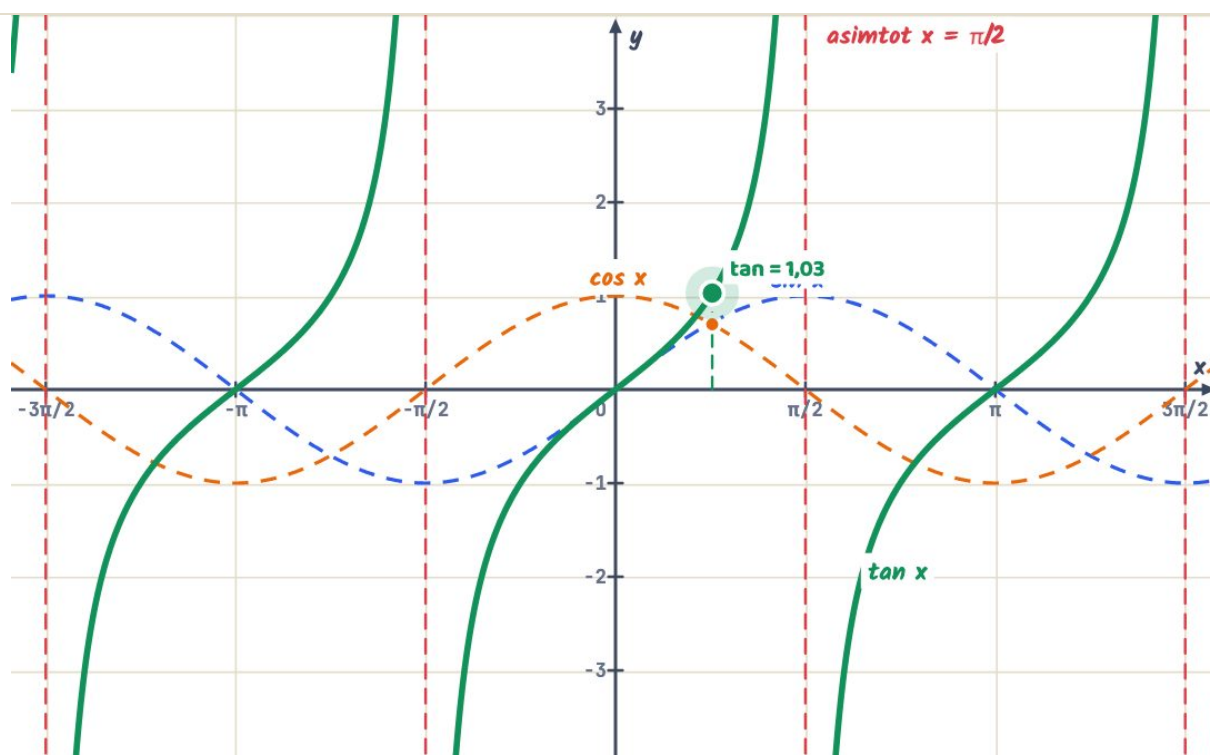
Bagaimana dengan tangen? Karena $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, nilainya meledak setiap kali $\cos x$ mendekati nol. Grafiknya berupa "tangga ke langit" yang dipisahkan garis **asimtot tegak**.

GRAFIK HIDUP Grafik tangen: tangga ke langit

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan(45,84^\circ) = \frac{0,72}{0,7} \approx 1,03$$



x (derajat)
45,8

sin x
0,717

cos x
0,697

tan x
1,03

Seret titik hijau ke arah garis merah. Apa yang terjadi pada $\cos x$ dan $\tan x$? Perhatikan juga: grafik tangen berulang setiap π , bukan 2π .



AWAS JEBAKAN

$\tan 90^\circ$ **tidak terdefinisi**, bukan 0 dan bukan "tak hingga". Pada $x = 90^\circ$, $\cos x = 0$ sehingga $\frac{\sin x}{\cos x}$ berarti membagi dengan nol. Dari kiri grafiknya melesat ke atas, dari kanan melesat ke bawah, jadi tidak ada satu nilai pun yang cocok.

26.4 Amplitudo, periode, dan geseran: merakit gelombang

Kembali ke bianglala. Tinggi kabin Dimas bergerak antara 2 m dan 24 m, dan satu putaran butuh 60 detik. Itu jelas bukan $y = \sin x$ yang hanya naik-turun antara -1 dan 1 setiap 2π . Kita perlu **meregangkan** dan **menggeser** gelombang sinus. Coba lihat dulu bianglala aslinya:

LAB MINI

Bianglala pasar malam: dari putaran ke grafik

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-26

waktu

7,2 detik

tinggi kabin Dimas

4,98 m

laju naik (+) / turun (–)

0,79 m/detik

Keadaan

naik

Tekan ► **Jalankan**. Garis putus-putus magenta menunjukkan tinggi kabin Dimas dipindahkan ke grafik. Nyalakan **Catatan Ayu**: titik-titiknya diambil pada selang waktu yang sama, tetapi jarak tegaknya tidak sama. Ubah jari-jari, tinggi poros, dan waktu putar. Tombol mana yang mengubah tinggi gelombang? Mana yang mengubah lebarnya?



EMPAT TOMBOL GELOMBANG SINUS

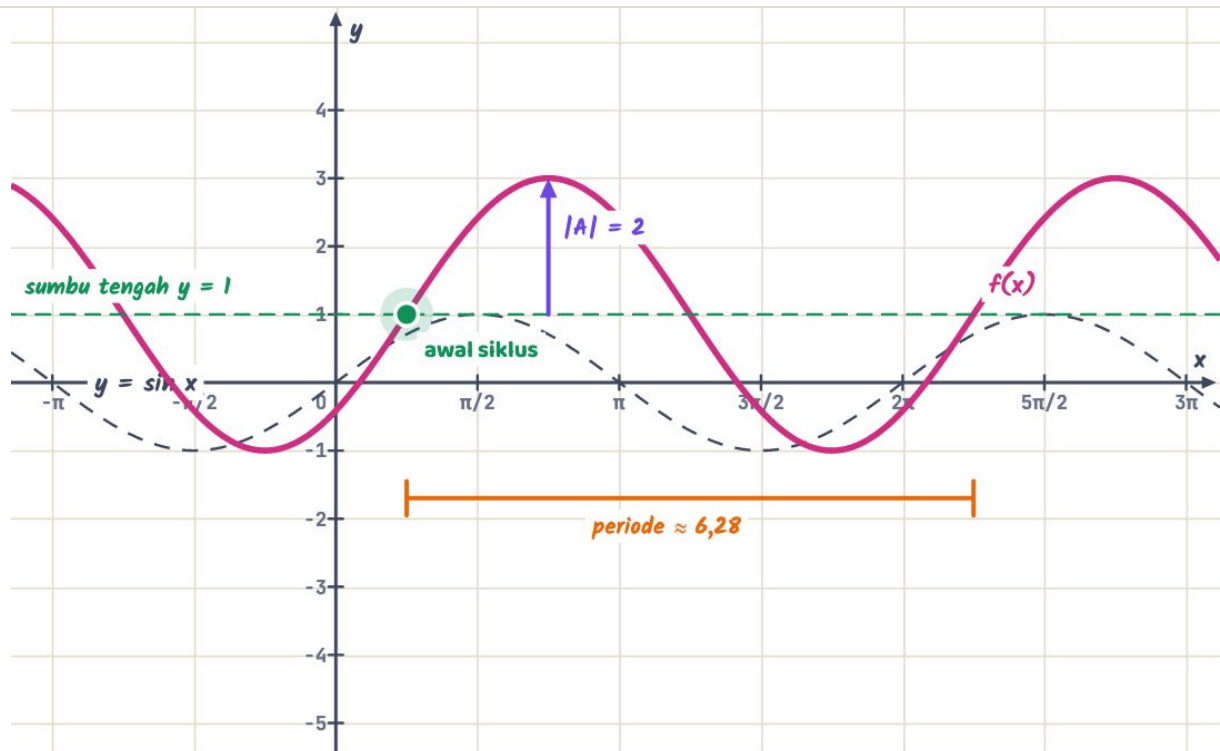
Grafik $y = A \sin(B(x - C)) + D$ dengan $B > 0$ adalah grafik $y = \sin x$ yang diubah sebagai berikut.

- $|A|$ = **amplitudo**: jarak dari sumbu tengah ke puncak. Jika $A < 0$, grafik dicerminkan.
- $\frac{2\pi}{B}$ = **periode**: panjang satu gelombang penuh (dalam derajat: $\frac{360^\circ}{B}$).
- C = **geseran fase**: grafik bergeser C satuan ke kanan.
- D = **sumbu tengah** (garis $y = D$): seluruh gelombang naik D satuan. Nilai maksimum $D + |A|$ dan minimum $D - |A|$.

$$y = A \sin (B(x - C)) + D$$

$$y = 2 \sin (1(x - 0,25\pi)) + 1$$

A meregang tegak, B memampatkan mendatar, C menggeser ke kanan, D mengangkat seluruh gelombang.



Amplitudo $|A|$
2

Periode $2\pi/B$
6,283

Geser C (kelipatan π)
0,25

Maksimum $D + |A|$
3

Minimum $D - |A|$
-1

Seret titik hijau "awal siklus" untuk mengubah C dan D sekaligus. Bisakah kamu membuat gelombang ungu menimpa tepat grafik $y = \cos x$? (Petunjuk: $A = 1$, $B = 1$, $D = 0$, dan C bernilai negatif.)



TRIK KAK LINTANG

Membaca gelombang dari grafik atau data itu seperti membaca bianglala: **sumbu tengah** $D = \frac{\text{maks} + \text{min}}{2}$ (tinggi poros), **amplitudo** $A = \frac{\text{maks} - \text{min}}{2}$ (jari-jari), **periode** = jarak dua puncak berurutan (waktu satu putaran), lalu $B = \frac{2\pi}{\text{periode}}$. Terakhir, C adalah saat gelombang melewati sumbu tengah sambil **naik**.

$$y = A \sin (B(x - C)) + D$$

Tinggi = sumbu tengah D ditambah A kali sinus. B mengatur seberapa cepat gelombang berulang, C mengatur kapan siklus dimulai.

A Amplitudo m

B Pemampat rad/jam

C Geseran jam

D Sumbu tengah m

x Waktu jam

y Tinggi air m

TINGGI AIR

3,7

m

 dekat puncak pasang

periode ± 12 jam, mirip pasang surut harian ganda

Pada jam ke-6, tinggi air $\approx 3,7$ m. Periode $2\pi/B \approx 12,083$ jam; air tertinggi **3,7** m, terendah **1,3** m, jadi selisih pasang dan surut **2,4** m.

Cek satuan: A dan D dalam meter, x dan C dalam jam, B dalam radian per jam, sehingga $B(x - C)$ adalah sudut dalam radian.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-GELOMBANG-SINUS

Tinggi air di dermaga sebuah desa nelayan dimodelkan dengan $h(t) = 1,2 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 2,5$ meter, t dalam jam setelah pukul 00.00. (a) Kapan air paling tinggi, dan berapa tingginya? (b) Perahu motor butuh air setinggi minimal 3,1 m untuk merapat. Antara pukul 00.00 dan 12.00, kapan saja perahu bisa merapat?

- 1 Baca keempat tombol: $A = 1,2$, $D = 2,5$, $C = 3$, dan $B = \frac{\pi}{6}$, sehingga periodenya $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ jam.
- 2 Maksimum $2,5 + 1,2 = 3,7$ m saat sudutnya $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{6}(t-3) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 6$, yaitu pukul 06.00 (dan 12 jam kemudian, pukul 18.00).
- 3 Syarat merapat: $1,2 \sin(\dots) + 2,5 \geq 3,1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \geq \frac{1}{2}$.
- 4 Dalam satu putaran, sinus $\geq \frac{1}{2}$ saat sudutnya antara $\frac{\pi}{6}$ dan $\frac{5\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}(t-3) \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 1 \leq t-3 \leq 5 \Rightarrow 4 \leq t \leq 8$.

(a) Air tertinggi 3,7 m pada pukul 06.00. (b) Perahu bisa merapat dari pukul 04.00 sampai 08.00, yaitu dua jam sebelum hingga dua jam sesudah puncak pasang. Simetris, seperti puncak gelombang!



Pasang surut

Di banyak pantai, air pasang dan surut dua kali sehari dengan periode sekitar 12 jam 25 menit. Nelayan dan petugas pelabuhan memakai tabel pasang surut yang polanya mirip gelombang sinus.



Bianglala & kincir air

Setiap titik pada roda yang berputar dengan laju tetap memiliki tinggi yang mengikuti fungsi sinus terhadap waktu.



Listrik di rumahmu

Tegangan listrik PLN berbentuk gelombang sinus berfrekuensi 50 Hz. Walaupun tertulis 220 V, puncak tegangannya sekitar $220 \sqrt{2} \approx 311$ V.



Gamelan & pengeras suara

Bunyi adalah getaran udara. Nada murni berupa gelombang sinus; nada gong dan saron adalah gabungan beberapa gelombang sinus.



Panjang siang

Di Jakarta, panjang siang hanya berubah kurang dari satu jam sepanjang tahun, sedangkan di kota berlintang tinggi bisa berbeda belasan jam. Grafiknya terhadap tanggal mirip gelombang sinus.



Sinyal radio & HP

Siaran radio dan sinyal HP menumpang pada gelombang sinus yang bergetar jutaan sampai miliaran kali per detik.

26.5

Identitas trigonometri dan sudut rangkap

Sebuah **identitas** adalah kesamaan yang benar untuk **semua** sudut, misalnya $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Bandingkan dengan *persamaan* seperti $\sin \theta = \frac{1}{2}$ yang hanya benar untuk sudut tertentu. Identitas adalah "alat tukar": kita boleh mengganti satu bentuk dengan bentuk lain kapan saja.



IDENTITAS DASAR

Untuk setiap sudut θ (dengan $\cos \theta \neq 0$ untuk dua rumus terakhir):

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

Yang pertama adalah **Teorema Pythagoras di lingkaran satuan**: titik $P(\cos \theta, \sin \theta)$ berjarak 1 dari O . Bagi kedua ruasnya dengan $\cos^2 \theta$, dan kamu mendapat yang ketiga. Lihat lagi Grafik Hidup lingkaran satuan di 26.1: bacaan $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ tidak pernah bergeser dari 1.



Tebak Dulu!

Apakah $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$?

Ya, sinus boleh "dibagikan" ke dalam kurung seperti perkalian.

Tidak. Ruas kiri sama dengan 1, ruas kanan sekitar 1,37.

Ya, karena keduanya sama dengan 1.

Tidak bisa diketahui tanpa kalkulator.

Jawabannya: tidak. $\sin 90^\circ = 1$, sedangkan $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1,37$. Sinus bukan bilangan yang dikalikan, jadi tidak bisa dibagikan ke dalam kurung. Rumus yang benar ada di bawah, dan buktinya bisa dilihat dengan mata!



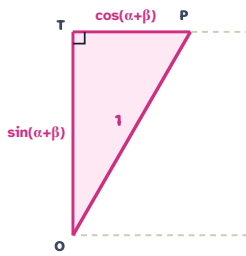
RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

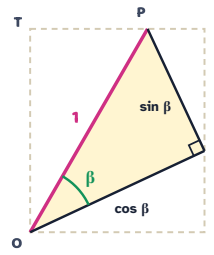
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Perhatikan tanda pada rumus kosinus: jumlah sudut memberi tanda kurang.



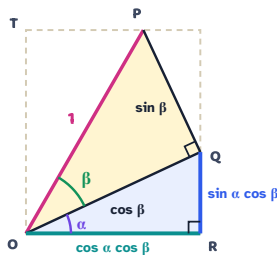
Ruas OP panjangnya 1,
sudutnya terhadap alas $\alpha + \beta$.
Tinggi bingkai = $\sin(\alpha + \beta)$
Lebar TP = $\cos(\alpha + \beta)$

Langkah 1. Mulai dari ruas OP sepanjang 1 yang membentuk sudut $\alpha + \beta$ dengan alas. Bingkai persegi panjang di sekitarnya: tingginya $OT = \sin(\alpha + \beta)$ dan lebar atasnya $TP = \cos(\alpha + \beta)$.



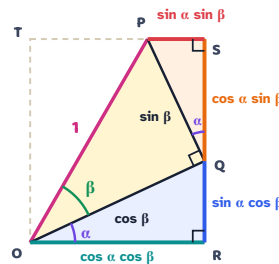
Segitiga OQP (siku di Q)
sudut β , sisi miring 1:
OQ = $\cos \beta$
QP = $\sin \beta$

Langkah 2. Tarik garis dari O bersudut α , lalu jatuhkan garis tegak lurus dari P ke garis itu di Q . Segitiga OQP siku-siku di Q dengan sudut β di O : $OQ = \cos \beta$ dan $QP = \sin \beta$.



Segitiga ORQ (siku di R)
sudut α , sisi miring $\cos \beta$:
RQ = $\sin \alpha \cos \beta$
OR = $\cos \alpha \cos \beta$

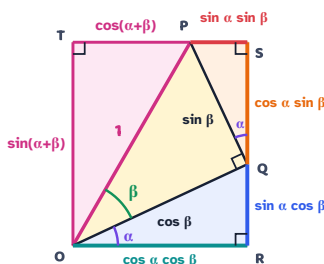
Langkah 3. Segitiga ORQ punya sudut α di O dan sisi miring $\cos \beta$. Maka $RQ = \sin \alpha \cos \beta$ dan $OR = \cos \alpha \cos \beta$.



Segitiga QSP (siku di S)
sudut α , sisi miring $\sin \beta$:
QS = $\cos \alpha \sin \beta$
SP = $\sin \alpha \sin \beta$

(sudut di $Q = \alpha$ karena $QS \perp OR$ dan $QP \perp OQ$)

Langkah 4. Sudut di Q antara QS dan QP juga α , sebab kedua kakinya adalah kaki sudut α di O yang diputar 90° . Dengan sisi miring $\sin \beta$: $QS = \cos \alpha \sin \beta$ dan $SP = \sin \alpha \sin \beta$.



tinggi: $OT = RQ + QS$
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
lebar: $TP = OR - SP$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Langkah 5. Bandingkan sisi bingkai. Tinggi: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$. Lebar: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. Dua rumus sekaligus dari satu gambar!

▼ Bukti untuk sudut berapa pun (dengan jarak dua titik)

Gambar bukti tanpa kata di atas memakai sudut lancip. Untuk sudut sembarang, ambil dua titik pada lingkaran satuan: $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ dan $Q(\cos \beta, \sin \beta)$. Kuadrat jaraknya:

$$PQ^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta).$$

Sekarang putar seluruh gambar sebesar $-\beta$. Titik Q pindah ke $(1, 0)$ dan P pindah ke $(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$. Pemutaran tidak mengubah jarak, jadi

$$PQ^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Samakan kedua hasil: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Ganti β dengan $-\beta$ untuk mendapat $\cos(\alpha + \beta)$. Rumus sinus diperoleh dari $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$, dan rumus tangen dari $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ (bagi pembilang dan

penyebut dengan $\cos \alpha \cos \beta$).



RUMUS SUDUT RANGKAP

Ambil $\alpha = \beta = \theta$ pada rumus jumlah sudut:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta},$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

Tiga bentuk $\cos 2\theta$ itu setara karena $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

RUMUS HIDUP Sudut rangkap

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Sinus sudut dua kali lipat bukan dua kali sinusnya, melainkan dua kali sinus dikali kosinus.



$\sin \theta = 0,5$ dan $\cos \theta = 0,866$, jadi $2 \sin \theta \cos \theta = 0,866$. Ruas kiri: $\sin 60^\circ = 0,866$. Sama! Bandingkan dengan tebakan keliru $2 \sin \theta = 1$. Bonus: $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 0,5$.

Cek satuan: Sinus tidak bersatuan, jadi kedua ruas adalah bilangan murni antara -1 dan 1 .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUDUT-RANGKAP](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-sudut-rangkap)

Hitung nilai eksak $\sin 75^\circ$.

1 Pecah menjadi sudut istimewa: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

2 $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

3 $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx \frac{2,449+1,414}{4} \approx 0,9659$.

$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0,966$. Cek kewajaran: 75° dekat 90°, jadi sinusnya sedikit di bawah 1. ✓

MITOS

" $\sin 2x = 2 \sin x$."

MITOS

" $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$."

FAKTA

Coba

$x = 90^\circ$

:

$\sin 180^\circ = 0$

, padahal

$2 \sin 90^\circ = 2$

. Rumus yang benar

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

.

FAKTA

$\sin(30^\circ + 60^\circ) = 1$

, sedangkan

$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ \approx 1,37$

. Sinus adalah fungsi, bukan bilangan pengali, jadi tidak bisa dibagikan ke dalam kurung.

MITOS

" $\sin^{-1} x$ artinya $1/\sin x$."

FAKTA

$\sin^{-1} x$

(atau $\arcsin$

x

) adalah

invers

: sudut yang sinusnya

x

. Kebalikan

$\frac{1}{\sin x}$

punya nama sendiri, kosekan. Anehnya,

$\sin^2 x$

tetap berarti

$(\sin x)^2$

.

MITOS

"Radian cuma gaya-gayaan; derajat sudah cukup."

FAKTA

Tanpa radian, rumus busur

$s = r\theta$

dan rumus kalkulus seperti turunan

$\sin x$

menjadi berantakan. Ilmuwan dan kalkulator

ilmiah memakai radian setiap hari.



MATEMATIKA NUSANTARA

Gamelan Bali terkenal dengan bunyinya yang **berdenyut**, seperti bergetar halus. Rahasiannya, banyak instrumen dibuat **berpasangan**: *pengumbang* yang nadanya sedikit lebih rendah dan *pengisep* yang nadanya sedikit lebih tinggi. Saat dipukul bersamaan, dua gelombang itu bergantian saling menguatkan dan saling melemahkan, sehingga terdengar **ombak** beberapa kali per detik.

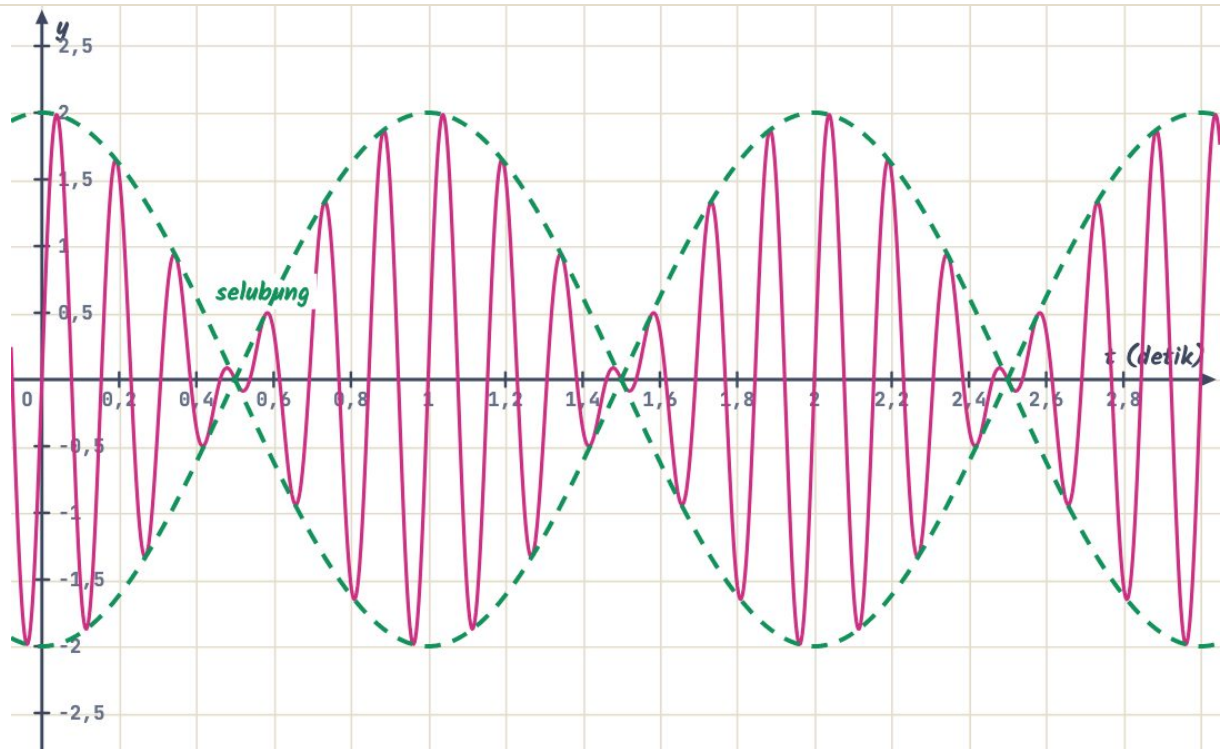
Matematikanya adalah identitas penjumlahan sinus:

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}.$$

Suku $\sin \frac{a+b}{2}$ adalah nada rata-rata yang kita dengar, sedangkan $2 \cos \frac{a-b}{2}$ adalah "selubung" lambat yang membuat suaranya membesar dan mengecil.

$$\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2 \cos(\pi(f_1 - f_2)t) \sin(\pi(f_1 + f_2)t)$$

$$f_1 = 6, f_2 = 7 \Rightarrow |f_1 - f_2| = 1 \text{ ombak per detik}$$



🎵 ombak berdenyut jelas, seperti gamelan Bali

Ombak per detik $|f_1 - f_2|$

1

Jarak antar-ombak (detik)

1

Nada rata-rata $(f_1 + f_2)/2$

6,5

Frekuensi di sini diperlambat ratusan kali agar terlihat. Samakan f_1 dan f_2 : ombaknya hilang! Lalu buat selisihnya 0,5. Berapa detik jarak antara dua "gelembung" suara?



LANJUT · IB & OLIMPIADE

DUA GELOMBANG SEFREKUENSI = SATU GELOMBANG

Kalau frekuensinya **sama**, jumlah dua gelombang selalu menjadi satu gelombang sinus baru:

$$a \sin x + b \cos x = R \sin(x + \varphi), \quad R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{R}.$$

Buktinya: jabarkan $R \sin(x + \varphi) = R \cos \varphi \sin x + R \sin \varphi \cos x$, cocokkan dengan a dan b , lalu kuadratkan dan jumlahkan. Contoh: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + 60^\circ)$, jadi nilai terbesarnya 2, bukan $1 + \sqrt{3}$. Bentuk ini sering muncul di soal IB untuk mencari nilai maksimum.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

COS 36° DAN RASIO EMAS

Sudut 36° muncul di bintang segi lima. Misalkan $\theta = 36^\circ$. Karena $5\theta = 180^\circ$, berlaku $2\theta = 180^\circ - 3\theta$, sehingga $\sin 2\theta = \sin 3\theta$. Dari $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$:

$$2\sin\theta\cos\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 3 - 4(1 - \cos^2\theta) \Rightarrow 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0.$$

Rumus kuadrat memberi $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\varphi}{2}$, dengan $\varphi \approx 1,618$ adalah **rasio emas** dari Bab 1. Trigonometri dan bunga matahari ternyata bersaudara!

26.6 Persamaan trigonometri

"Kapan kabin berada di atas 18,5 m?" "Pukul berapa air cukup tinggi untuk perahu?" Pertanyaan seperti ini menghasilkan **persamaan trigonometri**. Berbeda dengan persamaan linear yang biasanya punya satu jawaban, persamaan trigonometri sering punya **tak hingga banyak** jawaban, karena gelombangnya berulang.



PENYELESAIAN UMUM

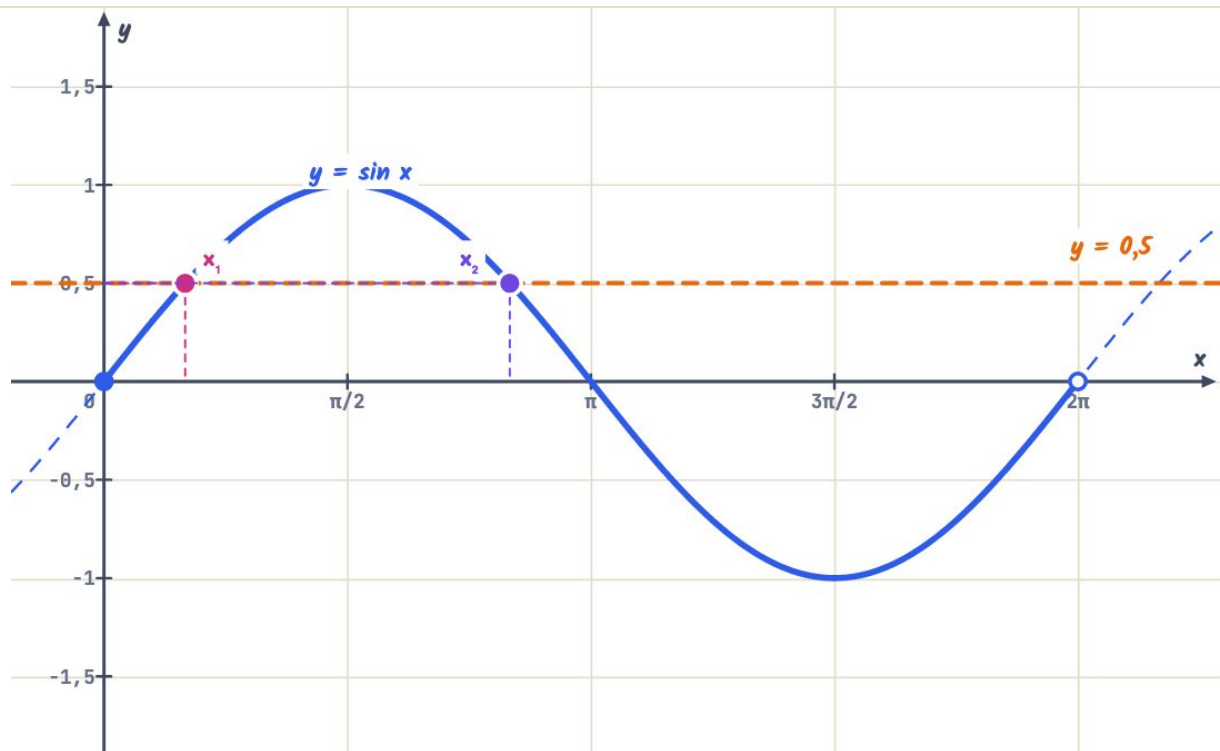
Jika α satu penyelesaian yang sudah diketahui dan k bilangan bulat, maka

- $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = \alpha + k \cdot 360^\circ$ atau $x = (180^\circ - \alpha) + k \cdot 360^\circ$;
- $\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = \alpha + k \cdot 360^\circ$ atau $x = -\alpha + k \cdot 360^\circ$;
- $\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + k \cdot 180^\circ$.

