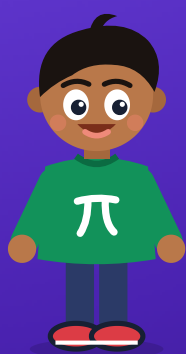


Mathpedia

Matematika Itu Asyik!

Buku matematika interaktif untuk anak Indonesia: SD, SMP, SMA,
IGCSE, IB, sampai olimpiade.



dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD

Editor: Abdullah Hanif Hidayat

Didukung oleh Aurumgen Academy

Tentang buku ini

Ini adalah Jilid 1 dari versi cetak Mathpedia. Bagian yang di layar dapat digeser dan dimainkan (Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, animasi langkah) ditampilkan sebagai gambar, sedangkan latihan lengkap ada di PDF Bank Soal dan LKPD.

Mathpedia • Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026).

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD**

Editor: **Abdullah Hanif Hidayat**

Didukung oleh Aurumgen Academy.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Dokumen ini boleh dicetak dan diperbanyak untuk keperluan pembelajaran nonkomersial dengan tetap mencantumkan sumber.

Semua soal dan LKPD adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.

Versi interaktif dengan komik bergerak, Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, Adu Cepat, dan latihan berskor:
aurumgen.my.id/mathpedia

Daftar isi

Cara belajar dengan Mathpedia	4
-------------------------------------	---

BAGIAN A • BILANGAN

1 Matematika Ada di Mana-mana	9
2 Bilangan Bulat & Garis Bilangan	37
3 Pecahan, Desimal & Persen	62
4 Faktor, Kelipatan & Bilangan Prima	94
5 Rasio, Proporsi & Laju	123
6 Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah	152

BAGIAN B • ALJABAR & FUNGSI

7 Bahasa Aljabar	182
8 Persamaan & Pertidaksamaan Linear	210
9 Garis Lurus & Fungsi Linear	238
10 Sistem Persamaan Linear	269
11 Persamaan Kuadrat	296
12 Fungsi Kuadrat & Parabola	323
13 Fungsi: Komposisi, Invers & Transformasi	354
14 Eksponen & Logaritma	386
15 Barisan & Deret	418
16 Polinomial	452

Cara Belajar dengan Mathpedia

Kenalan dulu, yuk!



Dimas

Anak SMP dari Bandung yang selalu menebak paling cepat. Kadang benar, sering kena jebakan, tetapi tidak pernah kapok. Kaus kesayangannya bergambar π .



Ayu

Sahabat Dimas dari Padang. Teliti dan suka mencatat. Kalimat andalannya: "Tunggu dulu. Buktinya mana?"



Kak Lintang

Kakak mentor yang humoris. Selalu membawa kapur, selalu punya analogi, dan percaya bahwa tidak ada pertanyaan yang bodoh.



Ancil si Kancil

Maskot cerdik dari hutan Nusantara. Seperti kancil dalam dongeng, ia suka teka-teki dan **jalan pintas yang sah**: trik cerdas yang tetap bisa dibuktikan.

Lima janji Mathpedia



Paham dulu, rumus kemudian

Setiap rumus lahir dari cerita, gambar, atau pola. Kamu melihat *mengapa* sebelum menghafal *apa*.



Boleh diutak-atik

Geser nilai, seret titik, putar animasi. Matematika paling mudah dipahami saat kamu bermain dengannya.



Dekat dengan hidupmu

Martabak, angkot, batik, sawah terasering, Monas, dan harga cabai. Matematika ada di sekitarmu.



Salah itu bagian dari belajar

Tebak dulu, keliru, lalu temukan alasannya. Otakmu justru tumbuh paling kuat saat itu.



Tangga sampai puncak

Dari soal Pemula untuk SD sampai soal gaya IGCSE, IB, dan Olimpiade, semuanya dengan pembahasan.

Cara belajar di Mathpedia

Setiap bab mengikuti alur yang sama. Kamu akan **memahami**, **mengaplikasikan**, lalu **merefleksikan**, sesuai semangat Pembelajaran Mendalam yang berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan.

1. Komik pembuka

Masalah nyata dari kehidupan sehari-hari.

2. Tebak Dulu!

Pilih prediksi kamu sebelum belajar. Salah tebak itu bagus!

3. Cerita & gambar

Konsep abstrak dibuat konkret dengan analogi dan animasi.

4. Definisi & Teorema

Kalimat matematika yang tepat, lengkap dengan buktinya.

5. Grafik Hidup

Seret titik dan geser nilai, kurva ikut berubah.

6. Rumus Hidup

Geser nilainya, lihat hasilnya, kumpulkan kartunya.

7. Contoh bertingkat

Contoh → kerjakan bersama → coba sendiri.

8. Awas Jebakan!

Kesalahan yang paling sering terjadi.

9. Adu Cepat

Latihan kilat 60 detik. Kalahkan rekormu!

10. Tangga Latihan

Soal dari Pemula sampai Olimpiade.



TIGA MODE BACAAN

Di kanan atas ada tombol **Dasar • SMA • Lanjut**. Mode **Dasar** memakai bahasa paling sederhana untuk SD-SMP. Mode **SMA** adalah standar kelas X-XII. Mode **Lanjut** membuka kotak 🚀 berisi pendalaman IGCSE, IB, dan trik olimpiade. Tombol 🔄 mengubah buku menjadi **Papan Tulis**.



MENULIS JAWABAN

Di kotak isian kamu boleh menulis **desimal** (0,75), **pecahan** ($\frac{3}{4}$ atau $2\frac{1}{3}$), **akar** ($2\sqrt{3}$ atau $\sqrt{3}$), π ($3\pi/4$), atau **pangkat** (2^{10}). Mathpedia akan membacanya untukmu.

Pilih jalur belajarmu



SD – SMP

Bacaan **Dasar**. Mulai dari Bab 1–8, 17–21, 31, dan 33.

Lv 1

Lv 2



SMA • TKA • UTBK

Bacaan **SMA**. Ikuti urutan bab. Fokus pada Grafik Hidup, Rumus Hidup, dan contoh bertingkat.

Lv 2

Lv 3



IGCSE • IB

Bacaan **Lanjut**. Perhatikan kotak 🚀, soal berstruktur, pemodelan, dan kalkulus.

Lv 4

Lv 5



Olimpiade (OSN)

Bacaan **Lanjut**. Kuasai Bab 35, 38, dan 39, lalu taklukkan Tantangan Olimpiade di Bank Soal.

Lv 5

Lv 6

Tangga 6 level soal

Level	Untuk siapa	Ciri soal
Lv 1 · Pemula	SD – awal SMP	Mengenali konsep, angka sederhana, gambar.
Lv 2 · Penjelajah	SMP (Fase D)	Satu atau dua langkah hitungan, membaca tabel dan grafik sederhana.
Lv 3 · Pejuang	SMA · TKA · UTBK	Beberapa langkah, konteks nyata, penalaran.
Lv 4 · IGCSE	Gaya Cambridge IGCSE Mathematics	Soal berstruktur, kata perintah (<i>hitung, tunjukkan, jelaskan</i>), data dan grafik.
Lv 5 · IB DP	Gaya IB Mathematics AA/AI	Pemodelan, pembuktian singkat, kalkulus, analisis berbagai.
Lv 6 · Olimpiade	Gaya OSN · OMITS · IMO	Tidak rutin, butuh ide kreatif dan bukti yang rapi.

Peta isi buku

Bagian A · Bilangan

- 1 Matematika Ada di Mana-mana
- 2 Bilangan Bulat & Garis Bilangan
- 3 Pecahan, Desimal & Persen
- 4 Faktor, Kelipatan & Bilangan Prima
- 5 Rasio, Proporsi & Laju
- 6 Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah

Bagian B · Aljabar & Fungsi

- 7 Bahasa Aljabar
- 8 Persamaan & Pertidaksamaan Linear
- 9 Garis Lurus & Fungsi Linear
- 10 Sistem Persamaan Linear
- 11 Persamaan Kuadrat
- 12 Fungsi Kuadrat & Parabola
- 13 Fungsi: Komposisi, Invers & Transformasi
- 14 Eksponen & Logaritma
- 15 Barisan & Deret
- 16 Polinomial

Bagian C • Geometri & Pengukuran

- 17 Garis, Sudut & Segitiga
- 18 Teorema Pythagoras
- 19 Keliling & Luas Bangun Datar
- 20 Lingkaran
- 21 Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume
- 22 Kesebangunan & Transformasi Geometri
- 23 Geometri Koordinat & Vektor

Bagian D • Trigonometri

- 24 Trigonometri Segitiga Siku-siku
- 25 Aturan Sinus, Kosinus & Luas Segitiga
- 26 Fungsi & Identitas Trigonometri

Bagian E • Kalkulus

- 27 Limit: Seni Mendekati
- 28 Turunan: Laju Perubahan
- 29 Aplikasi Turunan: Optimasi & Grafik
- 30 Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga

Bagian F • Data & Peluang

- 31 Statistika: Bercerita dengan Data
- 32 Kaidah Pencacahan
- 33 Peluang
- 34 Distribusi Peluang: Binomial & Normal

Bagian G • Matematika Lanjut & Olimpiade

- 35 Logika & Pembuktian
- 36 Matriks
- 37 Bilangan Kompleks
- 38 Teori Bilangan Olimpiade
- 39 Strategi Olimpiade: Kombinatorika & Ketaksamaan

Selaras dengan kurikulum

Kurikulum	Bab yang paling relevan
Matematika SD (Fase A–C)	1–5 · 17 · 19 · 21 · 31 · 33 (bacaan Dasar)
Matematika SMP (Fase D)	2–10 · 11 (pengantar) · 17–22 · 24 (pengantar) · 31 · 33
Matematika kelas X (Fase E)	6 (eksponen) · 10 · 11 · 12 · 14 · 15 · 24 · 31 · 33

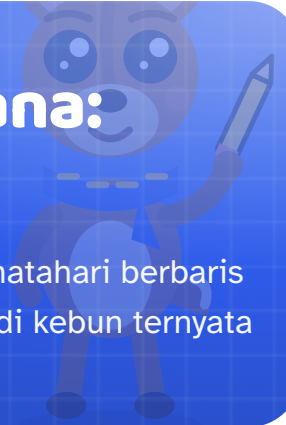
Matematika XI–XII (Fase F, termasuk Tingkat Lanjut)	13 · 16 · 20 · 22 · 23 · 25–30 · 32 · 34 · 36 · 37
Cambridge IGCSE Mathematics 0580	2–13 · 15 · 17–25 · 31 · 33
IB Mathematics AA/AI	Bilangan & aljabar: 6, 14, 15, 32, 35, 37 · Fungsi: 9, 12, 13, 14, 26 · Geometri & trigonometri: 23–26 · Statistika & peluang: 31–34 · Kalkulus: 27–30
OSN Matematika	Semua bab. Inti: aljabar (7, 11, 15, 16), geometri (17–22), teori bilangan (4, 38), kombinatorika (32, 35, 39).

Rujukan: Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025). Label "gaya IGCSE/IB/olimpiade" menunjukkan tingkat dan format soal, bukan soal resmi.

01

Matematika Ada di Mana-mana:
Berburu Pola

Mengapa lebah membangun sarang segi enam? Mengapa biji bunga matahari berbaris dalam spiral 34 dan 55? Batik nenekmu, tangga rumahmu, dan bunga di kebun ternyata menyimpan rahasia yang sama: **pola**. Yuk, berburu!



Setelah bab ini, kamu bisa

- memandang matematika sebagai **ilmu tentang pola** dan menemukannya di batik, sarang lebah, dan bunga;
- melanjutkan **barisan pola** gambar dan bilangan, serta menghitung **bilangan segitiga** dan **bilangan persegi**;
- mengenali **barisan Fibonacci** dan **rasio emas** di alam;
- memecahkan masalah dengan **empat langkah Polya**;
- membedakan **menebak, menguji, dan membuktikan**, misalnya untuk jumlah bilangan ganjil.

MISI BERBURU POLA

KOMIK • 4 PANEL

Sabtu pagi, di teras rumah nenek Ayu

KAK LINTANG

Misi minggu ini: temukan matematika di sekitarmu. Dilarang membuka buku!

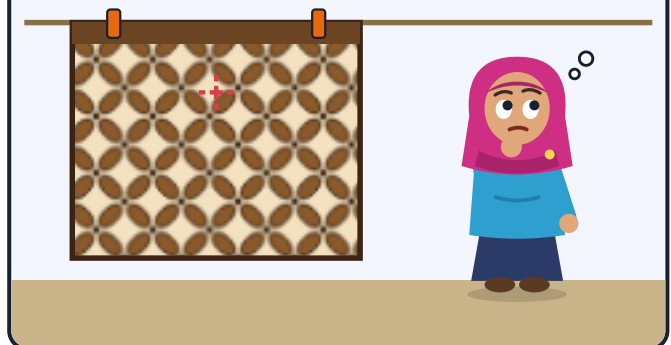
DIMAS

Matematika di rumah? Paling cuma ada di kalkulator, Kak.



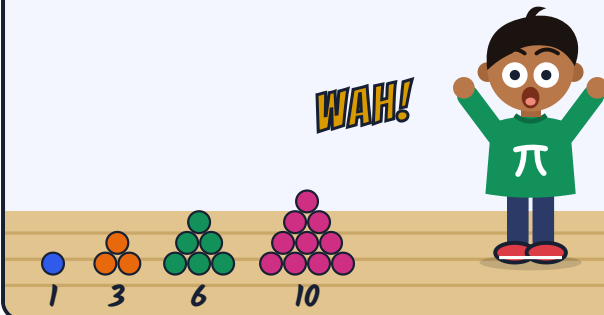
AYU

Lihat batik kawung Nenek! Empat bentuk lonjong membentuk bunga, lalu bunganya berulang ke segala arah.



DIMAS

Aku susun kelereng jadi segitiga: 1, 3, 6, 10... Lho, lompatannya makin besar: +2, +3, +4!



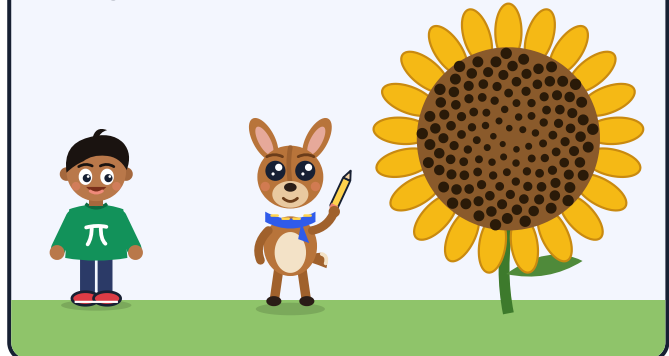
Tiba-tiba, dari balik kebun bunga...

ANCIL

Hitung spiral biji bunga matahari ini. Sering kali 34 ke satu arah dan 55 ke arah lain: dua-duanya bilangan Fibonacci!

DIMAS

Fibo... apa? Bunga bisa berhitung?!



Tebak Dulu!

Lebah madu membangun sarangnya dari sel-sel segi enam. Mengapa segi enam, bukan lingkaran atau persegi?

Karena lebah punya enam kaki, jadi mereka suka angka enam.

Kebetulan saja; bentuknya bisa apa pun.

Segi enam bisa menutup bidang tanpa celah dan memakai lilin paling sedikit untuk luas yang sama.

Karena segi enam adalah bangun yang paling mudah digambar.

Jawabannya: hemat dan tanpa celah. Lingkaran yang dijejerkan selalu menyisakan celah. Dari semua bangun beraturan yang bisa menutup bidang tanpa celah (hanya segitiga, persegi, dan segi enam), segi enam punya keliling terpendek untuk luas yang sama, jadi lilin yang dibutuhkan paling sedikit. Lebah tentu tidak berhitung; bentuk itu muncul karena alam "memilih" cara yang hemat. Matematikawan Thomas Hales baru berhasil membuktikan dugaan sarang lebah ini secara lengkap sekitar tahun 1999. Kamu akan mengujinya sendiri di Lab Mini sebentar lagi!

1.1 Matematika adalah ilmu tentang pola

Kalau ditanya "matematika itu apa?", banyak orang menjawab "berhitung". Padahal berhitung hanyalah salah satu alatnya. Para matematikawan suka menyebut matematika sebagai **ilmu tentang pola**: pola bilangan, pola

bentuk, pola gerak, sampai pola dalam permainan.



DEFINISI

Pola adalah keteraturan yang mengikuti suatu aturan, sehingga kita bisa meramalkan kelanjutannya. Ada **pola berulang**, yaitu bagian yang sama muncul lagi dan lagi (seperti motif batik), dan **pola tumbuh**, yaitu setiap langkah berubah menurut aturan yang sama (seperti 1, 3, 6, 10, ...).



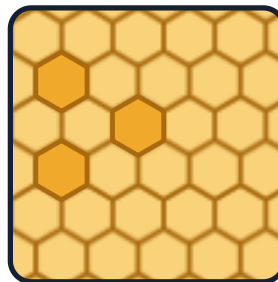
Kawung

diputar 90°: tetap sama



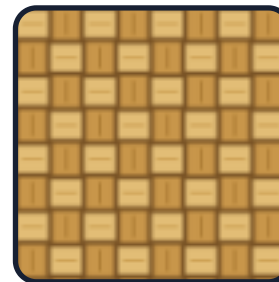
Parang

digeser miring: berulang



Sarang lebah

segi enam tanpa celah



Anyaman

atas, bawah, atas, bawah

Empat pola berulang dari sekitar kita. Masing-masing bisa digeser, diputar, atau dicerminkan tanpa berubah wujud.

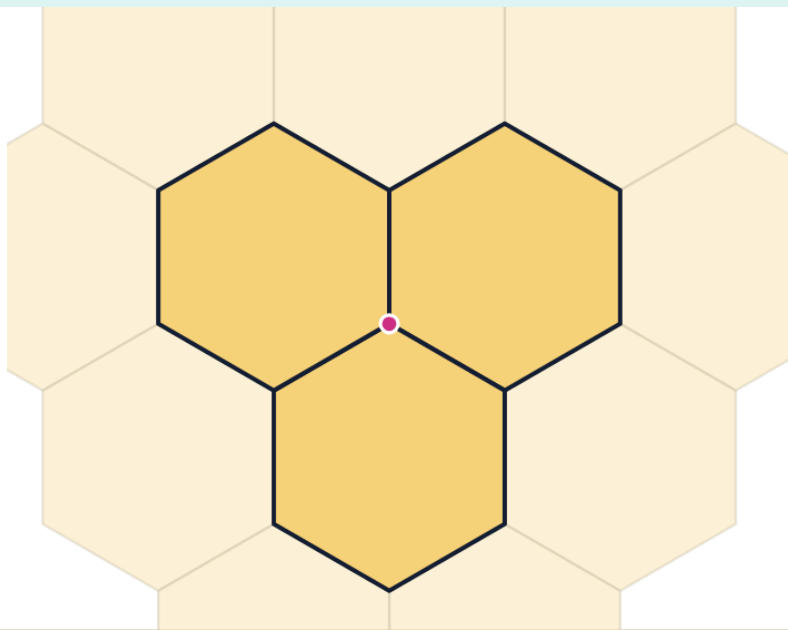
Bahasa sederhana • Gampangnya, pola itu seperti lagu yang reffnya diulang-ulang. Kalau kamu sudah tahu aturannya, kamu bisa meneruskannya sendiri tanpa melihat contekan.



MATEMATIKA NUSANTARA

Para pembatik adalah ahli pola. Motif **kawung** tersusun dari empat bentuk lonjong yang mengelilingi satu titik, lalu diulang ke segala arah. Putar seperempat putaran (90°), motifnya tetap sama: inilah *simetri putar*. Motif **parang** berulang miring seperti ombak. Batik cap dibuat dengan mencapkan satu cetakan tembaga berkali-kali, persis seperti *translasi* (pergeseran) dalam geometri. Anyaman tikar pandan dan bilik bambu mengikuti pola "atas-bawah" yang berselang-seling. Motif serupa kawung bahkan disebut-sebut sudah terpahat pada arca candi di Jawa lebih dari seribu tahun lalu.

Sekarang kembali ke lebah. Bayangkan kamu harus menutup lantai dengan ubin berbentuk segi banyak beraturan yang sama semua, tanpa celah dan tanpa tumpang-tindih. Di setiap titik pertemuan, sudut-sudut ubin harus berjumlah tepat 360° . Coba sendiri, segi berapa saja yang berhasil?



Lilin untuk luas sama

(keliling ubin berluas 1)

segitiga ✓ pas

4,559

persegi ✓ pas

4

segi enam ✓ pas

3,722

lingkaran ✗ celah

3,545

Makin pendek = makin hemat lilin.

sudut dalam

120°

360° ÷ sudut dalam

3

Hasil

3 ubin pas tanpa celah

keliling untuk luas 1

3,722

Geser banyak sisi dari 3 sampai 12. Perhatikan titik merah muda di tengah: apakah ubin-ubinnya menutup 360° dengan pas, ada celah, atau malah bertumpuk? Lalu bandingkan panjang batang "lilin" di kanan. Ketuk nama ubin di panel kanan untuk memilihnya.



SIFAT UBIN BERATURAN

Ubin segi- n beraturan yang sama dapat menutup bidang tanpa celah dan tanpa tumpang-tindih **hanya** untuk $n = 3$, $n = 4$, dan $n = 6$. Dari ketiganya, segi enam memakai keliling (lilin) paling sedikit untuk luas yang sama.

▼ Bukti singkat: mengapa hanya 3, 4, dan 6?

Sudut dalam segi- n beraturan adalah $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Agar pas di satu titik, harus ada bilangan bulat k (banyak ubin di titik itu) dengan

$$k \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right) = 360^\circ \implies k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Supaya k bulat, $n - 2$ harus membagi 4, jadi $n - 2 \in \{1, 2, 4\}$, yaitu $n = 3, 4, 6$ dengan $k = 6, 4, 3$. Tidak ada kemungkinan lain. Bukti selesai, hanya dengan satu pecahan!

1.2 Pola tumbuh: bilangan segitiga dan bilangan persegi

Ingat kelereng Dimas? Susunan segitiganya berisi 1, 3, 6, 10, ... kelereng. Bilangan-bilangan ini disebut **bilangan segitiga**. Kalau kelerengnya disusun membentuk persegi, kamu mendapat 1, 4, 9, 16, ... yang disebut **bilangan persegi**. Keduanya adalah **barisan**: daftar bilangan yang tersusun menurut aturan, dan setiap anggotanya disebut **suku**.

LAB MINI Penumbuh pola: titik demi titik

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1



👉 ketuk gambar untuk menumbuhkan pola

Pola ke-5

15

titik

$$5 \times 6 \div 2 = 15$$

Barisannya:

1, 3, 6, 10,
15, 21, 28, ...

Tambahannya:

+2 +3 +4 +5 +6 ...

Selisihnya naik 1 setiap langkah.

banyak titik
15

tambahan dari pola sebelumnya
5

rumus
 $n(n + 1) \div 2$

Tekan ► **Jalankan** atau ketuk gambarnya untuk menumbuhkan pola. Ganti jenisnya: segitiga, persegi, persegi panjang, atau segi enam. Perhatikan baris **Tambahannya**: pola persegi selalu bertambah bilangan ganjil. Mengapa?



TRIK KAK LINTANG: LIHAT SELISIHNYA

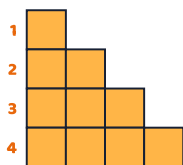
Kalau bingung menebak pola, tulis **selisih** antarsuku di bawahnya. Selisih tetap (3, 7, 11, 15: selalu +4) berarti pola tambah biasa. Selisih yang naik teratur (1, 3, 6, 10: +2, +3, +4) berarti polanya tumbuh makin cepat, seperti bilangan segitiga. Kalau setiap suku dikali bilangan yang sama (1, 2, 4, 8), itu pola kali.



AWAS JEBAKAN

Dua atau tiga suku saja belum cukup untuk memastikan sebuah pola. Barisan 2, 4, ... bisa berlanjut 6, 8 (tambah 2), atau 8, 16 (kali 2), atau 7, 11 (selisih naik 1). Karena itu soal yang baik selalu menyebutkan **aturannya** atau memberi cukup banyak suku.

Berapa titik pada pola segitiga ke-100? Menjumlahkan $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ satu per satu tentu melelahkan. Ada trik yang jauh lebih cantik: **gandakan, lalu bagi dua**.

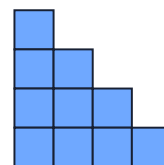
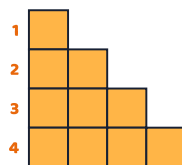


Tangga dengan 4 anak tangga:

$1 + 2 + 3 + 4$ kotak.

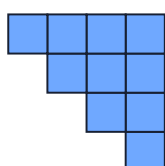
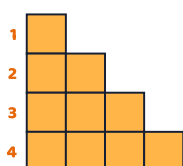
Berapa jumlahnya tanpa menghitung satu per satu?

Langkah 1. Bilangan segitiga ke-4 adalah tangga dengan baris berisi 1, 2, 3, dan 4 kotak. Kita ingin tahu $1 + 2 + 3 + 4$ tanpa menghitung satu per satu.



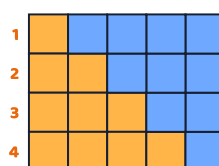
Buat salinannya yang sama persis (biru).

Langkah 2. Buat salinan tangga yang sama persis. Sekarang kita punya dua kali lebih banyak kotak.



Putar salinan biru setengah putaran (180°).

Langkah 3. Putar salinannya setengah putaran (180°). Anak tangga terpanjang kini berada di atas.



Geser ke kiri... klik!

Dua tangga menyatu menjadi sebuah persegi panjang.

Langkah 4. Geser salinan itu ke kiri. Kedua tangga mengunci satu sama lain tanpa celah dan membentuk persegi panjang!



4 baris $\times$ 5 kolom = 20 kotak.

Satu tangga = setengahnya:

$20 : 2 = 10$

Langkah 5. Persegi panjangnya 4 baris $\times$ 5 kolom = 20 kotak. Karena terdiri atas dua tangga yang sama, satu tangga berisi $20 : 2 = 10$ kotak.



tangga n anak tangga $\rightarrow$ persegi panjang n baris $\times$ $(n + 1)$ kolom, lalu dibagi 2:

$T_n = n \times (n + 1) : 2$

$T_{100} = 100 \times 101 : 2 = 5.050$

Langkah 6. Cara ini berlaku untuk tangga berapa pun: n baris dan $n + 1$ kolom, lalu dibagi dua. Jadi $T_n = \frac{n(n + 1)}{2}$, dan $T_{100} = 5.050$.



RUMUS BILANGAN SEGITIGA

Bilangan segitiga ke- n adalah jumlah n bilangan asli pertama:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Bilangan persegi ke- n adalah $n \times n = n^2$.

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dua tangga yang sama membentuk persegi panjang $n \times (n+1)$. Satu tangga = setengahnya.

n Banyak baris baris

T_n Banyak titik titik

BANYAK TITIK

10

titik

$1 + 2 + \dots + 4 = 4 \times 5 : 2 = 10$. Persegi panjang dari dua tangga berisi **20** titik. Hasilnya selalu bulat, karena salah satu dari **4** dan **5** pasti genap.

Cek satuan: banyak titik selalu bilangan asli, jadi hasil yang berkoma pasti salah hitung.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BILANGAN-SEGITIGA



TAMU DARI MASA LALU

Konon, sekitar tahun 1786 seorang guru di Jerman menyuruh murid-muridnya menjumlahkan 1 sampai 100 agar kelas tenang. Baru sebentar, seorang anak berumur sekitar 9 tahun bernama **Carl Friedrich Gauss** sudah menulis 5.050. Caranya: pasangkan 1 dengan 100, 2 dengan 99, 3 dengan 98, dan seterusnya. Ada 50 pasang yang masing-masing berjumlah 101, jadi $50 \times 101 = 5.050$. Detail ceritanya mungkin sudah dibumbui, tetapi Gauss kelak memang menjadi salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa. Di Bab 15 kamu akan memakai trik pasangan ini untuk deret apa pun.

CONTOH Kaleng di etalase warung

Pak Joko menyusun kaleng susu di etalase warungnya membentuk segitiga. Baris paling bawah berisi 12 kaleng, dan setiap baris di atasnya berkurang satu kaleng sampai puncaknya 1 kaleng. Berapa kaleng yang dipajang?

1 Banyak kaleng = $1 + 2 + 3 + \dots + 12$, yaitu bilangan segitiga ke-12.

2 $T_{12} = \frac{12 \times 13}{2} = \frac{156}{2} = 78.$

3 Cek dengan trik Gauss: 6 pasang ($1 + 12, 2 + 11, \dots, 6 + 7$) yang masing-masing berjumlah 13, jadi $6 \times 13 = 78.$ ✓

Ada 78 kaleng. Dua cara berbeda memberi hasil yang sama, jadi kita yakin jawabannya benar.

ADU CEPAT Tebak suku berikutnya

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tulis selisihnya. Selisih tetap: pola tambah. Selisih naik: cek bilangan persegi atau segitiga. Dikali 2: pola kali. Bukan semuanya? Jumlahkan dua suku sebelumnya, seperti Fibonacci!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

BILANGAN SEGITIGA BERSAHABAT DENGAN BILANGAN PERSEGI

Dua bilangan segitiga yang berurutan selalu menyusun persegi: $T_{n-1} + T_n = n^2$ (misalnya $6 + 10 = 16$). Gambar saja persegi $n \times n$ titik, lalu potong tepat di samping diagonalnya. Hubungan lain yang sering dipakai di olimpiade:

$$8T_n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2.$$

Jadi untuk menguji apakah suatu bilangan m adalah bilangan segitiga, cukup periksa apakah $8m + 1$ bilangan kuadrat. Contoh: $8 \times 55 + 1 = 441 = 21^2$, jadi 55 bilangan segitiga (T_{10}). Ada pula bilangan yang sekaligus segitiga dan persegi: 1, 36, 1.225, ... ($T_8 = 36 = 6^2$ dan $T_{49} = 1.225 = 35^2$).

1.3 Fibonacci dan rasio emas: matematika yang tumbuh di kebun

Pada tahun 1202, seorang pedagang dari Pisa, Italia, bernama Leonardo (kini dikenal sebagai **Fibonacci**) menulis buku hitung *Liber Abaci*. Di dalamnya ada teka-teki kelinci: sepasang kelinci muda menjadi dewasa

dalam sebulan, lalu setiap bulan sepasang kelinci dewasa melahirkan sepasang anak. Banyak pasangan kelinci dari bulan ke bulan adalah 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Setiap bilangan adalah jumlah dua bilangan sebelumnya!

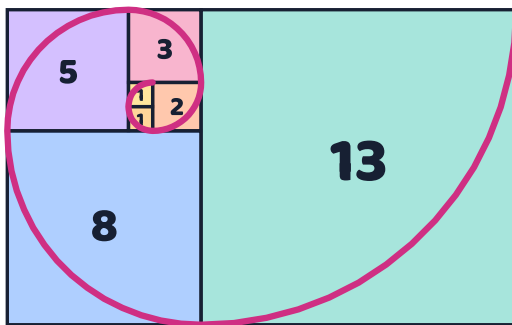


DEFINISI

Barisan Fibonacci dimulai dengan $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$. Setiap suku berikutnya adalah jumlah dua suku sebelumnya:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Hasilnya: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

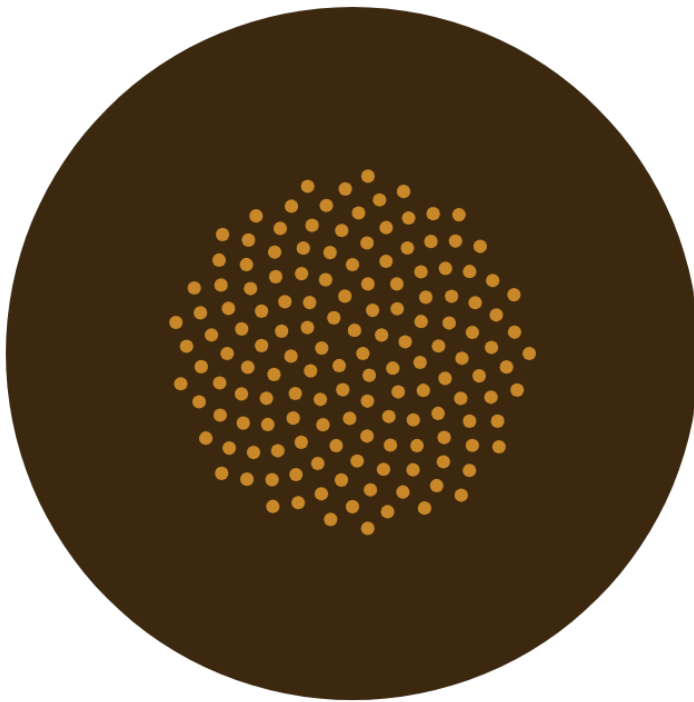
Setiap persegi baru bersisi jumlah sisi dua persegi sebelumnya, jadi semuanya pas.

$$8 : 5 = 1,6 \quad 13 : 8 = 1,625$$

$$21 : 13 \approx 1,615 \rightarrow \varphi \approx 1,618$$

Persegi-persegi Fibonacci menyusun persegi panjang 21×13 . Busur seperempat lingkaran di setiap persegi membentuk spiral yang mirip cangkang siput.

Coba hitung spiral pada **nanas**, sisik buah pinus, atau biji **bunga matahari**. Kamu sering menemukan dua bilangan Fibonacci berurutan, misalnya 8 dan 13 pada nanas, atau 34 dan 55 pada bunga matahari. Banyak bunga juga berkelopak 3, 5, atau 8. Tidak selalu, tetapi cukup sering sehingga para ilmuwan menelitinya sungguh-sungguh. Rahasiannya ada pada **sudut putar** setiap biji baru.

**Aturan tumbuh**

biji ke- k diputar $k \times \theta$
dan sedikit menjauh dari pusat

$$\theta = 137,5^\circ$$

$$= 0,3819 \text{ putaran}$$

Sudut emas!

*Tidak ada biji yang
berbaris lurus, jadi
tak ada ruang terbuang.*

$$\begin{aligned} \text{sudut emas} &= 360^\circ \times (1 - 1/\phi) \\ &\approx 137,508^\circ \end{aligned}$$

putaran per biji

0,3819

Pola

spiral Fibonacci, rapat merata 

biji tumbuh

149

Setiap biji baru diputar sebesar sudut θ dari biji sebelumnya. Mulailah dari **135°**: biji berbaris di 8 jari-jari dengan celah kosong. Lalu tekan  **Sudut emas**. Pilih "Warnai spiral" 21, 34, atau 55, lalu tekan ►

Jalankan untuk melihat bunga tumbuh.

Bahasa sederhana • Bayangkan kamu menaruh biji satu per satu sambil berputar. Kalau putarannya "pecahan sederhana" seperti setengah atau sepertiga putaran, biji-biji akan menumpuk di jalur yang sama dan menyisakan ruang kosong. Sudut emas adalah putaran yang paling "tidak sederhana", jadi biji menyebar rata dan bunga bisa memuat biji sebanyak-banyaknya.

Sekarang bagi setiap bilangan Fibonacci dengan bilangan sebelumnya: $2 : 1 = 2$, $3 : 2 = 1,5$, $5 : 3 \approx 1,667$, $8 : 5 = 1,6$, $13 : 8 = 1,625$, ... Hasilnya bergoyang naik-turun, tetapi makin dekat ke bilangan istimewa yang disebut **rasio emas**:

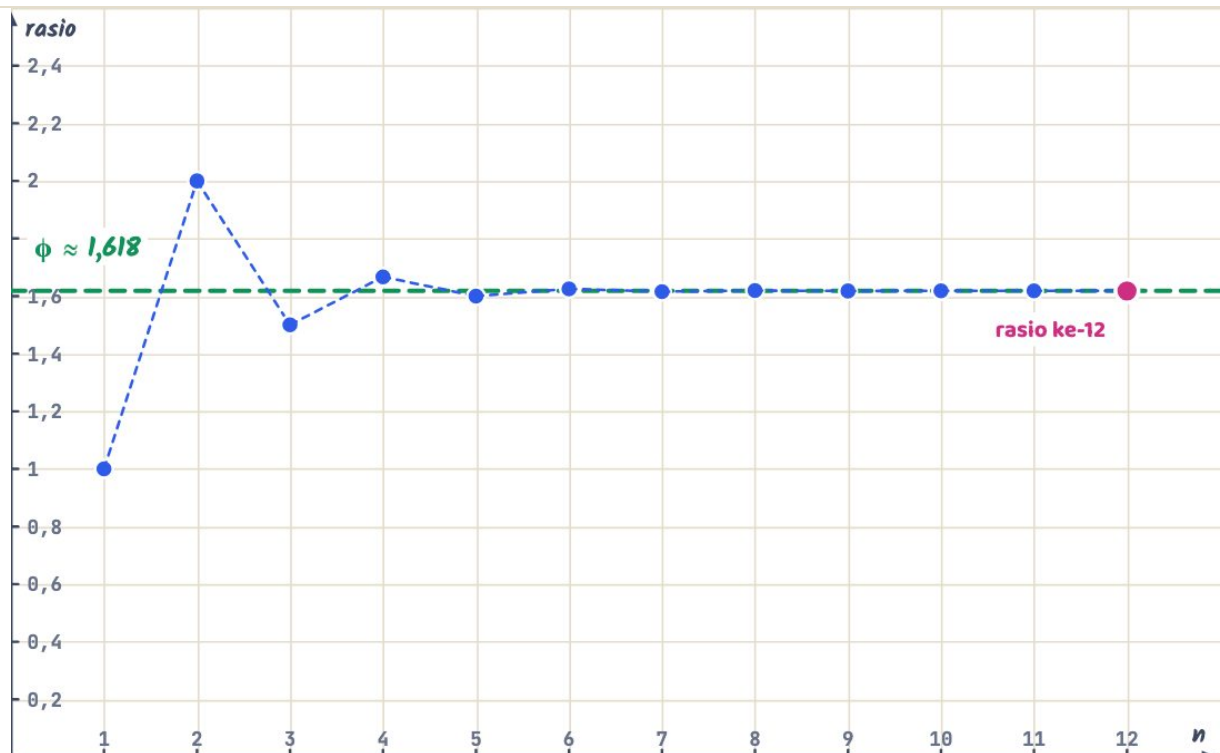
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Hebatnya, kamu boleh memulai dengan **dua bilangan apa saja**. Asalkan setiap suku adalah jumlah dua suku sebelumnya, rasionya tetap menuju φ . Buktikan sendiri:

$$G_1 = a, G_2 = b, G_{n+1} = G_n + G_{n-1} \Rightarrow \frac{G_{n+1}}{G_n} \rightarrow \varphi$$

$$\frac{G_{N+1}}{G_N} = \frac{233}{144} \approx 1,618056$$

Setiap titik biru adalah rasio dua suku berurutan. Seberapa liar pun awalnya, titik-titik itu akhirnya merapat ke garis hijau ϕ .



barisan Fibonacci asli: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

✨ selisihnya dengan ϕ kurang dari 0,0001!

suku ke-N

144

rasio ke-N

1,618056

selisih dengan ϕ

$2,156681 \times 10^{-5}$

Pilih $a = 20$ dan $b = 1$: rasio pertamanya liar sekali (20) lalu turun drastis, tetapi lihat apa yang terjadi setelah beberapa langkah. Coba juga $a = 2, b = 1$ (barisan Lucas).

Di rumah Ayu ada tangga dengan 10 anak tangga. Sekali melangkah, Dimas boleh naik 1 atau 2 anak tangga. Ada berapa cara berbeda untuk sampai di puncak?

- 1 Coba kasus kecil dulu. Untuk 1 anak tangga: 1 cara. Untuk 2 anak tangga: 2 cara (1+1 atau 2). Untuk 3 anak tangga: 3 cara (1+1+1, 1+2, 2+1).
- 2 Langkah terakhir menuju anak tangga ke- n pasti berasal dari anak tangga ke- $(n-1)$ (naik 1) atau ke- $(n-2)$ (naik 2). Jadi banyak cara $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$: aturan Fibonacci!
- 3 Lanjutkan: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Anak tangga ke-10 memberi 89 cara.

Ada 89 cara. Fibonacci muncul bukan karena kelinci atau bunga, melainkan karena aturan "jumlah dua sebelumnya" muncul dengan sendirinya.



TAMU DARI MASA LALU

Fibonacci bukan penemu pertama barisan ini. Berabad-abad sebelumnya, para ahli tembang di India (misalnya Virahanka, sekitar abad ke-7) sudah menemukannya ketika menghitung banyak cara menyusun ketukan pendek (1 ketuk) dan panjang (2 ketuk) dalam sebuah larik puisi, persis seperti soal naik tangga di atas! Jasa terbesar buku Fibonacci justru memperkenalkan angka Hindu-Arab (0 sampai 9) ke para pedagang Eropa. Nama "barisan Fibonacci" sendiri baru populer pada abad ke-19.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

RUMUS BINET: FIBONACCI TANPA MENJUMLAH

Bilangan $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ adalah kedua akar persamaan $x^2 = x + 1$. Karena $\varphi^2 = \varphi + 1$ dan $\psi^2 = \psi + 1$, barisan φ^n dan ψ^n mematuhi aturan Fibonacci yang sama. Dengan menyesuaikan dua suku pertama, diperoleh **rumus Binet**:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Dua bilangan irasional menghasilkan bilangan bulat! Karena $|\psi| < 1$, suku ψ^n cepat mengecil, sehingga F_n adalah bilangan bulat terdekat ke $\varphi^n / \sqrt{5}$. Itulah sebabnya $F_{n+1}/F_n \rightarrow \varphi$.

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ dan $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$ dipangkatkan n , dikurangkan, lalu dibagi $\sqrt{5}$.
Hasilnya selalu bilangan Fibonacci yang bulat.

 n Suku ke- n F_n

Bilangan Fibonacci

BILANGAN FIBONACCI

55

✨ hasilnya bulat!

ϕ pangkat **10** $\approx$ **122,992** dan ψ pangkat **10** $\approx$ **0,008**. Selisihnya dibagi $\sqrt{5}$ tepat **55**.
Perhatikan: ψ pangkat n sangat kecil, jadi ϕ pangkat n dibagi $\sqrt{5} \approx$ **55,004** tinggal dibulatkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BINET-FIBONACCI](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-binet-fibonacci)

1.4 Empat langkah Polya: resep memecahkan masalah

Bagaimana matematikawan menghadapi soal yang belum pernah mereka lihat? Mereka **tidak** langsung tahu jawabannya! Mereka mencoba, keliru, mencoba lagi, dan memakai sebuah "resep". Resep paling terkenal ditulis oleh George Pólya dalam empat langkah.

1 Pahami

Apa yang ditanya?
Apa datanya?
Gambar dulu!

2 Rencanakan

Pilih strategi:
tabel, gambar,
kasus kecil, pola.

3 Laksanakan

Jalankan rencana
dengan teliti,
catat langkahmu.

4 Periksa

Masuk akal?
Cek dengan cara
yang berbeda.

Belum cocok? Kembali ke langkah 1 atau 2. Itu bukan gagal, itu belajar!

Empat langkah Polya. Panah putus-putus mengingatkan bahwa memecahkan masalah jarang lurus dari awal sampai akhir.



TAMU DARI MASA LALU

George Pólya (1887–1985) adalah matematikawan kelahiran Hungaria yang lama mengajar di Swiss dan Amerika Serikat. Pada tahun 1945 ia menerbitkan buku *How to Solve It* ("Bagaimana Memecahkannya") yang terjual lebih dari sejuta eksemplar dan diterjemahkan ke banyak bahasa. Pesannya sederhana: memecahkan masalah adalah keterampilan yang bisa dilatih, seperti berenang atau bermain gitar.

KERJAKAN BERSAMA Pesta jabat tangan

Sepuluh anggota kelompok belajar saling berjabat tangan. Setiap orang berjabat tangan tepat satu kali dengan setiap orang lainnya. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi?

1 Pahami. Ada 10 orang. Jabat tangan Ayu–Dimas sama dengan Dimas–Ayu, jadi hanya dihitung sekali.

2 Rencanakan. Sepuluh orang terlalu banyak untuk digambar. Coba *kasus kecil* dan cari polanya: 2 orang → 1, 3 orang → 3, 4 orang → 6, 5 orang → 10.

3 Laksanakan. Polanya 1, 3, 6, 10: bilangan segitiga! Orang ke-2 menjabat 1 orang yang sudah ada, orang ke-3 menjabat 2 orang, dan seterusnya. Untuk 10 orang: $1 + 2 + \dots + 9 = T_9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$.

4 Periksa. Cara lain: setiap orang menjabat 9 tangan, jadi $10 \times 9 = 90$. Tetapi setiap jabat tangan terhitung dua kali (sekali oleh tiap orang), jadi $90 : 2 = 45$. ✓

Ada 45 jabat tangan. Strategi "coba kasus kecil" membuka pola, dan cara kedua memastikan jawabannya.

Strategi	Kapan dipakai	Contoh di bab ini
Coba kasus kecil	Angkanya terlalu besar untuk langsung dihitung.	Jabat tangan 2, 3, 4 orang dulu.
Buat tabel	Ada beberapa nilai yang berubah bersamaan.	Tabel daerah dalam lingkaran (1.5).
Gambar	Soal bercerita tentang bentuk, susunan, atau rute.	Tangga kotak untuk bilangan segitiga.
Cari pola	Hasil kasus kecil tampak teratur.	1, 3, 6, 10 adalah bilangan segitiga.
Bekerja mundur	Keadaan akhirnya diketahui, awalnya dicari.	Langkah terakhir naik tangga: dari $n - 1$ atau $n - 2$.
Tebak dan uji	Jawabannya bilangan bulat dalam rentang kecil.	$n(n - 1) = 132$, coba $n = 12$.

Bahasa sederhana • Ringkasnya: **baca baik-baik, pilih cara, kerjakan pelan-pelan**, lalu **cek lagi**. Kalau macet, kecilkan dulu soalnya. Hampir semua matematikawan melakukannya, termasuk yang paling hebat.



TRIK KAK LINTANG: KECILKAN DULU

Soal tentang 100 orang, 1000 lampu, atau papan 8×8 sering terasa menakutkan. Ganti dulu angkanya dengan 2, 3, dan 4, kerjakan dengan tangan, lalu cari polanya. Setelah polanya ketemu, baru kembali ke angka besar. Kak Lintang menyebutnya "mengecilkan gajah supaya muat di saku".



MATEMATIKA NUSANTARA

Congklak (dakon) adalah permainan berhitung dari Nusantara. Dalam aturan yang umum dimainkan, setiap pemain memiliki 7 lubang kecil yang masing-masing berisi 7 biji, ditambah satu lubang besar (lambung). Jadi ada $2 \times 7 \times 7 = 98$ biji di papan berlubang 16. Saat menebar biji, lambung lawan dilewati, sehingga satu putaran penuh hanya 15 lubang. Pemain jago diam-diam menghitung: "Lubang ini berisi 9 biji, berarti biji terakhir jatuh di lubang mana?" Itulah strategi Polya dalam permainan tradisional!

Lantai teras rumah Ayu berupa ubin 5×5 . Berapa banyak persegi, dari semua ukuran, yang bisa kamu temukan pada garis-garis ubin itu?

- 1 **Kasus kecil.** Ubin 1×1 : 1 persegi. Ubin 2×2 : 4 persegi kecil + 1 persegi besar = 5. Ubin 3×3 : $9 + 4 + 1 = 14$.
- 2 **Pola.** Untuk ubin $n \times n$, persegi berukuran $k \times k$ bisa diletakkan di $(n - k + 1)^2$ posisi. Jadi totalnya $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
- 3 **Untuk 5×5 :** $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$.

Ada 55 persegi. Tantangan: dengan cara yang sama, papan catur 8×8 menyimpan 204 persegi. Coba buktikan!

1.5 Menebak, menguji, membuktikan

Penemuan matematika biasanya berjalan dalam tiga tahap. Pertama, kita **menebak** sebuah pola dari beberapa contoh; tebakkan seperti ini disebut **dugaan** (konjektur). Kedua, kita **menguji** dugaan itu dengan contoh-contoh baru. Ketiga, kita **membuktikan** bahwa dugaan itu benar untuk *semua* kasus. Dugaan yang sudah terbukti naik pangkat menjadi **teorema**.

Contoh: jumlahkan bilangan ganjil berturut-turut dari 1.

$$1 = 1, \quad 1 + 3 = 4, \quad 1 + 3 + 5 = 9, \quad 1 + 3 + 5 + 7 =$$

Tebak: hasilnya selalu bilangan persegi, n^2 . **Uji:** sepuluh bilangan ganjil pertama, $1 + 3 + \dots + 19 = 100 = 10^2$. Cocok lagi! Tetapi sepuluh contoh belum tentu berlaku untuk sejuta contoh. Kita butuh **bukti**. Lihatlah kotak-kotak ini tumbuh:



$$1 = 1^2$$

Mulai dari satu kotak.

Langkah 1. Mulailah dengan satu kotak: $1 = 1^2$.



$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

Sabuk L berisi 3 kotak memperbesar persegi menjadi 2×2 .

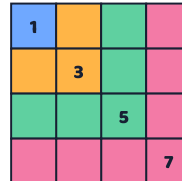
Langkah 2. Tambahkan sabuk berbentuk L berisi 3 kotak. Persegi tumbuh menjadi 2×2 : $1 + 3 = 2^2$.



$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

Sabuk berikutnya berisi 5 kotak: 3 di sisi kanan, 3 di bawah, pojoknya dipakai bersama.

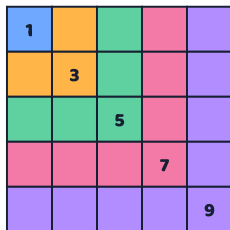
Langkah 3. Sabuk berikutnya berisi 5 kotak, dan persegi menjadi 3×3 : $1 + 3 + 5 = 3^2$.



$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Setiap sabuk baru berisi 2 kotak lebih banyak: bilangan ganjil berikutnya!

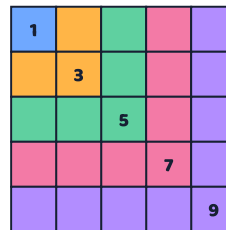
Langkah 4. Sabuk 7 kotak menghasilkan 4×4 . Setiap sabuk baru selalu 2 kotak lebih banyak: itulah bilangan ganjil berikutnya.



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Lima bilangan ganjil pertama menyusun persegi 5×5 .

Langkah 5. Sabuk 9 kotak menghasilkan $5 \times 5 = 25$.



Berlaku untuk semua n !