Dalam radian, ganti 360° dengan 2π dan 180° dengan π . Pasangan kedua berasal dari pencerminan di lingkaran satuan: titik yang sama tinggi (untuk sinus) atau sama jauh ke kanan (untuk kosinus).

$$\sin x = k, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

$$x_1 \approx 30^\circ, \quad x_2 \approx 150^\circ$$



dua penyelesaian, simetris terhadap $x = \pi/2$ atau $x = 3\pi/2$

Banyak penyelesaian

2

x_1 (derajat)

30

x_2 (derajat)

150

Naik-turunkan garis jingga. Kapan ada dua penyelesaian, satu, atau tidak ada sama sekali? Tanda "—" berarti penyelesaiannya tidak ada (karena $\sin x$ tidak pernah melebihi 1).



AWAS JEBAKAN

Jangan membagi kedua ruas dengan $\sin x$ atau $\cos x$, karena nilainya bisa nol dan penyelesaiannya ikut hilang. Contoh: dari $\sin 2x = \sin x$, membagi dengan $\sin x$ memberi $2 \cos x = 1$ dan melupakan $x = 0^\circ$ serta $x = 180^\circ$. Cara aman: pindahkan semua ke satu ruas, lalu **faktorkan**: $\sin x (2 \cos x - 1) = 0$.

Selesaikan $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

1 Misalkan $u = \sin x$: $2u^2 - u - 1 = 0 \Rightarrow (2u + 1)(u - 1) = 0$.

2 $u = 1$: $\sin x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ$.

3 $u = -\frac{1}{2}$: sudut acuannya 30° , dan sinus negatif di kuadran III dan IV, jadi $x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ atau $x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

$x = 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$. Cek $x = 210^\circ$: $2 \cdot \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}) - 1 = 0$. ✓

Pada bianglala di komik, tinggi kabin $h(t) = 13 - 11 \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)$ meter, dengan t detik sejak naik dari titik terendah. Ayu ingin memotret alun-alun saat kabin lebih tinggi dari 18,5 m. Berapa detik waktu yang ia punya dalam satu putaran? Tuliskan juga model ini dalam bentuk $A \sin(B(t - C)) + D$.

1 Misalkan $\theta = \frac{\pi t}{30}$. Syaratnya $13 - 11 \cos \theta > 18,5 \Rightarrow \cos \theta < -\frac{1}{2}$.

2 Di lingkaran satuan, $\cos \theta < -\frac{1}{2}$ berarti titik P berada di sebelah kiri garis $x = -\frac{1}{2}$, yaitu $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$.

3 $\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi t}{30} < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow 20 < t < 40$.

4 Bentuk sinus: karena $-\cos \theta = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, diperoleh $h(t) = 11 \sin\left(\frac{\pi}{30}(t - 15)\right) + 13$.

Ayu punya 20 detik (dari detik ke-20 sampai detik ke-40), tepat sepertiga putaran. Bentuk sinusnya: $A = 11$ (jari-jari), $B = \frac{\pi}{30}$ (periode 60 detik), $C = 15$, $D = 13$ (tinggi poros).

 **Cek Cepat**

Nilai $\tan 135^\circ$ adalah...

1

-1

$\sqrt{3}$

tidak terdefinisi

Periode grafik $y = 2 \sin(3x) + 1$ (dalam radian) adalah...

2π

6π

$\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$

Jika $\sin x = 0,6$ dan x sudut lancip, maka $\sin 2x = \dots$

0,96

1,2

0,48

0,36

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. C • 3. A



Tantangan Rumah: roda sepeda melukis sinus

Bahan: sepeda (atau roda lain yang bisa diputar), selotip berwarna, meteran, kertas berpetak, pensil.

1. Balikkan sepeda (sadel dan setang di lantai) agar roda bebas berputar. Tempelkan selotip di dekat pentil ban sebagai penanda.
2. Putar roda sampai penanda berada di titik terendah. Ukur tingginya dari lantai. Inilah sudut 0° .
3. Putar roda $\frac{1}{8}$ putaran (45°) setiap kali, lalu ukur lagi tingginya. Ulangi sampai penanda kembali ke titik terendah (9 data).
4. Gambar titik-titik (sudut, tinggi) di kertas berpetak, lalu hubungkan dengan kurva mulus.
5. Ukur juga jarak penanda ke as roda (r) dan tinggi as roda dari lantai (D).

Pertanyaan: Apakah titik-titikmu cocok dengan model $h = D - r \cos \theta$? Berapa amplitudo dan sumbu tengahnya? Mengapa kenaikan dari 0° ke 45° jauh lebih kecil daripada kenaikan dari 45° ke 90° ?



RINGKASAN KILAT

Bab 26 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- memperluas sin, cos, dan tan ke **sudut berapa pun** memakai **lingkaran satuan** dan sudut acuan
- mengubah derajat ke **radian** dan sebaliknya, serta menghitung panjang busur dan luas juring
- menggambar grafik sin, cos, tan dan membaca **amplitudo, periode, geseran, dan sumbu tengah**
- memodelkan peristiwa berulang (bianglala, pasang surut, bunyi gamelan) dengan $y = A \sin(B(x - C)) + D$
- membuktikan dan memakai **identitas** (Pythagoras, jumlah sudut, sudut rangkap) untuk menyelesaikan **persamaan trigonometri**



Istilah kunci

lingkaran satuan

sudut acuan

radian

gelombang sinus

fungsi periodik

periode

asimtot tegak

amplitudo

geseran fase

sumbu tengah

identitas

persamaan trigonometri



Rumus penting

$$s = r\theta, \quad \theta = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

Radian dan panjang busur. Panjang busur sama dengan jari-jari dikali sudut dalam radian. Ubah dulu derajat ke radian dengan mengalikan $\pi/180$.

$$y = A \sin(B(x - C)) + D$$

Model gelombang sinus (pasang surut). Tinggi = sumbu tengah D ditambah A kali sinus. B mengatur seberapa cepat gelombang berulang, C mengatur kapan siklus dimulai.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Sudut rangkap. Sinus sudut dua kali lipat bukan dua kali sinusnya, melainkan dua kali sinus dikali kosinus.

⚠ **Jangan sampai terjebak**

- Kalkulator punya mode DEG (derajat) dan RAD (radian).
- $\tan 90^\circ$ tidak terdefinisi, bukan 0 dan bukan "tak hingga".
- Jangan membagi kedua ruas dengan $\sin x$ atau $\cos x$, karena nilainya bisa nol dan penyelesaiannya ikut hilang.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=26

🧩 Teka-teki untuk Bab 27

Ancil menulis di papan: $0,999 \dots = 1$ (angka 9-nya berlanjut tanpa henti). Dimas langsung protes, "Mustahil! Pasti kurang sedikit dari 1!" Ayu diam-diam mengetik $\sin(0,001) \div 0,001$ di kalkulator (mode radian) dan mendapat $0,99999983 \dots$. Makin kecil sudutnya, makin panjang deretan angka 9 yang muncul. Jadi, apakah $0,999 \dots$ benar-benar sama dengan 1? Dan berapa sebenarnya nilai $\frac{\sin x}{x}$ saat x "hampir nol"?

▼ **Intip petunjuk**

Kalau $0,999 \dots$ lebih kecil daripada 1, pasti ada bilangan lain di antara keduanya, misalnya rata-ratanya. Coba tuliskan bilangan itu dalam bentuk desimal! Kalau tidak bisa... mungkin keduanya memang sama. Bab 27 memperkenalkan **limit**: seni mendekati tanpa harus menyentuh.

27 Limit: Seni Mendekati Tanpa Menyentuh



Benarkah $0,999\dots$ tepat sama dengan 1? Bagaimana Archimedes menjepit π dengan segi-96 tanpa kalkulator? Selamat datang di gerbang kalkulus, tempat "hampir" berubah menjadi "tepat".

Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan makna **limit** dengan bahasa sehari-hari, **tabel mendekat**, dan grafik (termasuk grafik berlubang);
- membedakan **limit kiri**, **limit kanan**, dan nilai fungsi tepat di suatu titik;
- menghitung limit aljabar dengan **substitusi**, **faktorisasi**, dan **perkalian sekawan**;
- menentukan **limit di tak hingga** dan **asimtot** fungsi rasional;
- memakai limit istimewa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dan memeriksa **kontinuitas** sebuah fungsi.

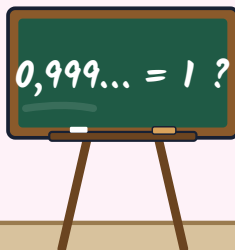
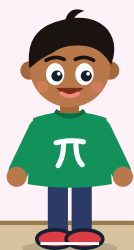
SEMBILAN YANG TAK PERNAH HABIS

KOMIK • 4 PANEL

Sore hari, di teras rumah Ayu

DIMAS

Teka-teki kemarin gampang! $0,999\dots$ pasti lebih kecil dari 1. Kurang sediiikit!

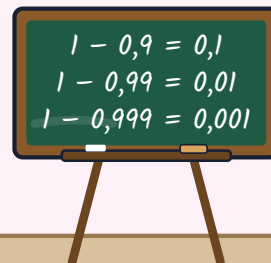


AYU

Kalau memang lebih kecil, selisihnya berapa? Tiap kali sembilanannya ditambah, selisihnya makin kecil.

DIMAS

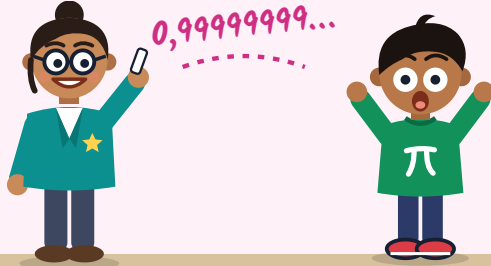
Selisihnya... $0,000\dots 01$?



KAK LINTANG

Angka 1 di ujungnya kapan muncul? Tidak pernah! Sembilannya tak berujung, jadi selisihnya lebih kecil daripada bilangan positif mana pun.

JRENG!

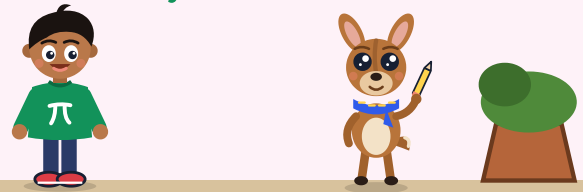
**Ancil muncul dari balik pot bunga...****ANCIL**

Bilangan tak negatif yang lebih kecil daripada semua bilangan positif cuma satu: nol! Jadi 0,999... tepat sama dengan 1.

DIMAS

Terus mendekat... ternyata sama?!

0,999... = 1 ✓

**Tebak Dulu!**

Fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ tidak terdefinisi di $x = 1$ karena penyebutnya nol. Apa yang terjadi pada $f(x)$ jika x sangat dekat dengan 1, misalnya $x = 0,999$?

Nilainya meledak menjadi sangat besar, karena penyebutnya hampir nol.

Nilainya hampir nol, karena pembilangnya hampir nol.

Nilainya hampir 2.

Kalkulator pasti menolak menghitungnya.

Jawabannya: hampir 2. Hitung saja: $f(0,999) = \frac{0,998001-1}{0,999-1} = \frac{-0,001999}{-0,001} = 1,999$. Pembilang dan penyebut sama-sama mengecil, dan "perlombaan" keduanya berakhir dengan perbandingan 2. Rahasiannya: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, jadi untuk $x \neq 1$ berlaku $f(x) = x + 1$. Inilah gambaran pertamamu tentang **limit**.

27.1 Mendekati tanpa menyentuh

Kembali ke teka-teki 0,999.... Tulis barisan 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ... Setiap suku lebih dekat ke 1 daripada suku sebelumnya: selisihnya 0,1; 0,01; 0,001; ... Selisih itu bisa dibuat **sekecil apa pun** yang kamu mau,

asalkan sembilannya cukup banyak. Matematikawan berkata: barisan ini mempunyai **limit** 1.

Lambang 0,999... (sembilan tak berujung) **bukan** salah satu suku barisan itu. Ia adalah *tujuan akhir* barisan, yaitu limitnya. Karena limitnya 1, maka $0,999... = 1$, tepat sama, bukan kira-kira.

Bahasa sederhana • Bayangkan kamu berjalan menuju pintu, dan setiap langkah menempuh setengah sisa jarak. Kamu makin dekat, makin dekat... Limit menjawab pertanyaan "**ke mana tujuanmu?**", bukan "apakah kamu sudah sampai?". Tujuannya jelas: pintu.



DEFINISI (LIMIT, VERSI INTUITIF)

Kita menulis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

(dibaca "limit $f(x)$ untuk x mendekati a sama dengan L ") jika nilai $f(x)$ dapat dibuat **sedekat apa pun** ke L dengan memilih x cukup dekat ke a , tetapi $x \neq a$. Yang dilihat adalah perilaku f di **sekitar** a , bukan nilai f tepat di a .

Cara paling jujur untuk "melihat" limit adalah **tabel mendekat**: pilih x yang makin dekat ke a dari kiri dan dari kanan, lalu amati ke mana $f(x)$ bergerak.

$$f(x) = (x^2 - 4) / (x - 2)$$

x dari kiri	f(x)	x dari kanan	f(x)
1,9	3,9	2,1	4,1



Langkah 1. Kita ingin tahu ke mana $f(x)$ menuju saat x mendekati 2. Mulai dari $x = 1,9$ (kiri) dan $x = 2,1$ (kanan): $f(1,9) = 3,9$ dan $f(2,1) = 4,1$.

$$f(x) = (x^2 - 4) / (x - 2)$$

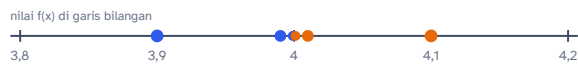
x dari kiri	f(x)	x dari kanan	f(x)
1,9	3,9	2,1	4,1
1,99	3,99	2,01	4,01



Langkah 2. Lebih dekat: $x = 1,99$ dan $x = 2,01$ memberi 3,99 dan 4,01. Pada garis bilangan, kedua titik merapat.

$$f(x) = (x^2 - 4) / (x - 2)$$

x dari kiri	f(x)	x dari kanan	f(x)
1,9	3,9	2,1	4,1
1,99	3,99	2,01	4,01
1,999	3,999	2,001	4,001



Langkah 3. Lebih dekat lagi: 3,999 dan 4,001. Selisihnya ke 4 tinggal 0,001, dan bisa dibuat sekecil apa pun.

$$f(x) = (x^2 - 4) / (x - 2)$$

x dari kiri	f(x)	x dari kanan	f(x)
1,9	3,9	2,1	4,1
1,99	3,99	2,01	4,01
1,999	3,999	2,001	4,001



Langkah 4. Bagaimana tepat di $x = 2$? $f(2) = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$: tidak terdefinisi! Grafiknya berlubang di sana.

$$f(x) = (x^2 - 4) / (x - 2)$$

x dari kiri	f(x)	x dari kanan	f(x)
1,9	3,9	2,1	4,1
1,99	3,99	2,01	4,01
1,999	3,999	2,001	4,001

kiri $\rightarrow 4$, kanan $\rightarrow 4 \Rightarrow$ limitnya 4



Langkah 5. Namun dari kiri maupun kanan, $f(x)$ menuju 4. Jadi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, walaupun $f(2)$ sendiri tidak ada. Limit melihat *tujuan*, bukan *tempat tiba*.

▼ Tiga bukti singkat bahwa $0,999... = 1$

1. Aljabar. Misalkan $s = 0,999...$ Maka $10s = 9,999...$ Kurangkan: $10s - s = 9$, jadi $9s = 9$ dan $s = 1$.

2. Pecahan. $\frac{1}{3} = 0,333...$ Kalikan kedua ruas dengan 3: $1 = 0,999...$

3. Limit. $0,999...$ adalah limit jumlah $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$ Jumlah n suku pertamanya $1 - 10^{-n}$, dan $10^{-n} \rightarrow 0$, jadi limitnya $1 - 0 = 1$. Bukti ketiga inilah yang paling jujur: dua bukti pertama diam-diam sudah memakai limit.



TRIK KAK LINTANG

Limit itu seperti menebak tujuan angkot dari arah lajunya. Kamu tidak perlu menunggu angkot sampai di terminal; cukup lihat ke mana ia terus melaju. Begitu pula limit: lihat ke mana $f(x)$ menuju saat x makin dekat ke a , dari **dua arah**.



TAMU DARI MASA LALU

Zeno dari Elea (± 490 – 430 SM) membuat paradoks terkenal: seorang pelari tidak akan pernah sampai di garis finis, karena ia harus menempuh setengah jarak, lalu setengah sisanya, lalu setengahnya lagi, tanpa akhir. Butuh lebih dari 2.000 tahun untuk menjawabnya dengan rapi: jumlah tak berhingga $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ mempunyai limit 1, jadi pelari itu sampai juga. Definisi limit yang ketat baru dirumuskan pada abad ke-19 oleh Augustin-Louis Cauchy dan Karl Weierstrass.

27.2

Limit dari tabel dan grafik

Kadang kita tidak punya rumus, hanya tabel atau grafik. Limit tetap bisa dibaca, asalkan kita mendekati a dari dua arah: dari **kiri** ($x < a$) dan dari **kanan** ($x > a$).



CARA MEMBACA LAMBANGNYA

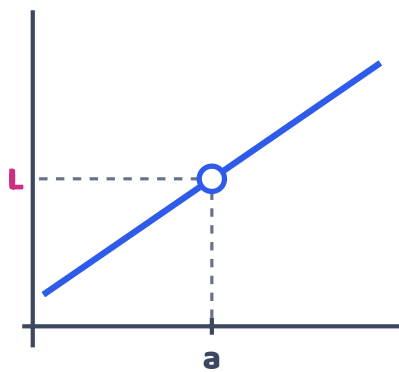
$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ dibaca "limit kiri": x mendekati 2 dari bawah (1,9; 1,99; ...). $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ dibaca "limit kanan": x mendekati 2 dari atas (2,1; 2,01; ...). Tanda kecil $-$ dan $+$ hanya menunjukkan arah, bukan tanda negatif atau positif.



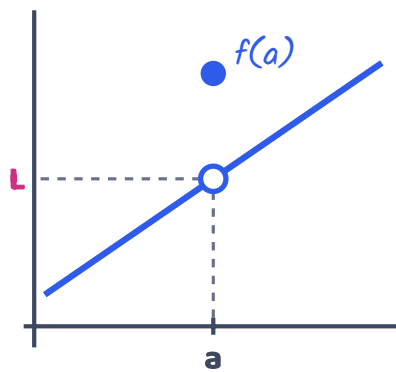
LIMIT ADA JIKA KEDUA ARAH SEPAKAT

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

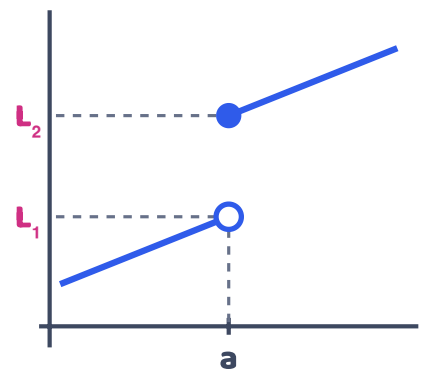
Jika limit kiri dan limit kanan berbeda, limitnya **tidak ada**.



Lubang: limit = L ,
 $f(a)$ tidak terdefinisi.



Limit = L ,
tetapi $f(a) \neq L$.



Lompatan: kiri $\neq$ kanan,
limit tidak ada.

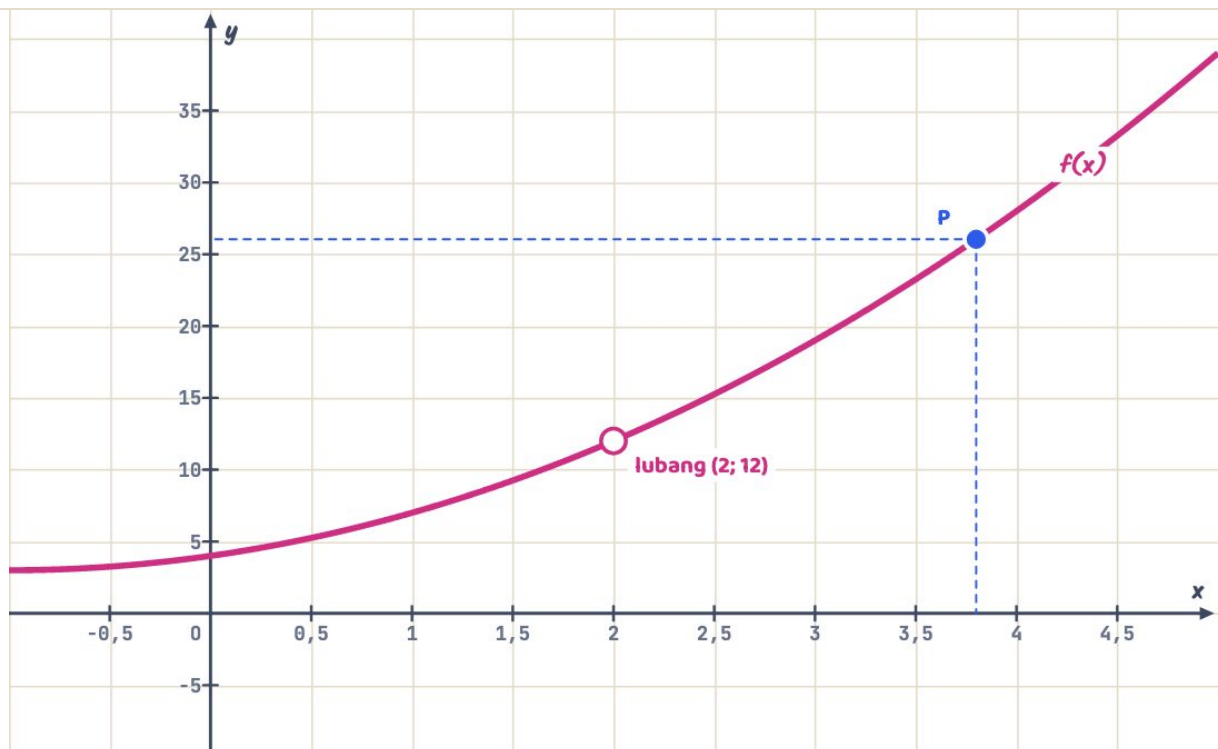
Titik kosong $\circ$ berarti "grafik menuju ke sini, tetapi titik ini tidak termasuk". Titik penuh $\bullet$ adalah nilai fungsi yang sebenarnya.

Lubang di grafik sangat penting dalam kalkulus. Fungsi $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ di bawah tidak terdefinisi di $x = 2$, tetapi grafiknya menuju titik $(2; 12)$. Perbesar grafiknya sebanyak apa pun: lubangnya tidak pernah tertutup, dan kurvanya malah makin tampak lurus. (Ingat pengamatan kurva yang "makin lurus" ini. Di Bab 28 ia akan menjadi bintang utama!)

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$x = 3,8 \Rightarrow f(x) = 26,04$$

Untuk $x \neq 2$, $f(x) = x^2 + 2x + 4$, jadi lubangnya ada di $(2; 12)$.



Perbesaran

1 ×

x di titik P

3,8

f(x) di titik P

26,04

f(2)

tidak terdefinisi (0/0)

Tekan ► **Jalankan** untuk zoom otomatis, atau geser slider perbesaran. Lalu geser titik P mendekati lubang. Tepat di $x = 2$ rumusnya menjadi $\frac{0}{0}$, karena itu slider P melompati posisi tengah. Seberapa dekat ke 12 nilai $f(x)$ bisa kamu buat?



AWAS JEBAKAN

Limit tidak sama dengan nilai fungsi. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bertanya "ke mana $f(x)$ menuju di sekitar a ?", sedangkan $f(a)$ bertanya "berapa nilai f tepat di a ?". Keduanya bisa sama, bisa berbeda, dan $f(a)$ bahkan boleh tidak ada.

CONTOH Membaca limit dari tabel

Ayu menghitung $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ dengan kalkulator. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ dari tabelnya.

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$g(x)$	0,5132	0,5013	0,50013	0,49988	0,49876	0,48809

- 1 Dari kiri ($0,9 \rightarrow 0,999$), nilai g turun: $0,5132 \rightarrow 0,50013$, makin dekat ke 0,5.
- 2 Dari kanan ($1,1 \rightarrow 1,001$), nilai g naik: $0,48809 \rightarrow 0,49988$, juga makin dekat ke 0,5.
- 3 Kedua arah sepakat, jadi limitnya ada.

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0,5$, walaupun $g(1) = \frac{0}{0}$ tidak terdefinisi. Di subbab 27.3 kamu akan membuktikannya tanpa kalkulator.

**LANJUT • IB & OLIMPIADE****DEFINISI E-Δ: LIMIT SEBAGAI PERMAINAN**

Kata "sedekat apa pun" dibuat tepat oleh Cauchy dan Weierstrass sebagai permainan dua pemain. Lawan menantang dengan bilangan kecil $\varepsilon > 0$ (epsilon): "Buat $f(x)$ berjarak kurang dari ε dari L !" Kamu menjawab dengan $\delta > 0$ (delta): "Asal x berjarak kurang dari δ dari a , dan $x \neq a$, pasti berhasil."

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \text{untuk setiap } \varepsilon > 0 \text{ ada } \delta > 0 \text{ sehingga } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limitnya L jika kamu **selalu** bisa menang, sekecil apa pun ε yang dipilih lawan. Contoh: untuk $f(x) = 3x + 1$ dan $a = 2$, berlaku $|f(x) - 7| = 3|x - 2|$, jadi pilihan $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ selalu menang. Coba mainkan sendiri di Lab Mini berikut.

jarak $f(x)$ ke 4 paling jauh ($4\delta + \delta^2$)
1,76

δ terbesar yang aman
0,2361

Hasil
BOCOR x

Fungsinya $f(x) = x^2$ di sekitar $a = 2$ (limitnya 4). Lawan memilih pita hijau setinggi $4 \pm \varepsilon$. Pilih pita biru selebar $2 \pm \delta$ supaya **seluruh** kurva di dalam pita biru jatuh ke dalam pita hijau (berwarna hijau, bukan merah). Seret garis putus-putus, lalu tekan "Lawan: ε dibagi dua". Bisakah kamu selalu menang?

27.3 Limit aljabar: substitusi, faktorisasi, sekawan

Membuat tabel itu melelahkan. Untungnya ada jalan pintas aljabar. Langkah pertama selalu sama: **substitusi**, yaitu masukkan saja $x = a$. Hasilnya memberi tahu langkah berikutnya.



SIFAT-SIFAT LIMIT

Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, maka

- $\lim(f \pm g) = L \pm M$, $\lim(k \cdot f) = kL$, $\lim(f \cdot g) = LM$;
- $\lim \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$ asalkan $M \neq 0$, dan $\lim f^n = L^n$.

Akibatnya, untuk setiap polinomial p : $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$. Substitusi langsung selalu berhasil pada polinomial.

Hasil substitusi

Artinya

Langkah berikutnya

$x = a$

bilangan biasa, mis. $\frac{3}{5}$	funksinya "mulus" di a	selesai: itulah limitnya
$\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$	ada asimtot tegak	limitnya tak hingga atau tidak ada; cek kiri dan kanan
$\frac{0}{0}$	bentuk tak tentu: ada faktor tersembunyi	faktorkan, kalikan sekawan, atau pakai limit istimewa



AWAS JEBAKAN

$\frac{0}{0}$ bukan 0, bukan 1, dan bukan jawaban akhir. Ia **bentuk tak tentu**: tanda bahwa kamu harus bekerja lebih lanjut. Lihat tiga limit yang sama-sama berbentuk $\frac{0}{0}$ di $x = 2$ ini: $\frac{x^2-4}{x-2} \rightarrow 4$, $\frac{x-2}{x^2-4} \rightarrow \frac{1}{4}$, dan $\frac{(x-2)^2}{x-2} \rightarrow 0$.

RUMUS HIDUP Limit selisih kuadrat (tabel mendekat)

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}, \quad x = a + h$$

Bentuk $0/0$ di $x = a$ ternyata menyembunyikan $2a$: makin kecil jaraknya h , makin dekat $f(x)$ ke $2a$. Jadi limit $(x^2 - a^2)/(x - a)$ untuk $x \rightarrow a$ sama dengan $2a$.

a

Titik tujuan a

h

Jarak $h = x - a$

$f(x)$

Nilai $f(a + h)$

NILAI $F(A + H)$

4,1

Di $x = 2,1$, nilai $f(x) = 4,1$. Tujuannya $2a = 4$, dan selisihnya tinggal **0,1**, tepat sebesar h .
Makin kecil h , makin kecil selisihnya: limitnya $2a = 4$.

Cek satuan: Alasannya: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, jadi untuk $x \neq a$ nilai $f(x) = x + a$, yang menuju $a + a = 2a$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LIMIT-SELISIH-KUADRAT

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$.

- 1 Substitusi: $\frac{9-3-6}{9-9} = \frac{0}{0}$. Bentuk tak tentu, jadi pasti ada faktor $(x - 3)$ di atas dan di bawah.
- 2 Faktorkan: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ dan $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
- 3 Untuk $x \neq 3$: $\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3}$. Sekarang substitusi aman: $\frac{5}{6}$.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \frac{5}{6}$. **Mencoret $(x - 3)$ sah karena limit tidak pernah memakai $x = 3$ itu sendiri.**

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$.

- 1 Substitusi: $\frac{5-5}{0} = \frac{0}{0}$. Akar tidak bisa difaktorkan biasa, jadi kalikan dengan **sekawan** $\sqrt{x + 25} + 5$ di atas dan di bawah.
- 2 $\frac{\sqrt{x+25}-5}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+25}+5}{\sqrt{x+25}+5} = \frac{(x+25)-25}{x(\sqrt{x+25}+5)} = \frac{1}{\sqrt{x+25}+5}$.
- 3 Substitusi $x = 0$: $\frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$.

Limitnya $\frac{1}{10} = 0,1$. Dengan cara yang sama, limit $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ pada contoh tabel tadi adalah $\frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$. **Cocok!**



Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pembilangnya selalu bisa difaktorkan menjadi $(x - a)(x - b)$. Coret $(x - a)$, lalu substitusi $x = a$: hasilnya $a - b$.

27.4 Limit di tak hingga dan asimtot

Bahasa sederhana • Bayangkan satu loyang martabak dibagi rata untuk x orang. Kalau $x = 10$, tiap orang mendapat $\frac{1}{10}$ loyang. Kalau $x = 1.000.000$, tiap orang hanya mendapat sejumput remah. Makin banyak orangnya, bagiannya makin dekat ke 0, tetapi tidak pernah negatif.