Gambar ini adalah bukti, bukan sekadar contoh.

sabuk ke- n : $n + (n - 1) = 2n - 1$ kotak

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Langkah 6. Untuk memperbesar persegi $(n - 1) \times (n - 1)$ menjadi $n \times n$, sabuknya berisi $n + (n - 1) = 2n - 1$ kotak, selalu bilangan ganjil ke- n . Jadi $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ untuk **setiap** n .



TEOREMA JUMLAH BILANGAN GANJIL

Jumlah n bilangan ganjil pertama sama dengan n^2 :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

▼ Bukti aljabar (memakai bilangan segitiga)

Bilangan ganjil ke- k adalah $2k - 1$. Jadi

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \dots + (2n - 1) = 2(1 + 2 + \dots + n) - n.$$

Dengan rumus bilangan segitiga, $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$. Terbukti! Dua bukti yang sangat berbeda (gambar dan aljabar) sampai pada kesimpulan yang sama.

RUMUS HIDUP Jumlah n bilangan ganjil pertama

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = S_n = n^2$$

Setiap bilangan ganjil adalah satu sabuk L yang memperbesar persegi satu ukuran. n sabuk = persegi $n \times n$.

n Banyak bilangan ganjil buah

S_n Jumlahnya

JUMLAHNYA

25

$1 + 3 + 5 + \dots + 9 = 25$. Bilangan ganjil terakhirnya **9**, dan persegi 5×5 berisi tepat **25** kotak.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-GANJIL

Apakah setiap pola yang "kelihatan benar" pasti benar? Tebak dulu sebelum mencoba Lab Mini berikutnya!



Tebak Dulu!

Titik-titik diletakkan pada lingkaran, lalu setiap dua titik dihubungkan dengan garis lurus. Dengan 1, 2, 3, 4, 5 titik, lingkaran terbagi menjadi 1, 2, 4, 8, 16 daerah. Dengan 6 titik, berapa daerah paling banyak?

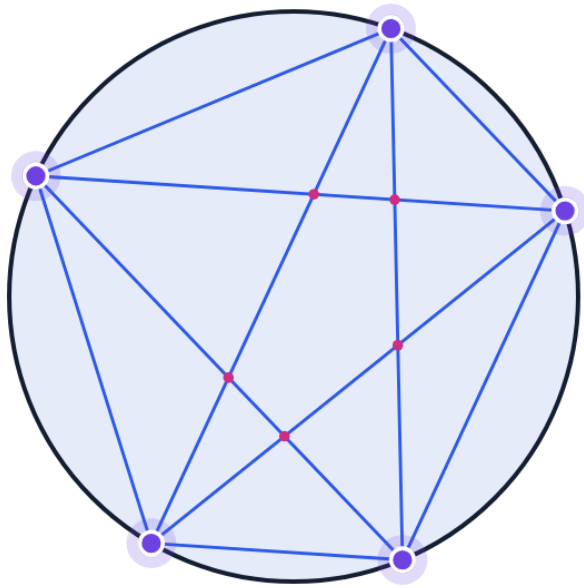
32, karena polanya selalu dikali 2.

30, karena $6 \times 5 = 30$.

31.

36, karena $6 \times 6 = 36$.

Jawabannya: 31! Pola "kali dua" yang tampak sempurna untuk lima contoh pertama ternyata patah di contoh keenam. Hitung sendiri di Lab Mini berikut. Pelajarannya sangat penting: lima contoh yang cocok **belum** merupakan bukti.



👉 seret titik ungu

Daerah sekarang: 16

n	daerah maks.	tebakan 2^{n-1}
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4	8	8
5	16	16
6	31	32
7	57	64
8	99	128
9	163	256
10	256	512

Sejauh ini pola

"kali dua" cocok...

Coba $n = 6!$

tali busur
10

titik potong
5

daerah
16

tebakan "kali dua"
16

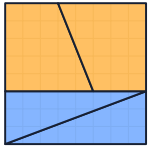
Bayangkan lingkaran ini martabak, dan setiap tali busur adalah potongan pisau. Naikkan banyak titik sampai 6 dan bandingkan dengan tebakan "kali dua". Lalu tekan **Beraturan**: mengapa 6 titik beraturan hanya menghasilkan 30 daerah? Seret titik ungu untuk menyelidikinya.



AWAS JEBAKAN

Contoh yang cocok, sebanyak apa pun, belum merupakan bukti. Matematikawan Leonhard Euler menemukan rumus $n^2 + n + 1$ yang menghasilkan bilangan prima untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 39$: empat puluh contoh berturut-turut! Tetapi untuk $n = 40$ hasilnya $1.681 = 41 \times 41$, bukan bilangan prima.

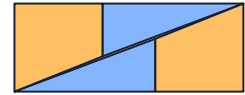
Bahkan gambar pun bisa menipu. Perhatikan teka-teki terkenal ini: sebuah persegi 8×8 dipotong menjadi empat bagian, lalu disusun ulang menjadi persegi panjang 13×5 . Padahal $8 \times 8 = 64$, sedangkan $13 \times 5 = 65$. Dari mana datangnya satu kotak tambahan?



$8 \times 8 = 64$ kotak

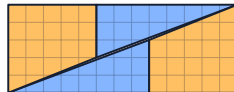
Potong menjadi 2 segitiga (biru) dan 2 trapesium (oranye).

Langkah 1. Persegi 8×8 berisi 64 kotak. Potong menjadi dua segitiga siku-siku (kaki 8 dan 3) dan dua trapesium (sisi sejajar 3 dan 5, tinggi 5).



Segitiga digeser, trapesium diputar seperempat putaran...

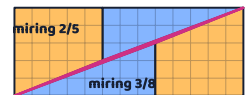
Langkah 2. Geser kedua segitiga dan putar kedua trapesium seperempat putaran. Tidak ada potongan yang dibuang atau ditambah.



$13 \times 5 = 65$ kotak?!

Potongannya sama, tetapi luasnya bertambah satu kotak?

Langkah 3. Hasilnya tampak seperti persegi panjang $13 \times 5 = 65$ kotak. Satu kotak muncul dari udara?



$13 \times 5 = 65$ kotak?!

"Diagonal" itu ternyata bukan garis lurus!

Ada celah tipis berbentuk jajargenjang yang luasnya tepat 1 kotak.

Langkah 4. Rahasiannya: kemiringan sisi miring segitiga $\frac{3}{8} = 0,375$, sedangkan kemiringan trapesium $\frac{2}{5} = 0,4$. Keduanya hampir sama, tetapi tidak sama, sehingga "diagonal" itu sedikit bengkok dan menyisakan celah setipis rambut seluas tepat 1 kotak.

▼ Mengapa celahnya tepat 1 kotak? (Hubungan dengan Fibonacci)

Perhatikan ukurannya: 3, 5, 8, 13, semuanya bilangan Fibonacci berurutan! Ada sifat ajaib yang disebut **identitas Cassini**: untuk tiga bilangan Fibonacci berurutan, hasil kali kedua bilangan di pinggir selalu berselisih tepat 1 dari kuadrat bilangan di tengah, misalnya $5 \times 13 - 8^2 = 65 - 64 = 1$ dan $8 \times 21 - 13^2 = 168 - 169 = -1$. Secara umum

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Karena selisihnya hanya 1, kemiringan potongan-potongannya hampir sama sehingga mata kita tertipu. Dengan Fibonacci yang lebih besar (misalnya 21×21 menjadi 34×13), celahnya makin tipis tetapi luasnya tetap 1. Inilah alasan matematikawan tidak puas dengan gambar saja: mereka menghitung kemiringannya.



**RUMUS DAERAH DALAM LINGKARAN**

Jika tidak ada tiga tali busur yang melalui satu titik, banyak daerahnya adalah

$$R(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

Idenya: mulai dari 1 daerah (lingkaran utuh). Setiap tali busur baru menambah daerah sebanyak 1 ditambah banyak tali busur lama yang dipotongnya. Setiap titik potong ditentukan oleh tepat 4 titik pada lingkaran (dua tali busur yang bersilangan), jadi ada $\binom{n}{4}$ titik potong, dan ada $\binom{n}{2}$ tali busur. Untuk $n = 6$: $15 + 15 + 1 = 31$. Untuk $n = 10$ hasilnya $210 + 45 + 1 = 256 = 2^8$, sebuah kebetulan yang lucu. Kamu akan menguasai notasi $\binom{n}{k}$ di Bab 32.

MITOS

"Matematika itu cuma berhitung."

MITOS

"Kalau polanya cocok untuk lima contoh, pasti benar untuk semua."

FAKTA

Berhitung hanyalah alat. Inti matematika adalah menemukan

pola

, menebak aturannya, lalu membuktikan bahwa aturan itu selalu benar.

FAKTA

Daerah dalam lingkaran 1, 2, 4, 8, 16 berlanjut 31, bukan 32. Rumus Euler cocok 40 kali lalu gagal.

Hanya

bukti

yang menjamin kebenaran untuk semua kasus.

MITOS

"Cangkang siput nautilus adalah contoh sempurna rasio emas."

MITOS

"Orang yang jago matematika langsung tahu jawabannya."

FAKTA

Cangkang nautilus memang berbentuk spiral yang indah, tetapi pengukuran menunjukkan pertumbuhannya umumnya

tidak

mengikuti 1,618. Rasio emas sering ditempelkan pada hal-hal yang sebenarnya tidak cocok.

FAKTA

Mereka juga mencoba, keliru, dan mengulang.

Bedanya, mereka punya strategi (seperti empat langkah Polya) dan tidak menyerah saat tebakan pertama salah.

1.6 Matematika dalam pekerjaan dan teknologi

Di balik layar ponselmu, di kantor BMKG, sampai di bengkel batik, matematika bekerja diam-diam. Hampir semua pekerjaan memakai siklus yang sama: **amati pola**, **buat model** (aturan atau rumus), lalu **ramalkan** apa yang akan terjadi. Di dunia komputer ada satu kebiasaan berpikir yang sangat penting: **berpikir komputasional**,

yaitu memecah masalah menjadi langkah-langkah kecil yang teratur dan bisa diulang, seperti resep. Contoh paling seru adalah permainan tebak angka.



Tebak Dulu!

Ancil memikirkan satu bilangan dari 1 sampai 1.000. Setiap kali kamu menebak, Ancil hanya menjawab "terlalu besar", "terlalu kecil", atau "benar". Dengan cara paling cerdas, berapa tebakan yang pasti cukup?

500 tebakan.

100 tebakan.

10 tebakan.

1.000 tebakan.

Jawabannya: cukup 10! Tebaklah tepat di tengah, yaitu 500. Apa pun jawaban Ancil, separuh kemungkinan langsung tersingkir. Banyak kemungkinan menyusut kira-kira $1.000 \rightarrow 500 \rightarrow 250 \rightarrow 125 \rightarrow 62 \rightarrow 31 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Cara "selalu tebak di tengah" ini disebut **pencarian biner**. Sekarang giliran Ancil menebak pikiranmu!

LAB MINI Ancil menebak pikiranmu

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-1



Tebakan ke-1: apakah bilanganmu 50?

Bilanganmu pasti di antara 1 dan 100.

Pikirkan satu bilangan, lalu jawab dengan tombol di bawah.

Seluruh rentang



1

100

Kaca pembesar: kemungkinan yang tersisa



1

tebakan: 50

100

tebakan ke-
1

kemungkinan tersisa
100

janji Ancil: paling banyak
7 tebakan

Pikirkan satu bilangan rahasia, jangan diberitahu! Ancil akan menebak. Jawab dengan tombol **Terlalu besar**, **Terlalu kecil**, atau **Benar!**. Lalu ganti rentangnya menjadi 1 sampai 1.000.000. Hanya butuh berapa tebakan?

Mengapa Ancil selalu menepati janjinya? Dengan 1 tebakan kamu hanya bisa menangani 1 bilangan. Dengan 2 tebakan: tebak di tengah, lalu masih ada 1 bilangan di kiri dan 1 di kanan, jadi 3 bilangan. Dengan 3 tebakan: 7 bilangan. Polanya 1, 3, 7, 15, 31, ...: **kali dua, lalu tambah satu.**

$$N = 2^k - 1$$

Setiap tebakan di tengah membuang separuh kemungkinan. Jadi satu tebakan tambahan menggandakan jangkauanmu, lalu ditambah satu.

 k

Banyak tebakan kali

 N

Rentang yang pasti tertebak bilangan

RENTANG YANG PASTI TERTEBAK

127

bilangan

**1 sampai 100 cukup 7 tebakan**

Dengan **7** tebakan, kamu pasti bisa menemukan bilangan rahasia dari 1 sampai **127**. Satu tebakan lagi, jangkauannya menjadi **255**.

Cek satuan: N adalah banyak bilangan, jadi tanpa satuan ukuran.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEBAK-BINER](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-TEBAK-BINER)



DI DUNIA NYATA

Pencarian biner dipakai di mana-mana. Ponselmu memakainya saat mencari nama di daftar kontak yangurut abjad. Kamu memakainya saat membuka kamus tepat di tengah, lalu memilih separuh depan atau belakang. Teknisi listrik memakainya saat mencari titik kabel yang putus: cek bagian tengah dulu, lalu separuh yang rusak saja. Tanpa rumus rumit, cukup satu pola: **bagi dua terus**.



Pembatik & desainer

Merancang motif berarti mengatur simetri: berapa kali cap diulang, diputar, dan dicerminkan agar kain penuh dan rapi.



Prakirawan BMKG

Pola suhu, angin, dan curah hujan selama puluhan tahun diubah menjadi model komputer untuk meramal cuaca esok hari.



Aplikasi ojek & peta

Algoritma mencari rute tercepat dari ribuan kemungkinan jalan, lalu menghitung tarif dari jarak dan waktu tempuh.



Arsitek & insinyur

Rangka atap berbentuk segitiga dan struktur sarang lebah dipakai karena kuat tetapi hemat bahan.



Dokter & apoteker

Dosis obat anak dihitung dari berat badan, dan jadwal minum obat mengikuti pola waktu yang teratur.



Petani & pranata mangsa

Petani Jawa sejak dulu membaca pola musim tahunan dalam kalender pranata mangsa untuk menentukan waktu tanam.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA KOMPUTER MENYUKAI POLA KALI DUA

Komputer menyimpan segala sesuatu sebagai saklar mati-hidup (0 atau 1), yang disebut *bit*. Satu bit punya 2 keadaan, dua bit punya $2 \times 2 = 4$, dan n bit punya 2^n keadaan. Itulah sebabnya kapasitas memori ponsel selalu 32, 64, 128, atau 256 GB. Dengan 10 lampu yang masing-masing boleh menyala atau padam, ada $2^{10} = 1.024$ pola. Tetapi kalau dua lampu bersebelahan tidak boleh sama-sama menyala, banyak polanya menyusut menjadi 144, yang ternyata bilangan Fibonacci. Penasaran mengapa? Kerjakan soal Lv 6 di Tangga Latihan bab ini!

⚡ Cek Cepat

Bilangan berikutnya dari barisan 2, 5, 10, 17, 26, ... adalah...

35

37

36

52

Nilai $1 + 3 + 5 + \dots + 19$ adalah...

81

90

100

190

Setelah 21, 34, 55, bilangan Fibonacci berikutnya adalah...

76

110

144

89

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. D

Tantangan Rumah: detektif spiral nanas

Bahan: sebuah nanas (boleh juga buah pinus atau bunga matahari), spidol yang bisa dihapus atau potongan selotip, buku catatan.

1. Perhatikan "mata" nanas. Mata-mata itu tersusun dalam baris-baris miring yang melingkar seperti spiral.
2. Pilih satu baris spiral yang miring ke kanan. Tandai mata pertamanya dengan selotip, lalu ikuti barisnya sampai mengelilingi nanas.
3. Hitung ada berapa baris spiral sejajar yang miring ke kanan. Tandai setiap baris supaya tidak terhitung dua kali.
4. Ulangi untuk baris spiral yang miring ke kiri, lalu untuk spiral yang paling curam.
5. Catat ketiga bilangan itu. Mintalah anggota keluarga menghitung ulang (langkah ke-4 Polya: periksa!).

Pertanyaan: Apakah bilangan-bilanganmu termasuk barisan Fibonacci (misalnya 5, 8, dan 13)? Jika tidak, apa kemungkinan penyebabnya: salah hitung, atau memang alam tidak selalu sempurna?

RINGKASAN KILAT Bab 1 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- memandang matematika sebagai **ilmu tentang pola** dan menemukannya di batik, sarang lebah, dan bunga
- melanjutkan **barisan pola** gambar dan bilangan, serta menghitung **bilangan segitiga** dan **bilangan persegi**
- mengenali **barisan Fibonacci** dan **rasio emas** di alam
- memecahkan masalah dengan **empat langkah Polya**
- membedakan **menebak, menguji, dan membuktikan**, misalnya untuk jumlah bilangan ganjil

Istilah kunci

ilmu tentang pola

Pola

bilangan segitiga

bilangan persegi

barisan

suku

Barisan Fibonacci

rasio emas

dugaan

teorema

berpikir komputasional

pencarian biner

Rumus penting

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bilangan segitiga. Dua tangga yang sama membentuk persegi panjang $n \times (n+1)$. Satu tangga = setengahnya.

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Rumus Binet: Fibonacci dari akar 5. $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ dan $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$ dipangkatkan n , dikurangkan, lalu dibagi $\sqrt{5}$. Hasilnya selalu bilangan Fibonacci yang bulat.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = S_n = n^2$$

Jumlah n bilangan ganjil pertama. Setiap bilangan ganjil adalah satu sabuk L yang memperbesar persegi satu ukuran. n sabuk = persegi $n \times n$.

$$N = 2^k - 1$$

Jangkauan tebak angka. Setiap tebakan di tengah membuang separuh kemungkinan. Jadi satu tebakan tambahan menggandakan jangkauanmu, lalu ditambah satu.

Jangan sampai terjebak

- Dua atau tiga suku saja belum cukup untuk memastikan sebuah pola.
- Contoh yang cocok, sebanyak apa pun, belum merupakan bukti.

 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=1

Teka-teki untuk Bab 2

Pagi hari di Dieng, termometer menunjukkan suhu -3°C dan rumput tertutup embun beku. Menjelang siang, suhu naik 5°C . Dimas yakin suhunya sekarang 8°C , sedangkan Ayu bilang 2°C . Siapa yang benar? Petunjuk dari pola: kalau kamu menghitung mundur 3, 2, 1, 0, ... bilangan apa yang datang sesudah 0?

▼ Intip petunjuk

Bayangkan termometer sebagai garis bilangan yang berdiri tegak. Dari -3 , naik 3 langkah sampai 0, lalu naik 2 langkah lagi. Pola hitung mundur 3, 2, 1, 0 berlanjut ke $-1, -2, -3, \dots$ itulah **bilangan negatif**. Di Bab 2 kamu akan belajar menjumlah, mengurangi, bahkan mengalikan bilangan negatif, termasuk alasan mengapa negatif kali negatif hasilnya positif.

02

Bilangan Bulat: Petualangan di
Bawah Nol

Subuh di Dieng, termometer menunjuk -3°C . Di Laut Banda, dasar laut berada ribuan meter di bawah permukaan. Bagaimana caranya berhitung dengan bilangan yang "lebih kecil daripada nol"? Ayo melompat ke sisi kiri garis bilangan!

Setelah bab ini, kamu bisa

- menempatkan dan membandingkan **bilangan bulat** pada garis bilangan, termasuk bilangan negatif;
- menjumlahkan dan mengurangkan bilangan bulat dengan **lompatan katak** dan **koin pasangan nol**;
- menjelaskan mengapa **negatif $\times$ negatif = positif** dan memakai aturan tanda;
- menghitung soal campuran dengan **urutan operasi** yang benar;
- memakai **nilai mutlak** untuk menghitung jarak, selisih suhu, dan selisih ketinggian.

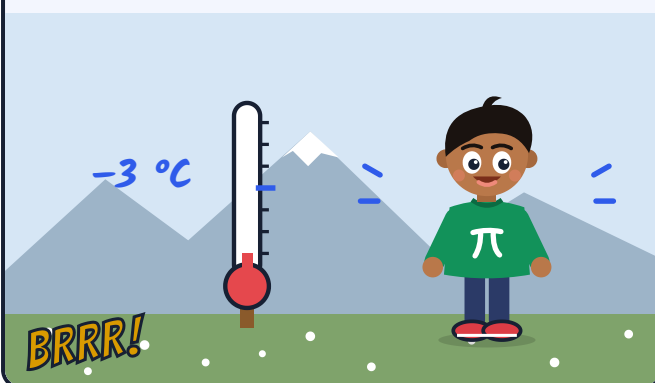
EMBUN BEKU DI DIENG

KOMIK • 4 PANEL

Subuh di Dataran Tinggi Dieng, musim kemarau

DIMAS

Brrr! Termometernya menunjuk -3°C .
Rumputnya sampai berselimut es.
Memangnya ada suhu di bawah nol?

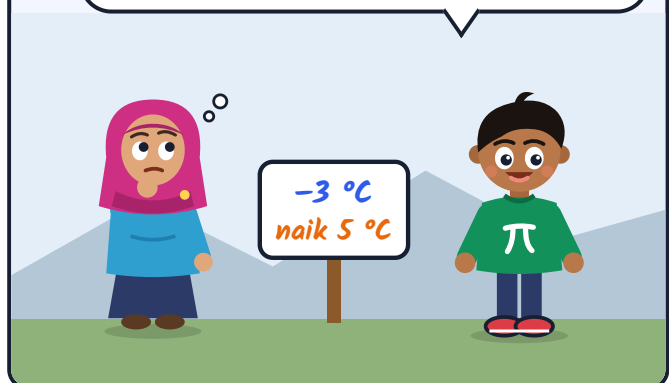


AYU

Ini persis teka-teki Bab 1! Sekarang -3°C ,
nanti siang naik 5°C . Jadi berapa suhunya
siang nanti?

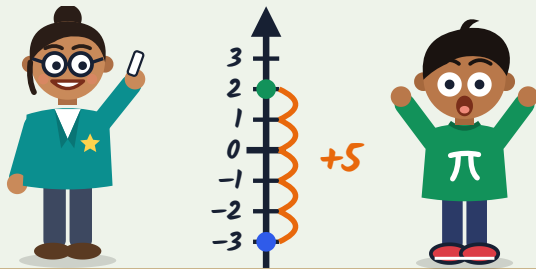
DIMAS

Gampang! $3 + 5 = 8$. Jadi 8°C !



KAK LINTANG

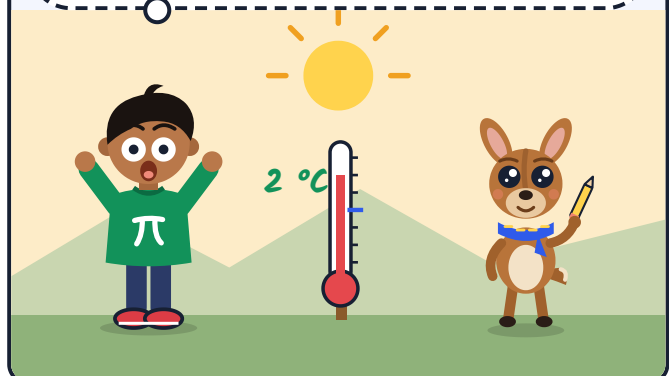
Termometer itu garis bilangan yang berdiri. Dari -3 , naik satu strip demi satu strip: -2 , -1 , 0 , 1 , 2 .

**Siang harinya...****ANCIL**

Tiga lompatan untuk sampai ke nol, dua lompatan lagi di atas nol. Jadi 2°C , bukan 8°C !

DIMAS

Ooh... tanda minus itu artinya "di bawah nol"!

**Tebak Dulu!**

Mana yang lebih besar: -2 atau -10 ?

-10 , karena 10 lebih besar daripada 2 .

-2 .

Sama besar, karena keduanya negatif.

Tidak bisa dibandingkan.

Jawabannya: -2 . Bayangkan termometer: -2°C jauh lebih hangat daripada -10°C , jadi letaknya lebih tinggi. Pada garis bilangan, -2 berada di sebelah kanan -10 , dan yang lebih kanan selalu lebih besar. Untuk bilangan negatif, makin besar angka di belakang tanda minus, makin kecil bilangannya.

2.1 Garis bilangan: rumah bagi bilangan negatif

Bayangkan termometer yang direbahkan. Angka 0 di tengah. Ke kanan ada $1, 2, 3, \dots$ yang makin hangat. Ke kiri ada $-1, -2, -3, \dots$ yang makin dingin. Inilah **garis bilangan**: setiap bilangan punya tempat, dan jarak antara dua bilangan yang berurutan selalu sama.