Dalam bahasa limit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Lambang ∞ (tak hingga) **bukan bilangan**; " $x \rightarrow \infty$ " berarti x tumbuh melewati bilangan apa pun yang kamu sebutkan. Lihat fungsi $f(x) = \frac{3x^2+5}{x^2-2}$ untuk x yang makin besar:

x	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	3,1122	3,0011	3,000011	3,00000011

Nilainya menempel ke 3. Untuk x yang sangat besar, angka 5 dan 2 tidak berarti dibanding $3x^2$ dan x^2 . Garis $y = 3$ disebut **asimtot datar**.



DEFINISI (ASIMTOT)

- Garis $y = L$ adalah **asimtot datar** grafik f jika $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ atau $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.
- Garis $x = a$ adalah **asimtot tegak** jika $f(x) \rightarrow +\infty$ atau $f(x) \rightarrow -\infty$ saat $x \rightarrow a^-$ atau $x \rightarrow a^+$.



TRIK KAK LINTANG: PANGKAT TERTINGGI MENANG

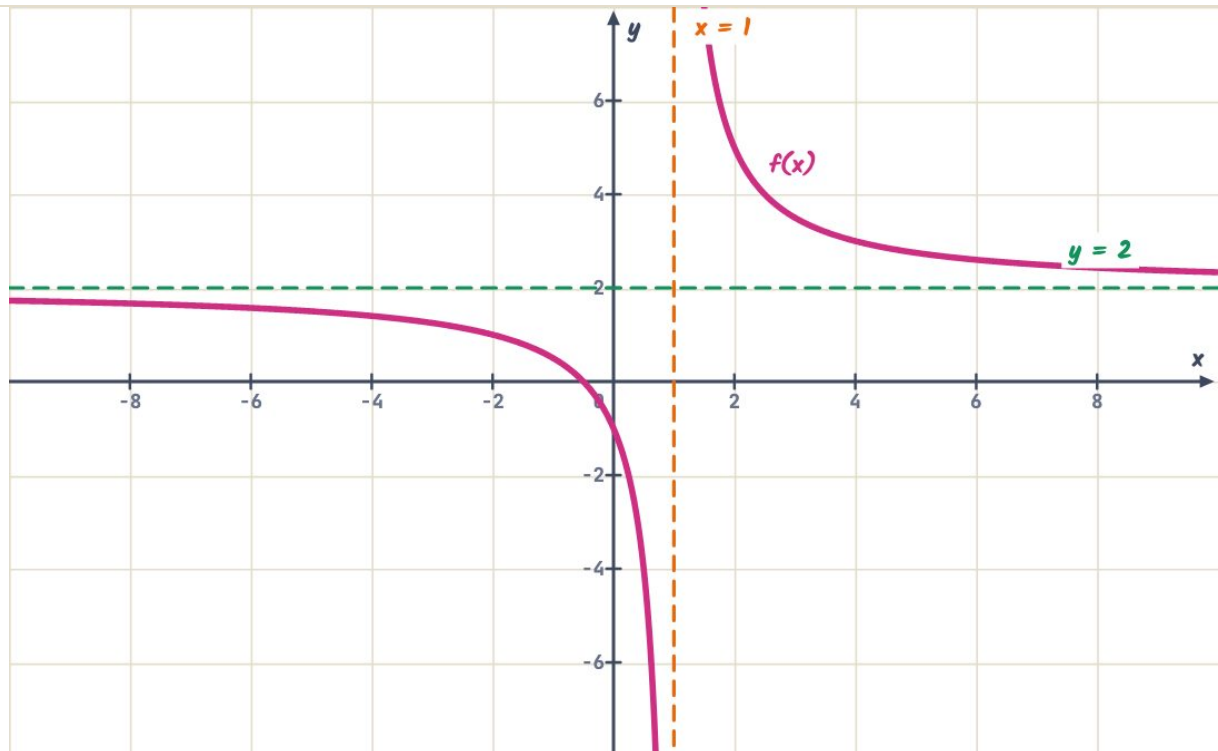
Untuk fungsi pecahan polinomial dengan $x \rightarrow \pm\infty$, bandingkan pangkat tertinggi saja:

- pangkat atas = pangkat bawah $\rightarrow$ limitnya perbandingan koefisien terdepan ($\frac{3x^2+5}{x^2-2} \rightarrow \frac{3}{1}$);
- pangkat atas < pangkat bawah $\rightarrow$ limitnya 0;
- pangkat atas > pangkat bawah $\rightarrow$ membesar tanpa batas (tidak ada asimtot datar).

Cara resminya: bagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi penyebut, lalu pakai $\frac{1}{x^k} \rightarrow 0$.

$$f(x) = \frac{ax + b}{x - c}$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$



Di dekat $x = 1$, penyebut hampir nol $\Rightarrow f(x)$ melesat ke $\pm\infty$

$f(10)$

2,3333

$f(100)$

2,0303

$f(1000)$

2,003

Asimtot datar $y =$

2

Geser a , b , dan c . Garis hijau (asimtot datar) selalu di $y = a$, dan garis oranye (asimtot tegak) di $x = c$. Lihat bacaan $f(10)$, $f(100)$, $f(1000)$ yang merayap ke a . Tantangan: buat $a = 2$, $c = 1$, lalu cari b yang membuat asimtot tegaknya lenyap!

Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$.

1 Kedua suku membesar tanpa batas: bentuk $\infty - \infty$. Jangan tergoda menjawab 0!

2 Kalikan dengan sekawan: $\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{(x^2 + 4x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$.

3 Bagi atas dan bawah dengan x (untuk $x > 0$): $\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} \rightarrow \frac{4}{1+1} = 2$.

Limitnya 2. Cek: $x = 1.000.000$ memberi 1,999998... Bentuk $\infty - \infty$, seperti $\frac{0}{0}$, adalah bentuk tak tentu.

$$\bar{C} = \frac{F + v n}{n} = \frac{F}{n} + v$$

Biaya tetap F dibagi rata ke n potong tahu, lalu ditambah biaya bahan v per potong. Makin banyak tahu dibuat, biaya rata-rata turun mendekati v , tetapi tidak pernah di bawahnya.

F Biaya tetap per hari rupiah

v Biaya bahan per potong rupiah

n Banyak tahu per hari potong

$\bar{C}$ Biaya rata-rata per potong rupiah

BIAYA RATA-RATA PER POTONG

1.500

rupiah

Membuat **1.000** potong: biaya tetap per potong Rp**1.000**, ditambah bahan Rp**500**, jadi rata-ratanya Rp**1.500**. Garis $C = v = 500$ adalah asimtot datar: sebanyak apa pun tahu dibuat, biaya rata-rata tidak bisa di bawah Rp**500**.

Cek satuan: Satuan: rupiah dibagi potong = rupiah per potong.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BIAYA-RATA-TAHU

MITOS

"0,999... itu sedikit lebih kecil daripada 1."

MITOS

"Limit di
 $x = a$
pasti sama dengan
 $f(a)$
."

FAKTA

Tidak ada bilangan di antara keduanya, jadi selisihnya nol. 0,999... hanyalah nama lain untuk 1, seperti $\frac{1}{2}$ adalah nama lain untuk 0,5.

FAKTA

Hanya jika
 f
kontinu
di
 a
. Limit melihat ke mana
 f
menuju di sekitar
 a
; nilai
 $f(a)$
bisa berbeda, bahkan tidak ada.

MITOS

"Grafik tidak pernah memotong asimtotnya."

FAKTA

Asimtot tegak memang tidak terpotong, tetapi asimtot datar boleh!

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1}$$

mendekati

$$y = 2$$

, padahal

$$f(2) = \frac{10}{5} = 2$$

tepat.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

BILANGAN e : LIMIT YANG LAHIR DARI BUNGA BANK

Pada 1683 Jacob Bernoulli bertanya: jika bunga 100% setahun dibagi menjadi n kali pembungaan, berapa saldo akhirnya? Tabungan Rp1 menjadi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Makin sering dibungakan, hasilnya naik, tetapi **tidak** meledak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828.$$

Trik olimpiade yang sering muncul: (1) $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \rightarrow e^k$ (substitusi $n = km$); (2) sekawan untuk bentuk $\infty - \infty$; (3) jumlah *teleskopik*, misalnya $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$; (4) barisan naik yang terbatas pasti punya limit.

RUMUS HIDUP

Bunga majemuk menuju e

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Uang Rp1 dengan bunga khayalan 100% setahun, dibungakan n kali. Makin sering dibungakan, hasilnya mendekati bilangan $e \approx 2,71828$, bukan membesar tanpa batas.

n

Banyak pembungaan per tahun kali

A

Faktor pengali saldo

FAKTOR PENGALI SALDO

2,613035

bulanan

Dibungakan **12** kali setahun: tabungan Rp100.000 menjadi sekitar Rp**261.304**. Batas atasnya $e \times \text{Rp}100.000 \approx \text{Rp}271.828$, dan selisihnya tinggal Rp**10.525**.

Cek satuan: A tidak bersatuan: ia faktor pengali saldo awal.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUNGA-MENUJU-E

**Tebak Dulu!**

Dengan kalkulator dalam mode radian, berapa kira-kira $\frac{\sin 0,001}{0,001}$?

Hampir 0, karena $\sin 0 = 0$.

Hampir 0,001.

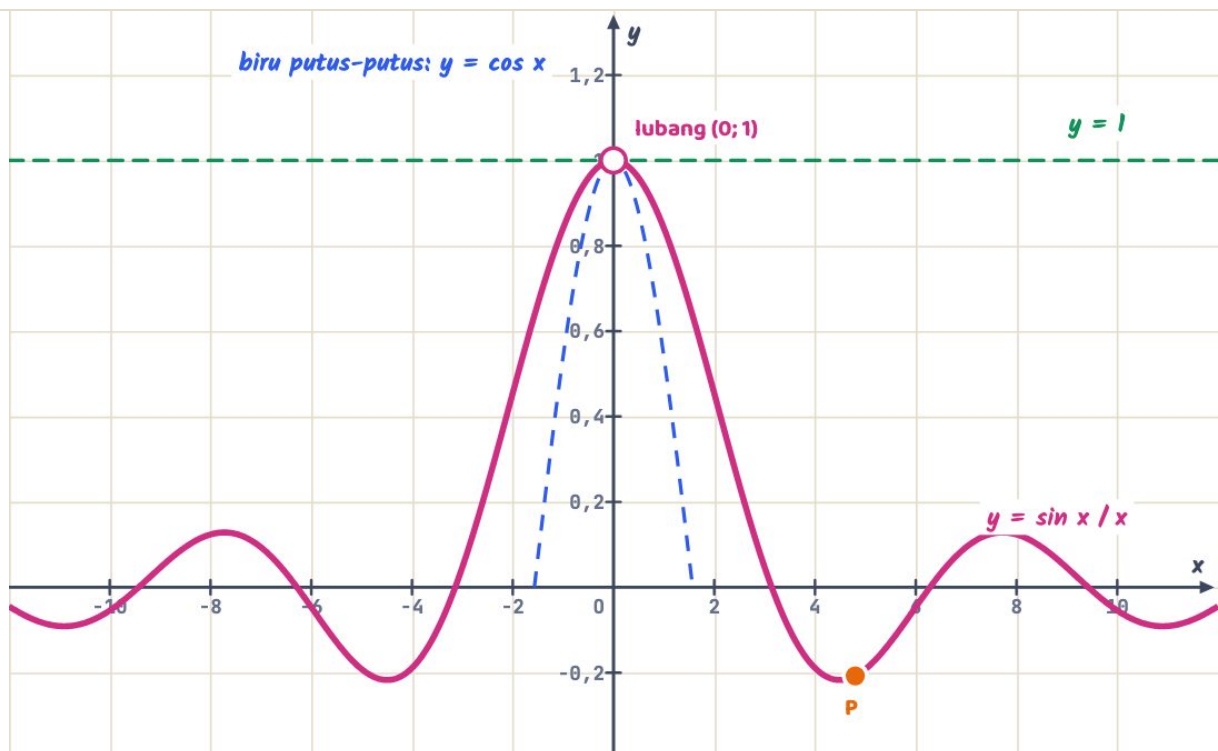
Hampir 1.

Tidak terdefinisi.

Jawabannya: hampir 1, tepatnya 0,99999983... Untuk sudut kecil dalam radian, $\sin x \approx x$: panjang busur kecil hampir sama dengan tinggi segitiganya. Jadi $\frac{\sin x}{x}$ mendekati 1 saat $x \rightarrow 0$.

$$y = \frac{\sin x}{x}, \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\frac{\sin(4,8)}{4,8} = -0,207534$$



x di titik P
4,8

sin x / x
-0,2075343

cos x (pengapit bawah)
0,087499

Tekan ► **Jalankan** untuk zoom ke titik (0;1). Kurva magenta selalu terjepit di antara $\cos x$ (biru) dan garis $y = 1$ (hijau), selama $|x| < \frac{\pi}{2}$. Karena kedua penjepit menuju 1, kurva di tengahnya pun dipaksa menuju 1.



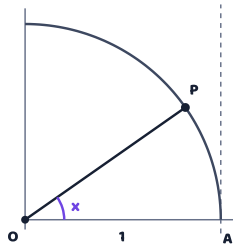
LIMIT ISTIMEWA TRIGONOMETRI

Untuk x dalam **radian**,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Buktinya memakai **Teorema Apit**: jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ di sekitar a dan $\lim g = \lim h = L$, maka $\lim f = L$ juga. Fungsi f "terjepit" seperti roti isi di antara dua lapis roti.

Mengapa $\frac{\sin x}{x}$ terjepit di antara $\cos x$ dan 1? Bandingkan tiga luas di lingkaran satuan berikut.

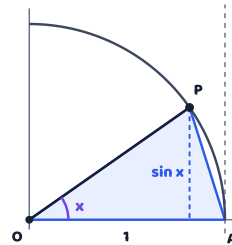


Lingkaran berjari-jari 1

Sudut x di pusat O, dalam radian, dengan $0 < x < \pi/2$.

P di lingkaran; garis putus-putus adalah garis singgung di A.

Langkah 1. Gambar lingkaran berjari-jari 1 dengan pusat O. Pilih sudut x (dalam radian) yang kecil, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

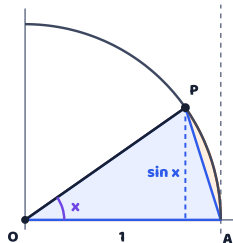


Segitiga biru OAP

alas OA = 1
tinggi = $\sin x$

Luas = $\frac{1}{2} \sin x$

Langkah 2. Segitiga biru OAP: alasnya 1, tingginya $\sin x$. Luasnya $\frac{1}{2} \sin x$.



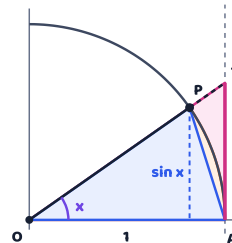
Juring oranye OAP

luas juring = $\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot x$
dengan $r = 1$:

Luas = $\frac{1}{2} x$

(rumus juring ini butuh x dalam radian)

Langkah 3. Juring oranye OAP: luasnya $\frac{1}{2} r^2 x = \frac{1}{2} x$. Rumus ini hanya benar jika x dalam radian.

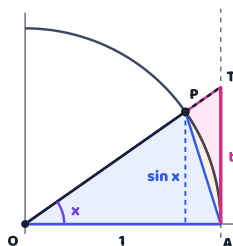


Segitiga ungu OAT

alas OA = 1
tinggi AT = $\tan x$

Luas = $\frac{1}{2} \tan x$

Langkah 4. Segitiga ungu OAT: alasnya 1, tingginya $AT = \tan x$. Luasnya $\frac{1}{2} \tan x$.



biru $\subset$ oranye $\subset$ ungu, jadi

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

bagi dengan $\frac{1}{2} \sin x$, lalu balik:

$$\cos x < \sin x / x < 1$$

$$x \rightarrow 0: \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow \sin x / x \rightarrow 1$$

Langkah 5. Segitiga biru ada di dalam juring, dan juring ada di dalam segitiga ungu: $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$. Hasilnya $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Saat $x \rightarrow 0$, $\cos x \rightarrow 1$, jadi $\frac{\sin x}{x}$ terjepit menuju 1.

▼ Bukti lengkap dengan aljabar

Untuk $0 < x < \frac{\pi}{2}$, perbandingan luas memberi $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} \tan x$. Bagi setiap ruas dengan $\frac{1}{2} \sin x > 0$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Semua ruas positif, jadi kebalikannya membalik tanda: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Untuk $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, ketaksamaan yang sama berlaku karena $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ dan $\cos(-x) = \cos x$. Karena $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, Teorema Apit memberi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

■



AWAS JEBAKAN

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ hanya berlaku jika x dalam **radian**. Dalam derajat, $\frac{\sin 1^\circ}{1} \approx 0,01745$, dan limitnya $\frac{\pi}{180}$, bukan 1. Inilah sebabnya kalkulus selalu memakai radian.



TRIK KAK LINTANG: SAMAKAN ISINYA

Bentuk $\frac{\sin \square}{\square}$ dengan isi kotak yang **sama** dan menuju 0 selalu menuju 1. Jadi $\frac{\sin 7x}{x} = 7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \rightarrow 7$. Begitu juga $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$.

KERJAKAN BERSAMA

Menyamakan sudut

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$.

1 Isi sinusnya $4x$, jadi buat penyebutnya juga $4x$: $\frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin 4x}{4x}$.

2 Saat $x \rightarrow 0$, $u = 4x \rightarrow 0$, sehingga $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$.

Limitnya $\frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$. Cek kalkulator: $x = 0,001$ memberi $\approx 1,33333$.

Sekarang kejutan: limit $\frac{\sin x}{x}$ ternyata sudah dipakai lebih dari 2.000 tahun lalu untuk menghitung π ! Segi- n beraturan di dalam lingkaran berdiameter 1 mempunyai keliling $n \sin \frac{\pi}{n}$, dan

$$n \sin \frac{\pi}{n} = \pi \cdot \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \longrightarrow \pi \cdot 1 = \pi \quad (n \rightarrow \infty).$$

Segi- n di luar lingkaran mempunyai keliling $n \tan \frac{\pi}{n}$, yang juga menuju π , dari atas. Jadi π terjepit di antara keduanya, persis Teorema Apit.

keliling segi-n dalam

3

keliling segi-n luar

3,4641

lebar jepitan

0,4641

angka π yang sudah pasti

3...

Geser n atau tekan **x2**. Tekan ► **Jalankan** untuk menapaki jalan Archimedes: $6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48 \rightarrow 96$ sisi. Perhatikan kaca pembesar di kanan atas: sisi poligon makin menempel pada lingkaran. Berapa sisi yang dibutuhkan agar angka "3,14" sudah pasti?



TAMU DARI MASA LALU

Archimedes dari Syracuse (± 287 – 212 SM) tidak punya kalkulator, tetapi punya ide cemerlang: menjepit lingkaran di antara dua segi banyak. Mulai dari segi-6, ia menggandakan sisinya menjadi 12, 24, 48, dan 96, sambil menaksir akar-akar dengan sangat cermat. Hasilnya: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, yaitu $3,1408 < \pi < 3,1429$. Sekitar abad ke-3, Liu Hui dari Tiongkok meneruskan cara ini sampai segi-3.072 dan memperoleh $\pi \approx 3,1416$. Dua abad kemudian, Zu Chongzhi menemukan $3,1415926 < \pi < 3,1415927$, rekor yang bertahan hampir seribu tahun.



MATEMATIKA NUSANTARA

Lingkaran dari bilah-bilah lurus. Perajin bambu di banyak daerah membuat tampah, tenggok, dan bubu (perangkap ikan) yang bundar dari bilah-bilah yang lurus. Makin banyak dan makin sempit bilahnya, makin mulus lengkungannya, persis gagasan Archimedes. Rumah honai di Lembah Baliem, Papua, juga berdinding melingkar yang tersusun dari papan-papan kayu lurus yang berdiri rapat. Dari jauh tampak bulat, dari dekat ternyata segi banyak. Lingkaran adalah *limit* dari segi banyak!

Kontinuitas: menggambar tanpa mengangkat pensil

Bahasa sederhana • Fungsi disebut **kontinu** (bersambung) kalau grafiknya bisa kamu gambar dalam satu tarikan, tanpa mengangkat pensil. Lubang, lompatan, atau grafik yang melesat ke langit membuat pensilmu harus terangkat.

Kalimat "tanpa mengangkat pensil" bisa dibuat tepat dengan limit. Di titik a , grafik harus **menuju** suatu titik (limitnya ada), titik itu harus **ada** ($f(a)$ terdefinisi), dan keduanya harus **sama**.



DEFINISI (KONTINU DI SUATU TITIK)

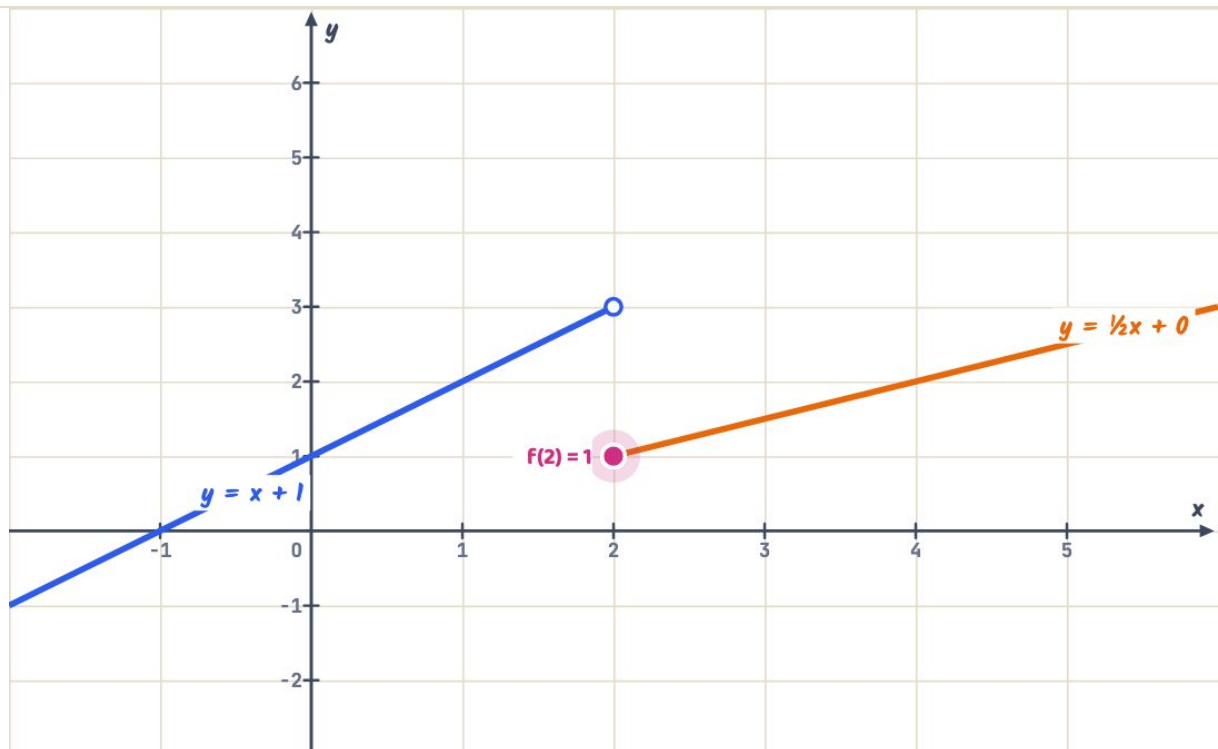
Fungsi f **kontinu** di $x = a$ jika ketiga syarat ini terpenuhi:

1. $f(a)$ terdefinisi;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada (limit kiri = limit kanan);
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Polinomial, $\sin x$, $\cos x$, e^x , dan $\sqrt{x}$ (untuk $x \geq 0$) kontinu di seluruh daerah asalnya.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ \frac{1}{2}x + c, & x > 2 \end{cases}, \quad f(2) = v$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1$$



Limit kiri $\neq$ limit kanan $\Rightarrow$ limit di $x = 2$ tidak ada (diskontinuitas lompatan)

Limit kiri
3

Limit kanan
1

$f(2)$
1

Kesimpulan

limit tidak ada (lompatan)

Geser c agar potongan oranye menyambung dengan potongan biru, lalu seret titik magenta $f(2)$ ke tempat yang tepat. Perhatikan urutan syaratnya: limit kiri = limit kanan dulu, baru $f(2) = \text{limit}$.

Jenis diskontinuitas

Contoh

Ciri pada grafik

Bisa "ditambal"?

Lubang (dapat dihapus)

$$\frac{x^2-4}{x-2} \text{ di } x = 2$$

titik kosong; limitnya ada

ya: definisikan $f(2) = 4$

Lompatan	$\frac{ x }{x}$ di $x = 0$; tarif parkir per jam	limit kiri $\neq$ limit kanan	tidak
Tak hingga	$\frac{1}{x}$ di $x = 0$	asimtot tegak	tidak

COBA SENDIRI Mencari konstanta agar kontinu

Tentukan a agar fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 1 \\ x^2 + 3, & x \geq 1 \end{cases}$ kontinu di $x = 1$.

- 1 Syarat 1: $f(1) = 1^2 + 3 = 4$. Terdefinisi.
- 2 Limit kanan: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 4$. Limit kiri: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a$.
- 3 Syarat 2 dan 3: $2 + a = 4 = f(1)$, jadi $a = 2$.

$a = 2$. Potongan kiri $y = 2x + 2$ tepat menyambung ke titik (1; 4) pada parabola, tanpa lubang dan tanpa lompatan.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TEOREMA NILAI ANTARA

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan k terletak di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka ada c di antara a dan b dengan $f(c) = k$. Grafik yang tidak terputus tidak bisa "melompati" garis $y = k$.

- **Mencari akar:** $f(x) = x^3 + x - 1$ memenuhi $f(0) = -1 < 0$ dan $f(1) = 1 > 0$, jadi ada akar di antara 0 dan 1. Membagi dua selang berulang-ulang (*metode bagi dua*) menjepit akarnya: 0,6823...
- **Rasa olimpiade:** setiap saat, selalu ada dua titik yang berseberangan tepat di khatulistiwa dengan suhu yang sama. Buktinya: fungsi $g(\theta) = T(\theta) - T(\theta + 180^\circ)$ kontinu dan $g(\theta + 180^\circ) = -g(\theta)$, jadi g berganti tanda dan pasti bernilai 0 di suatu tempat.



Speedometer

Jarum speedometer menunjukkan kecepatan *sesaat*: limit kecepatan rata-rata pada selang waktu yang makin singkat.



Teh tubruk mendingin

Suhu teh turun cepat lalu melambat, mendekati suhu ruangan. Suhu ruangan adalah asimtot datar grafiknya.



Mengisi baterai ponsel

Pengisian sengaja diperlambat menjelang 100% agar baterai awet, sehingga grafik persentasenya merayap makin pelan menuju garis 100%.



Pabrik tahu

Biaya rata-rata per potong turun saat produksi bertambah dan mendekati biaya bahan: sebuah limit di tak hingga.



Layar & peta digital

Lingkar di layar sebenarnya segi banyak dari piksel, dan jalan yang melengkung tampak lurus saat peta diperbesar.



Cek Cepat

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \dots$$

0

8

16

tidak ada, karena $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x}{2x^3 + 7} = \dots$$

0

∞

$\frac{5}{7}$

$\frac{5}{2}$

Grafik f mendekati titik kosong $(1; 3)$ dari kiri dan dari kanan, sedangkan $f(1) = 5$. Pernyataan yang benar adalah...

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, dan f tidak kontinu di $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

f kontinu di $x = 1$

limitnya tidak ada

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A



Tantangan Rumah: kertas yang tak pernah habis

Bahan: selembar kertas HVS, gunting, pensil, buku catatan.

1. Anggap luas kertas utuh = 1. Gunting kertas menjadi dua bagian sama besar. Taruh satu bagian di meja: luas di meja $\frac{1}{2}$.
2. Gunting sisa kertas di tanganmu menjadi dua lagi. Taruh satu bagian di meja, di samping potongan pertama: luas di meja $\frac{3}{4}$.
3. Ulangi terus sampai potongannya terlalu kecil untuk digunting.
4. Setiap langkah, catat dalam tabel: nomor langkah n , luas di meja, dan luas di tangan.
5. Susun semua potongan di meja. Bentuk apa yang terlihat?

Pertanyaan: Tuliskan rumus luas di tangan dan luas di meja setelah n langkah. Berapa limitnya jika $n \rightarrow \infty$? Mengapa percobaan ini mirip teka-teki $0,999\dots = 1$ (petunjuk: dalam basis dua, $0,111\dots_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$)?



✓ **Kamu sekarang bisa...**

- menjelaskan makna **limit** dengan bahasa sehari-hari, **tabel mendekati**, dan grafik (termasuk grafik berlubang)
- membedakan **limit kiri**, **limit kanan**, dan nilai fungsi tepat di suatu titik
- menghitung limit aljabar dengan **substitusi**, **faktorisasi**, dan **perkalian sekawan**
- menentukan **limit di tak hingga** dan **asimtot** fungsi rasional
- memakai limit istimewa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dan memeriksa **kontinuitas** sebuah fungsi

🔑 **Istilah kunci**

limit

tabel mendekati

kiri

kanan

substitusi

bentuk tak tentu

sekawan

asimtot datar

Teorema Apit

kontinu

📖 **Rumus penting**

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}, \quad x = a + h$$

Limit selisih kuadrat (tabel mendekati). Bentuk $0/0$ di $x = a$ ternyata menyembunyikan $2a$: makin kecil jaraknya h , makin dekat $f(x)$ ke $2a$. Jadi limit $(x^2 - a^2)/(x - a)$ untuk $x \rightarrow a$ sama dengan $2a$.

$$\bar{C} = \frac{F + vn}{n} = \frac{F}{n} + v$$

Biaya rata-rata pabrik tahu. Biaya tetap F dibagi rata ke n potong tahu, lalu ditambah biaya bahan v per potong. Makin banyak tahu dibuat, biaya rata-rata turun mendekati v , tetapi tidak pernah di bawahnya.

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bunga majemuk menuju e. Uang Rp1 dengan bunga khayalan 100% setahun, dibungakan n kali. Makin sering dibungakan, hasilnya mendekati bilangan $e \approx 2,71828$, bukan membesar tanpa batas.

⚠ **Jangan sampai terjebak**

- Limit tidak sama dengan nilai fungsi.
- $\frac{0}{0}$ bukan 0 , bukan 1 , dan bukan jawaban akhir.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ hanya berlaku jika x dalam radian.



Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=27

Teka-teki untuk Bab 28

Speedometer motor Ayu menunjukkan 40 km/jam tepat ketika melewati gapura kampung. Padahal kecepatan = jarak $\div$ waktu, dan "tepat ketika" berarti waktu tempuhnya 0 detik dan jaraknya 0 meter: $\frac{0}{0}$! Jadi, speedometer sebenarnya mengukur apa?

▼ Intip petunjuk

Hitung kecepatan rata-rata pada selang waktu yang makin singkat: 1 detik, 0,1 detik, 0,01 detik, dan seterusnya. Nilainya mendekati satu bilangan, yaitu kecepatan sesaat. Itu sebuah limit berbentuk $\frac{0}{0}$, persis seperti yang kamu pelajari di bab ini! Di Bab 28, limit jenis ini diberi nama khusus: **turunan**.

28 Turunan: Rahasia di Balik Jarum Speedometer

Jarum speedometer menunjuk 40 km/jam, padahal motornya belum berjalan satu jam pun. Angka itu adalah kecepatan pada *satu saat*, dan alat matematika yang menangkapnya bernama turunan.



Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan **laju perubahan rata-rata** (kemiringan tali busur) dan **laju sesaat** (kemiringan garis singgung);
- menjelaskan turunan sebagai **limit** $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ketika $h \rightarrow 0$;
- menurunkan fungsi dengan **aturan pangkat, jumlah, rantai, hasil kali, dan hasil bagi**;
- memakai turunan $\sin x$, $\cos x$, e^x , dan $\ln x$;
- memaknai turunan sebagai **kecepatan dan laju**, serta menulis **persamaan garis singgung**.

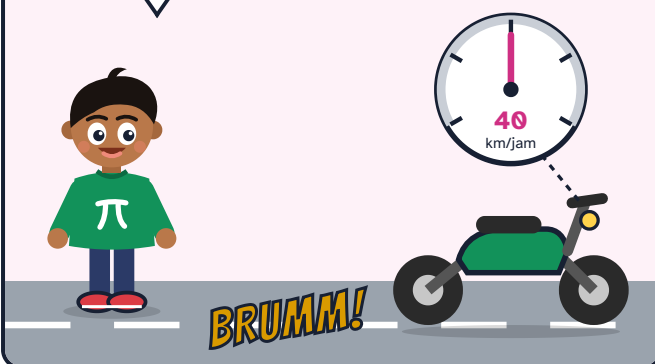
SPEEDOMETER YANG BIKIN PENASARAN

KOMIK • 4 PANEL

Minggu pagi, dibonceng Kak Lintang ke pasar

DIMAS

Kak, jarumnya nunjuk 40 km/jam. Padahal kita baru jalan dua menit, belum ada sejam. Kok speedometer bisa tahu?



AYU

Kecepatan itu jarak dibagi waktu. Kalau "saat ini" lamanya nol detik, jaraknya juga nol. Nol dibagi nol, dong?

0 meter

0 detik
= ???



KAK LINTANG

Betul, $0/0$ tidak bermakna. Jadi kita perkecil selangnya: 1 detik, 0,1 detik, 0,01 detik... Kecepatan rata-ratanya makin dekat ke satu angka!



Δt	$\Delta s \div \Delta t$
1 s	38 km/jam
0,1 s	39,8
0,01 s	39,98
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 40!$

ANCIL

Speedometer mengukur putaran roda dalam selang yang sangat singkat. Angka tujuan itulah kecepatan sesaat, alias **turunan!**

DIMAS

Jadi limit dari Bab 27 ternyata ikut naik motor tiap hari?!



putaran per detik

**Tebak Dulu!**

Kak Lintang menempuh 5,25 km dalam 10 menit, termasuk berhenti satu menit di lampu merah. Kecepatan rata-ratanya 31,5 km/jam. Apakah jarum speedometer *pasti* pernah menunjuk tepat 31,5 km/jam?

Tidak harus. Jarumnya bisa saja melompati angka itu.

Hanya kalau motornya tidak pernah berhenti.

Ya, pasti pernah, paling sedikit satu kali.

Hanya kalau kecepatannya tetap sepanjang jalan.

Jawabannya: pasti pernah. Jarum speedometer bergerak tanpa melompat. Kalau sepanjang perjalanan jarumnya selalu di bawah 31,5, jarak yang ditempuh pasti kurang dari 5,25 km; kalau selalu di atasnya, jaraknya pasti lebih. Jadi jarum harus melewati angka 31,5. Fakta ini bernama **Teorema Nilai Rata-rata**, dan kamu bisa memburu saat-saat itu sendiri di Lab Mini speedometer pada subbab 28.6.

28.1 Laju perubahan: rata-rata dan sesaat

Di Bab 9 kamu sudah berkenalan dengan **kemiringan** garis lurus: naik dibagi maju. Garis lurus itu "jujur": kemiringannya sama di mana-mana. Masalahnya, dunia nyata jarang selurus itu. Harga cabai bisa naik pelan, lalu tiba-tiba melonjak menjelang hari raya. Motor melaju, mengerem, lalu melaju lagi. Untuk menceritakan perubahan seperti ini kita butuh satu kata kunci: **laju perubahan**.

Hari	Sen	Sel	Rab	Kam	Jum	Sab	Min
Harga cabai rawit (ribu Rp/kg)	40	42	45	52	60	63	64
Naik dari hari sebelumnya	-	+2	+3	+7	+8	+3	+1

Tabel di atas adalah data rekaan harga cabai rawit seminggu menjelang hari raya. Dari Senin sampai Minggu harga naik $64 - 40 = 24$ ribu rupiah dalam 6 hari, jadi rata-rata naik **Rp4.000 per hari**. Tetapi lihat baris terakhir: dari Kamis ke Jumat harga melonjak Rp8.000 dalam sehari, sedangkan dari Sabtu ke Minggu hanya Rp1.000. Laju rata-rata seminggu menyembunyikan cerita harian itu.



DEFINISI • LAJU PERUBAHAN RATA-RATA

Laju perubahan rata-rata fungsi f dari $x = a$ sampai $x = b$ adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pada grafik, angka ini adalah kemiringan **tali busur**, yaitu ruas garis yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ pada kurva.

Bahasa sederhana • Gampangnya: laju adalah **besar perubahan dibagi lama waktunya**. Harga naik Rp6.000 dalam 3 hari? Lajunya Rp2.000 per hari. Motor menempuh 20 km dalam setengah jam? Lajunya 40 km per jam.

CONTOH Laju harga cabai

Memakai tabel di atas, berapa laju kenaikan rata-rata harga cabai dari Selasa sampai Jumat?

- 1 Perubahan harga: $60 - 42 = 18$ ribu rupiah per kg.
- 2 Lama waktu: dari Selasa ke Jumat ada 3 hari (Selasa $\rightarrow$ Rabu $\rightarrow$ Kamis $\rightarrow$ Jumat).
- 3 Laju rata-rata: $\frac{18}{3} = 6$ ribu rupiah per kg per hari.

Rata-rata harga naik Rp6.000 per kg setiap hari. Satuan laju selalu "satuan hasil per satuan waktu": rupiah per hari, km per jam, jiwa per tahun.

Sekarang kembali ke speedometer. Sebutir kelapa yang jatuh dari pohon menempuh jarak $s(t) = 5t^2$ meter setelah t detik (percepatan gravitasi dibulatkan menjadi 10 m/s^2 , hambatan udara diabaikan). Berapa kecepatannya *tepat* pada detik ke-2? Kita tidak bisa membagi dengan selang nol, tetapi kita bisa memakai selang yang makin pendek:

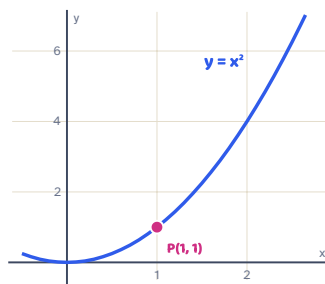
Selang waktu	Jarak tempuh Δs	Kecepatan rata-rata $\Delta s \div \Delta t$
2 s sampai 3 s	$45 - 20 = 25 \text{ m}$	25 m/s
2 s sampai 2,1 s	$22,05 - 20 = 2,05 \text{ m}$	20,5 m/s
2 s sampai 2,01 s	$20,2005 - 20 = 0,2005 \text{ m}$	20,05 m/s
2 s sampai 2,001 s	$20,020005 - 20 = 0,020005 \text{ m}$	20,005 m/s

Kecepatan rata-ratanya makin dekat ke **20 m/s**. Angka tujuan itulah **kecepatan sesaat** pada $t = 2$. Kamu baru saja menghitung sebuah limit, persis seperti di Bab 27:

$$v(2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{\Delta t} = 20 \text{ m/s}.$$

28.2 Dari tali busur ke garis singgung

Pada grafik, kecepatan rata-rata adalah kemiringan tali busur. Apa yang terjadi pada tali busur itu kalau selangnya kita perkecil terus? Tonton animasi berikut: titik Q merayap mendekati titik P pada parabola $y = x^2$.

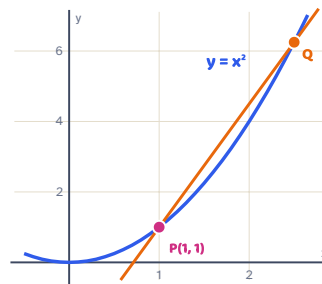


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
---	---------	------------

Berapa kemiringan di P?

Langkah 1. Parabola $y = x^2$ melengkung, jadi kemiringannya berubah-ubah. Berapa kemiringan kurva tepat di titik $P(1, 1)$? Satu titik saja tidak cukup untuk menghitung "naik dibagi maju".

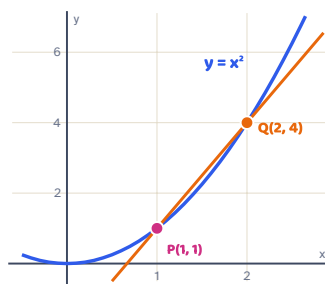


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5

$$(6,25 - 1) \div 1,5 = 3,5$$

Langkah 2. Ambil titik kedua Q di $x = 1 + h$. Untuk $h = 1,5$, $Q = (2,5; 6,25)$ dan kemiringan tali busur $PQ = \frac{6,25 - 1}{1,5} = 3,5$.

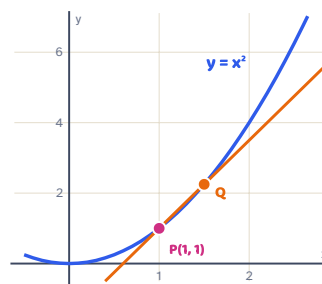


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3

$$(4 - 1) \div 1 = 3$$

Langkah 3. Dekatkan Q : untuk $h = 1$, $Q = (2, 4)$ dan kemiringannya $\frac{4 - 1}{1} = 3$.

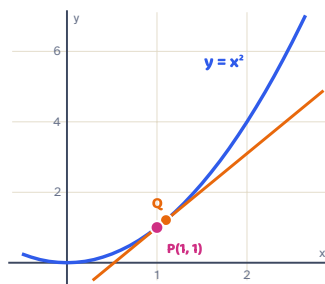


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3
0,5	(1,5; 2,25)	2,5

$$(2,25 - 1) \div 0,5 = 2,5$$

Langkah 4. Untuk $h = 0,5$: $Q = (1,5; 2,25)$, kemiringannya $\frac{2,25 - 1}{0,5} = 2,5$. Tali busur berputar pelan.

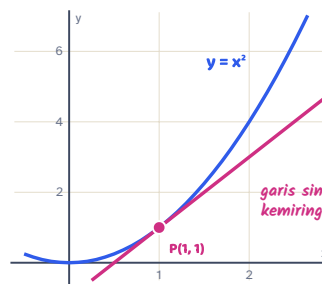


Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3
0,5	(1,5; 2,25)	2,5
0,1	(1,1; 1,21)	2,1

$$(1,21 - 1) \div 0,1 = 2,1$$

Langkah 5. Untuk $h = 0,1$: kemiringannya $\frac{1,21 - 1}{0,1} = 2,1$. Di sekitar P , tali busur hampir menempel pada kurva.



Q mendekati P...

h	titik Q	kemiringan
1,5	(2,5; 6,25)	3,5
1	(2; 4)	3
0,5	(1,5; 2,25)	2,5
0,1	(1,1; 1,21)	2,1

garis singgung
kemiringan 2 $\rightarrow 0$

$$f'(1) = 2$$

Langkah 6. Saat $h \rightarrow 0$, kemiringannya menuju 2. Garis batas itu adalah **garis singgung** di P , dan kemiringannya disebut **turunan**: $f'(1) = 2$.



DEFINISI • TURUNAN

Turunan fungsi f di titik x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

asalkan limit ini ada. Secara geometris, $f'(x)$ adalah **kemiringan garis singgung** grafik f di titik $(x, f(x))$. Secara fisik, $f'(x)$ adalah **laju perubahan sesaat** f terhadap x .



BANYAK NAMA, SATU MAKNA

Turunan $y = f(x)$ bisa ditulis $f'(x)$ (dibaca "f aksen x"), y' , $\frac{dy}{dx}$, atau $\frac{d}{dx}f(x)$. Lambang $\frac{dy}{dx}$ mengingatkan asal-usulnya: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ketika Δx menjadi sangat-sangat kecil. Proses mencari turunan disebut **diferensiasi** atau "menurunkan" fungsi.

CONTOH Turunan x^2 dari definisi

Gunakan definisi untuk mencari turunan $f(x) = x^2$, lalu hitung $f'(3)$.

1 $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2.$

2 Bagi dengan h (boleh, karena $h \neq 0$ selama masih mendekat): $\frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$

3 Sekarang biarkan $h \rightarrow 0$: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0}(2x + h) = 2x.$

4 Jadi $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6.$

$f'(x) = 2x$ dan $f'(3) = 6$: garis singgung parabola di titik $(3, 9)$ naik 6 satuan untuk setiap 1 satuan ke kanan. Cocok dengan animasi tadi: $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$



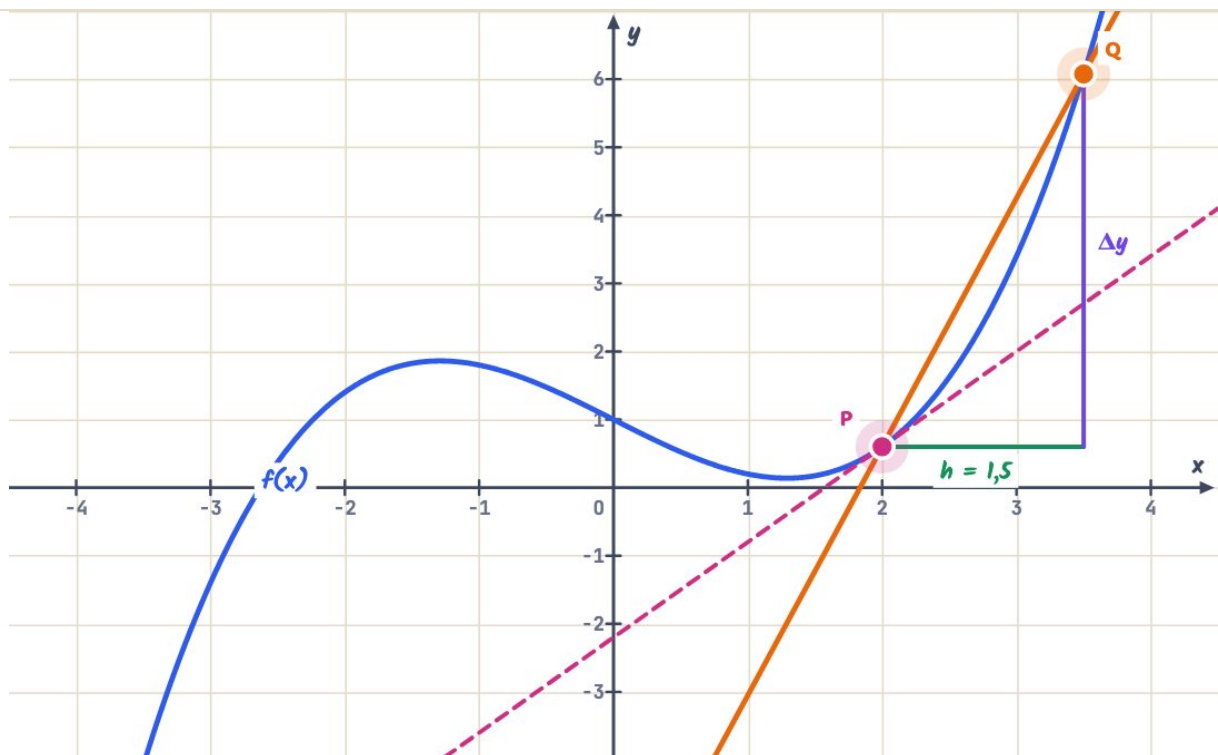
AWAS JEBAKAN

Jangan memasukkan $h = 0$ terlalu cepat! Kalau langsung disubstitusi, $\frac{f(x+0) - f(x)}{0} = \frac{0}{0}$, bentuk tak tentu yang tidak bermakna. Sederhanakan dulu sampai h di penyebut hilang (seperti $2x + h$), baru biarkan $h \rightarrow 0$.

$$m_{PQ} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

$$m_{PQ} = 3,65 \quad f'(2) = 1,4$$

Kurva biru: $f(x) = 0,2x^3 - x + 1$. Saat $Q \rightarrow P$, kemiringan tali busur menuju $f'(x_P)$.



$h = x_Q - x_P$
1,5

kemiringan tali busur PQ
3,65

kemiringan garis singgung di P
1,4

Seret titik **Q** mendekati titik **P**. Tali busur oranye berputar dan akhirnya berimpit dengan garis putus-putus magenta, yaitu garis singgung di **P**. Dekati juga dari kiri! Jika **Q** tepat di **P**, rumus tali busur menjadi $0/0$, sehingga kemiringannya ditampilkan sebagai "—".

$$m = \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

Naik dibagi maju antara dua titik pada parabola. Semakin kecil h , semakin dekat hasilnya ke kemiringan garis singgung, yaitu $2x$.

x Titik P di x

h Jarak ke Q (h)

m Kemiringan tali busur PQ

KEMIRINGAN TALI BUSUR PQ

3

Dari $x = 1$ ke $x = 2$: y naik **3**, x maju **1**, jadi kemiringannya **3**. Hasilnya selalu tepat $2x + h$. Kalau h menyusut menuju 0 , kemiringan tali busur menuju $2x = 2$. Itulah kemiringan garis singgung di P, yaitu $f'(1)$.

Cek satuan: Kemiringan di sini tidak bersatuan karena x dan y sama-sama bilangan murni. Jika y dalam meter dan x dalam detik, satuannya menjadi m/s.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TALI-BUSUR

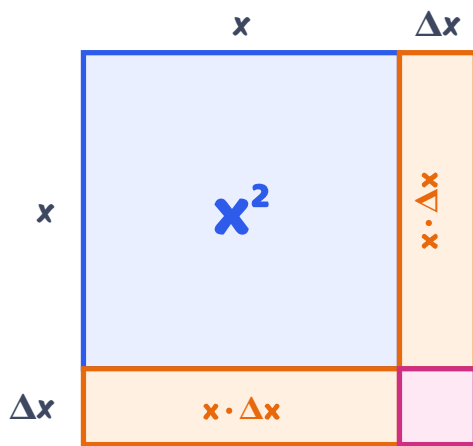


TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 1665–1666, ketika Universitas Cambridge ditutup karena wabah, Isaac Newton yang masih muda mengembangkan "metode fluksi" untuk menghitung laju perubahan benda yang bergerak. Beberapa tahun kemudian Gottfried Wilhelm Leibniz di Jerman menemukan gagasan serupa secara mandiri dan menerbitkannya lebih dulu, pada 1684. Lambang $\frac{dy}{dx}$ yang kita pakai sampai sekarang adalah ciptaan Leibniz, sedangkan lambang $f'(x)$ dipopulerkan oleh Joseph-Louis Lagrange lebih dari seabad kemudian. Perdebatan "siapa yang pertama" sempat memanaskan hubungan ilmuwan Inggris dan daratan Eropa selama puluhan tahun. Kini keduanya diakui sebagai penemu kalkulus.

28.3 Aturan pangkat, konstanta, dan jumlah

Menghitung limit setiap kali mau menurunkan fungsi tentu melelahkan. Kabar baiknya, hasil-hasilnya membentuk pola yang sangat rapi. Lihat dulu gambar ini: mengapa turunan x^2 adalah $2x$?



Sisi x bertambah sedikit, sebesar Δx .

Tambahan luas = $2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

Laju = tambahan luas $\div \Delta x = 2x + \Delta x$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow (x^2)' = 2x$$

Pojok mungil $(\Delta x)^2$ menyusut jauh lebih cepat, jadi akhirnya yang tersisa hanya dua pita.

Bukti tanpa kata untuk $(x^2)' = 2x$: ketika sisi persegi bertambah Δx , luasnya bertambah dua pita $x \Delta x$ dan satu pojok mungil $(\Delta x)^2$.

Kalau kamu mengulang perhitungan dengan definisi untuk x^3 , hasilnya $3x^2$; untuk x^4 , hasilnya $4x^3$. Polanya mulai terlihat: pangkat turun ke depan, lalu pangkatnya berkurang satu.



ATURAN DASAR TURUNAN

- **Konstanta:** $\frac{d}{dx} c = 0$. Sesuatu yang tidak berubah, lajunya nol.
- **Aturan pangkat:** $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ untuk setiap bilangan real n (untuk n yang bukan bilangan bulat, ambil $x > 0$).
- **Kelipatan konstanta:** $\frac{d}{dx} (a f(x)) = a f'(x)$.
- **Jumlah dan selisih:** $(f \pm g)' = f' \pm g'$. Turunkan suku demi suku.

$$\frac{d}{dx} (a x^n) = a n x^{n-1}$$

▼ Bukti aturan pangkat untuk n bilangan asli

Dengan teorema binomial, $(x + h)^n = x^n + n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n$. Maka

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1}.$$

Semua suku setelah suku pertama masih mengandung h , jadi semuanya lenyap ketika $h \rightarrow 0$. Yang tersisa hanya $n x^{n-1}$. Untuk pangkat negatif dan pecahan, buktinya memakai aturan hasil bagi dan aturan rantai pada subbab 28.4.



TRIK KAK LINTANG

Bayangkan pangkatnya "turun gunung": pangkat melompat ke depan menjadi pengali, lalu pangkat yang tersisa berkurang satu, misalnya $x^5 \rightarrow 5x^4$. Sebelum menurunkan, ubah dulu akar dan pecahan menjadi pangkat: $\sqrt{x} = x^{1/2}$ dan $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Hasilnya $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dan $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

RUMUS HIDUP

Aturan pangkat: kemiringan $y = a \cdot x^n$

$$m = a n x^{n-1}$$

Turunkan pangkat n ke depan untuk dikalikan dengan a , lalu kurangi pangkatnya satu. Masukkan nilai x untuk mendapat kemiringan garis singgung di titik itu.

 a Koefisien a n Pangkat n x Di titik x m

Kemiringan garis singgung

KEMIRINGAN GARIS SINGGUNG

24

kurva sedang naik di titik ini ➤

Pangkat **3** turun ke depan: $2 \times 3 = 6$, lalu pangkatnya berkurang satu menjadi **2**. Jadi turunan $2 \cdot x^3$ adalah $6 \cdot x^2$. Di $x = 2$, kemiringannya $6 \times (2)^2 = 24$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TURUNAN-PANGKAT

Tentukan turunan $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ dan $g(x) = 6\sqrt{x} + \frac{2}{x}$. Hitung pula $f'(2)$ dan $g'(4)$.

1 Suku demi suku: $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 - 0 = 12x^2 - 10x + 7$.

2 $f'(2) = 12 \cdot 4 - 10 \cdot 2 + 7 = 48 - 20 + 7 = 35$.

3 Tulis ulang $g(x) = 6x^{1/2} + 2x^{-1}$, lalu $g'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 2 \cdot (-1)x^{-2} = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$.

4 $g'(4) = \frac{3}{2} - \frac{2}{16} = 1,5 - 0,125 = 1,375$.

$f'(x) = 12x^2 - 10x + 7$ dengan $f'(2) = 35$, dan $g'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$ dengan $g'(4) = 1,375$.

Konstanta -2 "menghilang" karena tidak menyumbang perubahan apa pun.



ADU CEPAT

Kemiringan kilat: aturan pangkat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Turunkan pangkat ke depan: $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$, lalu masukkan nilai x . Contoh: $f(x) = 3x^2$ memberi $f'(x) = 6x$, jadi $f'(2) = 12$.



ADU CEPAT

Koefisien kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Koefisien baru = koefisien lama $\times$ pangkat. Contoh: turunan $3x^5$ adalah $15x^4$.

MITOS

"Turunan itu cuma 'pangkat turun ke depan'."

MITOS

"Garis singgung hanya menyentuh kurva di satu titik dan tidak pernah memotongnya."

FAKTA

Itu hanya jalan pintas untuk

$$x^n$$

. Makna turunan adalah

laju perubahan sesaat

, atau kemiringan garis singgung. Untuk

$$\sin x$$

,

$$e^x$$

, dan hasil kali fungsi, aturannya berbeda.

FAKTA

Garis singgung

$$y = x^3$$

di

$$(0, 0)$$

adalah sumbu-

$$x$$

, dan garis itu menembus kurva. Garis singgung juga bisa memotong kurva lagi di tempat lain.

Yang penting, di titik singgung arahnya sama dengan arah kurva.

MITOS

"Kalau

$$f'(a) = 0$$

, berarti

$$f(a) = 0$$

."

FAKTA

Turunan mengukur

kemiringan

, bukan ketinggian. Fungsi

$$f(x) = x^2 + 3$$

punya

$$f'(0) = 0$$

, padahal

$$f(0) = 3$$

. Garis singgungnya mendatar di ketinggian 3.

28.4 Aturan rantai, hasil kali, dan hasil bagi

Fungsi di dunia nyata sering berupa gabungan: hasil kali dua fungsi, pecahan, atau fungsi di dalam fungsi. Sebelum belajar aturannya, uji dulu intuisimu.



Tebak Dulu!

Turunan x^2 adalah $2x$, dan turunan x^3 adalah $3x^2$. Jadi turunan $x^2 \cdot x^3$ adalah...

$2x \cdot 3x^2 = 6x^3$, cukup kalikan kedua turunannya.

$5x^4$.

$6x^4$.

$2x + 3x^2$.

Jawabannya: $5x^4$. Ingat $x^2 \cdot x^3 = x^5$, dan turunan x^5 adalah $5x^4$. Jawaban "kalikan saja turunannya" memberi $6x^3$, dan itu keliru! Turunan hasil kali punya aturan sendiri: $(x^2)' \cdot x^3 + x^2 \cdot (x^3)' = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$. Cocok!



TIGA ATURAN PENTING

Misalkan u dan v fungsi dari x yang punya turunan.

- **Aturan hasil kali:** $(uv)' = u'v + uv'$.
- **Aturan hasil bagi:** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, asalkan $v \neq 0$.
- **Aturan rantai:** jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, atau $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

▼ Mengapa aturan hasil kali seperti itu? (bukti dengan luas persegi panjang)

Pandang $u \cdot v$ sebagai luas persegi panjang bersisi u dan v . Jika x bertambah sedikit, sisi-sisinya bertambah Δu dan Δv . Luas baru dikurangi luas lama terdiri atas dua pita dan satu pojok mungil:

$$\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v.$$

Bagi dengan Δx : $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$. Saat $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta u \rightarrow 0$ juga, sehingga suku terakhir lenyap. Hasilnya $(uv)' = uv' + vu'$. Ini perluasan gambar persegi di subbab 28.3!



AWAS JEBAKAN

Turunan hasil kali **bukan** hasil kali turunan: $(uv)' \neq u'v'$. Begitu pula turunan hasil bagi bukan $\frac{u'}{v'}$. Cek dengan contoh kecil, misalnya $u = v = x$: $(x \cdot x)' = (x^2)' = 2x$, padahal $u'v' = 1 \cdot 1 = 1$.



TRIK KAK LINTANG: RANTAI SEPEDA

Aturan rantai mirip gir sepeda. Kalau roda belakang berputar 3 kali setiap gir depan berputar sekali, dan kakimu memutar gir depan 2 kali per detik, roda belakang berputar $3 \times 2 = 6$ kali per detik. Laju-laju yang bersambung **dikalikan**. Untuk fungsi bersusun, kupaslah seperti bawang: turunkan lapisan luar (biarkan isinya utuh), lalu kalikan dengan turunan lapisan dalam.

KERJAKAN BERSAMA

Kupas bawang: aturan rantai

Turunkan $y = (3x^2 + 1)^4$.

- 1 Lapisan luar: u^4 dengan $u = 3x^2 + 1$. Turunannya $4u^3$.
- 2 Lapisan dalam: $u = 3x^2 + 1$, turunannya $u' = 6x$.
- 3 Kalikan: $y' = 4(3x^2 + 1)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 + 1)^3$.

$y' = 24x(3x^2 + 1)^3$. Bandingkan dengan cara "jabarkan dulu" yang menghasilkan polinomial berderajat 8: jauh lebih panjang!

COBA SENDIRI

Hasil kali dan hasil bagi

Tentukan turunan (a) $y = x^2(2x - 1)^3$ dan (b) $y = \frac{x^2}{x + 1}$. Coba sendiri dulu sebelum membuka langkahnya!

- 1 (a) Ambil $u = x^2$ dan $v = (2x - 1)^3$. Maka $u' = 2x$ dan, dengan aturan rantai, $v' = 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = 6(2x - 1)^2$.
- 2 $y' = 2x(2x - 1)^3 + x^2 \cdot 6(2x - 1)^2 = 2x(2x - 1)^2[(2x - 1) + 3x] = 2x(2x - 1)^2(5x - 1)$.
- 3 (b) Ambil $u = x^2$ dan $v = x + 1$, sehingga $u' = 2x$ dan $v' = 1$. Maka $y' = \frac{2x(x + 1) - x^2 \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$.

(a) $y' = 2x(2x - 1)^2(5x - 1)$; (b) $y' = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$. Memfaktorkan hasil akhir akan sangat berguna di Bab 29, saat kita mencari di mana turunan bernilai nol.

Bagaimana dengan fungsi yang bukan polinomial, seperti $\sin x$ atau e^x ? Daripada langsung memberi rumus, mari jadi detektif. Di Lab Mini berikut, grafik kiri adalah f , sedangkan grafik kanan mencatat **kemiringan** f sebagai titik ungu. Geser titiknya pelan-pelan dan perhatikan jejak yang terbentuk di kanan.