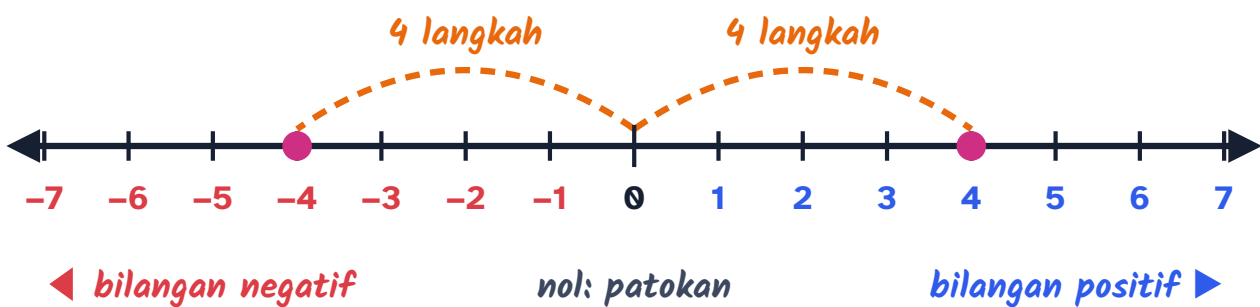


DEFINISI

Bilangan bulat adalah bilangan 0, bilangan asli 1, 2, 3, ..., dan lawan-lawannya $-1, -2, -3, \dots$. Himpunannya ditulis $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- Bilangan di kanan 0 disebut **bilangan bulat positif**; di kiri 0 disebut **bilangan bulat negatif**. Nol tidak positif dan tidak negatif.
- Dua bilangan yang jaraknya ke 0 sama tetapi letaknya berseberangan, misalnya 4 dan -4 , disebut saling **lawan**. Jumlah sebuah bilangan dengan lawannya selalu 0.

-4 dan 4 saling berlawanan: jaraknya ke 0 sama



Makin ke kanan, makin besar. Bilangan dan lawannya seperti bayangan cermin dengan 0 sebagai cerminnya.

Bahasa sederhana • Gampangnya: tanda minus di depan angka artinya "di bawah nol" atau "kurang dari nol". Suhu -3°C artinya 3 derajat di bawah nol. Utang Rp 5.000 bisa ditulis -5.000 , karena uangmu "kurang dari kosong".

Bilangan negatif muncul di banyak tempat: suhu di puncak Jayawijaya, utang di warung, lantai bawah tanah di mal, dan kedalaman laut. Semuanya memakai titik nol sebagai patokan: titik beku air, saldo kosong, lantai dasar, atau permukaan laut. Lihat garis bilangan tegak berikut, dari dasar laut terdalam di Indonesia sampai puncak gunung tertinggi.



Garis bilangan tegak (tidak sesuai skala). Permukaan laut menjadi titik nol. Dari dasar Palung Weber sampai Puncak Jaya terbentang sekitar 12 km!



SIFAT URUTAN

Pada garis bilangan, bilangan yang letaknya **lebih ke kanan selalu lebih besar**. Akibatnya:

- setiap bilangan positif lebih besar daripada 0, dan 0 lebih besar daripada setiap bilangan negatif;
- di antara dua bilangan negatif, yang lebih dekat ke 0 lebih besar: $-2 > -10$ dan $-99 < -1$.



AWAS JEBAKAN

Bilangan negatif yang angkanya lebih besar justru lebih kecil. $-10 < -2$, sama seperti -10°C lebih dingin daripada -2°C . Jangan membandingkan angkanya saja; lihatlah letaknya pada garis bilangan.



MATEMATIKA NUSANTARA

Tukang bangunan di Indonesia menulis ketinggian lantai dengan **peil** (dibaca "pil"). Lantai utama rumah diberi tanda $\pm 0,00$ sebagai titik nol. Teras yang 15 cm lebih rendah ditulis $-0,15$, dan lantai kamar mandi biasanya dibuat sedikit lebih rendah, misalnya $-0,05$, agar air tidak mengalir ke kamar lain. Di jalur pendakian, papan bertuliskan "**mdpl**" (meter di atas permukaan laut) memakai laut sebagai titik nol. Dua-duanya adalah garis bilangan tegak yang dipakai setiap hari!

2.2 Menjumlah dan mengurangi: lompat katak dan koin pasangan nol

Penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat bisa dibayangkan sebagai seekor katak yang melompat di garis bilangan. Katak itu mula-mula berdiri di bilangan pertama dan menghadap ke kanan (arah positif). Aturannya hanya dua:

- **Tanda operasi menentukan arah hadap.** Tanda + berarti tetap menghadap ke kanan; tanda – berarti katak **berbalik** menghadap ke kiri.
- **Tanda bilangan kedua menentukan cara melangkah.** Bilangan positif berarti **maju**; bilangan negatif berarti **mundur** (melompat ke belakang).

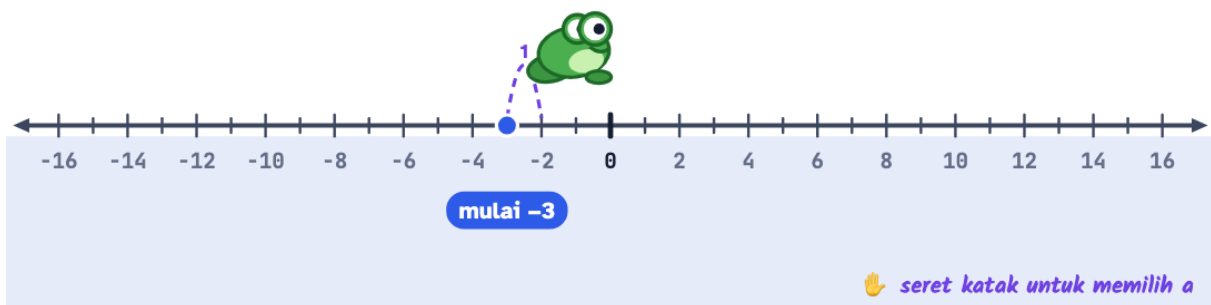
Contoh $-3 + 5$: katak berdiri di -3 , menghadap ke kanan, lalu maju 5 lompatan dan mendarat di 2. Itulah jawaban teka-teki suhu Dieng! Sekarang coba sendiri.

LAB MINI Katak pelompat di garis bilangan

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

$$-3 + 5 = ?$$

5 positif: katak MAJU 5 lompatan ke arah hadapnya.



Kalimat

$-3 + 5 = ?$

Katak menghadap

kanan →

Cara melompat

maju 5

Mendarat di

...

Atur a , operasi, dan b , lalu tekan ► **Jalankan**. Kamu juga bisa menyeret katak untuk memilih posisi awal. Coba $4 - (-3)$: katak berbalik ke kiri, lalu mundur... ke mana ia mendarat? Bandingkan dengan $4 + 3$.

$$T = T_0 + \Delta T$$

Suhu akhir sama dengan suhu awal ditambah perubahannya. Suhu naik berarti perubahannya positif; suhu turun berarti perubahannya negatif.

T_0 Suhu awal °C	ΔT Perubahan suhu °C	T Suhu akhir °C
--------------------	------------------------------	-------------------

SUHU AKHIR

2
°C

 melewati angka nol!

Mulai dari **-3 °C**, lalu **naik 5 °C**. Suhu akhirnya **2 °C**, **di atas titik beku air**.

Cek satuan: suhu awal, perubahan suhu, dan suhu akhir memakai satuan yang sama, yaitu °C.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUHU-AKHIR](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-suhu-akhir)

Cara kedua memakai koin. **Koin kuning bernilai +1** dan **koin merah bernilai -1**. Sekeping kuning dan sekeping merah bersama-sama bernilai 0; pasangan ini disebut **pasangan nol**. Menambah atau membuang pasangan nol tidak mengubah nilai, seperti menambah 0.



Tebak Dulu!

Berapa hasil $2 - (-3)$?

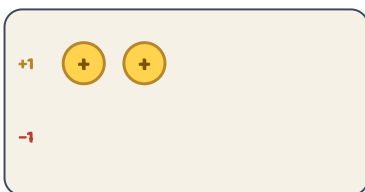
-1

5

-5

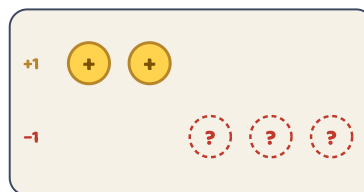
1

Jawabannya: 5. Mengurangi -3 berarti "mengambil utang 3". Kalau utangmu diambil (dihapus), kamu justru makin kaya: $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$. Lihat buktinya dengan koin di bawah ini.



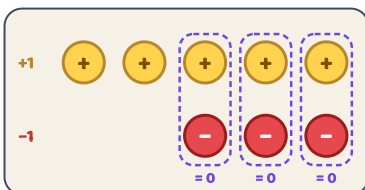
Nampan berisi
2 koin kuning.
Nilainya: 2

Langkah 1. Nampan berisi 2 koin kuning, jadi nilainya 2.



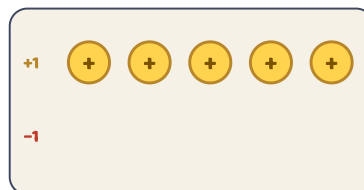
Perintahnya:
ambil 3 koin merah.
Padahal di nampan
tidak ada koin merah!

Langkah 2. Kita harus **mengambil** 3 koin merah (yaitu mengurangi -3). Masalahnya, tidak ada satu pun koin merah di nampan!



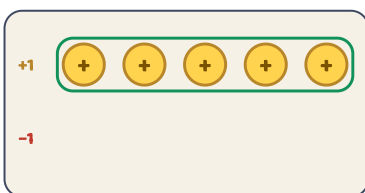
Tambah 3 pasangan nol.
Nilainya tetap 2,
karena setiap pasangan
kuning + merah = 0.

Langkah 3. Tambahkan 3 pasangan nol (3 kuning + 3 merah). Nilai nampan tidak berubah, tetap 2, karena setiap pasangan bernilai 0.



**Sekarang ambil
3 koin merah.**
Yang tersisa hanya
koin kuning.

Langkah 4. Sekarang ada 3 koin merah. Ambil ketiganya.



Sisa 5 koin kuning:
 $2 - (-3) = 5$
sama dengan $2 + 3$

Langkah 5. Tersisa 5 koin kuning: $2 - (-3) = 5$. Mengambil koin merah sama saja dengan menambah koin kuning. Mengurangi -3 sama dengan menambah 3!



ATURAN PENGURANGAN

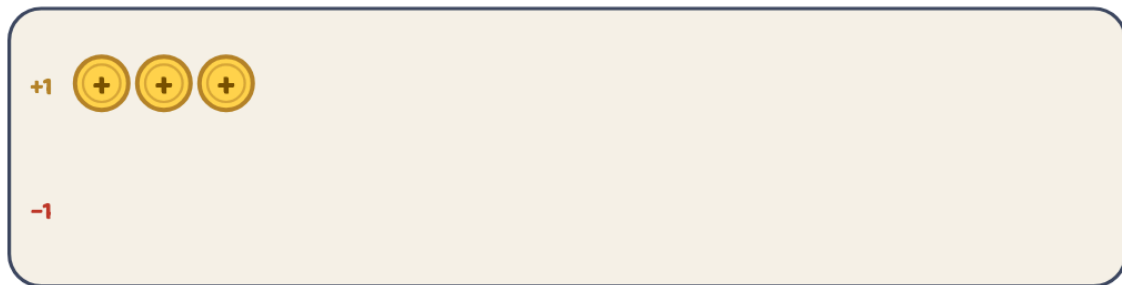
Mengurangi sebuah bilangan sama dengan **menambah lawannya**:

$$a - b = a + (-b)$$

Khususnya, $a - (-b) = a + b$. Contoh: $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ dan $-4 - 6 = -4 + (-6) = -10$.

$$3 - (-5) = ?$$

nilai nampun: 3



Mulai dengan 3: 3 koin kuning.



Kalimat

 $3 - (-5) = ?$

Nilai nampun

3

Tahap

1/4 • mulai

Pilih a , operasi, dan b , lalu tekan ► **Jalankan**. Perhatikan angka "nilai nampun": saat pasangan nol ditambahkan, nilainya tidak berubah sedikit pun. Coba $-3 + 5$, $3 - (-5)$, dan $-2 - 6$.



TRIK KAK LINTANG

Dua tanda kurang yang berdempetan, $-(-\dots)$, seperti dua orang yang saling menghapus utang: hasilnya tanda tambah. $7 - (-2) = 7 + 2 = 9$. Sebaliknya, tanda tambah yang berdempetan dengan tanda kurang tetap menjadi kurang: $7 + (-2) = 7 - 2 = 5$.

CONTOH

Malam di puncak Jayawijaya

Siang hari, suhu di dekat puncak Jayawijaya 4°C . Menjelang tengah malam, suhunya turun 9°C . Berapa suhu tengah malam itu?

- 1 Turun berarti perubahannya negatif: $\Delta T = -9$.
- 2 $T = 4 + (-9)$. Katak di 4 menghadap ke kanan, lalu mundur 9 lompatan: 4 lompatan sampai ke 0, lalu 5 lompatan lagi di bawah nol.
- 3 $T = -5$.

Suhu tengah malam -5°C , yaitu 5 derajat di bawah titik beku air.

**ADU CEPAT****Kurang kilat: ubah jadi tambah!**ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**Mengurangi sama dengan menambah lawannya. Contoh: $-4 - (-9) = -4 + 9 = 5$, sedangkan $-4 - 9 = -13$.

2.3 Perkalian dan pembagian: misteri aturan tanda

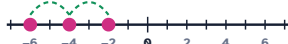
Perkalian adalah penjumlahan berulang: $3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$. Tiga kali berutang Rp 4.000 berarti berutang Rp 12.000. Lalu bagaimana dengan $(-3) \times (-4)$? Kita tidak bisa "menjumlahkan sebanyak -3 kali". Kita perlu ide lain, yaitu **pola**.

turun 1 tiap baris

$$\begin{array}{l} 3 \times (-2) = -6 \\ 2 \times (-2) = -4 \\ 1 \times (-2) = -2 \end{array} \left. \begin{array}{l} +2 \\ +2 \\ +2 \end{array} \right\}$$

Kalikan 3, 2, 1 dengan -2 .Hasilnya $-6, -4, -2$:

setiap baris naik 2!



Langkah 1. Mulai dari yang sudah kita yakini: $3 \times (-2) = -6$, $2 \times (-2) = -4$, $1 \times (-2) = -2$. Setiap kali faktor pertama turun 1, hasilnya **naik 2**.

turun 1 tiap baris

$$\begin{array}{l} 3 \times (-2) = -6 \\ 2 \times (-2) = -4 \\ 1 \times (-2) = -2 \\ 0 \times (-2) = 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \end{array} \right\}$$

Baris berikutnya: $0 \times (-2) = 0$.

Polanya tetap sama:

naik 2 lagi.



Langkah 2. Baris berikutnya $0 \times (-2) = 0$. Pola "naik 2" tetap berlaku.

turun 1 tiap baris

$$\begin{array}{l} 3 \times (-2) = -6 \\ 2 \times (-2) = -4 \\ 1 \times (-2) = -2 \\ 0 \times (-2) = 0 \\ (-1) \times (-2) = 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \end{array} \right\}$$

Lanjutkan ke bawah nol.

Pola tidak boleh patah, jadi

 $(-1) \times (-2)$ harus 2!

Langkah 3. Sekarang faktor pertama menjadi negatif. Agar polanya tidak tiba-tiba patah, $(-1) \times (-2)$ harus $0 + 2 = 2$.

turun 1 tiap baris

$$\begin{array}{l} 3 \times (-2) = -6 \\ 2 \times (-2) = -4 \\ 1 \times (-2) = -2 \\ 0 \times (-2) = 0 \\ (-1) \times (-2) = 2 \\ (-2) \times (-2) = 4 \\ (-3) \times (-2) = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \end{array} \right\}$$

Terus naik 2:

 $(-2) \times (-2) = 4$ $(-3) \times (-2) = 6$ 

Langkah 4. Lanjutkan: $(-2) \times (-2) = 4$ dan $(-3) \times (-2) = 6$. Titik-titik hasilnya terus melompat ke kanan.

turun 1 tiap baris

$$\begin{array}{l} 3 \times (-2) = -6 \\ 2 \times (-2) = -4 \\ 1 \times (-2) = -2 \\ 0 \times (-2) = 0 \\ (-1) \times (-2) = 2 \\ (-2) \times (-2) = 4 \\ (-3) \times (-2) = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \end{array} \right\}$$

**negatif $\times$ negatif = positif**

agar pola perkalian tidak patah

Langkah 5. Kesimpulan: hasil kali dua bilangan negatif adalah bilangan positif. Bukan aturan sembarangan, melainkan satu-satunya cara agar pola perkalian tetap rapi.



ATURAN TANDA PERKALIAN DAN PEMBAGIAN

Tanda kedua bilangan	Hasil	Contoh perkalian	Contoh pembagian
positif dan positif	positif	$3 \times 4 = 12$	$12 : 4 = 3$
negatif dan negatif	positif	$(-3) \times (-4) = 12$	$(-12) : (-4) = 3$
positif dan negatif	negatif	$3 \times (-4) = -12$	$12 : (-4) = -3$
negatif dan positif	negatif	$(-3) \times 4 = -12$	$(-12) : 4 = -3$

▼ Bukti dengan sifat distributif (untuk yang suka aljabar)

Kita tahu apa pun yang dikali 0 hasilnya 0, dan $4 + (-4) = 0$. Dengan sifat distributif:

$$0 = (-3) \times 0 = (-3) \times (4 + (-4)) = (-3) \times 4 + (-3) \times (-4) = -12 + (-3) \times (-4).$$

Jumlah -12 dengan $(-3) \times (-4)$ sama dengan 0, jadi $(-3) \times (-4)$ adalah lawan dari -12 , yaitu 12. Cara yang sama berlaku untuk bilangan negatif apa saja.



Bahasa sederhana • Cara mudah mengingat: **tanda sama** (+ dan +, atau – dan –) hasilnya **positif**; **tanda beda** hasilnya **negatif**.



DUA CERITA DI BALIK ATURAN TANDA

Film diputar mundur. Rekam Dimas yang berjalan mundur (–), lalu putar videonya mundur (–). Di layar, Dimas tampak berjalan maju (+)!

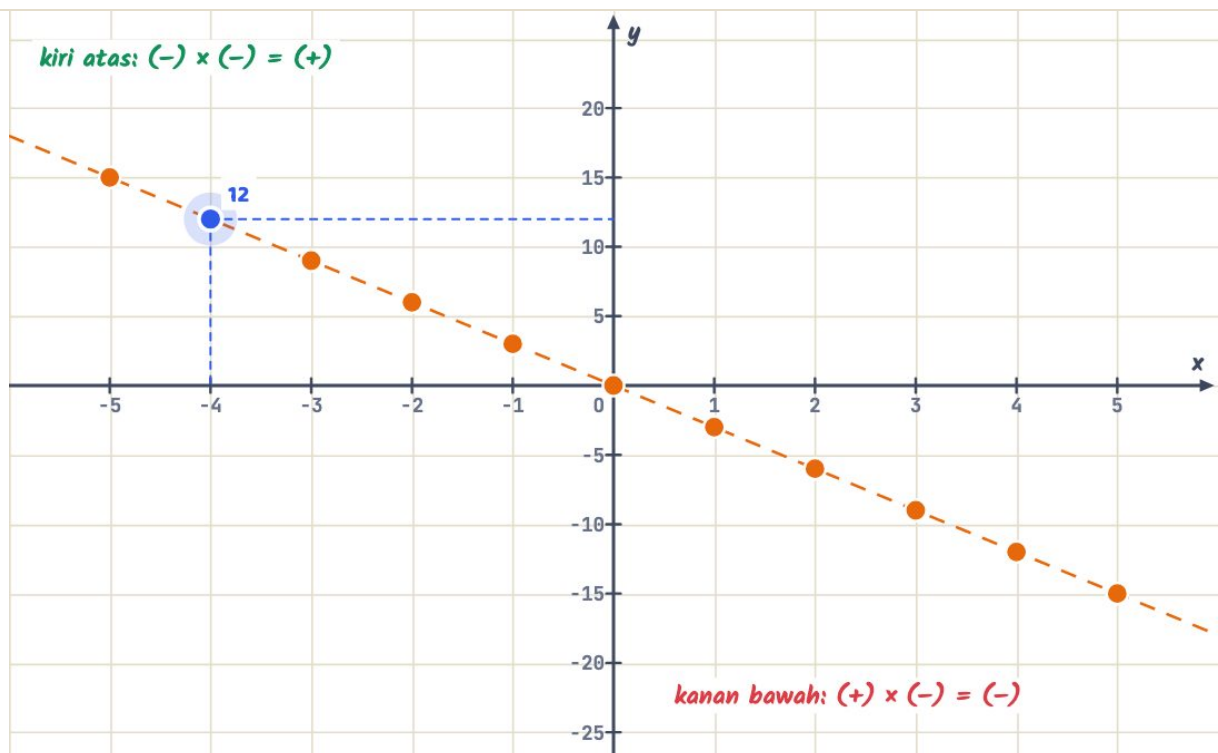
Utang dihapus. Jika Pak RT menghapus (–) tiga catatan utangmu yang masing-masing –Rp 2.000, kamu menjadi Rp 6.000 lebih kaya (+): $(-3) \times (-2.000) = +6.000$.

Ada cara lain melihat aturan tanda: gambarlah tabel perkalian sebagai titik-titik pada bidang koordinat. Semua titik $a \times x$ ternyata berbaris pada satu garis lurus.

$$y = a \times x$$

$$(-3) \times (-4) = 12$$

Setiap titik oranye adalah satu baris tabel perkalian $a \times x$, untuk $x = -5$ sampai 5 .
Semuanya terletak pada satu garis lurus yang melewati titik 0 .



⚡ negatif $\times$ negatif = positif

$a \times x$

12

Tanda hasil

positif

Geser a ke bilangan negatif. Perhatikan sisi kiri grafik (tempat x negatif): titik-titiknya naik ke **atas** sumbu- x . Seret titik biru untuk memilih x . Apa yang terjadi pada garis ketika $a = 0$?

Pembagian adalah kebalikan perkalian. $(-12) : 3 = -4$ karena $3 \times (-4) = -12$, dan $(-12) : (-3) = 4$ karena $(-3) \times 4 = -12$. Karena itu aturan tandanya sama persis dengan perkalian.



MEMBAGI DENGAN NOL? DILARANG!

$6 : 0$ seharusnya bilangan yang jika dikali 0 menghasilkan 6 . Tidak ada bilangan seperti itu, karena apa pun yang dikali 0 hasilnya 0 . Jadi pembagian dengan nol **tidak terdefinisi**. Sebaliknya, $0 : 6 = 0$ boleh, karena $6 \times 0 = 0$.



TRIK KAK LINTANG

Pada perkalian atau pembagian berderet, hitung saja banyaknya tanda negatif. **Genap** → hasilnya positif; **ganjil** → hasilnya negatif. Contoh: $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) = 24$ (empat tanda negatif), sedangkan $(-2)^5 = -32$ (lima tanda negatif).

KERJAKAN BERSAMA

Freezer dan mesin waktu

Suhu di dalam sebuah freezer turun 3°C setiap jam. Sekarang suhunya -6°C . Berapa suhunya 2 jam lagi? Berapa suhunya 4 jam yang lalu?

- 1 Perubahan per jam adalah -3°C . Waktu ke depan kita tulis positif, waktu ke belakang negatif.
- 2 2 jam lagi: perubahannya $(-3) \times 2 = -6$, jadi suhunya $-6 + (-6) = -12^\circ\text{C}$.
- 3 4 jam yang lalu: perubahannya $(-3) \times (-4) = 12$, jadi suhunya $-6 + 12 = 6^\circ\text{C}$.
- 4 Masuk akal? Suhunya terus turun, jadi 4 jam lalu memang lebih hangat: $6 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow -3 \rightarrow -6$. ✓

2 jam lagi -12°C ; 4 jam yang lalu 6°C . "Negatif $\times$ negatif = positif" di sini berarti memutar waktu mundur.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 2.000 tahun lalu, kitab Tiongkok *Jiuzhang Suanshu* (Sembilan Bab Seni Berhitung) sudah memakai batang hitung **merah** untuk bilangan positif dan **hitam** untuk bilangan negatif, mirip koin kita. Pada tahun 628 M, matematikawan India **Brahmagupta** menulis aturan bilangan negatif dengan bahasa harta dan utang, misalnya "hasil kali dua utang adalah harta". Ia juga termasuk orang pertama yang memperlakukan nol sebagai bilangan. Di Eropa, bilangan negatif lama dicurigai: pada abad ke-17, René Descartes masih menyebut penyelesaian persamaan yang negatif sebagai "akar palsu".



ADU CEPAT

Aturan tanda kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-2

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kalikan angkanya dulu, baru tentukan tandanya: tanda sama $\rightarrow$ positif, tanda beda $\rightarrow$ negatif.

2.4 Urutan operasi: siapa yang dikerjakan duluan?



Tebak Dulu!

Ayu dan Dimas menghitung $12 : 3 \times 2$. Ayu mendapat 8, Dimas mendapat 2. Siapa yang benar?

Dimas, karena kali harus dikerjakan sebelum bagi.

Ayu, karena kali dan bagi setara dan dikerjakan dari kiri.

Keduanya benar, tergantung cara masing-masing.

Keduanya salah, hasilnya 24.

Jawabannya: Ayu. Kali dan bagi sama kuat, jadi dikerjakan urut dari kiri: $12 : 3 = 4$, lalu $4 \times 2 = 8$. Dimas mengalikan 3×2 lebih dulu karena salah paham dengan singkatan "KaBaTaKu".

Bila satu soal memuat beberapa operasi, semua orang harus sepakat tentang urutannya. Kalau tidak, satu soal bisa punya banyak jawaban, dan kalkulator di seluruh dunia akan saling berselisih!



ATURAN URUTAN OPERASI

1. **Kurung** dikerjakan lebih dulu (kurung yang paling dalam lebih dulu).
2. **Pangkat** (dan akar).
3. **Kali dan bagi**: setara, dikerjakan urut dari kiri ke kanan.
4. **Tambah dan kurang**: setara, dikerjakan urut dari kiri ke kanan.