LAB MINI

Pabrik grafik f' : kemiringan menjadi ketinggianLAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-28 $f(x)$

5,371

 $f'(x)$ = kemiringan

4,635

Kurva sedang

naik ↗

Titik jejak

73

Seret titik magenta di grafik kiri (atau tekan ► **Jalankan** untuk menyapu otomatis). Setiap kemiringan garis singgung dicatat sebagai titik ungu di kanan. Pilih **sin x**: jejaknya membentuk kurva apa? Pilih **e^x** : mengapa kedua grafik kembar? Pilih **|x|** lalu berhenti tepat di $x = 0$.

Kalau kamu memilih $\sin x$, jejak ungu membentuk gelombang yang dimulai dari puncak: itu grafik $\cos x$! Pilihan e^x menghasilkan dua grafik yang persis sama. Inilah keistimewaan bilangan $e \approx 2,718$: ia dipilih tepat agar kemiringan e^x di $x = 0$ bernilai 1, dan akibatnya turunan e^x adalah dirinya sendiri. Adapun $|x|$ punya pojok tajam di $x = 0$, sehingga di sana tidak ada satu garis singgung pun yang "paling pas": turunannya tidak ada.



TURUNAN FUNGSI ISTIMEWA

Untuk x dalam **radian**:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (e^x)$$

$f(x)$	$f'(x)$	Catatan
c (konstanta)	0	tidak berubah, lajunya nol
x^n	nx^{n-1}	aturan pangkat
$\sin x$	$\cos x$	x dalam radian
$\cos x$	$-\sin x$	perhatikan tanda minus
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	dari aturan hasil bagi $\frac{\sin x}{\cos x}$
e^x	e^x	turunannya dirinya sendiri
a^x	$a^x \ln a$	karena $a^x = e^{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	untuk $x > 0$

▼ **Bukti** $(\sin x)' = \cos x$ dan $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Dengan rumus jumlah sudut, $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$. Maka

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

Dari Bab 27, untuk h dalam radian, $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ dan $\frac{\cos h - 1}{h} \rightarrow 0$ ketika $h \rightarrow 0$. Jadi limitnya $\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$.

Untuk $\ln x$: jika $y = \ln x$ maka $x = e^y$. Turunkan terhadap y : $\frac{dx}{dy} = e^y = x$. Karena laju kebalikan adalah kebalikan laju, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.



AWAS JEBAKAN

Rumus $(\sin x)' = \cos x$ hanya berlaku jika x dalam radian. Jika x dalam derajat, $\sin x^\circ = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)$, dan aturan rantai memberi $(\sin x^\circ)' = \frac{\pi}{180} \cos x^\circ$. Itulah sebabnya kalkulus selalu memakai radian.

Turunkan (a) $y = e^{3x}$, (b) $y = \sin(x^2)$, dan (c) $y = \ln(5x)$.

1 (a) Luar e^u , dalam $u = 3x$: $y' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$.

2 (b) Luar $\sin u$, dalam $u = x^2$: $y' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$.

3 (c) Luar $\ln u$, dalam $u = 5x$: $y' = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$.

(a) $3e^{3x}$; (b) $2x \cos(x^2)$; (c) $\frac{1}{x}$. Hasil (c) mengejutkan? Ingat $\ln(5x) = \ln 5 + \ln x$, dan konstanta $\ln 5$ turunannya nol.

Turunan e^x yang istimewa itu menjelaskan banyak hal di alam. Jika penduduk tumbuh dengan laju relatif tetap r per tahun, modelnya $P(t) = P_0 e^{rt}$. Dengan aturan rantai, $P'(t) = r P_0 e^{rt} = r P(t)$: **laju pertumbuhan sebanding dengan jumlah penduduk saat itu**. Makin banyak orang, makin cepat pula bertambah.

$$P'(t) = r P_0 e^{rt}$$

Pada pertumbuhan eksponensial, laju bertambahnya penduduk sebanding dengan banyaknya penduduk saat itu.

P_0 Penduduk awal juta jiwa

r Laju relatif % per tahun

t Waktu sejak awal tahun

$P'(t)$ Laju pertumbuhan juta jiwa/tahun

LAJU PERTUMBUHAN

3,08

juta jiwa/tahun

Setelah 0 tahun, penduduk ±280 juta jiwa dan bertambah ±3,08 juta jiwa per tahun, atau sekitar 8.438 jiwa setiap hari.

Cek satuan: Jika P_0 dalam juta jiwa dan r per tahun, maka $P'(t)$ dalam juta jiwa per tahun.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LAJU-PENDUDUK

28.6 Makna turunan: kecepatan, laju, dan garis singgung

Jika $s(t)$ adalah posisi benda pada waktu t , turunannya $s'(t) = v(t)$ adalah **kecepatan sesaat**, dan turunan kecepatan $v'(t) = a(t)$ adalah **percepatan**. Kecepatan sesaat inilah yang ditunjuk jarum speedometer. Di Lab Mini berikut, Kak Lintang mengendarai motor dari rumah ke pasar sejauh 5,25 km. Jarum **magenta** adalah speedometer (laju sesaat), sedangkan jarum **orange** adalah kecepatan rata-rata dalam selang Δt terakhir.

Jarak $s(t)$ **2,1 km**

Speedometer (sesaat)

40 km/jamRata-rata Δt terakhir**40 km/jam**

Selisih kedua jarum

 $7,11 \times 10^{-15}$ km/jam

Motor

kecepatan tetap

Tekan ► **Jalankan** atau geser waktu t (bisa juga menyeret grafik atau motornya). Lalu perkecil selang Δt : kapan jarum oranye menempel pada jarum magenta? Di grafik jarak-waktu, tali busur oranye berubah menjadi garis singgung magenta. Tantangan: temukan saat-saat jarum menunjuk tepat 31,5 km/jam (segitiga hijau), yaitu kecepatan rata-rata seluruh perjalanan.

Sebuah ojek yang sedang melaju pelan mulai menambah kecepatan. Posisinya t detik kemudian adalah $s(t) = 0,5t^2 + 2t$ meter. Berapa kecepatannya pada $t = 4$ detik, dalam m/s dan km/jam?

1 $v(t) = s'(t) = t + 2.$

2 $v(4) = 4 + 2 = 6$ m/s.

3 Ubah satuan: $6 \text{ m/s} = 6 \times 3,6 = 21,6$ km/jam.

Kecepatannya 6 m/s atau 21,6 km/jam. Percepatannya $a(t) = v'(t) = 1 \text{ m/s}^2$, tetap sepanjang waktu.

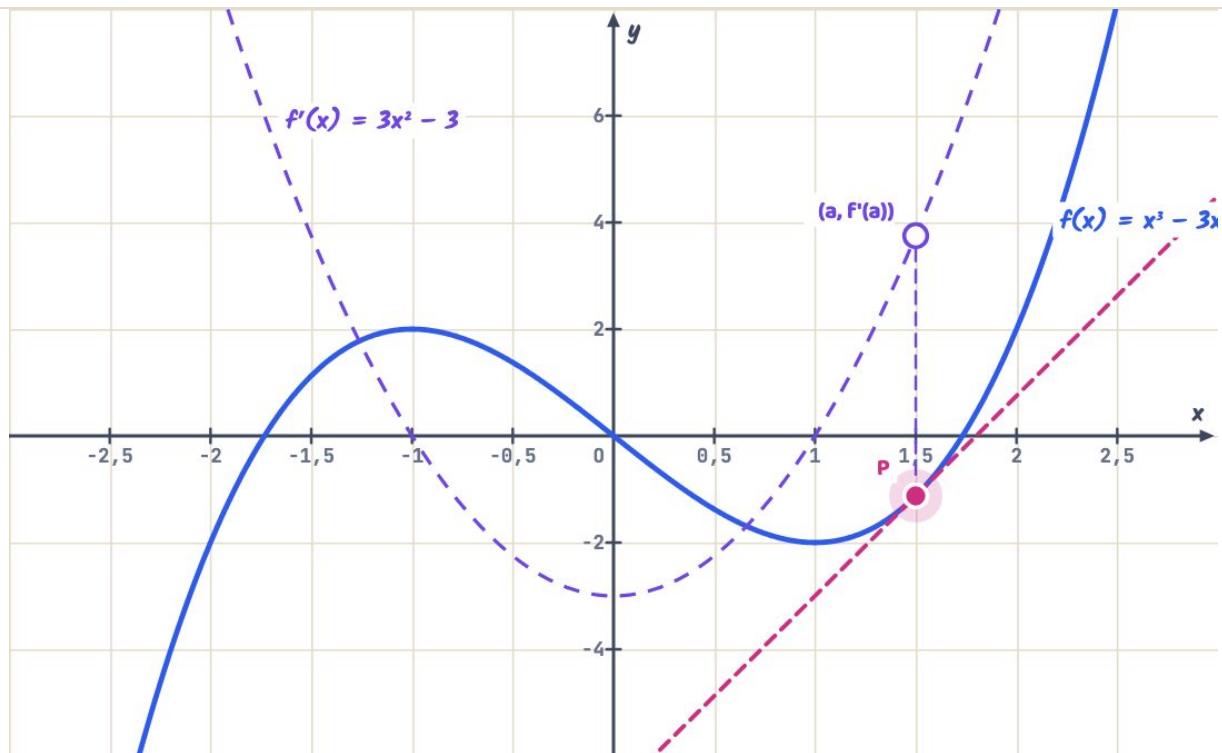
Turunan juga memberi kita **persamaan garis singgung**. Garis yang melalui titik $(a, f(a))$ dengan kemiringan $f'(a)$ adalah

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$f'(1,5) = 3,75, \quad y = 3,75x - 6,75$$

Kurva biru $f(x) = x^3 - 3x$; kurva ungu putus-putus $f'(x) = 3x^2 - 3$.



$f'(a) > 0$: kurva sedang naik ➡

$f(a)$
-1,125

$f'(a)$ = kemiringan
3,75

cek numerik garis singgung
3,75

potong sumbu-y
-6,75

Seret titik P atau tekan ► **Jalankan**. Garis singgung magenta "menari" di sepanjang kurva biru, sedangkan titik ungu berongga menunjukkan nilai $f'(a)$ pada grafik putus-putus f' . Kapan titik ungu berada di bawah sumbu- x ? Apa yang sedang dilakukan kurva biru saat itu?

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik yang absisnya $x = 1$. Di titik mana lagi garis singgung kurva sejajar dengan garis itu?

- 1 Titik singgung: $y(1) = 1 - 2 = -1$, jadi titiknya $(1, -1)$.
- 2 Kemiringan: $y' = 3x^2 - 2$, sehingga $m = y'(1) = 1$.
- 3 Persamaan: $y = -1 + 1 \cdot (x - 1) = x - 2$.
- 4 Sejajar berarti kemiringannya juga 1: $3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Titik lainnya di $x = -1$, dengan $y = -1 + 2 = 1$, yaitu $(-1, 1)$.

Garis singgung di $(1, -1)$ adalah $y = x - 2$. Garis singgung di $(-1, 1)$ sejajar dengannya, yaitu $y = x + 2$.

Perhatikan juga **tanda** turunan. Jika $f'(a) > 0$, kurva sedang naik; jika $f'(a) < 0$, kurva sedang turun; dan jika $f'(a) = 0$, garis singgungnya mendatar, sering tepat di puncak atau lembah. Cara memakai fakta ini untuk mencari nilai terbesar dan terkecil adalah cerita Bab 29.

Bahasa sederhana • Ringkasnya: turunan adalah "speedometer" untuk apa saja. Untuk jarak, turunannya kecepatan. Untuk harga, turunannya laju kenaikan harga. Untuk jumlah penduduk, turunannya laju pertumbuhan penduduk.



MATEMATIKA NUSANTARA

Prakirawan BMKG tidak hanya mencatat *berapa banyak* hujan turun, tetapi juga *seberapa cepat*: intensitas hujan dalam milimeter per jam. Hujan 20 mm yang tercurah dalam satu jam jauh lebih berbahaya daripada 20 mm yang tersebar sepanjang hari; menurut kategori BMKG, intensitas di atas sekitar 20 mm per jam sudah tergolong hujan sangat lebat. Petugas pintu air di berbagai kota juga memantau seberapa cepat tinggi muka air naik (cm per jam) untuk memberi peringatan dini banjir. Itulah turunan yang bekerja menjaga keselamatan warga.



Speedometer

Mengukur putaran roda dalam selang yang sangat singkat, lalu menampilkan kecepatan sesaat: turunan jarak terhadap waktu.



Harga cabai

Pemerintah daerah memantau laju kenaikan harga per hari menjelang hari raya. Laju yang melonjak menjadi tanda perlunya operasi pasar.



Laju penduduk

BPS melaporkan laju pertumbuhan penduduk dalam persen per tahun untuk merencanakan sekolah, rumah sakit, dan lapangan kerja.



Kereta cepat

Percepatan adalah turunan kecepatan. Kereta cepat Jakarta–Bandung menambah kecepatan secara bertahap agar penumpang tetap nyaman sampai sekitar 350 km/jam.



Baterai HP

Perkiraan "sisa 3 jam" dihitung dari laju berkurangnya persen baterai per menit.



Intensitas hujan

Curah hujan per jam (mm/jam) adalah laju perubahan curah hujan terhadap waktu.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TEOREMA NILAI RATA-RATA

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan punya turunan pada (a, b) , maka ada paling sedikit satu c di antara a dan b dengan

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Secara geometris: ada garis singgung yang **sejajar** dengan tali busur. Secara fisik: kecepatan sesaat pasti pernah sama dengan kecepatan rata-rata, persis jawaban Tebak Dulu di awal bab. Di beberapa negara, kamera tilang "kecepatan rata-rata" bersandar pada teorema ini: jika kamu menempuh 10 km dalam 5 menit (rata-rata 120 km/jam), pasti ada saat speedometermu menunjuk 120 km/jam.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TURUNAN UNTUK MEMBUKTIKAN KETAKSAMAAN

Buktikan $e^x \geq 1 + x$ untuk semua x . Misalkan $g(x) = e^x - 1 - x$. Maka $g'(x) = e^x - 1$, negatif untuk $x < 0$ dan positif untuk $x > 0$. Jadi g turun sampai $x = 0$, lalu naik: nilai terkecilnya $g(0) = 0$. Akibatnya $g(x) \geq 0$, yaitu $e^x \geq 1 + x$, dengan kesamaan hanya di $x = 0$. Bonus cantik: ambil $x = \frac{1}{n}$, maka $e^{1/n} > 1 + \frac{1}{n}$, sehingga $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ untuk setiap bilangan asli n . Barisan dari Bab 27 itu memang mendekati e dari bawah!



Cek Cepat

Turunan $f(x) = 5x^3$ adalah...

$5x^2$

$15x^3$

$15x^2$

$3x^5$

Kemiringan garis singgung parabola $y = x^2$ di titik $(-2, 4)$ adalah...

-4

4

-2

0

Jarak tempuh sebuah bola $s(t) = 4t^2$ meter. Kecepatannya pada $t = 3$ detik adalah...

36 m/s

12 m/s

8 m/s

24 m/s

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: laju tumbuh kecambah

Bahan: segenggam kacang hijau, kapas, gelas plastik, air, penggaris, buku catatan (atau kamera HP).

1. Rendam kacang hijau semalam, lalu letakkan di atas kapas basah di dalam gelas.
2. Setiap hari pada jam yang sama, ukur tinggi kecambah tertinggi dalam milimeter. Catat dalam tabel: hari ke- t dan tinggi $T(t)$.
3. Untuk setiap hari, hitung laju rata-rata harian $T(t+1) - T(t)$ dalam mm per hari.
4. Gambar grafik T terhadap t , lalu gambar tali busur di antara dua hari yang lajunya paling besar.
5. Bonus: pada hari dengan pertumbuhan tercepat, ukur dua kali (pagi dan sore) untuk memperkirakan laju yang "lebih sesaat".

Pertanyaan: Pada hari ke berapa kecambahmu tumbuh paling cepat? Apakah lajunya terus naik, atau mulai melambat? Mengapa mengukur dua kali sehari memberi perkiraan laju sesaat yang lebih baik?

RINGKASAN KILAT **Bab 28 dalam 3 menit**

Kamu sekarang bisa...

- membedakan **laju perubahan rata-rata** (kemiringan tali busur) dan **laju sesaat** (kemiringan garis singgung)
- menjelaskan turunan sebagai **limit** $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ketika $h \rightarrow 0$
- menurunkan fungsi dengan **aturan pangkat, jumlah, rantai, hasil kali, dan hasil bagi**
- memakai turunan $\sin x$, $\cos x$, e^x , dan $\ln x$
- memaknai turunan sebagai **kecepatan dan laju**, serta menulis **persamaan garis singgung**

Istilah kunci

laju perubahan

tali busur

kecepatan sesaat

diferensiasi

percepatan

Rumus penting

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Kemiringan tali busur pada $y = x^2$. Naik dibagi maju antara dua titik pada parabola. Semakin kecil h , semakin dekat hasilnya ke kemiringan garis singgung, yaitu $2x$.

$$m = a n x^{n-1}$$

Aturan pangkat: kemiringan $y = a \cdot x^n$. Turunkan pangkat n ke depan untuk dikalikan dengan a , lalu kurangi pangkatnya satu. Masukkan nilai x untuk mendapat kemiringan garis singgung di titik itu.

$$P'(t) = r P_0 e^{rt}$$

Laju pertumbuhan penduduk. Pada pertumbuhan eksponensial, laju bertambahnya penduduk sebanding dengan banyaknya penduduk saat itu.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Jangan memasukkan $h = 0$ terlalu cepat!
- Turunan hasil kali bukan hasil kali turunan: $(uv)' \neq u'v'$.
- Rumus $(\sin x)' = \cos x$ hanya berlaku jika x dalam radian.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=28

🧩 Teka-teki untuk Bab 29

Ancil punya selembar karton persegi berukuran $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Ia memotong persegi kecil bersisi $x \text{ cm}$ di keempat pojoknya, lalu melipat sisi-sisinya menjadi kotak tanpa tutup. Kalau x terlalu kecil, kotaknya ceper; kalau terlalu besar, alasnya sempit. Berapa x supaya volume kotak paling besar?

▼ Intip petunjuk

Volumenya $V(x) = x(30 - 2x)^2$ untuk $0 < x < 15$. Di puncak grafik V , garis singgungnya mendatar, jadi $V'(x) = 0$. Coba hitung V untuk $x = 4, 5, 6$ dan tebak jawabannya. Bab 29 akan membuktikannya dengan turunan!

29

Aplikasi Turunan: Berburu Puncak dan Lembah

Berapa sentimeter pojok karton harus digunting agar kotaknya memuat kue paling banyak? Mengapa kaleng susu tidak dibuat setinggi tiang atau segepeng piring? Turunan dari Bab 28 ternyata adalah alat untuk menemukan yang *terbaik*.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menentukan interval fungsi **naik** dan **turun** serta **titik stasioner** dari tanda turunan pertama;
- membedakan maksimum lokal, minimum lokal, dan titik belok dengan **uji turunan pertama dan kedua**;
- **menggambar sketsa kurva** dari titik potong, titik stasioner, dan kecekungan;
- menyelesaikan masalah **optimasi**: kotak karton, kaleng hemat bahan, kebun berpagar, dan untung pedagang;
- menghitung **laju terkait** dan menganalisis gerak lurus dengan posisi, kecepatan, dan percepatan.

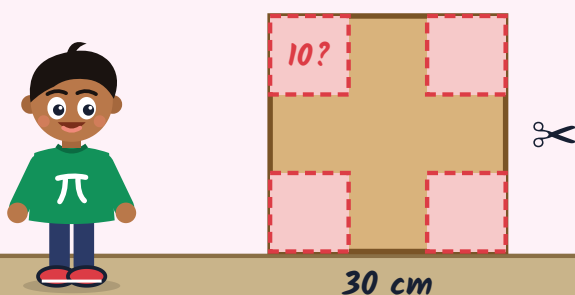
KOTAK KUE TERBESAR

KOMIK • 4 PANEL

Persiapan bazar kue sekolah

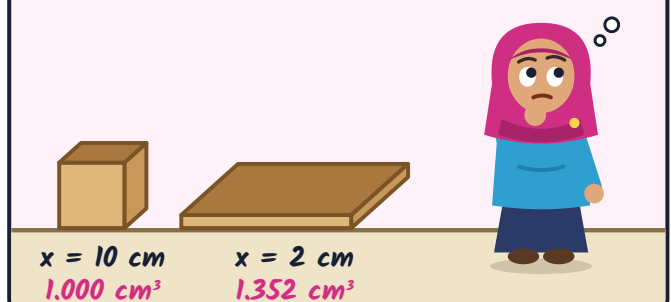
DIMAS

Karton 30×30 cm ini mau kujadikan kotak kue tanpa tutup. Gunting pojoknya 10 cm saja, biar kotaknya tinggi!



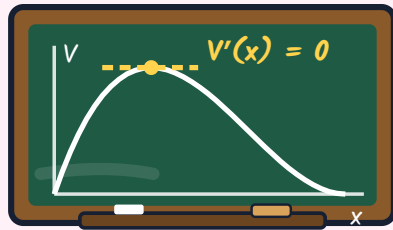
AYU

Tunggu! Potong 10 cm: alasnya tinggal 10×10 , volumenya cuma 1.000 cm^3 . Potong 2 cm malah dapat 1.352 cm^3 .



KAK LINTANG

Volumenya naik, lalu turun lagi. Di puncak, grafik V mendatar: kemiringannya nol. Jadi kita cari x yang membuat $V'(x) = 0$!



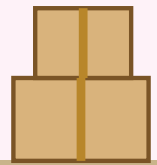
AHA!

Ancil muncul dari balik tumpukan kardus**ANCIL**

Ada satu potongan ajaib yang volumenya dua kali tebakan Dimas. Berapa cm, hayo?

DIMAS

Dua kali 1.000... berarti 2.000 cm^3 ?!

**Tebak Dulu!**

Karton $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ digunting persegi yang sama besar di keempat pojoknya, lalu sisi-sisinya dilipat ke atas menjadi kotak tanpa tutup. Potongan berapa cm yang menghasilkan volume terbesar?

10 cm, supaya kotaknya berbentuk kubus $10 \times 10 \times 10$.

7,5 cm, tepat seperempat sisi karton.

5 cm, seperenam sisi karton.

1 cm, supaya alasnya seluas mungkin.

Jawabannya: 5 cm. Hitung saja: potongan 1 cm memberi $1 \times 28 \times 28 = 784 \text{ cm}^3$, potongan 5 cm memberi $5 \times 20 \times 20 = 2.000 \text{ cm}^3$, potongan 7,5 cm memberi $1.687,5 \text{ cm}^3$, dan potongan 10 cm hanya 1.000 cm^3 . Potongan kecil membuat kotak pendek; potongan besar menghabiskan alas. Juara ada di tengah, dan turunan bisa menemukannya **tanpa mencoba satu per satu**.

29.1 Naik, turun, dan titik stasioner

Di jalan raya, *tanjakan* berarti jalan yang mendaki dan *turunan* berarti jalan yang menurun. Lucunya, turunan dalam matematika memang memberi tahu hal yang persis sama! Bayangkan kamu mengendarai motor dari kiri

ke kanan di sepanjang grafik $y = f(x)$. Kemiringan jalan di setiap titik adalah $f'(x)$, yaitu gradien garis singgung yang kamu pelajari di Bab 28.

Bahasa sederhana • Gampangnya: kalau turunannya **positif**, jalannya menaik. Kalau turunannya **negatif**, jalannya menurun. Kalau turunannya **nol**, jalannya datar sejenak, misalnya tepat di puncak bukit atau di dasar lembah.



DEFINISI

Fungsi f **naik** pada suatu interval jika nilai $f(x)$ bertambah ketika x bertambah, dan **turun** jika nilai $f(x)$ berkurang ketika x bertambah. Titik $(c, f(c))$ dengan $f'(c) = 0$ disebut **titik stasioner**: di titik itu garis singgungnya mendatar.



SIFAT: TANDA TURUNAN MENENTUKAN ARAH

Pada suatu interval:

- jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x di interval itu, maka f **naik**;
- jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x di interval itu, maka f **turun**.

Jadi, untuk mengetahui arah grafik, cukup periksa **tanda** f' , bukan nilainya.

CONTOH Peta naik-turun sebuah kurva

Tentukan interval naik, interval turun, dan titik stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2$.

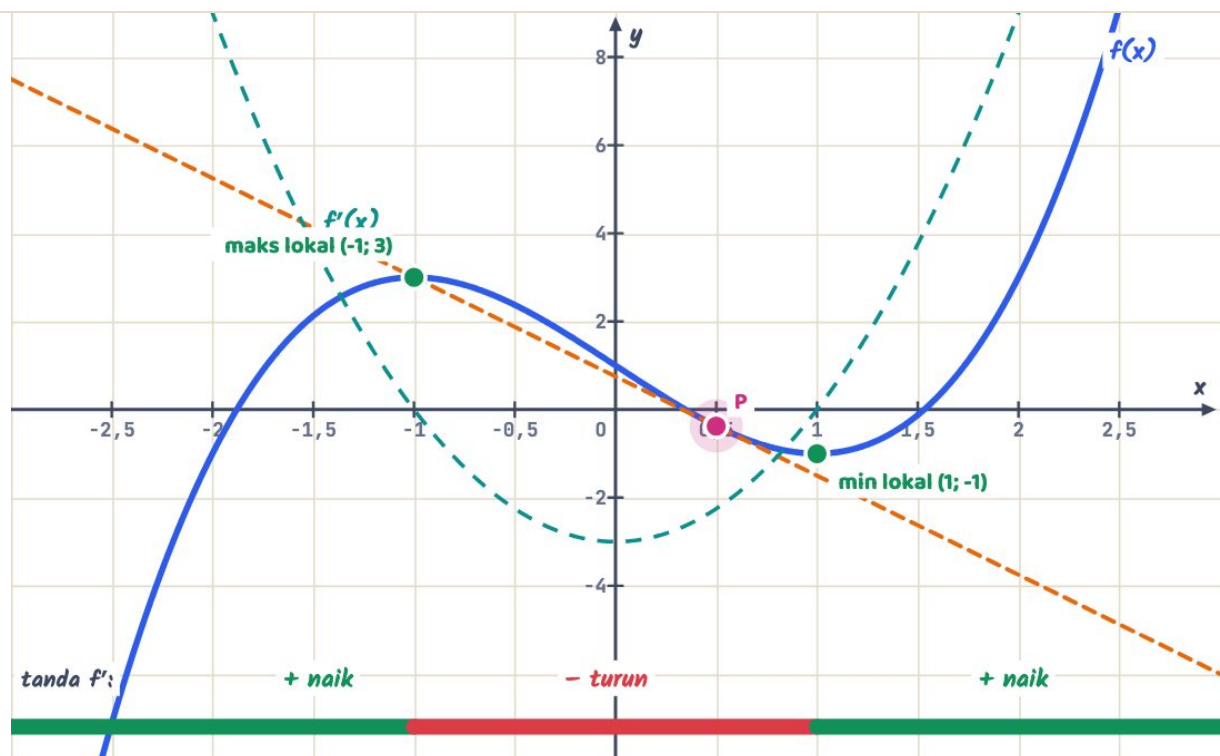
- 1 Turunkan: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
- 2 Titik stasioner: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ atau $x = 2$. Nilainya $f(0) = 0$ dan $f(2) = 8 - 12 = -4$.
- 3 Uji tanda dengan satu titik di tiap interval: $f'(-1) = 9 > 0$, $f'(1) = -3 < 0$, $f'(3) = 9 > 0$.

f naik untuk $x < 0$ dan $x > 2$, turun untuk $0 < x < 2$. Titik stasionernya $(0, 0)$ dan $(2, -4)$: yang pertama puncak bukit, yang kedua dasar lembah.

$$f(x) = x^3 - 3p x + 1$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

Garis putus-putus oranye adalah garis singgung di titik P, kurva toska putus-putus adalah f' . Pita di bawah adalah diagram tanda f' : hijau berarti naik, merah berarti turun.



$f(a)$
-0,38

$f'(a)$ = kemiringan
-2,25

Kedaaan di P
turun ▼

Seret titik P di sepanjang kurva. Kapan garis singgungnya mendatar? Perhatikan: di titik itu kurva hijau toska putus-putus f' memotong sumbu- x . Lalu geser p ke 0 dan ke nilai negatif. Apa yang terjadi pada puncak dan lembahnya?

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

$f'(x) = 2ax + b$. Samakan dengan nol: $x = -b/(2a)$. Contoh: $f(x) = 2x^2 - 12x + 1 \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$.

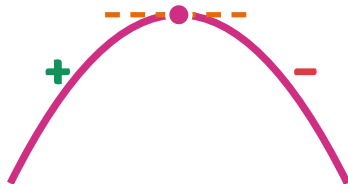
29.2 Uji turunan pertama dan kedua

Titik stasioner baru berstatus **calon**. Ada tiga kemungkinan wajahnya: puncak bukit, dasar lembah, atau "bahu jalan" yang datar sejenak tetapi tetap menanjak. Untuk membedakannya, kita intip tanda f' di kiri dan kanan titik itu.



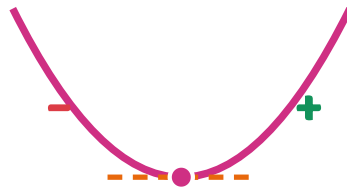
DEFINISI

$f(c)$ disebut **maksimum lokal** jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di sekitar c , dan **minimum lokal** jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di sekitar c . Keduanya disebut **nilai ekstrem**. Kata "lokal" berarti juara di lingkungannya saja; juara sejati di seluruh daerah asal disebut maksimum atau minimum **global** (mutlak).



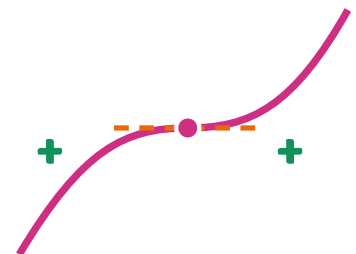
maksimum lokal

$$f': + \rightarrow 0 \rightarrow -$$



minimum lokal

$$f': - \rightarrow 0 \rightarrow +$$



titik belok datar

$$f': + \rightarrow 0 \rightarrow +$$

Ketiganya punya garis singgung mendatar, tetapi hanya dua yang merupakan nilai ekstrem. Penentunya: apakah tanda f' **berganti**.



UJI TURUNAN PERTAMA

Misalkan $f'(c) = 0$.

- Jika tanda f' berubah dari **+** ke **-** saat melewati c , maka $f(c)$ adalah **maksimum lokal**.
- Jika tanda f' berubah dari **-** ke **+**, maka $f(c)$ adalah **minimum lokal**.
- Jika tanda f' **tidak berubah**, maka $(c, f(c))$ bukan titik ekstrem, melainkan titik belok datar.