Di Indonesia, langkah 3 dan 4 sering diingat dengan singkatan **KaBaTaKu** (Kali, Bagi, Tambah, Kurang).



TRIK KAK LINTANG

Bayangkan kali dan bagi itu saudara kembar yang sama kuat, begitu pula tambah dan kurang. Saudara kembar tidak saling berebut: siapa yang berdiri lebih kiri, dia duluan. Jadi $12 : 3 \times 2 = 4 \times 2 = 8$, dan $10 - 3 + 2 = 7 + 2 = 9$ (bukan $10 - 5 = 5$).



AWAS JEBAKAN

-3^2 tidak sama dengan $(-3)^2$. Pangkat dikerjakan sebelum tanda minus di depannya, jadi $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$, sedangkan $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$. Kalkulator ilmiah pun membedakan keduanya.

$$1 - (-8 + 9) \times 5$$

$$= 1 - 1 \times 5$$

Urutan kerja

1 () kurung

2 $\times^2$ pangkat3 $\times$: dari kiri

4 + - dari kiri

(di dalam kurung)

Langkah

1/3

Aturan terakhir

tambah-kurang (dalam kurung)

Hasil

?

Tebak dulu hasilnya di kertas, lalu tekan ► **Jalankan** atau ►► **Satu langkah**. Warna sorotan menunjukkan aturan yang dipakai pada setiap langkah. Tekan 📦 **Soal baru** dan naikan tingkatnya kalau sudah lancar.

Hitunglah $(-2)^3 - 3 \times (4 - 10) : (-2)$.

1 Kurung: $4 - 10 = -6$. Soalnya menjadi $(-2)^3 - 3 \times (-6) : (-2)$.

2 Pangkat: $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.

3 Kali-bagi dari kiri: $3 \times (-6) = -18$, lalu $-18 : (-2) = 9$.

4 Terakhir: $-8 - 9 = -17$.

Hasilnya -17. Kalau pengurangan dikerjakan terlalu awal, $(-8 - 3) \times (-6) : (-2)$, kamu akan mendapat -33, jawaban yang keliru.

2.5 Nilai mutlak dan jarak

Kadang kita tidak peduli arah, hanya peduli seberapa jauh. Penyelam di kedalaman 30 m dan burung elang di ketinggian 30 m sama-sama berjarak 30 m dari permukaan laut.



DEFINISI

Nilai mutlak bilangan a , ditulis $|a|$, adalah jarak a ke 0 pada garis bilangan. Karena jarak tidak pernah negatif, $|a| \geq 0$. Contoh: $|7| = 7$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$.

Jarak antara dua bilangan a dan b pada garis bilangan adalah $|a - b|$.

Bahasa sederhana • Nilai mutlak artinya "berapa langkah dari nol", tidak peduli ke kiri atau ke kanan. Jadi, tanda minusnya cukup dibuang: $|-9| = 9$.

RUMUS HIDUP

Jarak dua titik di garis bilangan

$$d = |a - b|$$

Kurangkan kedua bilangan, lalu buang tandanya. Jarak tidak pernah negatif.



$$\text{beda tanda: jarak} = |a| + |b|$$

Selisihnya $a - b = -11$, dan nilai mutlaknya **11**. Dari a ke b kamu berjalan **11** satuan, arahnya **ke kanan**. Dibalik pun sama: $|b - a| = 11$.

Cek satuan: jarak memakai satuan yang sama dengan garis bilangannya (meter, °C, lantai, dan sebagainya).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JARAK-GARIS-BILANGAN

Sebuah helikopter SAR melayang 350 m di atas permukaan laut, tepat di atas kapal selam yang berada 120 m di bawah permukaan laut. Berapa jarak keduanya?

- 1 Tulis posisinya sebagai bilangan bulat: helikopter +350, kapal selam -120.
- 2 $\text{Jarak} = |350 - (-120)| = |350 + 120| = 470$.
- 3 Cek dengan cara lain: 350 m dari helikopter ke permukaan laut, ditambah 120 m dari permukaan laut ke kapal selam, sama dengan 470 m. ✓

Jaraknya 470 m. Bila tandanya berbeda, jaraknya sama dengan jumlah nilai mutlak keduanya.



AWAS JEBAKAN

$|a - b|$ tidak sama dengan $|a| - |b|$. Jarak dari -4 ke 3 adalah $|-4 - 3| = |-7| = 7$, bukan $|-4| - |3| = 1$. Kurangkan dulu, baru ambil nilai mutlaknya.



LIFT DAN KALENDER YANG TIDAK PUNYA NOL

Di banyak gedung, lantai di atas B1 langsung lantai 1, tanpa lantai 0. Kalender Masehi juga begitu: setelah tahun 1 SM langsung tahun 1 M, tidak ada tahun 0. Akibatnya, dari B2 ke lantai 3 kamu hanya naik 4 lantai, bukan $3 - (-2) = 5$. Dari tahun 5 SM sampai tahun 5 M hanya ada 9 tahun, bukan 10. Rumus $|a - b|$ hanya tepat bila angka nol ikut menjadi satu titik di garis bilangan.



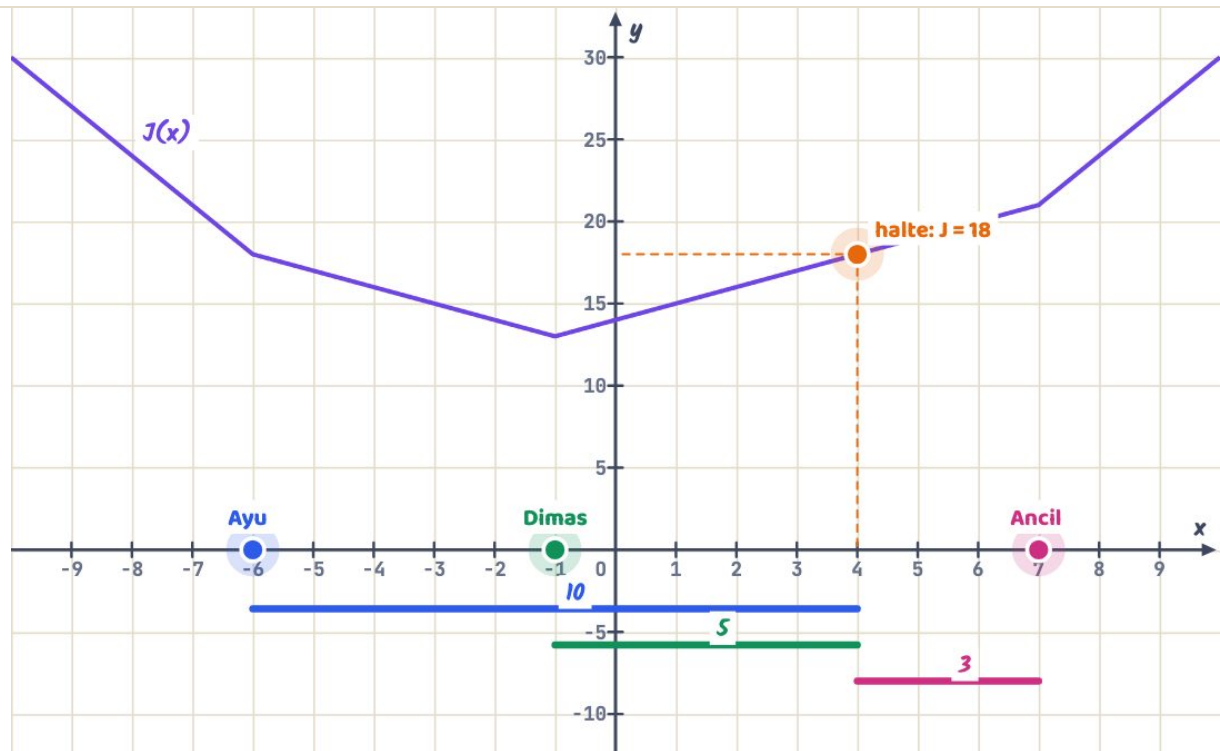
LANJUT · IB & OLIMPIADE

HALTE TERBAIK DAN MEDIAN

Rumah Ayu, Dimas, dan Ancil berada di titik a , b , dan c pada jalan lurus. Di titik h mana halte angkot sebaiknya dibangun agar total jarak $J = |h - a| + |h - b| + |h - c|$ paling kecil? Jawabannya mengejutkan: tepat di rumah yang letaknya di **tengah** (median), bukan di rata-ratanya! Alasannya: jika halte belum di tengah, menggesernya satu langkah ke arah sisi yang berisi dua rumah memperpendek dua jarak dan hanya memperpanjang satu jarak. Total minimumnya sama dengan jarak dua rumah terjauh. Coba buktikan sendiri dengan grafik berikut.

$$J = |h - a| + |h - b| + |h - c|$$

$$J = 10 + 5 + 3 = 18$$



Total jarak J
18

J terkecil yang mungkin
13

Seret titik oranye (halte) sepanjang lembah ungu. Tiga batang berwarna di bawah sumbu menunjukkan jarak halte ke tiap rumah. Di mana J paling kecil? Lalu seret rumah-rumahnya: apakah halte terbaik selalu di rumah yang di tengah?

2.6 Sifat-sifat operasi dan pola bilangan bulat

Bilangan bulat mengikuti beberapa "aturan main" yang selalu berlaku. Aturan ini membuat hitungan panjang bisa disusun ulang menjadi hitungan pendek.



SIFAT OPERASI BILANGAN BULAT

Untuk semua bilangan bulat a , b , dan c :

Sifat	Bentuk umum	Contoh
Komutatif (pertukaran)	$a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$	$(-3) + 5 = 5 + (-3) = 2$
Asosiatif (pengelompokan)	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	$(-7 + 7) + 9 = -7 + (7 + 9) = 9$
Distributif (penyebaran)	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	$-4 \times (10 + 3) = -40 + (-12) = -52$
Unsur identitas	$a + 0 = a, a \times 1 = a$	$-8 + 0 = -8$
Lawan (invers penjumlahan)	$a + (-a) = 0$	$13 + (-13) = 0$

Pengurangan dan pembagian **tidak** komutatif dan tidak asosiatif: $5 - 2 \neq 2 - 5$ dan $(8 - 4) - 2 \neq 8 - (4 - 2)$. Hasil penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dua bilangan bulat selalu bilangan bulat, tetapi hasil bagiannya belum tentu: $3 : 4$ bukan bilangan bulat.

Lanjut • Untuk penjelajah: karena memenuhi sifat-sifat di atas, himpunan $\mathbb{Z}$ beserta operasi $+$ dan $\times$ disebut sebuah *gelanggang* (*ring*) dalam aljabar abstrak. Banyak struktur lain, seperti polinomial dan matriks, ternyata juga gelanggang, sehingga trik hitung di bab ini berlaku juga di sana.



TRIK KAK LINTANG

Susun ulang supaya hitungannya ramah. $25 \times (-7) \times 4$: tukar urutannya menjadi $25 \times 4 \times (-7) = 100 \times (-7) = -700$. Atau pakai distributif: $99 \times (-6) = (100 - 1) \times (-6) = -600 + 6 = -594$.

MITOS

"Bilangan negatif cuma ada di buku matematika."

MITOS

"Dua tanda negatif selalu menghasilkan positif."

FAKTA

Suhu di puncak Jayawijaya, saldo yang berutang, tombol B2 di lift, selisih gol di klasemen liga, dan zona waktu UTC-5 semuanya memakai bilangan negatif.

FAKTA

Hanya pada perkalian dan pembagian! Pada penjumlahan, dua bilangan negatif makin negatif:
 $(-3) + (-4) = -7$
. Utang ditambah utang tetap utang, malah makin besar.

MITOS

"Nol itu bukan bilangan, atau nol termasuk bilangan positif."

FAKTA

Nol adalah bilangan bulat yang tidak positif dan tidak negatif. Ia menjadi patokan garis bilangan dan satu-satunya bilangan yang sama dengan lawannya sendiri.

Sekarang sebuah pola yang cantik. Berapa $-10 + (-9) + \dots + 11 + 12$? Setiap bilangan negatif bertemu lawannya dan saling menghapus, sehingga yang tersisa hanya $11 + 12 = 23$. Rumus Hidup berikut menghitung jumlah bilangan bulat berurutan dengan cara Gauss: jumlahkan suku pertama dan terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua.

$$S = \frac{(m + n) \times (n - m + 1)}{2}$$

Jumlahkan suku pertama dan suku terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua.
Bilangan negatif ikut dihitung!

m Mulai dari m n Sampai n S Jumlah

JUMLAH
23

 pasangan $-k$ dan k saling menghapus

Ada **23** suku. $(m + n) \times \text{banyak suku} : 2 = 2 \times 23 : 2 = 23$. Jika hasilnya tampil '-', berarti n masih lebih kecil daripada m .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-BULAT-BERURUTAN

Hitunglah $-20 + (-19) + (-18) + \dots + 24 + 25$.

- 1 Pasangkan setiap bilangan negatif dengan lawannya: $(-20) + 20 = 0$, $(-19) + 19 = 0$, ..., $(-1) + 1 = 0$. Angka 0 juga tidak menambah apa-apa.
- 2 Yang tersisa hanya $21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 115$.
- 3 Cek dengan rumus: banyak suku $25 - (-20) + 1 = 46$, jumlahnya $\frac{(-20 + 25) \times 46}{2} = 115$. ✓

Jumlahnya 115. Dari 46 suku, 41 suku saling menghapus!

**PARITAS: SENJATA RAHASIA OLIMPIADE**

Bisakah kamu mengisi setiap kotak pada $1 \square 2 \square 3 \square \dots \square 10$ dengan $+$ atau $-$ sehingga hasilnya 0 ? Cobalah sebentar... Ternyata **mustahil**, dan buktinya hanya beberapa baris. Jika semua kotak diisi $+$, hasilnya 55, bilangan ganjil. Mengganti tanda di depan bilangan k dari $+$ menjadi $-$ mengurangi hasil sebesar $2k$, bilangan genap. Ganjil dikurangi genap tetap ganjil, jadi hasilnya selalu ganjil dan tidak mungkin 0 . Sifat genap atau ganjil ini disebut **paritas**. Untuk 1 sampai 12 (jumlahnya 78, genap) ternyata bisa: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 - 12 = 0$.

**Es di khatulistiwa**

Puncak Jaya di Papua (± 4.884 m) begitu tinggi sehingga suhunya sering di bawah 0°C dan masih ada es di sana, walaupun dekat khatulistiwa.

**Lift dan lantai bawah tanah**

Tombol B1 dan B2 di lift adalah lantai -1 dan -2 . Hati-hati, banyak gedung tidak punya lantai 0 !

**Saldo dan bayar nanti**

Belanja dengan fitur bayar nanti membuat saldomu "minus": utang dicatat sebagai bilangan negatif sampai dilunasi.

**Klasemen liga**

Kolom selisih gol = gol yang dicetak $-$ gol yang kemasukan. Tim yang sering kalah telak punya selisih gol negatif.

**Zona waktu**

WIB = UTC+7, WITA = UTC+8, WIT = UTC+9. Selisih jam Jakarta dengan kota yang memakai UTC-5 adalah $7 - (-5) = 12$ jam.

**Menyelam di Bunaken**

Kedalaman penyelam dicatat negatif terhadap permukaan laut. Naik 10 m dari -25 m berarti tiba di -15 m.

**Cek Cepat**

$$-7 - (-2) = \dots$$

Hasil $(-4) \times (-5) : (-2)$ adalah...

10

-40

40

-10

Nilai $|3 - 8| - |-4|$ adalah...

1

-9

9

-1

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A



Tantangan Rumah: perang kartu merah-hitam

Bahan: satu set kartu remi (singkirkan kartu J, Q, K, dan joker), kertas, pensil, dan seorang teman atau anggota keluarga.

1. Kartu hitam ($\spadesuit$ $\clubsuit$) bernilai positif, kartu merah ($\heartsuit$ $\diamondsuit$) bernilai negatif. Kartu As bernilai 1, kartu angka sesuai angkanya. Jadi $7\heartsuit$ bernilai -7 .
2. Kocok kartu. Setiap pemain mengambil 5 kartu dan menghitung jumlahnya. Jumlah yang lebih besar menang satu poin.
3. Pakai trik pasangan nol: kartu merah dan hitam yang angkanya sama boleh disisihkan lebih dulu, karena jumlahnya 0.
4. Ronde khusus: lawanmu boleh mengambil satu kartu dari tanganmu. Catat apakah jumlahmu naik atau turun.
5. Mainkan 5 ronde dan tulis semua hitungannya di kertas.

Pertanyaan: Jika ke-40 kartu (As sampai 10 dari keempat jenis) dijumlahkan semuanya, berapa hasilnya? Jelaskan tanpa menjumlahkan satu per satu. Lalu, mengapa kehilangan kartu merah justru menguntungkan? Hubungkan dengan $a - (-b) = a + b$.

✓ Kamu sekarang bisa...

- menempatkan dan membandingkan **bilangan bulat** pada garis bilangan, termasuk bilangan negatif
- menjumlahkan dan mengurangi bilangan bulat dengan **lompatan katak** dan **koin pasangan nol**
- menjelaskan mengapa **negatif × negatif = positif** dan memakai aturan tanda
- menghitung soal campuran dengan **urutan operasi** yang benar
- memakai **nilai mutlak** untuk menghitung jarak, selisih suhu, dan selisih ketinggian

🔑 Istilah kunci

garis bilangan

Bilangan bulat

bilangan bulat positif

bilangan bulat negatif

lawan

pasangan nol

KaBaTaKu

Nilai mutlak

Jarak

Komutatif

Asosiatif

Distributif

paritas

📊 Rumus penting

$$T = T_0 + \Delta T$$

Suhu akhir. Suhu akhir sama dengan suhu awal ditambah perubahannya. Suhu naik berarti perubahannya positif; suhu turun berarti perubahannya negatif.

$$d = |a - b|$$

Jarak dua titik di garis bilangan. Kurangkan kedua bilangan, lalu buang tandanya. Jarak tidak pernah negatif.

$$S = \frac{(m + n) \times (n - m + 1)}{2}$$

Jumlah bilangan bulat berurutan. Jumlahkan suku pertama dan suku terakhir, kalikan dengan banyak suku, lalu bagi dua. Bilangan negatif ikut dihitung!

⚠ Jangan sampai terjebak

- Bilangan negatif yang angkanya lebih besar justru lebih kecil.
- -3^2 tidak sama dengan $(-3)^2$.
- $|a - b|$ tidak sama dengan $|a| - |b|$.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=2

Teka-teki untuk Bab 3

Di garis bilangan, bilangan bulat berdiri berjajar rapi dengan jarak 1. Bilangan bulat ditambah, dikurang, atau dikali bilangan bulat, hasilnya selalu bilangan bulat. Tetapi suatu sore Kak Lintang membawa 3 martabak untuk dibagi rata kepada 4 orang: Dimas, Ayu, Ancil, dan dirinya sendiri. Hasil $3 : 4$ bukan bilangan bulat! Berapa bagian yang didapat setiap orang, dan di mana letak bilangan itu pada garis bilangan?

▼ Intip petunjuk

Potong setiap martabak menjadi 4 potong yang sama besar. Ada 12 potong, jadi setiap orang mendapat 3 potong seperempat, yaitu $\frac{3}{4}$ martabak. Letaknya di antara 0 dan 1, lebih dekat ke 1. Bab 3 membahas pecahan, desimal, dan persen: bilangan-bilangan yang mengisi celah di antara bilangan bulat!

03

Pecahan, Desimal & Persen: Seni Membagi dengan Adil

Tiga martabak untuk empat orang: siapa yang tidak kebagian? Diskon 50% lalu 20%: benarkah totalnya 70%? Membagi dengan adil, berbelanja dengan cerdas, dan membaca angka di belakang koma ternyata satu keterampilan yang sama.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memaknai **pecahan** sebagai bagian dari keseluruhan, sebagai hasil bagi, dan sebagai titik di garis bilangan;
- membuat **pecahan senilai**, menyederhanakan, dan membandingkan pecahan;
- menjumlahkan, mengurangi, mengalikan, dan membagi pecahan dengan alasan yang masuk akal, bukan sekadar hafalan;
- mengubah pecahan $\leftrightarrow$ **desimal** $\leftrightarrow$ **persen**, termasuk desimal berulang seperti $0,333\ldots = \frac{1}{3}$;
- menghitung diskon, PPN, zakat, bunga, **persen perubahan**, dan harga sebelum diskon (**persen balik**).

TIGA MARTABAK, EMPAT PERUT

KOMIK • 4 PANEL

Sore hari, Kak Lintang baru membeli martabak

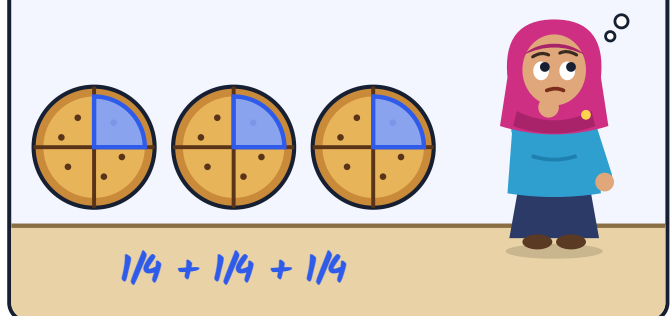
DIMAS

Gawat! Kak Lintang cuma beli 3 martabak, padahal kita berempat, termasuk Ancil. Pasti ada yang tidak kebagian!



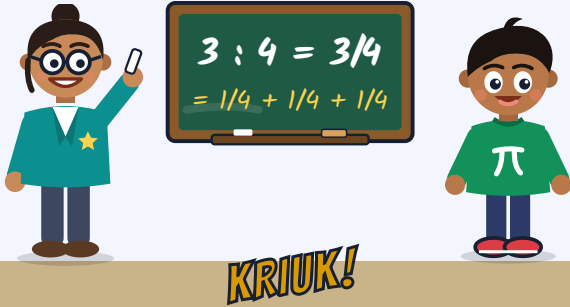
AYU

Tidak perlu rebutan. Potong setiap martabak jadi 4 sama besar. Tiap orang mengambil satu potong dari setiap martabak.



KAK LINTANG

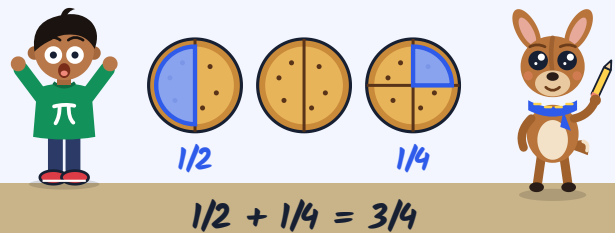
Jadi setiap orang dapat tiga potong seperempat, yaitu tiga perempat martabak. Tiga dibagi empat sama dengan $\frac{3}{4}$!

**Ancil muncul dari balik gerobak...****ANCIL**

Cara Mesir kuno lebih hemat potongan: 2 martabak dibelah dua, 1 martabak dipotong empat. Tiap orang dapat $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$!

DIMAS

Lho, kok $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ sama dengan $\frac{3}{4}$?!

**Tebak Dulu!**

Martabak A dipotong menjadi 6 potong sama besar. Martabak B, yang ukurannya sama, dipotong menjadi 8. Kamu boleh mengambil satu potong. Mana yang kamu pilih supaya dapat lebih banyak?

Potongan martabak B, karena 8 lebih besar daripada 6.

Potongan martabak A, karena dibagi ke lebih sedikit bagian.

Sama saja, karena sama-sama satu potong.

Tidak bisa ditentukan tanpa menimbang.

Jawabannya: potongan martabak A. Makin banyak potongannya, makin kecil setiap potong. Jadi $\frac{1}{6}$ lebih besar daripada $\frac{1}{8}$, walaupun 6 lebih kecil daripada 8. Penyebut memberi tahu "dibagi menjadi berapa", bukan "seberapa banyak yang kamu dapat".

3.1 Apa itu pecahan? Bagian, pembagian, dan titik

Bilangan bulat dari Bab 2 cocok untuk menghitung benda utuh: 3 martabak, 4 orang, -5°C . Padahal hidup penuh dengan benda yang *tidak* utuh: separuh gelas teh, seperempat kilo cabai, tiga perempat martabak. Untuk itulah manusia menciptakan **pecahan**.



DEFINISI

Pecahan $\frac{a}{b}$ (dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$) berarti: keseluruhan dibagi menjadi b bagian **sama besar**, lalu diambil a bagian. Bilangan a di atas disebut **pembilang**, sedangkan bilangan b di bawah disebut **penyebut**.

Satu pecahan punya tiga wajah yang sama pentingnya.

- **Bagian dari keseluruhan.** Sepotong lapis legit punya 20 lapis tipis. Kalau kamu mengupas dan memakan 7 lapis teratas, kamu memakan $\frac{7}{20}$ potongan itu.
- **Hasil bagi.** $\frac{a}{b} = a : b$. Tiga martabak dibagi empat orang: setiap orang mendapat $3 : 4 = \frac{3}{4}$ martabak. Inilah jawaban teka-teki di akhir Bab 2!
- **Titik di garis bilangan.** Bagi jarak 0 sampai 1 menjadi empat bagian sama panjang. Tanda ketiga adalah $\frac{3}{4}$. Di antara dua bilangan bulat ternyata ada banyak sekali "penghuni".



Setiap orang mengambil satu potong seperempat dari **setiap** martabak. Tiga potong seperempat = $\frac{3}{4}$ martabak. Jadi $3 : 4 = \frac{3}{4}$, dan tidak ada yang kelaparan.

Bahasa sederhana • Gampangnya: **penyebut** (angka bawah) = martabaknya dipotong menjadi berapa.

Pembilang (angka atas) = berapa potong yang kamu ambil. Satu syarat penting: semua potongan harus sama besar.



PECAHAN YANG LEBIH DARI SATU

Jika pembilang lebih besar daripada penyebut, nilainya lebih dari 1. Misalnya $\frac{7}{4}$: tujuh potong seperempat sama dengan satu martabak utuh ditambah tiga potong lagi. Kita bisa menulisnya sebagai **pecahan campuran** $1\frac{3}{4}$. Caranya: $7 : 4 = 1$ sisa 3.



AWAS JEBAKAN

Pecahan hanya bermakna jika bagian-bagiannya sama besar. Kalau martabak dipotong 4 tetapi ada potongan yang jumbo dan ada yang mungil, satu potongnya **bukan** $\frac{1}{4}$. Saat membaca gambar pecahan, periksa dulu apakah petaknya sama besar.

CONTOH Pecahan dari sebuah bilangan

Kelas Ayu berisi 32 siswa. Sebanyak $\frac{3}{8}$ dari mereka berangkat sekolah naik sepeda. Berapa siswa yang naik sepeda?

1. Penyebut 8: bagi 32 siswa menjadi 8 kelompok sama besar. Setiap kelompok berisi $32 : 8 = 4$ siswa.
2. Pembilang 3: ambil 3 kelompok, yaitu $3 \times 4 = 12$ siswa.

Ada 12 siswa yang naik sepeda. Ringkasnya: $\frac{3}{8} \times 32 = 12$. Kata "dari" pada pecahan berarti kali.

3.2 Pecahan senilai: beda potongan, sama banyak

Ambil separuh martabak. Potong separuh itu menjadi dua: kamu memegang 2 potong dari 4, yaitu $\frac{2}{4}$. Potong lagi: 4 potong dari 8, yaitu $\frac{4}{8}$. Martabak di tanganmu tidak bertambah sedikit pun! Pecahan-pecahan yang nilainya sama seperti ini disebut **pecahan senilai**.



SIFAT PECAHAN SENILAI

Untuk setiap bilangan bulat $k \neq 0$,

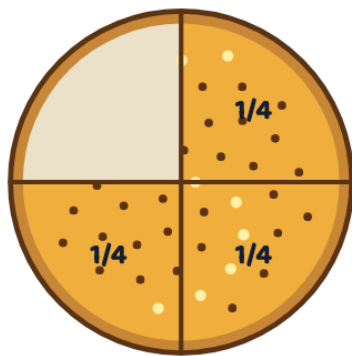
$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

Pembilang dan penyebut boleh dikali atau dibagi dengan bilangan yang **sama** (bukan nol). Nilai pecahannya tidak berubah.

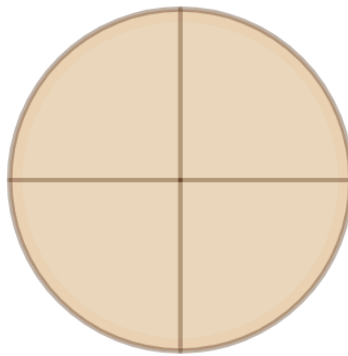
▼ Mengapa boleh? (bukti dengan pisau martabak)

Potong *setiap* potongan martabak menjadi k potongan yang lebih kecil. Banyak potongan seluruhnya menjadi $b \times k$, dan potongan yang kamu pegang menjadi $a \times k$. Pisau hanya membuat potongan lebih kecil; pisau tidak menambah atau mengurangi martabak. Jadi $\frac{a}{b}$ dan $\frac{a \times k}{b \times k}$ menyatakan banyak martabak yang sama.

👉 klik potongan untuk mengambil atau mengembalikannya



martabak 1



martabak 2

$$\frac{3}{4}$$

kurang dari 1 martabak
paling sederhana: $\frac{3}{4}$
desimal: 0,75
persen: 75%



Pecahan
 $\frac{3}{4}$

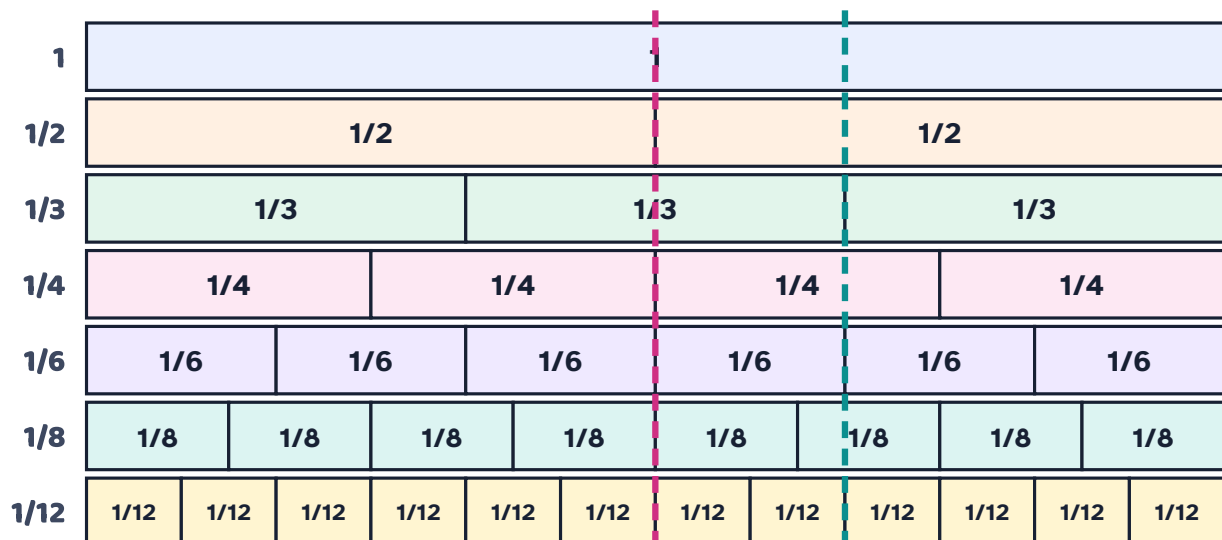
Senilai dengan
 $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

Paling sederhana
 $\frac{3}{4}$

Desimal
0,75

Persen
75 %

Klik potongan martabak untuk mengambil atau mengembalikannya, atau klik langsung di garis bilangan. Lalu geser "**Potong lagi**": potongannya makin kecil, angkanya berubah, tetapi titik di garis bilangan tidak bergeser sedikit pun. Bisakah kamu membuat $\frac{9}{12}$? Pecahan sederhana apa yang muncul?



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

Dinding pecahan. Garis putus-putus menembus batas potongan di beberapa baris sekaligus: itulah pecahan senilai. Dinding ini juga membantu membandingkan, misalnya $\frac{3}{4}$ (tiga ubin merah muda) lebih panjang daripada $\frac{2}{3}$.

Kebalikan dari memperbanyak potongan adalah **menyederhanakan**: membagi pembilang dan penyebut dengan bilangan yang sama. Pecahan berada dalam **bentuk paling sederhana** jika pembilang dan penyebutnya tidak lagi punya faktor persekutuan selain 1. Cara tercepat: bagi keduanya dengan FPB (faktor persekutuan terbesar) yang akan kamu kuasai di Bab 4.

CONTOH Menyederhanakan $\frac{18}{24}$

Sederhanakan $\frac{18}{24}$.

- 1 Keduanya genap, bagi 2: $\frac{18}{24} = \frac{9}{12}$.
- 2 Keduanya habis dibagi 3: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
- 3 3 dan 4 tidak punya faktor persekutuan selain 1, jadi berhenti di sini. (Langsung bagi FPB-nya, yaitu 6, juga boleh.)

$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. Coba buat $\frac{18}{24}$ di Lab Mini: pilih penyebut 4, ambil 3 potong, lalu potong lagi menjadi 6.

Membandingkan pecahan. Jika penyebutnya sama, bandingkan pembilangnya: $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$. Jika pembilangnya sama, yang penyebutnya lebih kecil justru lebih besar: $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$. Jika keduanya berbeda, samakan dulu penyebutnya, atau pakai trik berikut.



TRIK KAK LINTANG • PERKALIAN KUPU-KUPU

Untuk membandingkan $\frac{5}{8}$ dan $\frac{3}{5}$, kalikan menyilang seperti sayap kupu-kupu: $5 \times 5 = 25$ (untuk pecahan kiri) dan $3 \times 8 = 24$ (untuk pecahan kanan). Karena $25 > 24$, maka $\frac{5}{8} > \frac{3}{5}$. Diam-diam kamu sebenarnya menyamakan penyebut menjadi 40: $\frac{25}{40}$ melawan $\frac{24}{40}$.

3.3 Operasi pecahan: menjumlah, mengali, membagi

Menjumlah dan mengurangkan. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$: satu potong seperempat ditambah dua potong seperempat menjadi tiga potong seperempat. Penyebutnya tetap 4 karena ukuran potongannya tidak berubah. Lalu bagaimana dengan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$? Ukuran potongannya berbeda, jadi harus **disamakan** dulu: potong ulang keduanya menjadi perenaman. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ dan $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, sehingga jumlahnya $\frac{5}{6}$.

Bahasa sederhana • Gampangnya: kamu tidak bisa menjumlahkan 1 potong besar dan 1 potong kecil lalu menyebutnya "2 potong". Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru hitung banyak potongannya (pembilang).



AWAS JEBAKAN

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ bukan $\frac{2}{5}$: pembilang dan penyebut tidak boleh dijumlahkan begitu saja. Cek dengan akal sehat: $\frac{2}{5}$ malah lebih kecil daripada $\frac{1}{2}$, padahal kita menambahkan sesuatu ke $\frac{1}{2}$!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru jumlahkan banyak potongannya (pembilang).

a Pembilang 1

b Penyebut 1

c Pembilang 2

d Penyebut 2

s Jumlah martabak

JUMLAH

0,8333

martabak

Penyebut persekutuan terkecil = KPK(2, 3) = 6. Jadi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Bentuk paling sederhananya $\frac{5}{6}$, dalam desimal **0,8333**.

Cek satuan: kedua pecahan harus bagian dari benda yang sama (sama-sama martabak), barulah boleh dijumlahkan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-JUMLAH-PECAHAN

Ibu memakai $\frac{2}{3}$ kg tepung untuk bolu dan $\frac{3}{4}$ kg tepung untuk kue lapis. Berapa kg tepung yang dipakai seluruhnya?

1 Penyebutnya 3 dan 4. Kelipatan persekutuan terkecilnya 12, jadi ubah keduanya menjadi perduabelasan.

2 $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ dan $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$.

3 $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.

Seluruhnya $1\frac{5}{12}$ kg, sedikit di atas $1\frac{1}{3}$ kg. Masuk akal, karena $\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{4}$ masing-masing lebih dari setengah.



Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

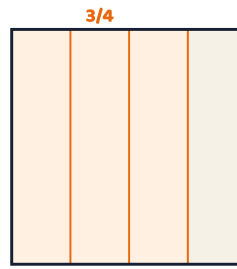
Samakan penyebut (pakai KPK), lalu jumlahkan pembilangnya. Jawab dalam bentuk pecahan, misalnya $\frac{7}{6}$ atau $1\frac{1}{6}$.

Mengalikan. " $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$ kue" berarti $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. Apa hasilnya? Jangan menghafal dulu. Lihat bukti tanpa kata ini.



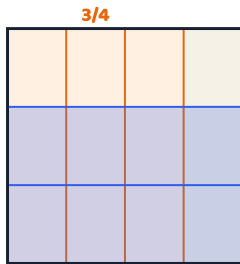
Persegi ini = 1 kue utuh.
Kita mencari $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$ kue.
Tanpa rumus, hanya memotong.

Langkah 1. Persegi ini adalah satu kue utuh. Kita ingin tahu berapa $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$ kue.



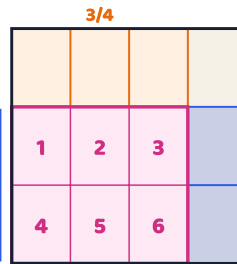
Potong tegak jadi 4 lajur.
Ambil 3 lajur:
itulah $\frac{3}{4}$ kue (oranye).

Langkah 2. Potong tegak menjadi 4 lajur sama lebar dan ambil 3 lajur. Bagian oranye adalah $\frac{3}{4}$ kue.



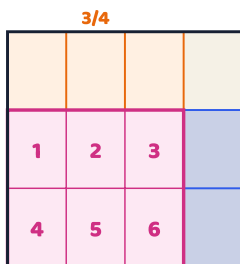
Potong mendatar jadi 3 baris.
Dari bagian oranye, ambil
2 baris dari 3: itulah $\frac{2}{3}$ -nya.

Langkah 3. Potong mendatar menjadi 3 baris sama tinggi. Dari bagian oranye, ambil 2 baris dari 3. Itulah $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$.



Hitung kotaknya!
Seluruh kue: $4 \times 3 = 12$ kotak.
Bagian ungu: $3 \times 2 = 6$ kotak.
Jadi $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4} = \frac{6}{12}$.

Langkah 4. Kue kini terbagi menjadi $4 \times 3 = 12$ kotak sama besar, dan bagian ungu berisi $3 \times 2 = 6$ kotak. Jadi hasilnya $\frac{6}{12}$.



Banyak kotak = hasil kali.
Pembilang dikali pembilang,
penyebut dikali penyebut.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} \\ = \frac{1}{2}$$

Langkah 5. Penyebut baru = banyak semua kotak = 3×4 .
Pembilang baru = banyak kotak ungu = 2×3 . Jadi $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Separuh kue!

Membagi. $3 : \frac{1}{4}$ bertanya: "ada berapa potong seperempat di dalam 3 martabak?" Setiap martabak berisi 4 potong, jadi 3 martabak berisi 12 potong. Maka $3 : \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12$. Membagi dengan pecahan sama dengan mengalikan dengan **kebalikannya** (pembilang dan penyebut ditukar).



ATURAN OPERASI PECAHAN

Untuk pecahan dengan penyebut bukan nol:

- **Jumlah dan selisih:** samakan penyebut, $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$. Lebih hemat jika memakai KPK penyebut.
- **Kali:** $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.
- **Bagi:** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (dengan $c \neq 0$).

▼ Mengapa membagi sama dengan mengalikan kebalikan?

Samakan dulu penyebutnya: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$. Kini kedua pecahan memakai potongan yang sama ukurannya (per- bd). Membagi cukup dengan bertanya "berapa kali bc potong muat di dalam ad potong?", yaitu $ad : bc = \frac{ad}{bc}$. Hasil ini persis sama dengan $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. ■

KERJAKAN BERSAMA

Berapa gelas es buah?

Ayu membuat $2\frac{1}{4}$ liter es buah untuk acara arisan. Satu gelas berisi $\frac{3}{8}$ liter. Berapa gelas yang dapat diisi penuh?

1 Pertanyaannya: berapa kali $\frac{3}{8}$ muat di dalam $2\frac{1}{4}$? Itu pembagian.

2 Ubah pecahan campuran: $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

3 $\frac{9}{4} : \frac{3}{8} = \frac{9}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{72}{12} = 6$.

Tepat 6 gelas. Cek: $6 \times \frac{3}{8} = \frac{18}{8} = 2\frac{1}{4}$ liter. ✓



LANJUT • IB & OLIMPIADE

"PENJUMLAHAN ALA DIMAS" TERNYATA BERGUNA

Dimas pernah menulis $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Salah sebagai penjumlahan, tetapi pecahan $\frac{a+c}{b+d}$ punya nama: *mediant*. Sifat ajaibnya: jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (dengan $b, d > 0$), maka

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Buktinya singkat: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ berarti $ad < bc$, sehingga $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$; sisi kanan serupa.

Mediant juga muncul di lapangan basket. Dimas memasukkan 1 dari 2 tembakan di babak pertama dan 1 dari 3 di babak kedua. Rasio keseluruhannya $\frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$, terletak di antara $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{3}$. Jadi "penjumlahan ala Dimas" cocok untuk menggabungkan **rasio keberhasilan**, bukan untuk menjumlahkan potongan martabak.

3.4 Desimal dan pecahan berulang

Desimal adalah cara menulis pecahan berpenyebut 10, 100, 1000, dan seterusnya dengan koma. Setiap angka di belakang koma punya nilai tempat: persepuluhan, perseratusan, perseribuan.

$$0,375 = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$$

Sebaliknya, untuk mengubah pecahan menjadi desimal, **bagi pembilang dengan penyebut**: $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$. Kadang pembagiannya berhenti, seperti $\frac{1}{4} = 0,25$. Kadang tidak pernah berhenti: $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ dan $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$



DEFINISI

Desimal yang memiliki blok angka yang terus berulang tanpa akhir disebut **desimal berulang**. Blok itu disebut **periode** dan ditandai dengan garis di atasnya: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, dan $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$.

LAB MINI Mesin desimal & jam sisa

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3

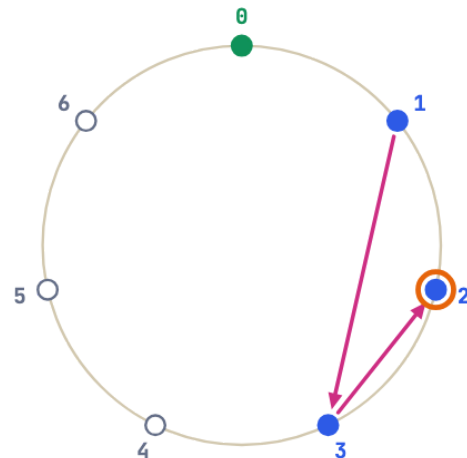
$$1:7 = 0,14\overline{}$$

Langkah pembagian (sisa $\times 10$, lalu bagi lagi):

$$10 : 7 = 1 \text{ sisa } 3$$

$$30 : 7 = 4 \text{ sisa } 2$$

Jam sisa: sisa hanya bisa 0 sampai 6



Desimal

0,142857142857...

Blok berulang

142857

Panjang periode

6

Penyebut sederhana

7 (prima)

Jenis

berulang murni

Pilih pembilang dan penyebut, lalu tekan ► **Jalankan** untuk melihat pembagian bersusun berjalan langkah demi langkah. Setiap sisa berpindah di "jam sisa". Begitu ada sisa yang muncul untuk kedua kalinya, desimalnya pasti berulang. Penyebut mana yang selalu membuat desimal berhenti?

Mengapa pasti berulang? Saat membagi dengan 7, sisanya hanya bisa 0, 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Kalau sisa 0 muncul, pembagian berhenti. Kalau tidak, sisanya hanya punya 6 pilihan (1 sampai 6). Jadi paling lambat pada langkah ketujuh pasti ada sisa yang muncul untuk kedua kalinya, dan sejak itu semua langkah terulang persis sama. Kesimpulannya: **setiap pecahan menjadi desimal berhenti atau desimal berulang.**



KAPAN DESIMAL BERHENTI?

Pecahan $\frac{a}{b}$ dalam bentuk paling sederhana menjadi desimal berhenti **jika dan hanya jika** penyebut b tidak memiliki faktor prima selain 2 dan 5. Contoh: $\frac{7}{40} = 0,175$ berhenti karena $40 = 2^3 \times 5$, sedangkan $\frac{5}{12} = 0,41\overline{6}$ berulang karena $12 = 2^2 \times 3$ memuat faktor 3.

▼ Bukti (dua arah)

($\Leftarrow$) Jika $b = 2^m 5^n$, kalikan pembilang dan penyebut dengan 2 atau 5 secukupnya sampai penyebutnya menjadi 10^k . Contoh: $\frac{7}{40} = \frac{7 \times 25}{40 \times 25} = \frac{175}{1000} = 0,175$. Pecahan berpenyebut 10^k jelas desimal berhenti.

($\Rightarrow$) Jika desimalnya berhenti setelah k angka, maka $\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$ untuk suatu bilangan bulat N , sehingga $a \times 10^k = N \times b$. Karena a dan b tidak punya faktor persekutuan, b harus membagi $10^k = 2^k 5^k$. Jadi faktor prima b hanya 2 dan 5. ■

Bagaimana kalau kita ingin berjalan mundur, dari desimal berulang ke pecahan? Ada trik geser koma yang cantik.

$$x = 0,272727\ldots$$

Langkah 1. Misalkan $x = 0,272727\ldots$, dengan blok "27" berulang terus.

$$100x = 27,272727\ldots \quad \begin{array}{l} \times 100 \\ \text{koma bergeser} \\ 2 \text{ langkah} \end{array}$$

$$x = 0,272727\ldots$$

Langkah 2. Bloknya 2 angka, jadi kalikan dengan 100. Koma bergeser 2 langkah: $100x = 27,272727\ldots$

$$100x = 27,272727\ldots$$

$$x = 0,272727\ldots$$

ekornya kembar!

Langkah 3. Perhatikan: ekor di belakang koma pada kedua baris sama persis, sampai tak terhingga.

$$100x = 27,272727\ldots$$

$$- \quad x = 0,272727\ldots$$

$$99x = 27 \quad (\text{ekornya habis!})$$

Langkah 4. Kurangkan baris atas dengan baris bawah. Ekornya saling menghapus: $100x - x = 99x = 27$.

$$100x = 27,272727\ldots$$

$$- \quad x = 0,272727\ldots$$

$$99x = 27 \quad (\text{ekornya habis!})$$

$$x = 27/99 = 3/11$$

Cek: $3 : 11 = 0,2727\ldots \checkmark$

Langkah 5. Jadi $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ (pembilang dan penyebut dibagi FPB-nya, 9). Cek dengan membagi: $3 : 11 = 0,2727\ldots \checkmark$



TRIK KAK LINTANG • TRIK SEMBILAN

Jika blok berulang langsung dimulai di belakang koma, tulis bloknya sebagai pembilang dan angka 9 sebanyak panjang blok sebagai penyebut: $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$, $0,\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$, bahkan $0,\overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

Ubah $0,1\overline{6} = 0,1666\dots$ menjadi pecahan paling sederhana.

- 1 Angka 1 tidak ikut berulang, jadi trik sembilan tidak bisa langsung dipakai. Misalkan $x = 0,1666\dots$
- 2 Geser koma sampai ekornya hanya berisi angka berulang: $10x = 1,666\dots$ dan $100x = 16,666\dots$
- 3 Kurangkan: $100x - 10x = 90x = 16,666\dots - 1,666\dots = 15$.
- 4 $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

$0,1\overline{6} = \frac{1}{6}$. Cek: $1 : 6 = 0,1666\dots \checkmark$

Bilangan yang dapat ditulis sebagai $\frac{a}{b}$ disebut **bilangan rasional**. Dari pembahasan di atas: **bilangan rasional selalu berdesimal berhenti atau berulang**, dan sebaliknya setiap desimal berhenti atau berulang adalah bilangan rasional. Bilangan seperti $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ dan $\pi = 3,14159265\dots$ desimalnya tidak berhenti dan tidak berulang. Mereka disebut irasional (Bab 6 dan Bab 35).



TAMU DARI MASA LALU

Pada 1585, insinyur dan matematikawan asal Flandria, Simon Stevin, menerbitkan buku tipis *De Thiende* ("Persepuluhan"). Ia mengajak pedagang, juru ukur, dan pembuat koin memakai pecahan desimal agar hitungan sehari-hari semudah menghitung bilangan bulat. Matematikawan Persia al-Kashi sudah memakai pecahan desimal sekitar satu setengah abad sebelumnya (± 1427). Penulisan Stevin masih kikuk: ia memberi angka kecil berlingkar pada setiap digit untuk menunjukkan tempatnya. Tanda pemisah berupa koma atau titik baru lazim belakangan. Itulah sebabnya Indonesia, seperti banyak negara Eropa, menulis 3,14, sedangkan negara berbahasa Inggris menulis 3.14.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

BILANGAN SIKLIK 142857

Kalikan 142857 dengan 2, 3, 4, 5, dan 6:

$$285714, \quad 428571, \quad 571428, \quad 714285, \quad 857142.$$

Keenam angkanya hanya berputar! Rahasiannya ada di jam sisa: saat membagi 1 dengan 7, sisanya beredar melalui 1, 3, 2, 6, 4, 5, yaitu *semua* sisa yang mungkin. Akibatnya $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{6}{7}$ hanyalah putaran dari blok yang sama. Puncaknya, $142857 \times 7 = 999999$. Untuk bilangan prima p selain 2 dan 5, panjang periode $\frac{1}{p}$ selalu membagi $p - 1$: $\frac{1}{7}$ berperiode 6, $\frac{1}{13}$ berperiode 6, $\frac{1}{17}$ berperiode 16, dan $\frac{1}{11}$ berperiode 2. Fakta ini adalah buah dari Teorema Fermat kecil yang akan kamu temui di Bab 38.

MITOS

"Pecahan yang penyebutnya lebih besar pasti lebih besar."

FAKTA

Penyebut besar berarti potongannya kecil:

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$$

. Untuk membandingkan, samakan penyebut atau pakai perkalian kupu-kupu.

MITOS

"0,999... itu sedikit lebih kecil daripada 1."

FAKTA

Keduanya sama persis! Karena

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots$$

, kalikan 3:

$$1 = 0,999 \dots$$

Trik sembilan juga memberi

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

MITOS

"Mengalikan selalu membuat bilangan makin besar."