Ada cara yang sering lebih cepat. Turunan dari turunan, $f''(x)$, mengukur bagaimana kemiringan itu sendiri berubah. Jika $f'' > 0$, kemiringan terus bertambah dan grafik melengkung seperti **cekung ke atas** (mangkuk $\cup$). Jika $f'' < 0$, grafik **cekung ke bawah** (topi $\cap$). Titik tempat kecekungan berganti disebut **titik belok**.



UJI TURUNAN KEDUA

Misalkan $f'(c) = 0$.

- Jika $f''(c) < 0$ (cekung ke bawah), maka $f(c)$ adalah **maksimum lokal**.
- Jika $f''(c) > 0$ (cekung ke atas), maka $f(c)$ adalah **minimum lokal**.
- Jika $f''(c) = 0$, uji ini **tidak dapat menyimpulkan**; kembalilah ke uji turunan pertama.

▼ Mengapa uji turunan kedua bekerja?

Misalkan $f'(c) = 0$ dan $f''(c) > 0$. Karena f'' adalah turunan dari f' , nilai $f''(c) > 0$ berarti f' sedang naik di sekitar c . Fungsi f' yang naik dan bernilai 0 di c pasti negatif sedikit di kiri c dan positif sedikit di kanan c . Tanda f' berubah dari $-$ ke $+$, jadi menurut uji turunan pertama $f(c)$ adalah minimum lokal. Alasan untuk $f''(c) < 0$ sama, hanya tandanya terbalik.



TRIK KAK LINTANG

Ingat **senyum dan cemberut**. Kalau $f'' > 0$, grafiknya tersenyum $\cup$, dan titik terendah senyuman adalah **minimum**. Kalau $f'' < 0$, grafiknya cemberut $\cap$, dan titik tertinggi wajah cemberut adalah **maksimum**. Positif = senyum = lembah.



AWAS JEBAKAN

$f'(c) = 0$ tidak menjamin ada puncak atau lembah di c . Untuk $f(x) = x^3$, berlaku $f'(0) = 0$, tetapi grafiknya terus naik melewati $x = 0$; ia hanya mendatar sejenak. Begitu pula $f''(c) = 0$ tidak berarti titik belok: $f(x) = x^4$ memiliki $f''(0) = 0$, padahal $(0, 0)$ adalah minimum. Selalu periksa perubahan tanda.

KERJAKAN BERSAMA

Grafik berbentuk huruf W

Tentukan semua titik stasioner $f(x) = x^4 - 2x^2$ beserta jenisnya.

- 1 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$, jadi titik stasioner di $x = -1$, $x = 0$, dan $x = 1$.
- 2 $f''(x) = 12x^2 - 4$. Di $x = \pm 1$: $f''(\pm 1) = 8 > 0$, jadi minimum lokal dengan $f(\pm 1) = 1 - 2 = -1$.
- 3 Di $x = 0$: $f''(0) = -4 < 0$, jadi maksimum lokal dengan $f(0) = 0$.

Dua lembah $(-1, -1)$ dan $(1, -1)$ mengapit satu puncak $(0, 0)$: grafiknya berbentuk huruf W. Kedua lembah itu sekaligus minimum global, sedangkan puncaknya hanya maksimum lokal karena $f(x)$ bisa jauh lebih besar untuk x yang besar.

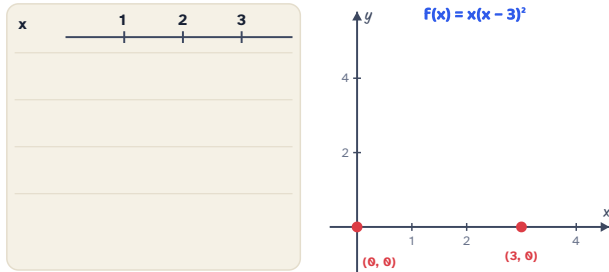
29.3 Menggambar kurva seperti detektif

Kalkulator grafik bisa menggambar kurva dalam sekejap, tetapi seorang detektif kurva bisa **menjelaskan** setiap lekukannya. Kumpulkan petunjuk berikut, lalu sambungkan:

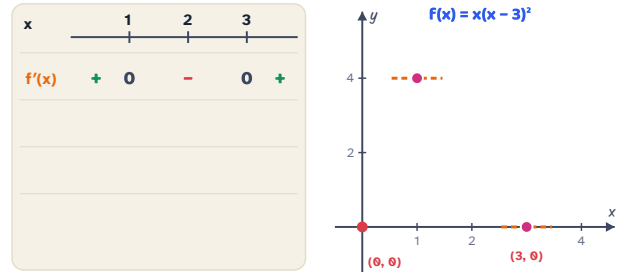
1. **Titik potong sumbu:** $f(x) = 0$ untuk sumbu- x , $f(0)$ untuk sumbu- y .
2. **Titik stasioner:** selesaikan $f'(x) = 0$, lalu tentukan jenisnya.
3. **Kecekungan dan titik belok:** periksa tanda $f''(x)$.

4. **Perilaku ujung:** ke mana grafik pergi saat x sangat besar atau sangat kecil?
 5. **Sambungkan** semua titik dengan kurva mulus yang mematuhi diagram tanda.

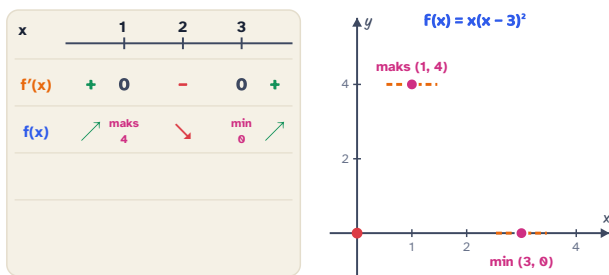
Bahasa sederhana • Menggambar kurva itu mirip menggambar rute perjalanan dari petunjuk: "mulai di sini, naik sampai puncak, turun ke lembah, lalu naik lagi". Turunan memberi tahu kapan harus naik dan kapan harus turun.



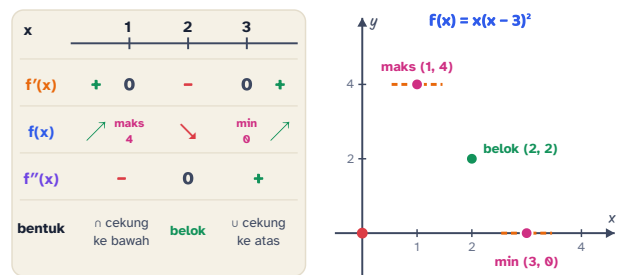
Langkah 1. Petunjuk 1, titik potong: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$. Grafik melewati $(0, 0)$ dan $(3, 0)$. Karena faktor $(x-3)$ berpangkat dua, grafik hanya **menyinggung** sumbu- x di $x = 3$.



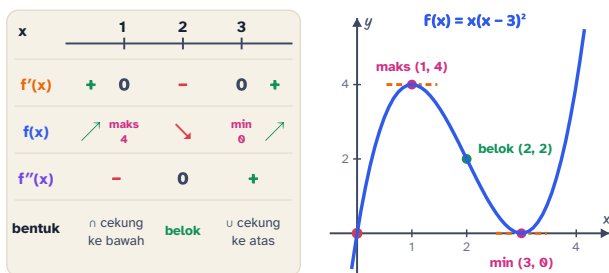
Langkah 2. Petunjuk 2, titik stasioner: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0$ di $x = 1$ dan $x = 3$. Tanda f' : + lalu - lalu +.



Langkah 3. Baca diagram tanda: naik, turun, naik. Jadi $(1, 4)$ adalah maksimum lokal dan $(3, 0)$ adalah minimum lokal.



Langkah 4. Petunjuk 3, kecekungan: $f''(x) = 6x - 12$ berganti tanda di $x = 2$. Titik belok $(2, f(2)) = (2, 2)$: kurva berubah dari cemberut menjadi tersenyum.



Langkah 5. Sambungkan dengan kurva mulus. Untuk x sangat besar, x^3 menang sehingga grafik melesat ke atas; untuk x sangat negatif, grafik terjun ke bawah. Selesai, tanpa satu pun tabel nilai!



CEK KEWAJARAN

Titik belok kubik selalu berada tepat di tengah-tengah dua titik stasionernya: di sini $x = 2$ adalah rata-rata dari 1 dan 3. Grafik kubik simetris terhadap titik beloknya. Petunjuk kecil ini berguna untuk memeriksa sketsamu.

29.4 Optimasi: mencari yang terbaik

Pedagang ingin untung terbesar, pabrik ingin bahan paling sedikit, petani ingin kebun paling luas. Semua itu adalah masalah **optimasi**: mencari nilai maksimum atau minimum sebuah besaran. Kuncinya sama dengan puncak bukit tadi. Di titik terbaik (yang tidak berada di ujung daerah asal), grafiknya mendatar, sehingga turunannya nol.



TRIK KAK LINTANG: LIMA LANGKAH OPTIMASI

1. **Gambar** situasinya dan beri nama setiap ukuran.
2. Tulis rumus besaran yang ingin dibuat **terbesar atau terkecil**.
3. Pakai **syarat** (kendala) untuk mengubahnya menjadi fungsi **satu variabel**, lalu tentukan daerah asalnya.
4. **Turunkan**, samakan dengan nol, dan selesaikan.
5. **Pastikan** jenisnya (uji turunan atau bandingkan dengan nilai di ujung), lalu jawab dengan kalimat lengkap dan satuan.

Mari selesaikan teka-teki kotak kue dari komik. Kalau karton $p \times l$ digunting persegi bersisi x di keempat pojoknya, kotaknya bertinggi x dengan alas $(p - 2x) \times (l - 2x)$.

LAB MINI

Gunting pojok, lipat, dan ukur volumenya

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29

Alas kotak

26 × 26 cm

Volume V

1.352 cm³

$V'(x)$

468 cm³ per cm

Kata turunan

$V' > 0$: perbesar x

Geser potongan x (atau seret titik magenta di grafik), lalu tekan ► **Jalankan** untuk melipat karton menjadi kotak. Garis oranye adalah garis singgung grafik $V(x)$. Di mana garis itu mendatar? Coba juga karton 40×25 : apakah potongan terbaiknya masih seperenam sisi?

CONTOH Kotak kue Dimas, dihitung tuntas

Dari karton $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, tentukan potongan pojok x yang membuat volume kotak tanpa tutup paling besar.

- 1 Volume: $V(x) = x(30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$, dengan daerah asal $0 < x < 15$.
- 2 Turunkan: $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x^2 - 20x + 75) = 12(x - 5)(x - 15)$.
- 3 $V'(x) = 0$ di $x = 5$ atau $x = 15$. Nilai $x = 15$ di luar daerah asal (alasnya habis), jadi tinggal $x = 5$.
- 4 Uji turunan kedua: $V''(x) = 24x - 240$, sehingga $V''(5) = -120 < 0$: maksimum.

Potong 5 cm di setiap pojok. Kotaknya berukuran $20 \times 20 \times 5 \text{ cm}$ dengan volume maksimum 2.000 cm^3 , tepat dua kali tebakan Dimas.

$$V = x(p - 2x)(l - 2x)$$

Gunting persegi x di keempat pojok, lalu lipat: tinggi kotak x , alasnya $(p - 2x)$ kali $(l - 2x)$.



🎯 sangat dekat dengan potongan terbaik!

karton persegi: potongan terbaik tepat seperenam sisi

Alas 20×20 cm dan tinggi 5 cm. Laju perubahan volume $V'(x) = 0 \text{ cm}^3$ per cm, artinya **kamu tepat di puncak**. Potongan terbaik $x \approx 5$ cm memberi volume maksimum $\approx 2.000 \text{ cm}^3$.

Cek satuan: $\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^3$. Turunannya, $V'(x)$, bersatuan cm^3 per cm: tambahan volume untuk setiap tambahan 1 cm potongan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOTAK-KARTON](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-kotak-karton)

Masalah lain yang mirip: **kebun berpagar**. Pak Darto punya 40 m kawat untuk memagari kebun cabai berbentuk persegi panjang di samping tembok rumah. Sisi yang menempel tembok tidak perlu dipagar. Jika lebarnya x , panjang sisi yang sejajar tembok $40 - 2x$, sehingga luasnya $L(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$. Dari $L'(x) = 40 - 4x = 0$ diperoleh $x = 10$ m, panjang 20 m, dan luas maksimum 200 m^2 . Perhatikan: panjangnya tepat dua kali lebarnya.

$$L = x(K - 2x)$$

Dua sisi lebar x memakai $2x$ meter kawat; sisanya, $K - 2x$, menjadi sisi panjang yang sejajar tembok.

K Panjang kawat m

x Lebar kebun m

L Luas kebun m²

LUAS KEBUN

168

m²

Lebar **6** m dan panjang sejajar tembok **28** m. Turunannya $L'(x) = K - 4x = 16$, jadi **luas masih bisa bertambah: perbesar x** . Luas terbesar **200** m² dicapai saat $x = K/4 = 10$ m. Jika muncul '-', lebar x terlalu besar: dua sisi lebar sudah menghabiskan seluruh kawat.

Cek satuan: m $\times$ m = m². Hasil umum: luas maksimum $K^2/8$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KEBUN-PAGAR](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-kebun-pagar)



Tebak Dulu!

Sebuah pabrik membuat kaleng susu tertutup dengan isi yang sudah ditetapkan. Bentuk mana yang memakai pelat logam paling sedikit (badan, tutup, dan alas ikut dihitung)?

Kaleng yang sangat langsing, seperti tabung minuman tinggi.

Kaleng yang sangat gepeng, seperti kaleng biskuit bundar.

Kaleng yang tingginya sama dengan diameternya.

Semua sama saja, karena isinya sama.

Jawabannya: tinggi = diameter. Kaleng langsing boros di badan, kaleng gepeng boros di tutup dan alas. Titik keseimbangannya tercapai saat tinggi kaleng sama dengan diameternya. Kaleng di toko sering sedikit lebih tinggi karena ada pertimbangan lain: tutup yang lebih tebal, sambungan, dan kenyamanan digenggam (lihat soal Lv 5 di Tangga Latihan).

LAB MINI Kaleng susu paling hemat bahanLAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29Tinggi h **3,35 cm**

tinggi : diameter

0,27

Bahan A

368,4 cm²

Kata turunan

 $A' > 0$: perkecil r

Volume kaleng tetap; kamu hanya mengubah jari-jari r , dan tingginya menyesuaikan. Perhatikan batang bahan: tutup dan alas (oranye) melawan badan (biru). Pindahkan r jauh dari lembah, lalu tekan ► **Jalankan**: Ancil berjalan menuruni grafik mengikuti tanda turunan. Apa nilai "tinggi : diameter" saat ia berhenti?

Kaleng tertutup berbentuk tabung harus memuat 400 cm^3 (400 mL) susu. Tentukan jari-jari dan tinggi kaleng agar luas pelat logamnya minimum.

1 Kendala volume: $\pi r^2 h = 400$, sehingga $h = \frac{400}{\pi r^2}$.

2 Luas bahan: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{800}{r}$, untuk $r > 0$.

3 $A'(r) = 4\pi r - \frac{800}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{200}{\pi} \approx 63,66 \Rightarrow r \approx 3,99 \text{ cm}$.

4 $A''(r) = 4\pi + \frac{1600}{r^3} > 0$, jadi minimum. Tingginya $h = \frac{400}{\pi(3,99)^2} \approx 7,99 \text{ cm}$.

Jari-jari $\approx 3,99 \text{ cm}$ dan tinggi $\approx 7,99 \text{ cm}$, dengan bahan $\approx 300,5 \text{ cm}^2$. Tingginya tepat sama dengan diameter! Hal ini selalu berlaku: dari $A' = 0$ diperoleh $V = 2\pi r^3$, sehingga $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r$.

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Bahan = tutup dan alas ($2\pi r^2$) ditambah badan ($2\pi rh$). Karena $h = V/(\pi r^2)$, bahan badan sama dengan $2V/r$.

V

Volume kaleng cm^3

r

Jari-jari cm

A

Luas bahan cm^2

LUAS BAHAN

323,2 cm^2

kaleng langsing: badannya boros

Tinggi kaleng $h = V/(\pi r^2) = \mathbf{14,147}$ cm. Bahan tutup dan alas **56,549** cm^2 , bahan badan **266,667** cm^2 . Jari-jari paling hemat $r = \sqrt[3]{V/2\pi} \approx \mathbf{3,993}$ cm, dengan bahan minimum $\approx \mathbf{300,53}$ cm^2 .

Cek satuan: πr^2 bersatuan cm^2 , dan $V/r = \text{cm}^3/\text{cm} = \text{cm}^2$. Keduanya cm^2 , jadi boleh dijumlahkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KALENG-HEMAT

Pak Ujang menjual martabak manis dengan modal Rp20.000 per loyang. Jika harga jualnya x ribu rupiah per loyang, banyaknya martabak yang terjual setiap malam $100 - 2x$ loyang (untuk $20 \leq x \leq 50$). Berapa harga jual yang memberi untung terbesar?

- 1 Untung per loyang $x - 20$ ribu, sehingga untung semalam $U(x) = (x - 20)(100 - 2x) = -2x^2 + 140x - 2000$ ribu rupiah.
- 2 $U'(x) = -4x + 140 = 0 \Rightarrow x = 35$. Karena $U''(x) = -4 < 0$, titik ini maksimum.
- 3 Cek ujung: $U(20) = 0$ dan $U(50) = 0$, sedangkan $U(35) = 15 \times 30 = 450$.

Harga terbaik Rp35.000 per loyang: terjual 30 loyang dengan untung Rp450.000 per malam. Harga paling murah atau paling mahal justru tidak memberi untung sama sekali!



TAMU DARI MASA LALU

Pada 1613, Johannes Kepler (1571–1630) membeli anggur untuk pesta pernikahannya. Ia heran melihat pedagang menaksir isi tong hanya dengan menusukkan sebatang tongkat lewat lubang tong. Kepler lalu menulis buku tentang volume tong (terbit 1615) dan memperhatikan hal penting: **di dekat bentuk tong yang isinya terbesar, perubahan kecil pada ukuran hampir tidak mengubah isinya**. Itulah gagasan "turunan sama dengan nol" sebelum turunan ditemukan! Sekitar tahun 1636, Pierre de Fermat (±1601–1665) menyusun cara mencari maksimum dan minimum dengan membandingkan $f(x)$ dan $f(x + e)$ untuk e yang sangat kecil, beberapa dekade sebelum Newton dan Leibniz merumuskan kalkulus.



MATEMATIKA NUSANTARA

Banyak wadah anyaman tradisional, seperti **besek** dari bilah bambu, dibuat dari selebar anyaman persegi yang tepinya ditekuk ke atas. Pojoknya dilipat, bukan digunting, tetapi isinya tetap mengikuti rumus $V = x(s - 2x)^2$ untuk anyaman bersisi s dan tepi setinggi x . Coba ukur besek atau kotak kue di rumahmu: apakah tingginya mendekati seperenam lebar lembarannya? Jika tidak, mungkin pembuatnya mengutamakan hal lain, misalnya agar kue mudah diambil atau besek mudah ditumpuk.

**OPTIMASI TANPA KALKULUS: KETAKSAMAAN AM-GM**

Untuk bilangan positif, rata-rata aritmetika selalu lebih besar atau sama dengan rata-rata geometri:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \text{ dengan kesamaan jika } a = b = c. \text{ Trik olimpiade untuk kotak karton: tulis}$$

$$V = x(30 - 2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot (4x)(30 - 2x)(30 - 2x).$$

Jumlah ketiga faktor $4x + (30 - 2x) + (30 - 2x) = 60$ **tetap!** Maka $(4x)(30 - 2x)^2 \leq \left(\frac{60}{3}\right)^3 = 8000$, sehingga $V \leq 2000$. Kesamaan terjadi saat $4x = 30 - 2x$, yaitu $x = 5$. Hasilnya sama dengan kalkulus, tanpa menurunkan apa pun. Seninya ada pada memilih faktor yang jumlahnya tetap; untuk kebun, $x(40 - 2x) = \frac{1}{2}(2x)(40 - 2x) \leq \frac{1}{2} \cdot 20^2 = 200$.

29.5**Laju terkait: kalau satu berubah, yang lain ikut**

Lemparkan batu ke kolam ikan. Riak air melebar berbentuk lingkaran: jari-jarinya bertambah, dan luasnya juga bertambah. Kedua laju itu **terkait** karena r dan A dihubungkan oleh $A = \pi r^2$. Kalau kedua ruas diturunkan terhadap waktu t dengan aturan rantai (Bab 28), kita peroleh hubungan antara lajunya:

$$A = \pi r^2 \implies \frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

Inilah inti **laju terkait**: tulis persamaan yang menghubungkan besaran-besaran, turunkan terhadap waktu, baru masukkan angka pada saat yang ditanyakan.

Bahasa sederhana • Bayangkan dua anak yang bergandengan tangan. Kalau satu berlari, yang lain ikut bergerak. Laju terkait menjawab: kalau yang satu bergerak secepat ini, seberapa cepat yang lain?

KERJAKAN BERSAMA**Riak di kolam ikan**

Jari-jari riak bertambah 0,5 m/s. Seberapa cepat luas lingkaran riak bertambah saat jari-jarinya 3 m?

1 Hubungan: $A = \pi r^2$. Turunkan terhadap t : $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$.

2 Masukkan $r = 3$ dan $\frac{dr}{dt} = 0,5$: $\frac{dA}{dt} = 2\pi(3)(0,5) = 3\pi \approx 9,42 \text{ m}^2/\text{s}$.

Luasnya bertambah $\pm 9,42 \text{ m}^2$ per detik. Laju jari-jarinya tetap, tetapi laju luasnya makin besar seiring membesarnya lingkaran.

LAB MINI Tangga bambu yang tergelincir

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-29

x (kaki-tembok)
3,61 m

y (tinggi ujung)
3,46 m

dx/dt
0,5 m/s

dy/dt
-0,521 m/s

Dimas menarik kaki tangga menjauhi tembok dengan laju **tetap**. Tekan ► **Jalankan**. Apakah ujung atas tangga juga turun dengan laju tetap? Perhatikan grafik di kanan menjelang akhir. Kamu juga bisa menyeret kaki tangga saat simulasi berhenti, misalnya ke $x = 3$ m untuk tangga 5 m.

Pada tangga sepanjang L , berlaku $x^2 + y^2 = L^2$. Turunkan terhadap waktu: $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$, sehingga $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$. Untuk tangga 5 m dengan kaki ditarik 0,5 m/s, saat $x = 3$ dan $y = 4$ diperoleh $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(0,5) = -0,375$ m/s. Tanda negatif berarti ujung atas **turun**. Semakin kecil y , semakin besar perbandingan x/y , sehingga ujung atas meluncur makin kencang. Dalam kenyataan, ujung tangga akan terlepas dari tembok sebelum lajunya menjadi sangat besar.



AWAS JEBAKAN

Jangan memasukkan nilai sesaat sebelum menurunkan. Kalau kamu menulis $x = 3$ lebih dulu, persamaannya menjadi $9 + y^2 = 25$, dan turunannya memberi $2y \frac{dy}{dt} = 0$: seolah-olah tangga diam! Besaran yang berubah terhadap waktu harus tetap berupa variabel sampai proses menurunkan selesai.

COBA SENDIRI Bayangan di bawah lampu jalan

Lampu jalan setinggi 6 m. Dimas (tinggi 1,5 m) berjalan menjauhi tiang lampu dengan laju 1,2 m/s. Seberapa cepat panjang bayangannya bertambah? Seberapa cepat ujung bayangannya bergerak?

1 Misalkan jarak Dimas ke tiang x dan panjang bayangan s . Dua segitiga sebangun: $\frac{6}{x+s} = \frac{1,5}{s}$.

2 Kali silang: $6s = 1,5x + 1,5s \Rightarrow 4,5s = 1,5x \Rightarrow s = \frac{x}{3}$.

3 Turunkan: $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3} \frac{dx}{dt} = \frac{1,2}{3} = 0,4$ m/s. Ujung bayangan berada di $x + s$, jadi lajunya $1,2 + 0,4 = 1,6$ m/s.

Bayangan memanjang 0,4 m/s, dan ujungnya "berlari" 1,6 m/s, lebih cepat daripada Dimas sendiri. Menariknya, laju ini tidak bergantung pada jarak Dimas ke tiang.

29.6 Gerak lurus: posisi, kecepatan, percepatan

Jika $s(t)$ menyatakan posisi benda pada garis lurus, maka **kecepatan** adalah laju perubahan posisi dan **percepatan** adalah laju perubahan kecepatan:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

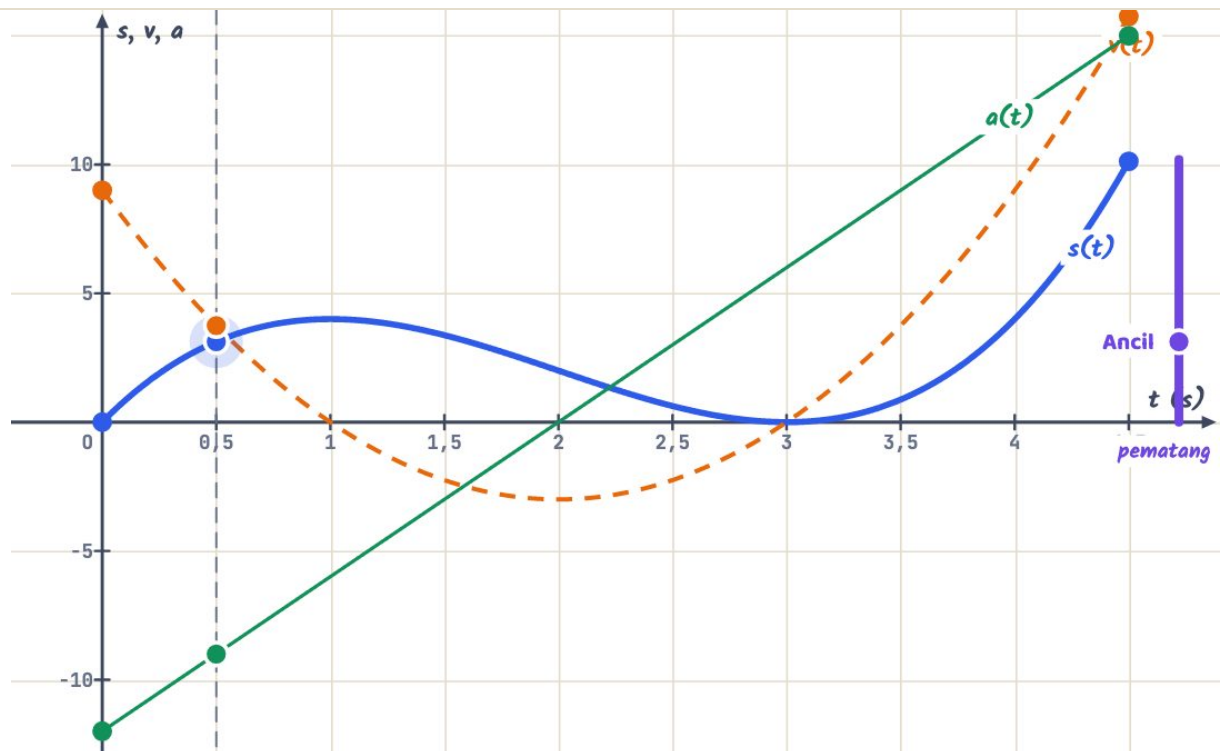
Speedometer motor hanya menunjukkan besar kecepatan (laju), tanpa tanda. Matematika memakai tanda untuk arah: $v > 0$ berarti maju, $v < 0$ berarti mundur. Benda makin cepat jika v dan a bertanda sama, dan makin lambat jika tandanya berlawanan.

Tanda v	Tanda a	Artinya
+	+	maju dan makin cepat
+	-	maju tetapi melambat (mengerem)
-	-	mundur dan makin cepat
-	+	mundur tetapi melambat
0	bukan 0	berhenti sesaat; jika tanda v berganti, benda berbalik arah

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad v = s', \quad a = v'$$

$$t = 0,5 : s = 3,13 \text{ m}, \quad v = 3,75 \text{ m/s}, \quad a = -9 \text{ m/s}^2$$

Biru = posisi s , oranye putus-putus = kecepatan v , hijau = percepatan a . Titik ungu di kanan menunjukkan posisi Ancil di pematang.



v dan a berlawanan tanda $\Rightarrow$ makin lambat (mengerem)

posisi s **3,13 m**kecepatan v **3,75 m/s**percepatan a **-9 m/s²**

Gerak Ancil

maju

Tekan ► **Jalankan** atau seret titik biru. Ancil maju, berhenti di $t = 1$, mundur, berhenti lagi di $t = 3$, lalu maju. Bandingkan: dari $t = 0$ sampai $t = 4$, posisinya hanya berpindah 4 m, tetapi jarak yang benar-benar ia tempuh 12 m. Mengapa? (Kurva ini sama dengan sketsa di 29.3!)

CONTOH Bola dilempar ke atas

Tinggi bola yang dilempar tegak ke atas adalah $h(t) = 20t - 5t^2$ meter. Kapan bola mencapai titik tertinggi, berapa tingginya, dan berapa percepatannya di sana?

1 $v(t) = h'(t) = 20 - 10t$. Di titik tertinggi bola berhenti sesaat: $v = 0 \Rightarrow t = 2$ s.

2 $h(2) = 40 - 20 = 20$ m.

3 $a(t) = v'(t) = -10$ m/s², selalu sama, termasuk di titik tertinggi.

Bola mencapai 20 m pada $t = 2$ s. Di puncak kecepatannya nol, tetapi percepatannya tetap -10 m/s² (tarikan gravitasi). Itulah sebabnya bola tidak melayang diam di udara.

MITOS

"Kalau

$$f'(c) = 0$$

, pasti ada puncak atau lembah di

c

."

MITOS

"Nilai terbesar sebuah fungsi selalu berada di titik stasioner."

FAKTA

Belum tentu.

$$f(x) = x^3$$

memenuhi

$$f'(0) = 0$$

, tetapi grafiknya terus naik. Periksa apakah tanda

$$f'$$

berubah di sekitar

c

."

FAKTA

Pada interval tertutup, juaranya bisa di ujung.

Untuk

$$f(x) = x^2$$

pada

$$[-1, 3]$$

, maksimumnya

$$f(3) = 9$$

, padahal

$$f'(3) = 6 \neq 0$$

. Selalu bandingkan juga nilai di ujung interval.

MITOS

"Di titik tertinggi lemparan, percepatan bola nol."