FAKTA

Mengalikan dengan pecahan di antara 0 dan 1 justru memperkecil:

$$12 \times \frac{1}{2} = 6$$

. Sebaliknya, membagi dengan

$$\frac{1}{2}$$

memperbesar:

$$12 : \frac{1}{2} = 24$$

.

3.5 Persen: bahasa diskon, pajak, dan zakat

Mana yang lebih besar, $\frac{7}{20}$ atau $\frac{9}{25}$? Sulit menjawabnya sekilas. Bagaimana jika keduanya diubah ke penyebut 100? $\frac{7}{20} = \frac{35}{100}$ dan $\frac{9}{25} = \frac{36}{100}$. Sekarang jelas! Penyebut 100 begitu berguna sampai diberi nama dan lambang sendiri.



DEFINISI

Persen (dari bahasa Latin *per centum*, "per seratus") berarti perseratus:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Jadi $35\% = \frac{35}{100} = 0,35$, dan "35% dari 200" berarti $\frac{35}{100} \times 200 = 70$.

Bahasa sederhana • Bayangkan kertas berpetak $10 \times 10 = 100$ kotak. 30% berarti 30 kotak dari 100 kotak itu. 100% berarti semua kotak, alias seluruhnya. 50% berarti separuhnya.

Pecahan	Desimal	Persen	Kamu menjumpainya di...
$\frac{1}{2}$	0,5	50%	"separuh harga", setengah kilo gula
$\frac{1}{4}$	0,25	25%	seperempat kilo cabai
$\frac{3}{4}$	0,75	75%	tiga perempat martabak
$\frac{1}{5}$	0,2	20%	diskon 20%
$\frac{1}{8}$	0,125	12,5%	sepotong martabak yang dipotong 8
$\frac{1}{3}$	$0,\overline{3}$	$33\frac{1}{3}\%$	membagi tiga sama rata
$\frac{11}{100}$	0,11	11%	PPN pada struk belanja
$\frac{1}{40}$	0,025	2,5%	zakat mal



ADU CEPAT

Pecahan → persen kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-3](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-3)

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Ubah penyebutnya menjadi 100: $3/20 = 15/100 = 15\%$. Untuk perdelapanan, ingat $1/8 = 12,5\%$. Untuk per-40, ingat $1/40 = 2,5\%$ (zakat!).



Tebak Dulu!

Toko Baju A memasang spanduk "Diskon 50% + 20%" (diskon 20% dihitung setelah diskon 50%). Toko Baju B memasang "Diskon 70%". Harga awal bajunya sama. Di toko mana bajunya lebih murah?

Sama saja, karena $50 + 20 = 70$.

Toko A, karena diskonnya dua kali.

Toko B.

Tergantung harga awalnya.

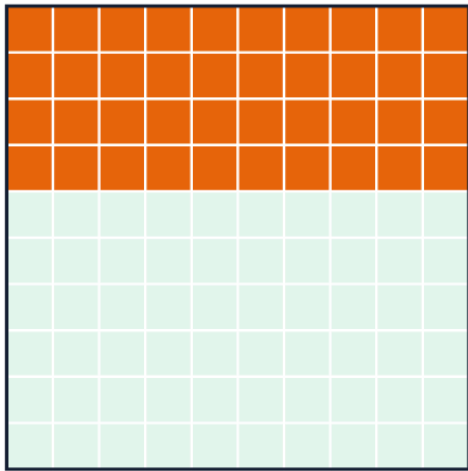
Jawabannya: Toko B. Di Toko A, diskon 20% dihitung dari harga yang sudah turun separuh, jadi nilainya hanya 10% dari harga awal. Total diskonnya 60%, bukan 70%. Lab Mini di bawah membuktikannya dengan 100 kotak.



AWAS JEBAKAN

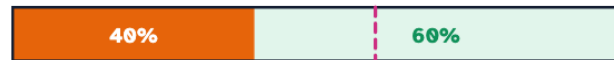
Persen selalu persen **dari sesuatu**, sehingga diskon 50% lalu 20% bukan diskon 70%. Diskon kedua dihitung dari harga yang sudah turun. Sebelum menghitung, selalu tanyakan: "persen dari apa?"

100 kotak = Rp200.000 • 1 kotak = Rp2.000



■ diskon 1: 50 kotak
 ■ diskon 2: 10 kotak
■ dibayar: 40 kotak

Diskon bertingkat: 50% lalu 20%



dibayar 40% = Rp80.000

Kalau asal dijumlah: diskon 70%



↑ selisih

dibayar 30% = Rp60.000

$$(1 - 0,5) \times (1 - 0,2) = 0,4$$

Diskon sebenarnya 60%, bukan 70%.

Diskon kedua dihitung dari sisa harga, bukan harga awal.

Diskon sebenarnya

60 %

Kalau asal dijumlah

70 %

Selisih

10 %

Harga akhir

Rp80.000

Atur diskon pertama dan kedua, lalu tekan ► **Jalankan** untuk melihat kotak harga dicoret satu per satu. Kotak oranye hilang karena diskon pertama, kotak biru karena diskon kedua. Bandingkan dengan batang ungu "asal dijumlah". Kapan selisihnya paling besar?

$$H = H_0 \left(1 - \frac{p}{100} \right)$$

Diskon $p\%$ artinya kamu hanya membayar $(100 - p)\%$ dari harga awal.

H_0 Harga awal rupiah

p Diskon %

H Harga yang dibayar rupiah

HARGA YANG DIBAYAR

160.000

rupiah

Diskon **20%** dari Rp**200.000** adalah potongan Rp**40.000**. Kamu membayar **80%** harga awal, yaitu Rp**160.000**.

Cek satuan: persen tidak bersatuan, jadi harga akhir tetap dalam rupiah seperti harga awal.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-HARGA-DISKON



TRIK KAK LINTANG • MULAI DARI 10%

10% suatu harga didapat dengan menggeser koma satu langkah ke kiri: 10% dari Rp85.000 adalah Rp8.500. Dari situ, 5% = separuhnya (Rp4.250), 20% = dua kalinya (Rp17.000), dan 15% = 10% + 5% (Rp12.750). Kamu bisa menghitung diskon di pasar tanpa kalkulator!

CONTOH

Zakat mal 2,5%

Tabungan Pak Harun sebesar Rp120.000.000 sudah mencapai nisab dan tersimpan genap satu tahun. Berapa zakat mal yang ia keluarkan jika besarnya 2,5%?

1 $2,5\% = \frac{2,5}{100} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$.

2 $\text{Zakat} = \frac{1}{40} \times 120.000.000 = 120.000.000 : 40 = 3.000.000$.

Zakatnya Rp3.000.000. Trik praktis: 2,5% sama dengan "bagi 40".

Harga sepatu Rp250.000 diberi diskon 20%. Setelah itu dikenai PPN 11% dari harga setelah diskon. Berapa rupiah yang dibayar?

- 1 Diskon: $20\% \times 250.000 = 50.000$, jadi harga menjadi 200.000.
- 2 PPN: $11\% \times 200.000 = 22.000$, jadi yang dibayar $200.000 + 22.000 = 222.000$.
- 3 Cara kilat dengan faktor pengali: $250.000 \times 0,8 \times 1,11 = 222.000$.

Yang dibayar Rp222.000. Perhatikan: diskon 20% lalu pajak 11% tidak sama dengan diskon 9%. (Diskon 9% akan memberi Rp227.500.)



MATEMATIKA NUSANTARA

Di pasar tradisional, pedagang dan pembeli fasih berpecahan: "setengah kilo bawang", "seperempat cabai rawit", "dua ons teri". Di Indonesia satu ons berarti 100 gram, yaitu $\frac{1}{10}$ kg, jadi setengah kilo sama dengan 5 ons (berbeda dengan *ounce* Inggris yang hanya ± 28 gram). Di pedesaan Jawa juga dikenal bagi hasil sawah: *maro*, hasil panen dibagi dua sama besar antara pemilik dan penggarap (masing-masing $\frac{1}{2}$), dan *mertelu*, penggarap mendapat $\frac{1}{3}$ dan pemilik $\frac{2}{3}$. Sejak lama pecahan menjadi alat untuk berbagi dengan adil.

3.6 Persen naik-turun dan persen balik

Berita sering menulis "harga cabai naik 40%" atau "harga tiket turun 15%". Persentase perubahan selalu dibandingkan dengan **nilai lama**:

$$\text{persen perubahan} = \frac{\text{nilai baru} - \text{nilai lama}}{\text{nilai lama}} \times 100\%$$

$$P = \frac{B - L}{L} \times 100\%$$

Selisih nilai baru dan nilai lama, dibandingkan dengan nilai LAMA, lalu dijadikan persen.

L

Harga lama rupiah/kg

B

Harga baru rupiah/kg

P

Persen perubahan %

PERSEN PERUBAHAN

40

%



naik

Harga cabai berubah dari Rp60.000 menjadi Rp84.000 per kg, selisihnya 24.000 rupiah. Dibagi harga lama: 0,4, atau 40%. **Harga naik.**

Cek satuan: satuan harga (rupiah/kg) habis saat dibagi, jadi hasilnya murni persen.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERSEN-UBAH

Ada cara yang lebih sakti untuk menghitung perubahan persen: ubah setiap perubahan menjadi sebuah **faktor pengali**.



FAKTOR PENGALI

- Naik $p\%$ sama dengan dikali $(1 + \frac{p}{100})$. Contoh: naik 11% berarti dikali 1,11.
- Turun $p\%$ sama dengan dikali $(1 - \frac{p}{100})$. Contoh: diskon 20% berarti dikali 0,8.
- Beberapa perubahan berturut-turut: **kalikan** faktor-faktornya, jangan menjumlahkan persennya.
- Untuk berjalan mundur (persen balik): nilai awal = nilai akhir : faktor pengali.



Tebak Dulu!

Harga cabai naik 50% pada minggu pertama, lalu turun 50% pada minggu kedua.
Dibandingkan harga awal, harganya sekarang...

sama dengan harga awal.

naik 25%.

turun 25%.

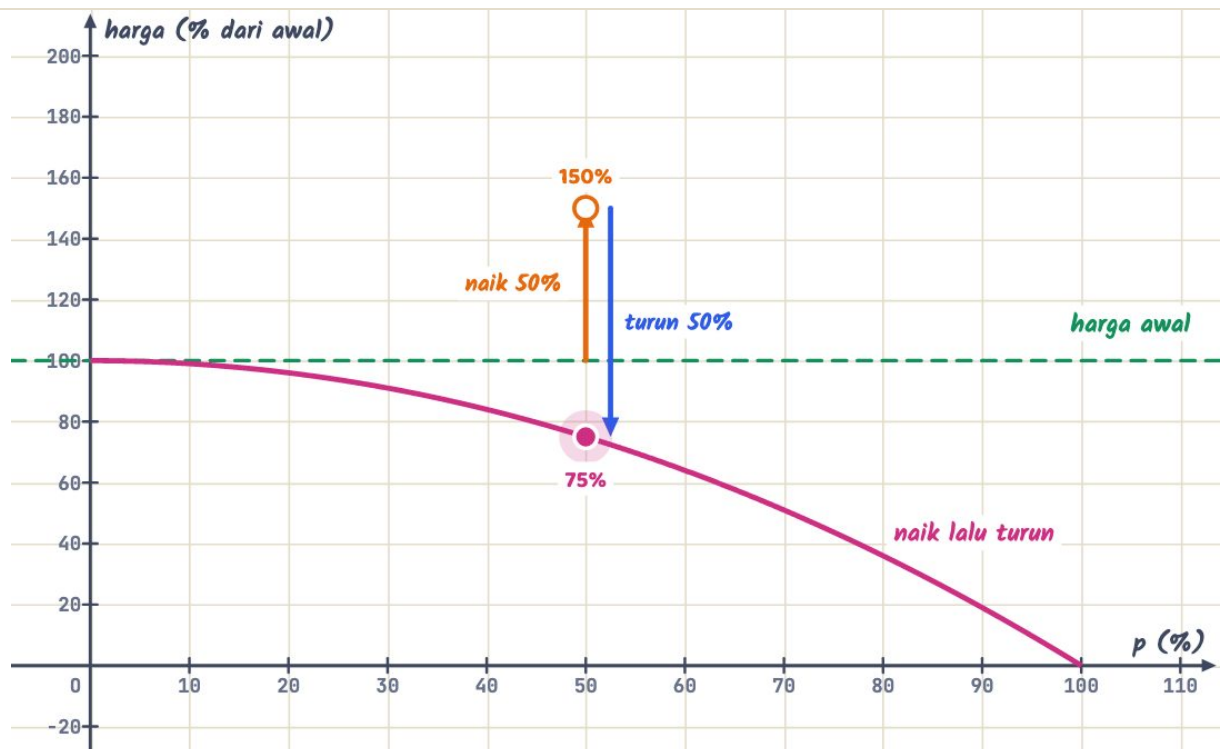
turun 50%.

Jawabannya: turun 25%. Misalkan awalnya Rp40.000. Naik 50% menjadi Rp60.000. Turun 50% dari Rp60.000 berarti turun Rp30.000, jadi harganya Rp30.000, yaitu 75% dari harga awal. Dengan faktor pengali: $1,5 \times 0,5 = 0,75$. Penurunan dihitung dari angka yang lebih besar, jadi "memakan" lebih banyak.

$$H_{\text{akhir}} = 100 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 100 - \frac{p^2}{100}$$

$$100 \times 1,5 \times 0,5 = 75\%$$

Kenaikan dihitung dari harga awal, tetapi penurunan dihitung dari harga yang sudah naik (lebih besar). Hasilnya selalu di bawah harga awal.



rugil tepat $p^2/100 = 25\%$ dari harga awal

Setelah naik

150 %

Setelah turun

75 %

Hilang dari harga awal

25 %

Seret titik magenta atau geser slider. Panah oranye naik $p\%$ dari harga awal, panah biru turun $p\%$ dari harga yang sudah naik. Apakah pernah ada $p > 0$ yang membuat harga kembali tepat ke 100%? Apa yang terjadi kalau urutannya dibalik (turun dulu, baru naik)?

Harga tiket bus naik 25% saat musim mudik Lebaran, lalu turun 20% setelah musim mudik usai. Apakah harganya kembali seperti semula?

- 1 Faktor pengali naik 25%: 1,25. Faktor pengali turun 20%: 0,8.
- 2 Perubahan total: $1,25 \times 0,8 = 1$.
- 3 Cek dengan harga Rp200.000: naik menjadi Rp250.000, lalu turun 20% dari Rp250.000 (yaitu Rp50.000) menjadi Rp200.000.

Ya, kembali tepat seperti semula! Rahasiannya: $1,25 = \frac{5}{4}$ dan $0,8 = \frac{4}{5}$ saling berkebalikan. Naik 25% dibatalkan oleh turun 20%, bukan turun 25%.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

PERSEN YANG BERULANG: BUNGA MAJEMUK

Bank memberi bunga 6% per tahun. Pada *bunga tunggal*, bunga selalu dihitung dari setoran awal. Pada *bunga majemuk*, bunga tahun lalu ikut berbunga, sehingga setiap tahun saldo dikali 1,06. Setelah n tahun,

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dengan setoran Rp10.000.000 selama 10 tahun, bunga tunggal menghasilkan Rp6.000.000, sedangkan bunga majemuk menghasilkan $10.000.000 \times 1,06^{10} \approx \text{Rp}17.908.477$. Selisih hampir Rp1,9 juta itu adalah "bunga dari bunga". Rumus yang sama dipakai untuk penyusutan (faktornya kurang dari 1), pertumbuhan penduduk, dan inflasi. Di Bab 6 dan bab fungsi eksponen kamu akan melihat grafiknya melengkung makin curam.

Sekarang kebalikannya. Di etalase tertulis: "Harga setelah diskon 20%: Rp120.000". Berapa harga sebelum diskon? Rp120.000 itu adalah 80% dari harga awal. Jadi $1\% = 120.000 : 80 = 1.500$ dan $100\% = 150.000$. Dengan faktor pengali: harga awal = $120.000 : 0,8 = 150.000$. Cara berjalan mundur ini disebut **persen balik** (*reverse percentage*).



AWAS JEBAKAN

Harga sebelum diskon tidak didapat dengan menambahkan persen diskon ke harga sesudah diskon. $120.000 + 20\% \times 120.000 = 144.000$, padahal jawabannya 150.000. Diskon 20% itu dihitung dari harga **awal** yang belum kita ketahui, bukan dari harga akhir.

$$H_0 = \frac{H}{1 - \frac{p}{100}}$$

Harga setelah diskon adalah $(100 - p)\%$ dari harga awal. Bagi dengan faktor pengalinya untuk kembali ke 100%.

H Harga setelah diskon rupiah

p Diskon %

H_0 Harga sebelum diskon rupiah

HARGA SEBELUM DISKON

150.000

rupiah

Rp120.000 adalah 80% dari harga awal. Jadi 1% = Rp1.500 dan 100% = Rp150.000.

Jebakan: Rp120.000 + 20% × Rp120.000 = Rp144.000, dan itu bukan harga awal!

Cek satuan: faktor pengali tidak bersatuan, jadi harga awal dan harga akhir sama-sama dalam rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERSEN-BALIK

Saat Harbolnas, sebuah headphone dijual Rp195.000 setelah diskon 35%. Berapa harga sebelum diskon, dan berapa rupiah kamu berhemat?

- 1 Setelah diskon 35%, yang dibayar adalah $100\% - 35\% = 65\%$ harga awal. Faktor pengalinya 0,65.
- 2 Harga awal = $195.000 : 0,65 = 300.000$.
- 3 Hemat = $300.000 - 195.000 = 105.000$. Cek: $35\% \times 300.000 = 105.000$. ✓

Harga sebelum diskon Rp300.000 dan kamu berhemat Rp105.000. (Jebakan: $195.000 \times 1,35 \approx 263.250$ bukanlah harga awal.)



Harbolnas & flash sale

Diskon bertingkat dan *cashback* lebih mudah dibandingkan jika setiap potongan diubah menjadi faktor pengali lalu dikalikan.



Struk belanja

PPN 11% berarti harga sebelum pajak dikali 1,11. Dari total struk, harga sebelum pajak didapat dengan persen balik.



Zakat mal

Zakat 2,5% dari harta yang mencapai nisab dan tersimpan setahun. Karena $2,5\% = \frac{1}{40}$, cukup bagi 40.



Resep kue

Resep bolu untuk 8 orang mau dibuat untuk 12 orang? Kalikan setiap bahan dengan $\frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$.



Baterai ponsel

Indikator 20% berarti tersisa $\frac{1}{5}$ dari kapasitas penuh baterai, bukan 20 menit lagi.



Hitung cepat pemilu

Lembaga survei menghitung persentase suara dari ribuan TPS sampel untuk memperkirakan hasil nasional.

3.7 Pecahan Mesir dan jumlah teleskop

Ingat trik Ancil di komik? Ia membagi 3 martabak untuk 4 orang sebagai $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ per orang, bukan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Pecahan berpembilang 1 seperti $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{4}$ disebut **pecahan satuan**. Menulis pecahan sebagai jumlah pecahan satuan yang **berbeda-beda** adalah kebiasaan bangsa Mesir kuno.



TAMU DARI MASA LALU

Papyrus Rhind, yang disalin juru tulis Mesir bernama Ahmes sekitar 1650 SM, adalah salah satu buku matematika tertua di dunia. Bangsa Mesir kuno menulis hampir semua pecahan sebagai jumlah pecahan satuan yang berbeda, misalnya $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ dan $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. Papyrus itu memuat tabel $\frac{2}{n}$ untuk bilangan ganjil n sampai 101, semacam "tabel perkalian" pecahan zaman itu. Pecahan istimewa $\frac{2}{3}$ bahkan punya lambang sendiri.

Lima roti dibagi rata untuk enam orang. Bagaimana cara memotongnya ala Mesir, dengan sesedikit mungkin potongan?

- 1 Setiap orang harus mendapat $5 : 6 = \frac{5}{6}$ roti.
- 2 Tulis sebagai pecahan satuan berbeda: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (cek: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$).
- 3 Belah 3 roti menjadi setengahan (6 potong) dan potong 2 roti menjadi pertigaan (6 potong).
- 4 Setiap orang mendapat satu potong setengahan dan satu potong sepertiga.

Hanya 12 potongan, padahal kalau setiap roti dipotong enam, ada 30 potongan kecil. Pecahan Mesir ternyata sangat praktis!

Sekarang perhatikan pola kecil ini: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}$ dan $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$. Secara umum,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

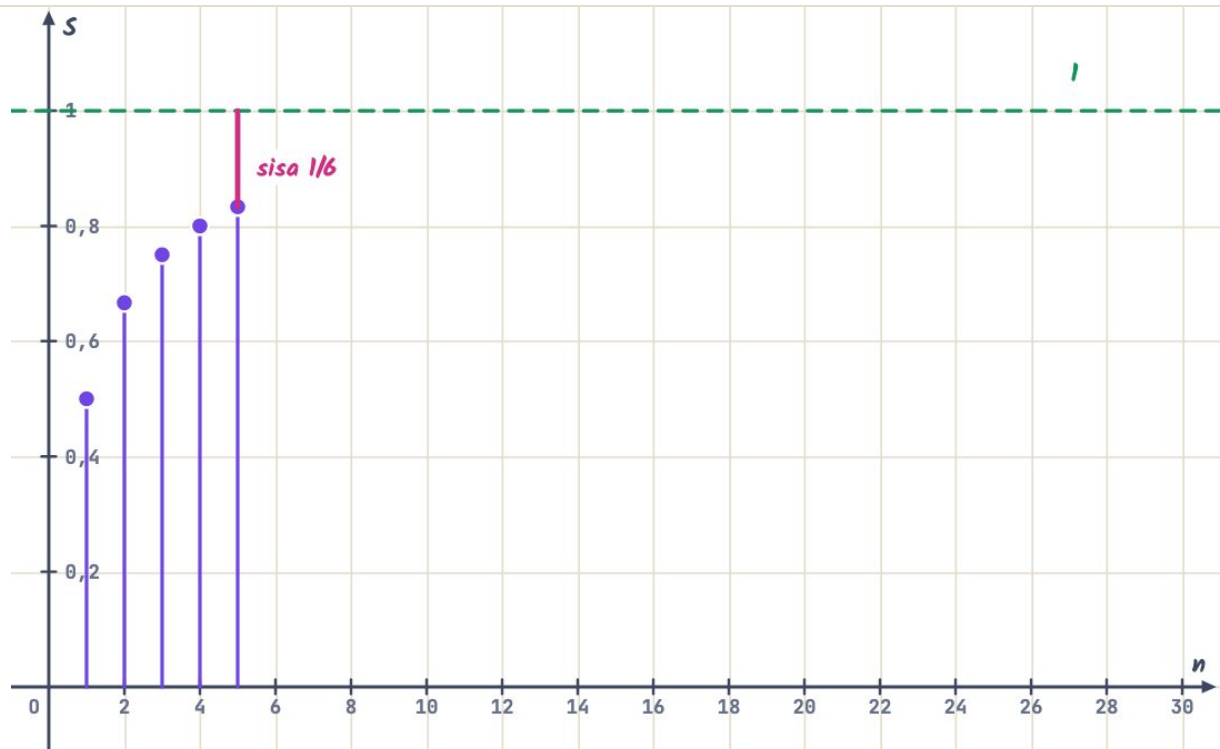
Akibatnya, penjumlahan panjang bisa "dilipat" seperti teropong. Suku-suku di tengah saling menghapus:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Jumlah seperti ini disebut **jumlah teleskop**. Hasilnya selalu sedikit kurang dari 1, dan makin dekat ke 1 saat n bertambah.

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,8333$$



Jumlah S

0,8333

Jarak ke 1

0,1667

Tambah banyak suku n . Setiap batang ungu adalah jumlah sementara S_n . Celah magenta di atasnya tepat $\frac{1}{n+1}$: makin kecil, tetapi tidak pernah nol. Kapan jumlahnya pertama kali melewati 0,9?

COBA SENDIRI Jumlah lima suku tanpa repot

Hitung $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$.

1 Kenali penyebutnya: $2 = 1 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $12 = 3 \times 4$, $20 = 4 \times 5$, $30 = 5 \times 6$.

2 Jadi ini S_5 , jumlah teleskop dengan $n = 5$.

3 $S_5 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Hasilnya $\frac{5}{6}$. Bandingkan dengan cara biasa: samakan kelima penyebut menjadi 60, lalu
 $\frac{30+10+5+3+2}{60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$. **Sama, tetapi jauh lebih repot!**

**LANJUT · IB & OLIMPIADE****RESEP RAKUS FIBONACCI**

Apakah *setiap* pecahan antara 0 dan 1 bisa ditulis sebagai jumlah pecahan satuan yang berbeda? Bisa! Leonardo Fibonacci (1202) memberi resep "rakus": kurangkan pecahan satuan terbesar yang tidak melebihi sisa, lalu ulangi. Contoh $\frac{4}{13}$: karena $13 : 4 = 3,25$, pecahan satuan terbesar yang tidak melebihinya adalah $\frac{1}{4}$. Sisanya $\frac{4}{13} - \frac{1}{4} = \frac{3}{52}$. Karena $52 : 3 \approx 17,3$, berikutnya $\frac{1}{18}$, dengan sisa $\frac{3}{52} - \frac{1}{18} = \frac{1}{468}$. Jadi

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}.$$

Pembilang sisanya selalu mengecil ($4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$), sehingga resep ini pasti berhenti. Masih banyak misteri terbuka tentang pecahan Mesir, misalnya dugaan Erdős–Straus bahwa $\frac{4}{n}$ selalu dapat ditulis sebagai jumlah tiga pecahan satuan.