FAKTA

Yang nol adalah

kecepatannya

. Percepatannya tetap sekitar -10 m/s^2 . Kalau percepatannya juga nol, bola akan diam melayang selamanya.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TEOREMA NILAI RATA-RATA DAN GERBANG TOL

Bayangkan sebuah jalan tol mencatat waktu setiap mobil saat masuk dan keluar. Sebuah mobil menempuh 120 km dalam 1 jam, jadi kecepatan rata-ratanya 120 km/jam. **Teorema Nilai Rata-rata** menjamin: jika s kontinu pada $[a, b]$ dan dapat diturunkan pada (a, b) , maka ada saat c di antaranya dengan

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Artinya, pada suatu saat speedometer mobil itu *pasti* menunjukkan tepat 120 km/jam, walaupun tidak ada kamera yang memotretnya. Secara geometri: selalu ada garis singgung yang sejajar dengan tali busur dari $(a, s(a))$ ke $(b, s(b))$. Teorema ini juga menjadi dasar bukti bahwa $f' > 0$ pada suatu interval membuat f naik.



Kemasan kaleng

Pabrik menghitung ukuran kaleng yang memakai pelat logam paling sedikit untuk isi yang sama. Hemat sedikit per kaleng berarti hemat banyak untuk jutaan kaleng.



Kebun berpagar

Petani dengan kawat terbatas memilih ukuran petak agar lahan yang terlindungi dari ayam dan kambing seluas mungkin.



Harga martabak

Penjual mencari harga yang pas: terlalu murah untungnya tipis, terlalu mahal pembelinya pergi.



Pengereman motor

Kecepatan adalah turunan posisi dan perlambatan adalah turunan kecepatan. Keduanya menentukan jarak pengereman yang aman.



Pintu air saat banjir

Petugas memantau laju naiknya muka air. Laju terkait menghubungkan debit air yang masuk dengan kecepatan kenaikan tinggi air.

Cek Cepat

Titik stasioner $f(x) = x^2 - 8x + 3$ berada di $x = \dots$

8

4

-4

3

Diketahui $f'(2) = 0$ dan $f''(2) = -5$. Titik pada $x = 2$ adalah...

minimum lokal

titik belok

belum bisa ditentukan

maksimum lokal

Posisi benda $s(t) = t^2 - 6t$ meter. Kapan benda berhenti sesaat?

$t = 3 \text{ s}$

$t = 6 \text{ s}$

$t = 0 \text{ s}$

tidak pernah berhenti

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A

Tantangan Rumah: lomba kotak kertas A4

Bahan: 5 lembar kertas A4 bekas (29,7 cm × 21 cm), gunting, selotip, penggaris, pensil, beras atau pasir kering, gelas takar.

1. Pada setiap lembar, gambar persegi di keempat pojok dengan sisi berbeda: 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, dan 6 cm.
2. Gunting pojok-pojoknya, lipat sisi-sisinya ke atas, lalu rekatkan dengan selotip.
3. Hitung volume setiap kotak dengan rumus $V = x(29,7 - 2x)(21 - 2x)$ dan catat di tabel.
4. Isi setiap kotak dengan beras sampai rata, lalu tuang ke gelas takar (1 mL = 1 cm³). Bandingkan dengan hitunganmu.
5. Hitung potongan terbaik dengan turunan: selesaikan $V'(x) = 0$.

Pertanyaan: Kotak mana yang memenangi lomba? Apakah potongan terbaik hasil hitunganmu berada di antara dua kotak terbesar? Mengapa hasil takaran beras sedikit berbeda dari rumus?

RINGKASAN KILAT Bab 29 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- menentukan interval fungsi **naik** dan **turun** serta **titik stasioner** dari tanda turunan pertama
- membedakan maksimum lokal, minimum lokal, dan titik belok dengan **uji turunan pertama dan kedua**
- **menggambar sketsa kurva** dari titik potong, titik stasioner, dan kecekungan
- menyelesaikan masalah **optimasi**: kotak karton, kaleng hemat bahan, kebun berpagar, dan untung pedagang
- menghitung **laju terkait** dan menganalisis gerak lurus dengan posisi, kecepatan, dan percepatan

Istilah kunci

naik

turun

titik stasioner

maksimum lokal

minimum lokal

nilai ekstrem

cekung ke atas

cekung ke bawah

titik belok

optimasi

laju terkait

kecepatan

percepatan

 Rumus penting

$$V = x(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume kotak dari karton. Gunting persegi x di keempat pojok, lalu lipat: tinggi kotak x , alasnya $(p - 2x)$ kali $(l - 2x)$.

$$L = x(K - 2x)$$

Kebun berpagar di samping tembok. Dua sisi lebar x memakai $2x$ meter kawat; sisanya, $K - 2x$, menjadi sisi panjang yang sejajar tembok.

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Bahan kaleng tertutup. Bahan = tutup dan alas ($2\pi r^2$) ditambah badan ($2\pi rh$). Karena $h = V/(\pi r^2)$, bahan badan sama dengan $2V/r$.

 Jangan sampai terjebak

- $f'(c) = 0$ tidak menjamin ada puncak atau lembah di c .
- Jangan memasukkan nilai sesaat sebelum menurunkan.

 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=29

 Teka-teki untuk Bab 30

Di bab ini kita berjalan dari posisi ke kecepatan: $v = s'$. Sekarang balik arahnya. Motor Dimas mulai dari diam, dan speedometrnya mencatat kecepatan $v(t) = 2t$ m/s selama 10 detik. Berapa meter motor itu berjalan? Lebih menantang lagi: bagaimana kalau kecepatannya $v(t) = t^2$?

▼ Intip petunjuk

Gambar grafik v terhadap t . Untuk $v = 2t$, daerah di bawah grafik dari $t = 0$ sampai $t = 10$ berbentuk segitiga dengan alas 10 dan tinggi 20. Luasnya 100, dan itulah jaraknya dalam meter! Untuk $v = t^2$, daerahnya melengkung. Potonglah menjadi banyak persegi panjang tipis dan jumlahkan. Bab 30 membahas cara menjumlahkan tak hingga banyak persegi panjang itu: **integral**.

30

Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga

Berapa luas danau yang tepinya meliuk-liuk? Berapa liter nasi di dalam sebuah tumpeng? Jawabannya datang dari ide yang nekat: potong menjadi tak hingga banyak irisan tipis, lalu jumlahkan semuanya.



Setelah bab ini, kamu bisa

- menaksir luas daerah lengkung dengan menghitung kotak dan **jumlah Riemann**;
- memahami **integral tentu** sebagai luas bertanda, misalnya jarak dari grafik kecepatan;
- menentukan **antiturunan** (integral tak tentu) dengan aturan pangkat;
- memakai **Teorema Dasar Kalkulus** untuk menghitung integral tentu dengan cepat;
- menghitung **luas antara dua kurva** dan **volume benda putar**, misalnya volume tumpeng.

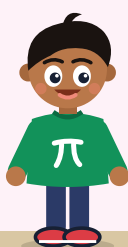
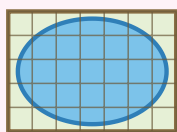
DANAU TANPA RUMUS

KOMIK • 4 PANEL

Sore hari di klub matematika

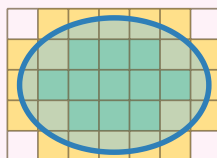
DIMAS

Kak, tepi danau kan meliuk-liuk. Rumus luasnya apa? Nggak ada, kan?



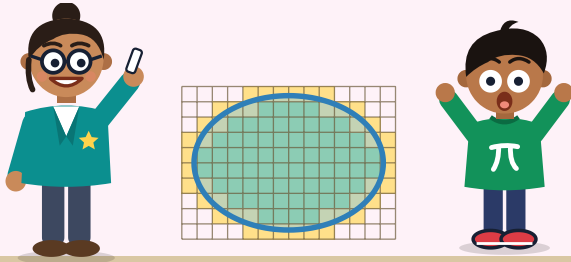
AYU

Aku hitung: 11 kotak penuh air, 20 kotak terpotong. Satu kotak 1 km², jadi luasnya di antara 11 dan 31 km².

1 kotak = 1 km²

KAK LINTANG

Perkecil kotaknya jadi setengah! Sekarang luasnya terjepit di antara 17 dan 28 km². Celahnya menyempit!

TING!**Ancil muncul dari tepi danau...****ANCIL**

Buat irisannya setipis mungkin, lalu jumlahkan semuanya. Hasilnya tepat! Itulah integral.

DIMAS

Tak hingga banyak irisan... kok jumlahnya nggak tak hingga?

**Tebak Dulu!**

Daerah di bawah $y = x^2$ dari $x = 0$ sampai $x = 1$ terletak di dalam persegi satuan yang luasnya 1. Berapa luas daerah itu?

$\frac{1}{2}$, karena bentuknya mirip segitiga.

Tepat $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{4}$.

Tidak bisa dihitung tepat karena sisinya melengkung.

Jawabannya: tepat $\frac{1}{3}$. Parabola melengkung di bawah garis $y = x$, jadi luasnya pasti kurang dari luas segitiga, yaitu $\frac{1}{2}$. Dengan persegi panjang yang makin banyak, jumlah luasnya makin dekat ke 0,3333... Buktinya ada di 30.1, dan di 30.4 kamu akan mendapatkannya hanya dalam satu baris!

30.1 Menaksir luas: dari kotak ke persegi panjang

Bab 29 ditutup dengan pertanyaan: *berapa luas daerah di bawah sebuah kurva?* Rumus luas yang kamu kenal hanya bekerja untuk bangun bersisi lurus (persegi, segitiga, trapesium) dan lingkaran. Danau, daun, atau daerah di bawah parabola tidak punya rumus siap pakai. Jadi kita mulai dengan cara paling jujur: **menghitung kotak**.

Bahasa sederhana • Letakkan kertas berpetak di atas gambar danau. Hitung kotak yang **seluruhnya** berisi air: hasilnya pasti kekecilan. Lalu hitung juga kotak yang hanya **tersentuh** air: hasilnya pasti kebesaran. Luas sebenarnya terjepit di antara keduanya. Makin kecil kotaknya, makin rapat jepitannya.

LAB MINI Peta danau: perkecil kotak, rapatkan jepitan

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

Kotak penuh

4

Kotak sebagian

14

Taksiran bawah

16 km²

Taksiran atas

72 km²

Penuh + $\frac{1}{2}$ sebagian

44 km²

Luas sebenarnya

36,44 km²

Pilih ukuran kotak dari 2 km sampai 125 m, atau tekan 🔍 **Perkecil kotak**. Kotak hijau seluruhnya berisi air, kotak kuning hanya sebagian. Lihat jepitan di kanan: menjadi berapa lebar celah antara taksiran bawah dan atas setiap kali sisi kotak dibuat setengahnya? Arahkan kursor ke sebuah kotak untuk melihat jenisnya.

Kertas berpetak cocok untuk peta. Untuk daerah di bawah grafik $y = f(x)$, ada cara yang lebih rapi: potong daerah itu menjadi **pita-pita tegak** yang sama lebar, lalu ganti setiap pita dengan sebuah persegi panjang.



DEFINISI • JUMLAH RIEMANN

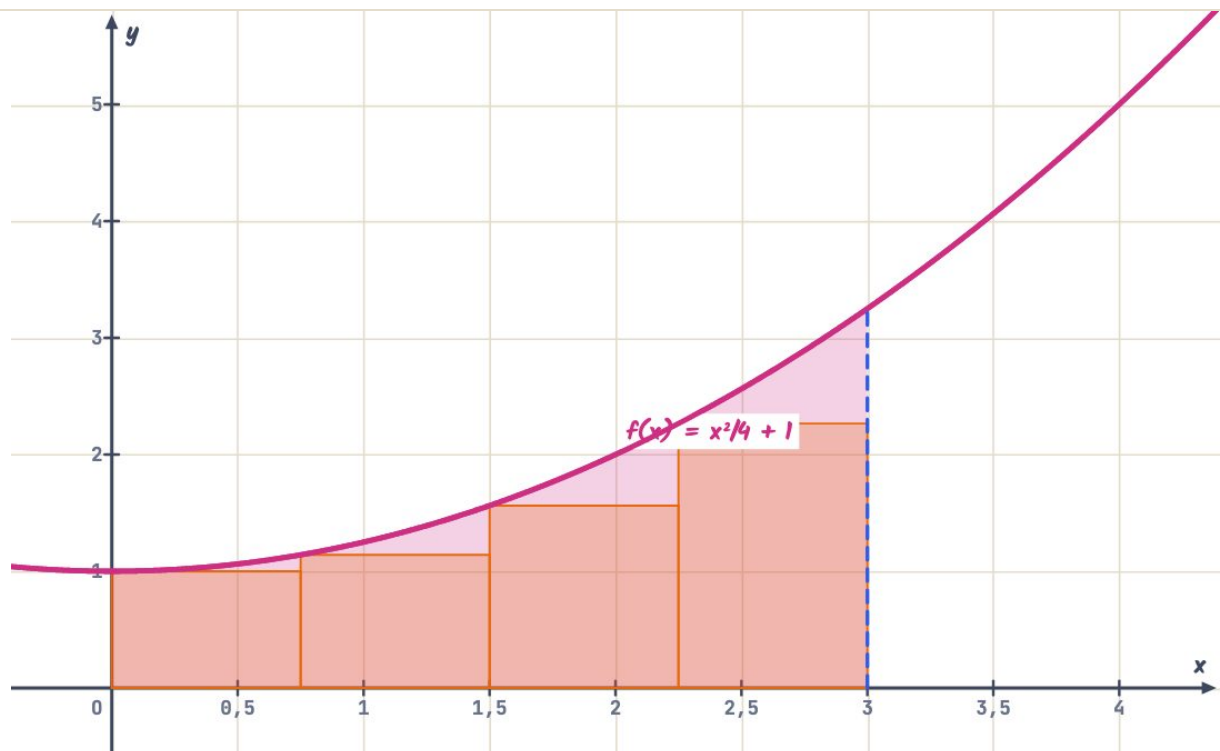
Bagi selang $[a, b]$ menjadi n bagian yang sama lebar, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Dari bagian ke- i , pilih satu titik x_i^* (ujung kiri, ujung kanan, atau titik tengah). Jumlah

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + \cdots + f(x_n^*) \Delta x$$

disebut **jumlah Riemann**. Setiap suku $f(x_i^*) \Delta x$ adalah luas satu persegi panjang: tinggi $f(x_i^*)$ kali lebar Δx .

$$\int_0^b \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

$n = 4$: jumlah Riemann $\approx 4,4766$, luas eksak = 5,25



tinggi dari ujung kiri: kurva naik $\Rightarrow$ taksiran kekecilan

Jumlah Riemann
4,4766

Luas eksak (integral)
5,25

Selisih
-0,7734

Tekan ► **Jalankan**: n bertambah sendiri dan persegi panjang makin ramping. Bandingkan **Jumlah Riemann** dengan **Luas eksak**. Ganti cara mengambil tinggi (0 kiri, 1 kanan, 2 tengah): mana yang paling cepat mendekati luas eksak?

Sekarang kembali ke Tebak Dulu. Untuk $y = x^2$ pada $[0, 1]$, jumlah Riemann bisa dihitung dengan rumus jumlah kuadrat dari Bab 15, lalu kita lihat apa yang terjadi ketika n membesar.

▼ **Bukti: luas di bawah $y = x^2$ dari 0 sampai 1 sama dengan $\frac{1}{3}$**

Bagi $[0, 1]$ menjadi n bagian selebar $\frac{1}{n}$ dan ambil tinggi di ujung kanan, yaitu $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^2}$. Jumlah Riemann kanannya

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Tulis $R_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$. Ketika $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, sehingga $R_n \rightarrow \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$. Jumlah kirinya $L_n = R_n - \frac{1}{n}$ juga menuju $\frac{1}{3}$. Luas sebenarnya selalu terjepit di antara L_n dan R_n , jadi luasnya tepat $\frac{1}{3}$. ■

RUMUS HIDUP

Jumlah Riemann kanan untuk $y = x^2$

$$R_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i \cdot b}{n} \right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3 (n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Jumlahkan n persegi panjang di bawah $y = x^2$ dari 0 sampai b . Makin banyak persegi panjangnya, makin dekat hasilnya ke $b^3/3$.

b Batas kanan b

n Banyak persegi panjang n

R_n Jumlah Riemann satuan luas

JUMLAH RIEMANN

0,46875

satuan luas

Dengan **4** persegi panjang, jumlahnya **0,46875**. Luas eksaknya $b^3/3 = \mathbf{0,333}$. Kelebihannya tinggal **0,135**, dan terus mengecil ketika n membesar.

Cek satuan: Satuan luas = satuan sumbu- x $\times$ satuan sumbu- y .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RIEMANN-KUADRAT



ATURAN TRAPESIUM

Ambil rata-rata jumlah kiri dan jumlah kanan. Hasilnya sama dengan mengganti setiap pita dengan **trapesium**. Jika tinggi kurva di titik-titik pembagi adalah $y_0, y_1, \dots, y_n$, maka

$$\text{Luas} \approx \frac{\Delta x}{2} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n].$$

Cara ini dipakai juru ukur yang hanya punya data lebar di beberapa titik, misalnya lebar sungai atau danau.

Tim pemetaan desa menyeberangi sebuah danau dengan perahu setiap 200 m, dari ujung barat ke ujung timur, dan mengukur lebar danau pada setiap lintasan: 0, 380, 520, 610, 450, dan 0 m. Taksir luas danau dengan aturan trapesium.

- 1 Ada 5 pita selebar $\Delta x = 200$ m dengan $y_0 = 0, y_1 = 380, y_2 = 520, y_3 = 610, y_4 = 450, y_5 = 0$.
- 2 Luas $\approx \frac{200}{2} [0 + 2(380 + 520 + 610 + 450) + 0] = 100 \times 3920$, yaitu 392.000 m².
- 3 Ubah satuan: 1 hektare = 10.000 m², jadi luasnya $\pm 39,2$ ha atau $\pm 0,39$ km².

Luas danau sekitar 392.000 m² (± 39 ha). Tidak ada rumus bangun datar yang dipakai: hanya lebar-lebar yang diukur lalu dijumlahkan!



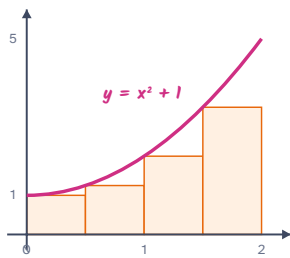
TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 2.200 tahun lalu, **Archimedes** dari Syracuse (± 287 –212 SM) menghitung luas tembereng parabola dengan "metode penghabisan". Ia mengisi daerah itu dengan segitiga-segitiga yang makin kecil, lalu menjumlahkan luasnya yang membentuk deret geometri $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{4}{3}$. Hasilnya: luas tembereng parabola sama dengan $\frac{4}{3}$ luas segitiga tertentu di dalamnya. Itulah gagasan integral, hampir dua ribu tahun sebelum kata "integral" dipakai.

30.2

Integral tentu: luas bertanda dan jarak tempuh

Apa yang terjadi jika persegi panjangnya tak hingga banyak dan tak hingga tipis? Jumlah Riemann mendekati satu bilangan tertentu. Bilangan itu diberi nama dan lambang khusus. Lihat bagaimana lambang itu lahir.



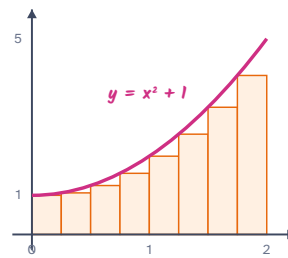
$n = 4$ persegi panjang

lebar $\Delta x = 0,5$

jumlah = 3,75

Celah di atas persegi panjang
= luas yang terlewat.

Langkah 1. Ganti daerah di bawah $y = x^2 + 1$ pada $[0, 2]$ dengan 4 persegi panjang selebar $\Delta x = 0,5$, tingginya diambil di ujung kiri. Jumlah luasnya $1 \cdot 0,5 + 1,25 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 + 3,25 \cdot 0,5 = 3,75$.



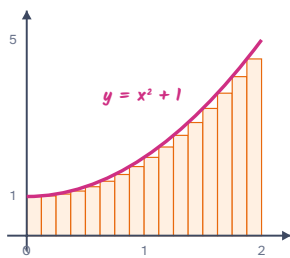
$n = 8$ persegi panjang

lebar $\Delta x = 0,25$

jumlah $\approx 4,19$

Celahnya mengecil.

Langkah 2. Gandakan menjadi 8 persegi panjang ($\Delta x = 0,25$). Celahnya mengecil dan jumlahnya naik menjadi 4,1875.



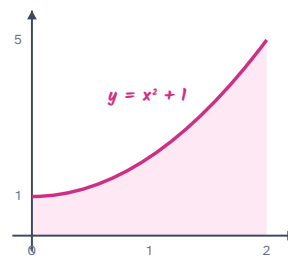
$n = 16$ persegi panjang

lebar $\Delta x = 0,125$

jumlah $\approx 4,42$

Hampir menempel pada kurva.

Langkah 3. Dengan 16 persegi panjang ($\Delta x = 0,125$), jumlahnya $\approx 4,42$. Persegi panjangnya hampir menempel pada kurva.



$n \rightarrow \infty$ dan $\Delta x \rightarrow 0$

$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = 14/3$

$\approx 4,67$ (luas eksak)

Σ menjadi $\int$ (huruf S panjang),
 Δx menjadi dx .

Langkah 4. Jika $n \rightarrow \infty$, jumlahnya menuju luas eksak

$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = \frac{14}{3} \approx 4,67$. Lambang Σ berubah menjadi $\int$, dan Δx menjadi dx .



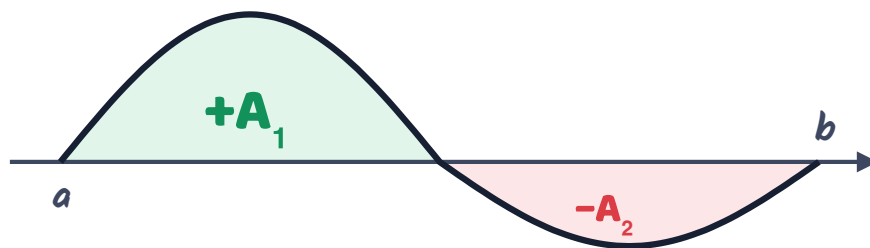
DEFINISI • INTEGRAL TENTU

Untuk fungsi f yang kontinu pada $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

Bilangan a disebut **batas bawah**, b **batas atas**, $f(x)$ **integran**, dan dx mengingatkan bahwa kita menjumlahkan pita-pita yang sangat tipis searah sumbu- x . Hasil limitnya sama, titik x_i^* mana pun yang dipilih.

Ada satu kejutan. Jika grafik berada **di bawah** sumbu- x , tinggi $f(x_i^*)$ bernilai negatif, sehingga "luas" persegi panjangnya ikut negatif. Jadi integral tentu adalah **luas bertanda**: daerah di atas sumbu- x dihitung positif, daerah di bawah sumbu- x dihitung negatif.



$$\int f(x) dx$$

$$= A_1 - A_2$$

di atas sumbu- x : +

di bawah sumbu- x : -

$$\text{luas daerah} = A_1 + A_2$$

Integral tentu menjumlahkan luas **bertanda**. Luas daerah yang sebenarnya menjumlahkan keduanya sebagai bilangan positif.



Tebak Dulu!

Berapa nilai $\int_{-1}^1 x dx$?

1, karena ada dua segitiga yang masing-masing luasnya $\frac{1}{2}$.

2, yaitu panjang selangnya.

0.

Tidak terdefinisi, karena sebagian grafiknya negatif.

Jawabannya: 0. Segitiga di kanan (di atas sumbu- x) bernilai $+\frac{1}{2}$, sedangkan segitiga di kiri (di bawah sumbu- x) bernilai $-\frac{1}{2}$. Integral tentu menjumlahkan luas **bertanda**, jadi hasilnya $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Luas daerahnya sendiri tetap 1.



SIFAT-SIFAT INTEGRAL TENTU

- $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ dan $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
- $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$: daerah boleh dipotong menjadi beberapa bagian.
- $\int_a^a f(x) dx = 0$ dan $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.
- $\int_a^b k dx = k(b - a)$, yaitu luas persegi panjang.



AWAS JEBAKAN

Integral tentu belum tentu sama dengan luas daerah. Jika soal meminta **luas**, cari dulu titik potong grafik dengan sumbu- x , hitung integral pada setiap bagian, lalu jumlahkan **nilai mutlaknya**.

Contoh: $\int_{-1}^1 x \, dx = 0$, padahal luas kedua segitiganya $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Integral juga menjawab pertanyaan sehari-hari. Speedometer motor menunjukkan kecepatan pada setiap saat. Jika kecepatan itu dikalikan selang waktu yang sangat pendek lalu dijumlahkan terus-menerus, hasilnya jarak tempuh. Itu jumlah Riemann!

Bahasa sederhana • Jika motor melaju tetap 10 m/s selama 20 detik, jaraknya $10 \times 20 = 200$ m. Pada grafik kecepatan-waktu, angka itu adalah luas persegi panjang setinggi 10 dan selebar 20. Kalau kecepatannya berubah-ubah, jaraknya tetap sama dengan **luas di bawah grafik**.

$$\text{jarak} = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt$$

$$s(T) = \int_0^T v(t) dt$$

$$s(10) = \int_0^{10} v(t) dt = 84 \text{ m}$$



melaju tetap 12 m/s: tiap detik jarak bertambah 12 m

Kecepatan $v(t)$

12 m/s

Jarak = luas arsir

84 m

Kecepatan rata-rata

8,4 m/s

Seret titik jingga atau tekan ► **Jalankan**. Kapan luas arsir bertambah paling cepat? Berapa jarak total sampai motor berhenti di detik ke-30?

CONTOH Jarak motor Dimas ke sekolah

Motor Dimas mulai dari diam. Kecepatannya naik teratur sampai 10 m/s dalam 5 detik, lalu tetap 10 m/s selama 20 detik, kemudian turun teratur sampai berhenti dalam 5 detik. Berapa jarak yang ditempuh?

- 1 Grafik kecepatan-waktunya berbentuk trapesium: alas bawah 30 s, alas atas 20 s, tinggi 10 m/s.
- 2 Pecah menjadi tiga bagian: segitiga $\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$ m, persegi panjang $20 \times 10 = 200$ m, dan segitiga 25 m.
- 3 Jumlahkan: $25 + 200 + 25 = 250$ m. Cek dengan rumus trapesium: $\frac{30+20}{2} \times 10 = 250$ m ✓.

Jarak tempuhnya 250 m, yaitu luas di bawah grafik kecepatan.

30.3 Antiturunan dan integral tak tentu

Di Bab 28 kamu belajar menurunkan: dari fungsi posisi $s(t)$ ke kecepatan $v(t) = s'(t)$. Sekarang kita berjalan mundur. Jika kecepatannya diketahui, fungsi posisi apa yang turunannya sama dengan kecepatan itu? Pertanyaan "mundur" ini disebut mencari **antiturunan**.



DEFINISI • ANTITURUNAN DAN INTEGRAL TAK TENTU

F disebut **antiturunan** dari f jika $F'(x) = f(x)$. Kumpulan semua antiturunan f ditulis

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

dan disebut **integral tak tentu**. Huruf C adalah **konstanta integrasi**. Konstanta apa pun hilang ketika diturunkan, jadi x^2 , $x^2 + 5$, dan $x^2 - 100$ semuanya antiturunan dari $2x$.

Bahasa sederhana • Antiturunan itu seperti main tebak-tebakan terbalik. Kak Lintang bertanya, "Turunan sebuah fungsi adalah $2x$. Fungsinya apa?" Kamu menjawab x^2 , karena turunan x^2 memang $2x$. Tetapi $x^2 + 7$ juga benar! Karena itu kita selalu menambahkan $+ C$.



ATURAN PANGKAT UNTUK INTEGRAL

Untuk $n \neq -1$,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Integral juga bersifat linear: $\int [a f(x) + b g(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$

▼ Mengapa aturan ini benar?

Cukup turunkan ruas kanan: $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} + 0 = x^n$. Turunannya kembali ke x^n , jadi ruas kanan memang antiturunan x^n . Syarat $n \neq -1$ diperlukan karena penyebut $n+1$ tidak boleh nol.



TRIK KAK LINTANG

"**Naik satu, bagi yang baru.**" Pangkat dinaikkan satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Contoh:

$\int 5x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$. Ragu? **Turunkan jawabanmu.** Kalau hasilnya kembali ke soal, jawabanmu pasti benar.

Fungsi $f(x)$	$\int f(x) dx$	Cek dengan menurunkan
k (konstanta)	$kx + C$	$(kx)' = k$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = x^n$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
e^x	$e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$(-\cos x)' = \sin x$
$\cos x$	$\sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$



AWAS JEBAKAN

Aturan pangkat tidak berlaku untuk $n = -1$. Rumusnya akan menghasilkan $\frac{x^0}{0}$, pembagian dengan nol! Untuk $\int \frac{1}{x} dx$ jawabannya $\ln|x| + C$. Jangan lupa juga menulis $+ C$ pada setiap integral tak tentu.

RUMUS HIDUP

Luas di bawah $y = x^n$

$$L = \int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Naikkan pangkatnya satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Daerah di bawah x^n dari 0 sampai b mengisi tepat $1/(n+1)$ bagian persegi panjang $b \times b^n$ yang membungkusnya.

b

Batas atas b

n

Pangkat n

L

Luas satuan luas

LUAS**0,3333**

satuan luas

 $\frac{1}{3}$: angka rahasia volume kerucut dan tumpeng!

Pangkat **2** naik menjadi **3**, lalu dibagi **3**: luasnya **0,3333**. Persegi panjang pembungkusnya $b \times b^n = 1$, dan daerah ini mengisi tepat $1/3$ bagiannya.

Cek satuan: Luas memakai satuan sumbu-x $\times$ satuan sumbu-y.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-INTEGRAL-PANGKAT](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-INTEGRAL-PANGKAT)

CONTOH Menemukan fungsi dari turunannya

Tentukan $F(x)$ jika $F'(x) = 6x^2 + 4x - 5$ dan grafik F melalui titik $(0, 3)$.

- 1 Integralkan suku demi suku: $\int (6x^2 + 4x - 5) dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C = 2x^3 + 2x^2 - 5x + C$.
- 2 Cek dengan menurunkan: $(2x^3 + 2x^2 - 5x)' = 6x^2 + 4x - 5 \checkmark$.
- 3 Melalui $(0, 3)$ berarti $F(0) = C = 3$.

$F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 5x + 3$. Syarat "melalui sebuah titik" memilih satu kurva dari seluruh keluarga kurva $F(x) + C$.

ADU CEPAT Antiturunan kilat

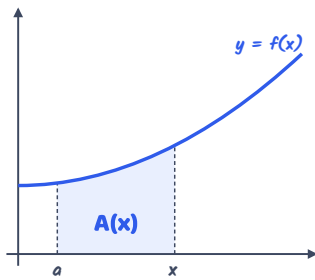
ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Naik satu, bagi yang baru: koefisien baru = koefisien lama $\div$ pangkat baru. Contoh: $\int 12x^3 dx = 3x^4 + C$.

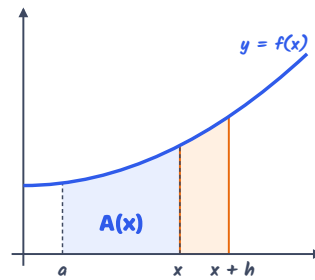
30.4 Teorema Dasar Kalkulus: jembatan dua dunia

Sejauh ini ada dua dunia yang tampak terpisah. Dunia **luas** berisi integral tentu dan jumlah Riemann yang melelahkan. Dunia **antiturunan** berisi aturan pangkat yang cepat. Teorema Dasar Kalkulus adalah jembatan di antara keduanya. Ikuti animasi berikut langkah demi langkah.



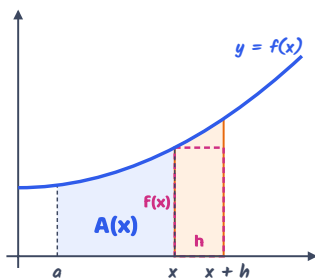
Fungsi luas $A(x)$
 = luas di bawah kurva f dari a sampai x .
 Geser x , maka $A(x)$ ikut berubah.

Langkah 1. Misalkan $A(x)$ adalah luas di bawah kurva f dari titik tetap a sampai x . Jika x bergeser, luasnya berubah. Jadi A adalah sebuah fungsi.



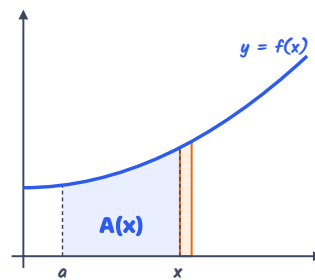
Tambah x sejauh h .
 Luas bertambah sebesar pita jingga yang tipis:
 $A(x+h) - A(x)$

Langkah 2. Geser x sedikit sejauh h . Luas bertambah sebesar pita tipis berwarna jingga: $A(x+h) - A(x)$.



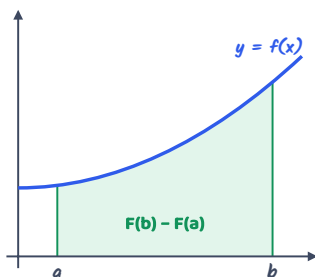
Pita $\approx$ persegi panjang
 lebar h , tinggi $f(x)$:
 $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$
 Sisa segitiga kecil di atasnya makin tak berarti.

Langkah 3. Pita tipis itu hampir berupa persegi panjang selebar h dan setinggi $f(x)$, jadi $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$.



Bagi dengan h , lalu $h \rightarrow 0$:
 $A'(x) = f(x)$
 Laju pertambahan luas = tinggi kurva di x .
 A adalah antiturunan f !

Langkah 4. Bagi dengan h , lalu buat $h \rightarrow 0$:
 $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \rightarrow f(x)$, yaitu $A'(x) = f(x)$. Fungsi luas adalah antiturunan f !



Untuk antiturunan F apa pun:
 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
 Konstanta C saling menghapus, jadi C boleh diabaikan.

Langkah 5. Antiturunan lain hanya berbeda konstanta: $F' = A + C$. Maka $\int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a) = F(b) - F(a)$. Luas dihitung dengan antiturunan!



TEOREMA DASAR KALKULUS

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$.

1. Fungsi luas $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ memenuhi $A'(x) = f(x)$.
2. Jika F adalah antiturunan f yang mana pun, maka

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

▼ Bukti singkat

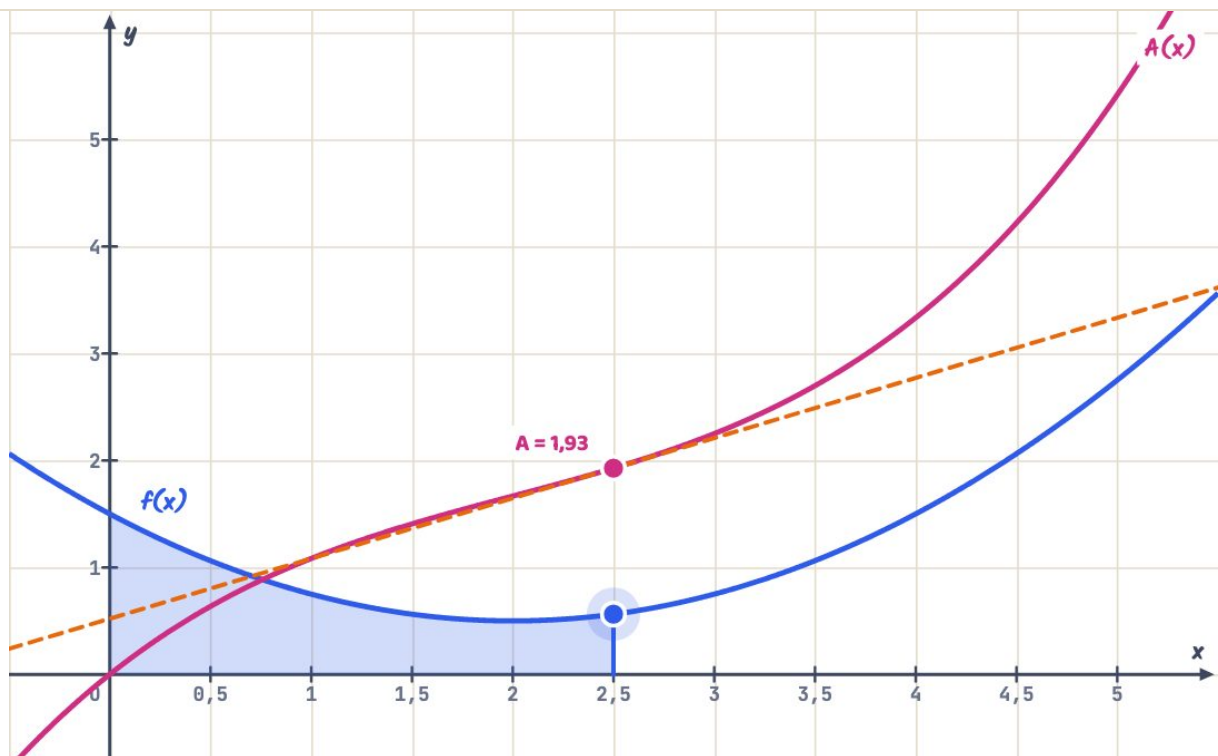
- (1) Pada selang $[x, x+h]$, misalkan m dan M adalah nilai terkecil dan terbesar f . Pita tipisnya terjepit di antara dua persegi panjang: $mh \leq A(x+h) - A(x) \leq Mh$. Bagi dengan h : $m \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq M$. Ketika $h \rightarrow 0$, m dan M sama-sama menuju $f(x)$ karena f kontinu. Jadi $A'(x) = f(x)$.
- (2) A dan F sama-sama antiturunan f , jadi selisihnya konstan: $A(x) = F(x) + C$. Karena $A(a) = 0$, diperoleh $C = -F(a)$. Maka $\int_a^b f(x) dx = A(b) = F(b) - F(a)$. ■



$$A(x) = \int_0^x f(t) dt \implies A'(x) = f(x)$$

$$A(2,5) \approx 1,927, \quad A'(2,5) = f(2,5) \approx 0,563$$

Kurva biru adalah $f(x) = x^2/4 - x + 1,5$. Kurva magenta adalah $A(x)$, luas daerah biru dari 0 sampai X . Garis singgung jingga mengukur seberapa cepat luas itu bertambah.



Luas arsir A(X)

1,927

Tinggi f(X)

0,563

Kemiringan A di X

0,563

Tekan ► **Jalankan** atau seret titik biru. Bandingkan bacaan **Tinggi f(X)** dan **Kemiringan A di X**: selalu sama! Di X berapa luas bertambah paling pelan?

Sekarang Tebak Dulu di awal bab selesai dalam satu baris: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$. Tidak perlu lagi menjumlahkan ratusan persegi panjang!

Hitung $\int_1^3 (x^2 + 2x) dx$.

- 1 Antiturunan: $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$. Konstanta C tidak perlu ditulis karena akan saling menghapus.
- 2 Masukkan batas: $F(3) = 9 + 9 = 18$ dan $F(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.
- 3 Kurangkan: $18 - \frac{4}{3} = \frac{50}{3} \approx 16,67$.

$\int_1^3 (x^2 + 2x) dx = \frac{50}{3}$. Grafiknya berada di atas sumbu- x pada $[1, 3]$, jadi nilai ini juga luas daerahnya.



ADU CEPAT

Integral tentu kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-30

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Antiturunannya $(c \div \text{pangkat baru}) \cdot x^{\text{pangkat baru}}$. Masukkan batas atas, lalu kurangi nilai di batas bawah 0 (hasilnya 0).



TAMU DARI MASA LALU

Teorema Dasar Kalkulus ditemukan secara terpisah oleh **Isaac Newton** di Inggris (sekitar 1665–1666) dan **Gottfried Wilhelm Leibniz** di Jerman (sekitar 1675). Keduanya sempat berselisih panjang soal siapa yang lebih dulu. Lambang $\int$ dan dx yang kita pakai sekarang berasal dari Leibniz: $\int$ adalah huruf S yang dipanjangkan, dari kata Latin *summa* (jumlah). Hampir dua abad kemudian, **Bernhard Riemann** (1854) merumuskan definisi integral dengan jumlah persegi panjang secara teliti.

MITOS

"Kalau potongannya tak hingga banyak, jumlahnya pasti tak hingga."

FAKTA

Potongannya juga makin tipis. Jumlah tak hingga banyak suku bisa menuju bilangan tertentu, seperti

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

di Bab 15. Integral memakai ide yang sama.

MITOS

"Integral tentu selalu sama dengan luas daerah."

FAKTA

Integral tentu adalah luas

bertanda

. Bagian di bawah sumbu- x

dihitung negatif, sehingga

$$\int_{-1}^1 x \, dx = 0$$

walaupun luas daerahnya 1.

MITOS

" $+C$ cuma hiasan, boleh dilupakan."

FAKTA

$+C$

mewakili seluruh keluarga antiturunan. Pada soal dengan syarat awal, misalnya posisi awal motor, nilai

C

justru yang dicari.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

JUMLAH YANG MENYAMAR SEBAGAI INTEGRAL

Berapa nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$? Keluarkan $\frac{1}{n}$: suku ke- k menjadi $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+k/n}$. Ini jumlah Riemann kanan untuk $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pada $[0, 1]$ dengan $\Delta x = \frac{1}{n}$! Jadi limitnya

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln 2 \approx 0,693.$$

Trik "kenali jumlah Riemann" ini sering muncul di olimpiade: carilah pola $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

30.5

Luas daerah antara dua kurva

Bagaimana jika daerahnya tidak menempel pada sumbu- x , tetapi terjepit di antara dua kurva? Potong lagi menjadi pita-pita tegak. Tinggi setiap pita adalah **kurva atas dikurangi kurva bawah**.



LUAS ANTARA DUA KURVA

Jika $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$, luas daerah di antara kedua kurva adalah

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b (\text{atas} - \text{bawah})$$

Batas a dan b biasanya titik potong kedua kurva, yaitu penyelesaian $f(x) = g(x)$.

KERJAKAN BERSAMA

Daerah antara garis dan parabola

Hitung luas daerah yang dibatasi parabola $y = x^2$ dan garis $y = x + 2$.

1 Titik potong: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$, jadi $x = -1$ dan $x = 2$.

2 Uji di $x = 0$: garis bernilai 2, parabola bernilai 0. Jadi garis berada di atas.

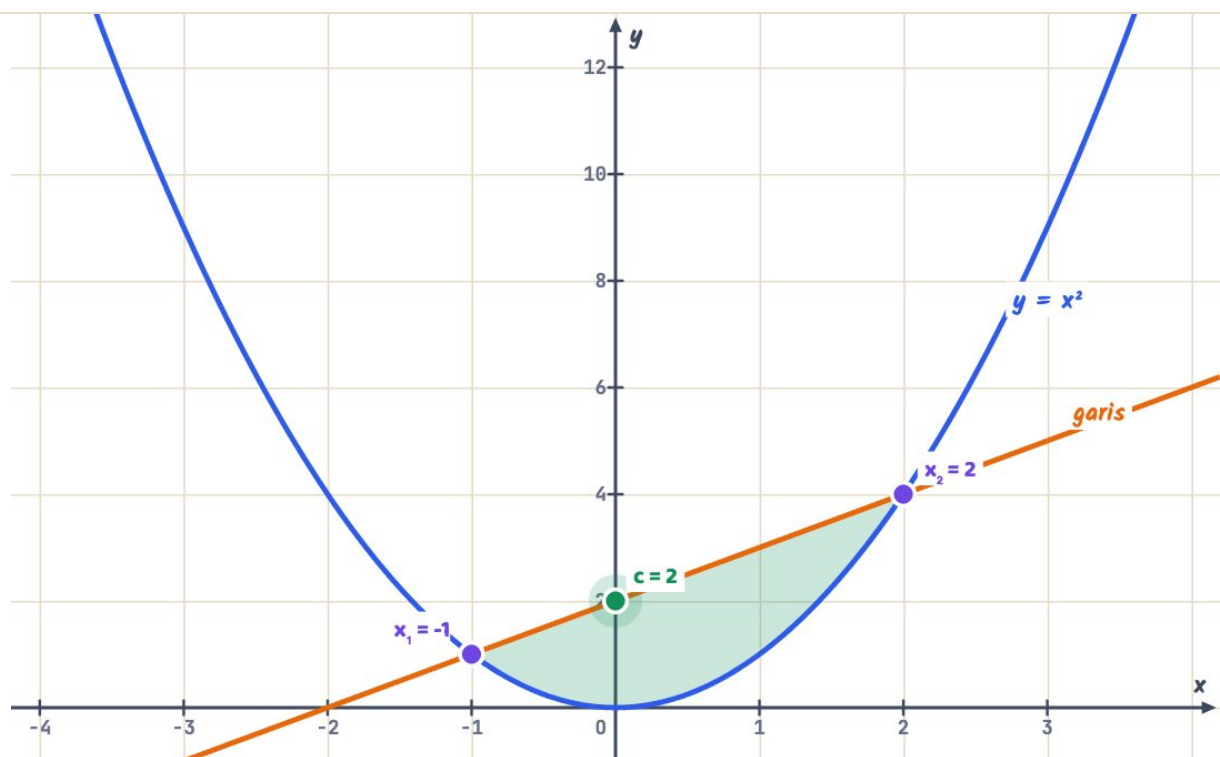
3
$$L = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}.$$

Luasnya $\frac{9}{2} = 4,5$ satuan luas. Cocokkan dengan Grafik Hidup di bawah pada $m = 1$ dan $c = 2$.

$$L = \int_{x_1}^{x_2} [(mx + c) - x^2] dx = \frac{D\sqrt{D}}{6}$$

$$D = 9 : L = \frac{9\sqrt{9}}{6} \approx 4,5$$

Garis $y = mx + c$ memotong parabola $y = x^2$ di x_1 dan x_2 . Diskriminan persamaan $x^2 - mx - c = 0$ adalah $D = m^2 + 4c$.



✧ D bilangan kuadrat: titik potongnya rasional

$$D = m^2 + 4c$$

9

Luas (integral)

4,5

Rumus cepat $D\sqrt{D}/6$

4,5

Ubah gradien m atau seret titik hijau di sumbu- y . Daerah hijau selalu berada di antara garis (atas) dan parabola (bawah). Perhatikan: luas dari integral dan dari rumus cepat $\frac{D\sqrt{D}}{6}$ selalu sama!



TRIK KAK LINTANG: RUMUS CEPAT

Untuk daerah antara parabola dan garis (atau dua parabola), susun persamaan titik potongnya menjadi $ax^2 + bx + c = 0$ dengan diskriminan $D = b^2 - 4ac$. Luasnya langsung

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}.$$

Contoh di atas: $x^2 - x - 2 = 0$, $D = 1 + 8 = 9$, $L = \frac{9 \cdot 3}{6} = 4,5 \checkmark$. Boleh dihafal, tetapi pahami asal-usulnya.

▼ Mengapa $L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$?

Misalkan selisih kedua kurva adalah $a(x - x_1)(x_2 - x)$ dengan $a > 0$ dan $x_1 < x_2$. Tulis $x = x_1 + u$ dan $d = x_2 - x_1$, sehingga $x_2 - x = d - u$. Maka

$$L = a \int_0^d u(d - u) du = a \left(\frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{3} \right) = \frac{a d^3}{6}.$$

Selisih kedua akar persamaan kuadrat adalah $d = \frac{\sqrt{D}}{a}$, jadi $L = \frac{a}{6} \cdot \frac{D\sqrt{D}}{a^3} = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$. ■

30.6

Volume benda putar: dari tumpeng sampai kendi



Tebak Dulu!

Sebuah tumpeng (kerucut) dan sebuah dandang (tabung) memiliki alas dan tinggi yang sama persis. Volume dandang berapa kali volume tumpeng?

2 kali, karena kerucut adalah "setengah" tabung.

3 kali.

π kali.

Sama besar, karena alas dan tingginya sama.

Jawabannya: 3 kali. Volume kerucut $\frac{1}{3}\pi r^2 t$, sedangkan tabung $\pi r^2 t$. Angka $\frac{1}{3}$ itu bukan kebetulan: ia adalah $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ dari Tebak Dulu pertama! Lihat sebabnya di bawah.

Tumpeng nasi kuning berbentuk kerucut. Bagaimana menghitung volumenya dengan integral? Iris mendatar! Tumpeng berubah menjadi tumpukan **cakram** tipis, mirip tumpukan koin yang makin ke atas makin kecil.

Bahasa sederhana • Bayangkan tumpeng dipotong mendatar menjadi banyak lempeng bundar setipis kerupuk. Setiap lempeng hampir berbentuk tabung pendek: volumenya luas lingkaran dikali tebalnya. Jumlahkan volume semua lempeng, maka kamu mendapat volume tumpeng. Makin tipis lempengnya, makin tepat hasilnya.

Satu cakram setebal Δy dengan jari-jari r bervolume $\pi r^2 \Delta y$. Jumlahkan semua cakram, lalu buat $\Delta y \rightarrow 0$. Jumlah Riemann itu berubah menjadi integral.



VOLUME BENDA PUTAR (METODE CAKRAM)

Misalkan sebuah benda putar setinggi t mempunyai irisan mendatar berbentuk lingkaran berjari-jari $r(y)$ pada ketinggian y . Volumennya

$$V = \int_0^t \pi [r(y)]^2 dy.$$

Untuk kurva $y = f(x)$ yang diputar 360° mengelilingi sumbu- x pada $[a, b]$: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Jumlah n cakram0 cm^3

Volume integral

7.068,6 cm^3

Selisih

—

Tahap

memutar penampang 360°

Pilih bentuknya, lalu tambah banyak cakram n . Bandingkan **Jumlah n cakram** dengan **Volume integral**. Tekan ► **Jalankan** untuk melihat penampangnya diputar 360° , lalu cakram ditumpuk satu per satu. Seret gambar ke atas atau ke bawah untuk mengubah sudut pandang. Bentuk mana yang paling cepat "pas" dengan sedikit cakram?

$$V = \int_0^t \pi \left(\frac{r}{t} y \right)^2 dy = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$

Pada jarak y dari puncak, jari-jari irisan tumpeng adalah $(r/t) \cdot y$. Jumlahkan semua cakram tipis dari puncak sampai alas, hasilnya sepertiga volume tabung.

 r

Jari-jari alas cm

 t

Tinggi tumpeng cm

 V Volume cm^3

VOLUME

7.069 cm^3 

ukuran tumpeng pada contoh di bawah

Tumpeng berjari-jari **15** cm dan setinggi **30** cm bervolume **7.069** $\text{cm}^3 \approx 7,069$ liter, cukup untuk **±28** porsi nasi (250 cm^3 per porsi). Dandang tabung dengan ukuran sama bervolume **21.205,75** cm^3 , tepat 3 kali lipatnya.

Cek satuan: $\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^3$. Ingat, $1.000 \text{ cm}^3 = 1$ liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VOLUME-TUMPENG](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-volume-tumpeng)

Tumpeng nasi kuning berbentuk kerucut dengan jari-jari alas 15 cm dan tinggi 30 cm. Tentukan volumenya dengan integral, lalu taksir banyak porsi jika satu porsi nasi $\pm 250 \text{ cm}^3$.

1 Letakkan puncak di $y = 0$ dan ukur y ke arah alas. Jari-jari irisan sebanding dengan jarak dari puncak: $r(y) = \frac{15}{30}y = \frac{y}{2}$.

2
$$V = \int_0^{30} \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{30} = \frac{\pi}{4} \cdot 9000 = 2250\pi \approx 7069 \text{ cm}^3.$$

3 Cocok dengan rumus kerucut: $\frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3}\pi \cdot 225 \cdot 30 = 2250\pi \checkmark$.

4 Banyak porsi: $7069 \div 250 \approx 28$.

Volume tumpeng $\pm 7.069 \text{ cm}^3$ (± 7 liter), cukup untuk ± 28 porsi. Angka $\frac{1}{3}$ pada rumus kerucut ternyata berasal dari $\int y^2 dy = \frac{y^3}{3}$!



AWAS JEBAKAN

Pada volume benda putar, jari-jari dikuadratkan pada setiap irisan, di dalam integral: $\pi \int r^2 dy$, bukan $\pi \left(\int r dy\right)^2$. Untuk benda berlubang seperti cincin, volume tiap irisan adalah $\pi(R^2 - r^2) \Delta y$, bukan $\pi(R - r)^2 \Delta y$.



MATEMATIKA NUSANTARA

Benda putar bukan sekadar istilah buku. Para perajin gerabah di **Kasongan** (Bantul, Yogyakarta) dan **Plered** (Purwakarta, Jawa Barat) membentuk kendi, guci, dan celengan di atas **meja putar**. Tangan perajin menentukan "jari-jari" tanah liat pada setiap ketinggian, dan putaran meja menyelesaikan sisanya. Tumpeng pun dibentuk dengan cetakan kerucut dari anyaman bambu yang disebut *kukusan*. Dalam tradisi selamatan, pucuk tumpeng biasanya dipotong dan diberikan kepada orang yang paling dihormati.



BONUS: RUMUS VOLUME BOLA

Bola berjari-jari R adalah lingkaran $x^2 + y^2 = R^2$ yang diputar. Pada ketinggian y , jari-jari irisannya $\sqrt{R^2 - y^2}$. Maka

$$V = \int_{-R}^R \pi (R^2 - y^2) dy = \pi \left[R^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Rumus yang kamu pakai di Bab 21 kini terbukti! Archimedes sangat bangga dengan temuannya bahwa volume bola sama dengan $\frac{2}{3}$ volume tabung pembungkusnya. Menurut cerita, ia ingin gambar bola dan tabung diukir di makamnya.

Integral juga bisa **meratakan**. Bayangkan pasir di dalam bak yang permukaannya bergelombang mengikuti grafik f . Ratakan pasir itu tanpa menambah atau membuangnya. Tinggi permukaan yang rata itulah **nilai rata-rata fungsi**.



DEFINISI • NILAI RATA-RATA FUNGSI

Nilai rata-rata f pada $[a, b]$ adalah luas dibagi lebar:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Contoh: motor pada Grafik Hidup 30.2 menempuh 288 m dalam 30 detik, jadi kecepatan rata-ratanya $\frac{1}{30} \int_0^{30} v(t) dt = \frac{288}{30} = 9,6$ m/s. Padahal motor itu hanya sebentar melaju 9,6 m/s, yaitu saat ngegas dan saat mengerem. Rata-rata tidak selalu menggambarkan keadaan yang paling sering terjadi.

Simetri juga bisa menghemat banyak hitungan. Fungsi **ganjil** memenuhi $f(-x) = -f(x)$; grafiknya simetris terhadap titik asal, misalnya x , x^3 , dan $\sin x$. Pada selang simetris $[-a, a]$, luas di kanan dan di kiri sama besar tetapi berlawanan tanda.



TRIK ANCIL: INTEGRAL NOL TANPA MENGHITUNG

Jika f ganjil, maka $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$. Contoh: $\int_{-2}^2 (x^5 - 7x^3 + x) dx = 0$ seketika. Jika f **genap** ($f(-x) = f(x)$), cukup hitung separuhnya: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

INTEGRAL CERDIK: CERMINKAN, LALU JUMLAHKAN

Daerah di bawah $f(x)$ dan di bawah cerminannya $f(a+b-x)$ pada $[a, b]$ sama luasnya, jadi $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$. Pakai sifat ini untuk

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Ganti x dengan $\frac{\pi}{2} - x$: sinus dan kosinus bertukar tempat, sehingga $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$.

Jumlahkan kedua bentuk: $2I = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, jadi $I = \frac{\pi}{4}$. Tanpa mencari antiturunan sama sekali!



Luas danau & hutan

Citra satelit terdiri atas piksel-piksel kecil. Luas danau atau hutan dihitung dengan menjumlahkan piksel, persis seperti menghitung kotak.



Aplikasi lari di HP

Aplikasi menjumlahkan kecepatan dari GPS dikali selang waktu yang sangat pendek. Jarak larimu adalah integral kecepatan.



Curah hujan BMKG

Penakar hujan otomatis mencatat intensitas hujan (mm/jam). Curah hujan sehari adalah luas di bawah grafik intensitas terhadap waktu.



Meteran listrik kWh

Meteran menjumlahkan daya (kW) yang terpakai dari waktu ke waktu. Energi dalam kWh adalah integral daya terhadap waktu.



Dosis obat

Apoteker memakai "luas di bawah kurva" kadar obat dalam darah (AUC) untuk menilai seberapa banyak obat yang sampai ke peredaran darah.



Tumpeng & kendi

Volume nasi dalam tumpeng atau air dalam kendi dapat dihitung dengan metode cakram, langsung dari bentuk lengkungnya.

Cek Cepat

Nilai $\int_0^3 2x \, dx$ adalah...

6

9

3

18

$$\int 3x^2 dx = \dots$$

$$6x + C$$

$$x^3$$

$$3x^3 + C$$

$$x^3 + C$$

Nilai $\int_{-2}^2 x^3 dx$ adalah...

$$0$$

$$8$$

$$4$$

$$16$$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. D · 3. A



Tantangan Rumah: menjepit luas sehelai daun

Bahan: sehelai daun lebar (daun jati, pisang, atau sukun), buku tulis berpetak (kotak 5 mm), pensil, penggaris.

1. Letakkan daun di atas kertas berpetak dan jiplak tepinya.
2. Dengan pensil tebal, buat petak besar 1 cm × 1 cm (setiap 2 × 2 kotak kecil). Hitung petak yang seluruhnya di dalam daun (P) dan petak yang hanya tersentuh tepi daun (S).
3. Catat taksiran bawah P , taksiran atas $P + S$, dan taksiran tengah $P + \frac{1}{2}S$ dalam cm^2 .
4. Ulangi dengan kotak kecil 5 mm × 5 mm. Ingat, satu kotak kecil = 0,25 cm^2 .
5. Bandingkan lebar celah (atas – bawah) pada kedua ukuran kotak.

Pertanyaan: Saat sisi kotak dibuat setengahnya, kira-kira menjadi berapa bagian lebar celahnya? Mengapa taksiran tengah $P + \frac{1}{2}S$ biasanya sudah cukup dekat dengan luas sebenarnya?



RINGKASAN KILAT

Bab 30 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- menaksir luas daerah lengkung dengan menghitung kotak dan **jumlah Riemann**
- memahami **integral tentu** sebagai luas bertanda, misalnya jarak dari grafik kecepatan
- menentukan **antiturunan** (integral tak tentu) dengan aturan pangkat
- memakai **Teorema Dasar Kalkulus** untuk menghitung integral tentu dengan cepat
- menghitung **luas antara dua kurva** dan **volume benda putar**, misalnya volume tumpeng

🔑 Istilah kunci

jumlah Riemann

batas bawah

batas atas

integral

luas bertanda

antiturunan

integral tak tentu

konstanta integrasi

nilai rata-rata fungsi

ganjil

📊 Rumus penting

$$R_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n} \right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Jumlah Riemann kanan untuk $y = x^2$. Jumlahkan n persegi panjang di bawah $y = x^2$ dari 0 sampai b . Makin banyak persegi panjangnya, makin dekat hasilnya ke $b^3/3$.

$$L = \int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Luas di bawah $y = x^n$. Naikkan pangkatnya satu, lalu bagi dengan pangkat yang baru. Daerah di bawah x^n dari 0 sampai b mengisi tepat $1/(n+1)$ bagian persegi panjang $b \times b^n$ yang membungkusnya.

$$V = \int_0^t \pi \left(\frac{r}{t} y \right)^2 dy = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$

Volume tumpeng lewat integral. Pada jarak y dari puncak, jari-jari irisan tumpeng adalah $(r/t) \cdot y$. Jumlahkan semua cakram tipis dari puncak sampai alas, hasilnya sepertiga volume tabung.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Integral tentu belum tentu sama dengan luas daerah.
- Aturan pangkat tidak berlaku untuk $n = -1$.
- Pada volume benda putar, jari-jari dikuadratkan pada setiap irisan, di dalam integral: $\pi \int r^2 dy$, bukan $\pi \left(\int r dy \right)^2$.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=30

Teka-teki untuk Bab 31

Di bab ini kamu meratakan kurva menjadi nilai rata-rata. Sekarang, wali kelas Dimas mengumumkan, "Rata-rata nilai ulangan kelas kita 70." Dimas lega: "Berarti kebanyakan anak dapat sekitar 70." Ternyata di kelas yang berisi 10 siswa itu **tidak seorang pun** mendapat 70, dan 8 dari 10 siswa nilainya **di bawah** rata-rata! Bagaimana mungkin?

▼ Intip petunjuk

Misalkan 8 siswa mendapat 65 dan 2 siswa mendapat 90. Jumlahnya $8 \times 65 + 2 \times 90 = 700$, jadi rata-ratanya $700 \div 10 = 70$. Dua nilai tinggi "menarik" rata-rata ke atas. Bab 31 memperkenalkan median dan modus, ukuran pemusatan yang tidak mudah tertipu.