**Cek Cepat**

$\frac{3}{5}$ sama dengan...

35%

53%

60%

0,6%

Harga Rp80.000 naik 25%. Harga barunya...

Rp100.000

Rp105.000

Rp60.000

Rp82.500

Bentuk pecahan paling sederhana dari $0,\overline{6} = 0,666\dots$ adalah...

$\frac{3}{5}$

$\frac{6}{10}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}$

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D



Tantangan Rumah: dinding pecahan dari kertas

Bahan: 6 pita kertas yang sama panjang (misalnya 24 cm × 3 cm dari kertas bekas), pensil warna, penggaris, gunting.

1. Biarkan pita pertama utuh dan tulis "1".
2. Lipat pita kedua menjadi dua sama panjang, buka, lalu tulis $\frac{1}{2}$ pada setiap bagian.
3. Lipat pita ketiga dua kali (dua, lalu dua lagi) untuk membuat perempatan, dan pita keempat tiga kali untuk perdelapanan.
4. Lipat pita kelima menjadi tiga sama panjang seperti melipat surat. Lipat pita keenam menjadi tiga, lalu lipat dua: perenaman.
5. Warnai setiap pita dan susun berjajar seperti dinding bata, mirip gambar dinding pecahan di subbab 3.2.

Pertanyaan: Temukan minimal empat pasang pecahan senilai di dindingmu. Mana yang lebih besar: $\frac{2}{3}$ atau $\frac{5}{8}$? $\frac{3}{4}$ atau $\frac{5}{6}$? Mengapa panjang 24 cm dipilih? Lalu coba tantangan sulit: bagaimana membuat perlima hanya dengan melipat?



✓ **Kamu sekarang bisa...**

- memaknai **pecahan** sebagai bagian dari keseluruhan, sebagai hasil bagi, dan sebagai titik di garis bilangan
- membuat **pecahan senilai**, menyederhanakan, dan membandingkan pecahan
- menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi pecahan dengan alasan yang masuk akal, bukan sekadar hafalan
- mengubah pecahan $\leftrightarrow$ **desimal** $\leftrightarrow$ **persen**, termasuk desimal berulang seperti $0,333\ldots = \frac{1}{3}$
- menghitung diskon, PPN, zakat, bunga, **persen perubahan**, dan harga sebelum diskon (**persen balik**)



Istilah kunci

pecahan

pembilang

penyebut

pecahan campuran

pecahan senilai

menyederhanakan

kebalikannya

Desimal

desimal berulang

periode

bilangan rasional

Persen

faktor pengali

persen balik

pecahan satuan

jumlah teleskop



Rumus penting

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Penjumlah pecahan. Samakan dulu ukuran potongannya (penyebut), baru jumlahkan banyak potongannya (pembilang).

$$H = H_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Harga setelah diskon. Diskon $p\%$ artinya kamu hanya membayar $(100 - p)\%$ dari harga awal.

$$P = \frac{B-L}{L} \times 100\%$$

Persen perubahan. Selisih nilai baru dan nilai lama, dibandingkan dengan nilai LAMA, lalu dijadikan persen.

$$H_0 = \frac{H}{1 - \frac{p}{100}}$$

Persen balik: harga sebelum diskon. Harga setelah diskon adalah $(100 - p)\%$ dari harga awal. Bagi dengan faktor pengalinya untuk kembali ke 100%.



Jangan sampai terjebak

- Pecahan hanya bermakna jika bagian-bagiannya sama besar.
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ bukan $\frac{2}{5}$: pembilang dan penyebut tidak boleh dijumlahkan begitu saja.
- Persen selalu persen dari sesuatu, sehingga diskon 50% lalu 20% bukan diskon 70%.



Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=3

Teka-teki untuk Bab 4

Di perempatan dekat sekolah, lampu kuning A berkedip setiap 6 detik dan lampu kuning B berkedip setiap 8 detik. Tepat pukul 07.00.00 keduanya berkedip bersamaan. Pukul berapa keduanya pertama kali berkedip bersamaan lagi? Dan anehnya, jawabannya ada hubungannya dengan menjumlahkan $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$. Mengapa?

▼ Intip petunjuk

Tulis kelipatan 6: 6, 12, 18, 24, ... dan kelipatan 8: 8, 16, 24, ... Bilangan pertama yang muncul di kedua daftar adalah 24, jadi keduanya berkedip bersamaan lagi pukul 07.00.24. Angka 24 itu juga penyebut terkecil yang cocok untuk $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$. Bab 4 memberinya nama: KPK, kelipatan persekutuan terkecil.

04

Bilangan Prima: Atom Penyusun Semua Bilangan

Dua lampu berkedip dengan irama berbeda. Kapan keduanya menyala bersamaan? Bagaimana membagi bingkisan Lebaran serata mungkin? Mengapa kode rahasia di ponselmu sulit dibobol? Semua jawabannya bersembunyi di balik bilangan yang tidak mau dibagi oleh siapa pun.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menemukan semua **faktor** dan **kelipatan** sebuah bilangan, serta menjelaskan mengapa faktor selalu berpasangan;
- mengenali **bilangan prima** dan menyaringnya dengan **saringan Eratosthenes**;
- menuliskan **faktorisasi prima** dengan pohon faktor dan menghitung banyak faktor tanpa mendaftarnya;
- menghitung **FPB** dan **KPK**, lalu memilih yang tepat untuk soal cerita;
- memakai **ciri habis dibagi** 3, 9, dan 11, serta membuktikan bahwa bilangan prima **tidak pernah habis**.

LAMPU KEDIP DI PEREMPATAN

KOMIK • 4 PANEL

Sore hari, di perempatan dekat sekolah

DIMAS

Yu, lihat! Lampu kuning kiri berkedip tiap 6 detik, yang kanan tiap 8 detik. Barusan mereka nyala barengan!



AYU

Aku catat, ya. Kiri: 6, 12, 18, 24, 30, 36. Kanan: 8, 16, 24, 32. Eh, ada angka yang muncul di dua daftar!

Kiri:	6	12	18	24	30	36
Kanan:	8	16	24	32		
di dua daftar: 24, 48, ...						



KAK LINTANG

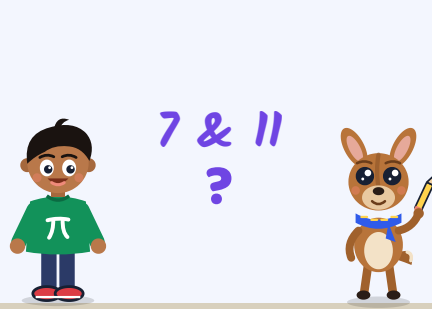
Angka kembar itu namanya kelipatan persekutuan. Yang terkecil, 24, disebut KPK. Jadi setiap 24 detik mereka pasti nyala barengan lagi!

**Tiba-tiba, dari balik tiang lampu...****ANCIL**

Kalau iramanya 7 dan 11 detik, kapan barengan lagi? Rahasiannya ada pada bilangan prima: atom penyusun semua bilangan!

DIMAS

Bilangan... punya atom?!


Tebak Dulu!

Lampu A berkedip setiap 6 detik dan lampu B setiap 8 detik. Keduanya baru saja berkedip bersamaan. Kapan mereka berkedip bersamaan lagi?

14 detik lagi, karena $6 + 8 = 14$.

48 detik lagi, karena $6 \times 8 = 48$.

24 detik lagi.

Tidak akan pernah bersamaan lagi.

Jawabannya: 24 detik lagi. Lampu A menyala pada detik ke-6, 12, 18, **24**, ..., sedangkan lampu B pada detik ke-8, 16, **24**, Angka pertama yang muncul di kedua daftar adalah 24. Mengalikan 6×8 memang menghasilkan waktu bersamaan (detik ke-48), tetapi itu sudah yang *kedua kalinya*. Jadi teka-teki dari Bab 3 terjawab: kalau mulai pukul 07.00.00, kedua lampu berkedip bersamaan lagi pukul 07.00.24. Bilangan 24 punya nama khusus: **KPK**. Bilangan yang sama juga menjadi penyebut terkecil untuk $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24}$, karena penyebut persekutuan terkecil tidak lain adalah KPK dari penyebut-penyebutnya. Di bab ini kamu akan tahu cara menemukan KPK tanpa mendaftar satu per satu.

4.1 Faktor dan kelipatan: dua sisi perkalian

Perhatikan perkalian $3 \times 4 = 12$. Kalimat ini bisa dibaca dari dua arah. Dari arah kiri: 3 dan 4 adalah **pembentuk** 12. Dari arah kanan: 12 adalah **hasil** dari mengalikan 3 (atau 4) dengan bilangan asli. Dua cara membaca ini melahirkan dua istilah penting.



DEFINISI

Bilangan asli a disebut **faktor** (pembagi) dari n jika n **habis dibagi** a , yaitu $n = a \times b$ untuk suatu bilangan asli b . Sebaliknya, n disebut **kelipatan** dari a .

Contoh: faktor 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 12. Kelipatan 4 adalah 4, 8, 12, 16, 20, ... (tidak ada habisnya).

Bahasa sederhana • Gampangnya begini. Kamu punya 12 permen dan ingin membaginya rata ke beberapa teman tanpa sisa. Kamu bisa membaginya ke 1, 2, 3, 4, 6, atau 12 orang. Itulah **faktor** 12. Sementara itu, kalau setiap bungkus berisi 4 permen, banyak permen di 1, 2, 3, ... bungkus adalah 4, 8, 12, Itulah **kelipatan** 4.

Ada cara yang sangat menyenangkan untuk "melihat" faktor: susunlah ubin. Dua belas ubin persegi bisa disusun menjadi persegi panjang 1×12 , 2×6 , atau 3×4 . Setiap sisi persegi panjang itu adalah faktor 12. Coba sendiri di lab berikut, lalu cari bilangan yang *keras kepala*: bilangan yang hanya mau disusun menjadi satu baris panjang.

LAB MINI Susun ubin: setiap sisi adalah faktor

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

13 ubin → 1 persegi panjang berbeda

🌟 **PRIMA: cuma bisa 1 baris!**

Faktor: **1, 13**

1×13

13 ubin tidak bisa disusun lebih dari 1 baris tanpa sisa.

Faktor
1, 13

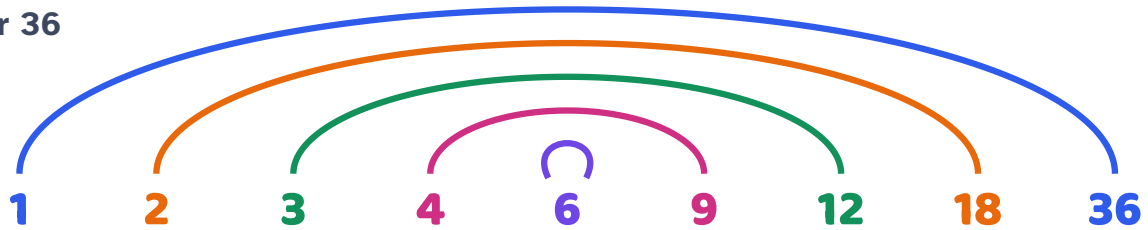
Banyak faktor
2

Jenis bilangan
PRIMA (tepat 2 faktor)

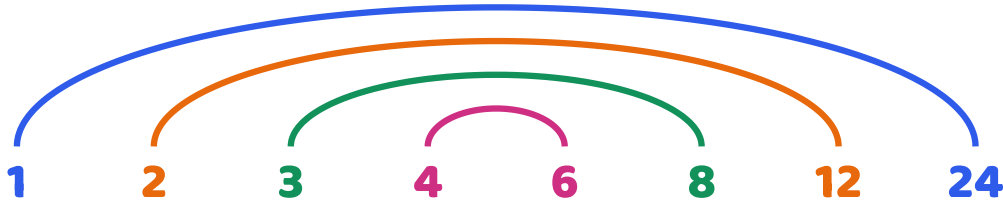
Geser banyak ubin dari 1 sampai 60. Setiap persegi panjang menunjukkan satu pasangan faktor. Tekan ► **Jalankan** untuk parade bilangan: bilangan mana yang hanya punya **satu** persegi panjang? Bilangan mana yang bisa membentuk **persegi** sempurna?

Kalau kamu mendaftar faktor sambil berpasangan, terlihat pola yang indah. Hubungkan setiap pasangan yang hasil kalinya n dengan busur, dan jadilah sebuah **pelangi faktor**.

Faktor 36



Faktor 24



Pasangan faktor yang hasil kalinya 36 (atau 24) dihubungkan dengan busur berwarna. Pada 36, faktor 6 berpasangan dengan dirinya sendiri karena $6 \times 6 = 36$, sehingga banyak faktornya **ganjil** (9 buah). Pada 24, semua faktor punya pasangan berbeda, jadi banyaknya **genap** (8 buah).

CONTOH Mendaftar semua faktor 48

Tentukan semua faktor dari 48. Berapa banyaknya?

- 1 Cari pasangan perkalian, dimulai dari 1: 1×48 , 2×24 , 3×16 , 4×12 , 6×8 . (Bilangan 5 dilewati karena 48 tidak habis dibagi 5.)
- 2 Berhenti di 7, karena $7 \times 7 = 49$ sudah melebihi 48. Pasangan sesudahnya hanya mengulang pasangan yang sudah ditemukan (8×6 , 12×4 , ...).
- 3 Kumpulkan: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Faktor 48 ada 10 buah. Trik "berhenti saat pasangan mulai berulang" membuat pencarian jauh lebih cepat.



FAKTOR TERBATAS, KELIPATAN TAK TERBATAS

Setiap faktor dari n paling besar n itu sendiri, jadi banyak faktornya selalu terbatas. Sebaliknya, kelipatan n bisa terus bertambah: $n, 2n, 3n, \dots$ tanpa ujung. Bilangan 1 adalah faktor dari **semua** bilangan, dan setiap bilangan adalah faktor (sekaligus kelipatan) dari dirinya sendiri.

4.2 Bilangan prima dan saringan Eratosthenes

Di lab ubin tadi, kamu pasti menemukan bilangan keras kepala seperti 2, 3, 5, 7, 11, dan 13. Bilangan itu hanya bisa disusun menjadi satu baris. Faktornya cuma dua: 1 dan dirinya sendiri.



DEFINISI

Bilangan prima adalah bilangan asli yang tepat mempunyai **dua** faktor berbeda, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan asli lebih dari 1 yang bukan prima disebut **bilangan komposit** (bilangan tersusun). Bilangan 1 **bukan** prima dan **bukan** komposit, karena faktornya hanya satu.

Bahasa sederhana • Cara mudah mengingatnya: bilangan prima adalah bilangan yang "tidak bisa dibagi rata" kecuali menjadi 1 kelompok besar atau kelompok berisi 1. Contohnya 7 kelereng: tidak bisa dibagi rata ke 2, 3, 4, 5, atau 6 anak.



Tebak Dulu!

Dari 1 sampai 100, ada berapa bilangan prima?

Sekitar 10, karena prima itu langka.

Tepat 25.

Sekitar 50, karena hampir semua bilangan ganjil adalah prima.

Tidak ada yang tahu pasti.

Jawabannya: tepat 25. Separuh bilangan dari 1 sampai 100 memang ganjil, tetapi banyak di antaranya komposit: 9, 15, 21, 25, 27, 33, Kamu bisa menemukan ke-25 prima itu sendiri dengan saringan berumur lebih dari 2.000 tahun di bawah ini.

Bagaimana menemukan semua prima sampai 100 tanpa memeriksa satu per satu? Seorang ilmuwan Yunani memberi resep yang sangat cerdas: **jangan cari primanya, buang yang bukan prima**. Coret 1. Lingkari 2, lalu coret semua kelipatan 2. Bilangan terkecil yang tersisa (3) pasti prima. Lingkari, lalu coret kelipatannya. Ulangi. Yang tidak pernah tercoret adalah bilangan prima.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Para pencoret

2 mencoret 4

Prima: 1

👉 klik bilangan terkecil yang belum dicoret

Prima ditemukan

1

Belum diperiksa

94

Sekarang

2 prima! Coret kelipatannya, mulai dari $2 \times 2 = 4$

Klik bilangan terkecil yang belum dicoret: ia prima, dan semua kelipatannya akan dicoret otomatis. Atau tekan ► **Jalankan** untuk menonton seluruh saringan. Perhatikan: 3 mulai mencoret dari 9, 5 dari 25, dan 7 dari 49. Mengapa tidak dari 6, 10, dan 14? Lalu, mengapa saringan sudah boleh berhenti setelah 7? Terakhir, ganti susunan menjadi **6 kolom** dan temukan pola yang mengejutkan!

**TRIK KAK LINTANG**

Untuk memeriksa apakah sebuah bilangan prima, kamu **tidak** perlu mencoba semua pembagi. Cukup coba bilangan prima yang kuadratnya tidak melebihi bilangan itu. Mengapa? Faktor selalu berpasangan, dan dalam setiap pasangan pasti ada satu yang $\leq \sqrt{n}$. Contoh: untuk 97, cukup coba 2, 3, 5, dan 7 (karena $11^2 = 121 > 97$). Tidak ada yang membagi habis, jadi 97 prima.

$$d_{\max} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

Untuk memeriksa apakah n prima, cukup coba bagi n dengan bilangan prima yang tidak lebih dari akar n . Kalau tidak ada yang membagi habis, n pasti prima.

 n

Bilangan yang diuji

 $d_{\max}$

Pembagi terbesar yang perlu dicoba

PEMBAGI TERBESAR YANG PERLU
DICoba

9

komposit

Akar dari **91** kira-kira **9,539**, jadi cukup coba pembagi prima sampai **9**. Hanya ada **4** bilangan prima yang perlu dicoba. Hasil pemeriksaan: **91 = 7 × 13, jadi 91 BUKAN prima.**

Cek satuan: Batas uji adalah bilangan asli tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-UJI-PRIMA-AKAR



AWAS JEBAKAN

Bilangan yang "kelihatan prima" belum tentu prima. Bilangan 51, 57, 87, dan 91 sering dikira prima, padahal $51 = 3 \times 17$, $57 = 3 \times 19$, $87 = 3 \times 29$, dan $91 = 7 \times 13$. Sebelum menyebut sebuah bilangan prima, ujlilah dengan pembagi prima sampai akarnya.



ADU CEPAT

Prima atau bukan? Buktikan!

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bilangan genap dan kelipatan 5 sudah disingkirkan. Cukup uji 3 dan 7, karena $11 \times 11 = 121$ sudah lebih besar daripada 119.



TAMU DARI MASA LALU

Saringan ini dinamai menurut **Eratosthenes dari Kirene** (± 276 –194 SM), kepala perpustakaan besar Aleksandria di Mesir. Ia serba bisa: ahli matematika, geografi, astronomi, sekaligus penyair. Eratosthenes juga terkenal karena menaksir keliling Bumi dengan bayangan tongkat di dua kota, dan hasilnya cukup dekat dengan nilai sebenarnya. Lebih dari 2.000 tahun kemudian, gagasan saringannya masih dipakai komputer untuk mencari bilangan prima.

MITOS

"1 adalah bilangan prima karena hanya habis dibagi 1 dan dirinya sendiri."

MITOS

"Semua bilangan ganjil adalah prima, dan semua bilangan genap bukan prima."

FAKTA

Prima harus punya **tepat dua** faktor berbeda, sedangkan 1 hanya punya satu. Kalau 1 dianggap prima, faktorisasi tidak lagi tunggal:
 $6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 3$, dan seterusnya.

FAKTA

Bilangan 9, 15, 21, 25, dan 27 ganjil tetapi komposit. Sebaliknya, 2 genap tetapi prima. Bahkan 2 adalah **satu-satunya** prima genap, karena bilangan genap lain selalu habis dibagi 2.

MITOS

"Kalau dicari cukup jauh, bilangan prima lama-lama akan habis."

FAKTA

Prima memang makin jarang, tetapi **tidak pernah habis**. Euclid membuktikannya lebih dari 2.000 tahun lalu dengan cara yang sangat cerdas. Kamu akan melihat buktinya di subbab 4.6.

4.3 Faktorisasi prima: pohon faktor

Air tersusun dari atom hidrogen dan oksigen. Garam dapur tersusun dari atom natrium dan klorin. Dalam dunia bilangan, "atomnya" adalah bilangan prima: setiap bilangan komposit bisa dipecah terus sampai tinggal bilangan prima. Memecah bilangan menjadi perkalian bilangan prima disebut **faktorisasi prima**.

Alat yang paling menyenangkan untuk itu adalah **pohon faktor**. Tulis bilangannya di atas, pecah menjadi dua faktor, lalu pecah lagi setiap cabang yang belum prima. Cabang berhenti tumbuh ketika sampai di bilangan prima: itulah **daun**-nya.



$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Tekan 🖱️ untuk memecah dengan cara lain. Apakah daunnya berubah?

Daun-daunnya

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

Bentuk pangkat

$$2^3 \times 3^2 \times 5$$

Pohon ke-

1

Pilih sebuah bilangan, lalu tekan 🖱️ **Tumbuhkan pohon lain** berkali-kali. Setiap kali, bilangan dipecah dengan cara berbeda sehingga bentuk pohonnya berubah. Perhatikan daun-daunnya (lingkaran berwarna). Apakah daunnya pernah berubah?



TEOREMA DASAR ARITMETIKA

Setiap bilangan asli lebih dari 1 dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima, dan cara penulisannya **tunggal** (hanya satu), jika urutan faktornya tidak diperhatikan.

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Seperti sidik jari, faktorisasi prima adalah tanda pengenal unik setiap bilangan.

CONTOH Faktorisasi prima 360 dengan dua cara

Tuliskan faktorisasi prima dari 360 dalam bentuk pangkat.

- 1 **Cara pohon:** $360 = 36 \times 10$, lalu $36 = 6 \times 6 = (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ dan $10 = 2 \times 5$.
- 2 **Cara tangga (pembagian berulang):** bagi terus dengan prima terkecil yang mungkin: $360 : 2 = 180$, $180 : 2 = 90$, $90 : 2 = 45$, $45 : 3 = 15$, $15 : 3 = 5$, $5 : 5 = 1$.
- 3 Kedua cara menghasilkan daun yang sama: tiga buah 2, dua buah 3, dan satu buah 5.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5. \text{ Cek: } 8 \times 9 \times 5 = 360. \checkmark$$

**AWAS JEBAKAN**

Pohon faktor harus berhenti di bilangan prima, dan angka 1 tidak pernah boleh menjadi daun. Menulis $12 = 1 \times 12$ tidak memecah apa pun, sedangkan $12 = 4 \times 3$ belum selesai karena 4 masih bisa dipecah menjadi 2×2 . Selalu periksa: kalikan lagi semua daunnya, hasilnya harus kembali ke bilangan semula.

Faktorisasi prima juga membuka rahasia **banyak faktor**. Ambil $72 = 2^3 \times 3^2$. Setiap faktor 72 dibentuk dengan memilih pangkat 2 (yaitu 0, 1, 2, atau 3: ada 4 pilihan) dan pangkat 3 (0, 1, atau 2: ada 3 pilihan). Susun semua pilihan itu dalam tabel:

$\times$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^0 = 1$	1	2	4	8
$3^1 = 3$	3	6	12	24
$3^2 = 9$	9	18	36	72

Tabel 4×3 itu memuat **semua** faktor 72, masing-masing tepat sekali. Jadi 72 punya $4 \times 3 = 12$ faktor. Inilah aturan umumnya: tambah 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan.



SIFAT BANYAK FAKTOR

Jika $n = p^a \times q^b \times r^c$ dengan p, q, r bilangan prima berbeda, banyak faktor positif n adalah

$$\tau(n) = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Contoh: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ punya $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ faktor.

RUMUS HIDUP

Banyak faktor dari faktorisasi prima

$$\tau(n) = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Untuk $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$: tambahkan 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan semuanya. Itulah banyak faktor n , tanpa perlu mendaftarnya satu per satu.

a

Pangkat dari 2

b

Pangkat dari 3

c

Pangkat dari 5

$\tau(n)$

Banyak faktor faktor

BANYAK FAKTOR

24

faktor

Di sini $n = 360$. Pangkat 2 bisa dipilih dengan **4** cara (0 sampai **3**), pangkat 3 dengan **3** cara, dan pangkat 5 dengan **2** cara. Jadi n punya **$4 \times 3 \times 2 = 24$** faktor.

Cek satuan: Banyak faktor selalu bilangan asli, tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BANYAK-FAKTOR

▼ Mengapa rumusnya $(a + 1)(b + 1)$?

Menurut Teorema Dasar Aritmetika, setiap faktor d dari $n = p^a q^b$ hanya boleh memuat prima p dan q , dengan pangkat yang tidak melebihi pangkatnya di n . Jadi $d = p^i q^j$ dengan $0 \leq i \leq a$ (ada $a + 1$ pilihan) dan $0 \leq j \leq b$ (ada $b + 1$ pilihan). Setiap pasangan pilihan (i, j) menghasilkan faktor yang berbeda, karena faktorisasi prima itu tunggal. Menurut aturan perkalian, banyak pasangan adalah $(a + 1)(b + 1)$. Untuk tiga prima atau lebih, alasannya sama persis.

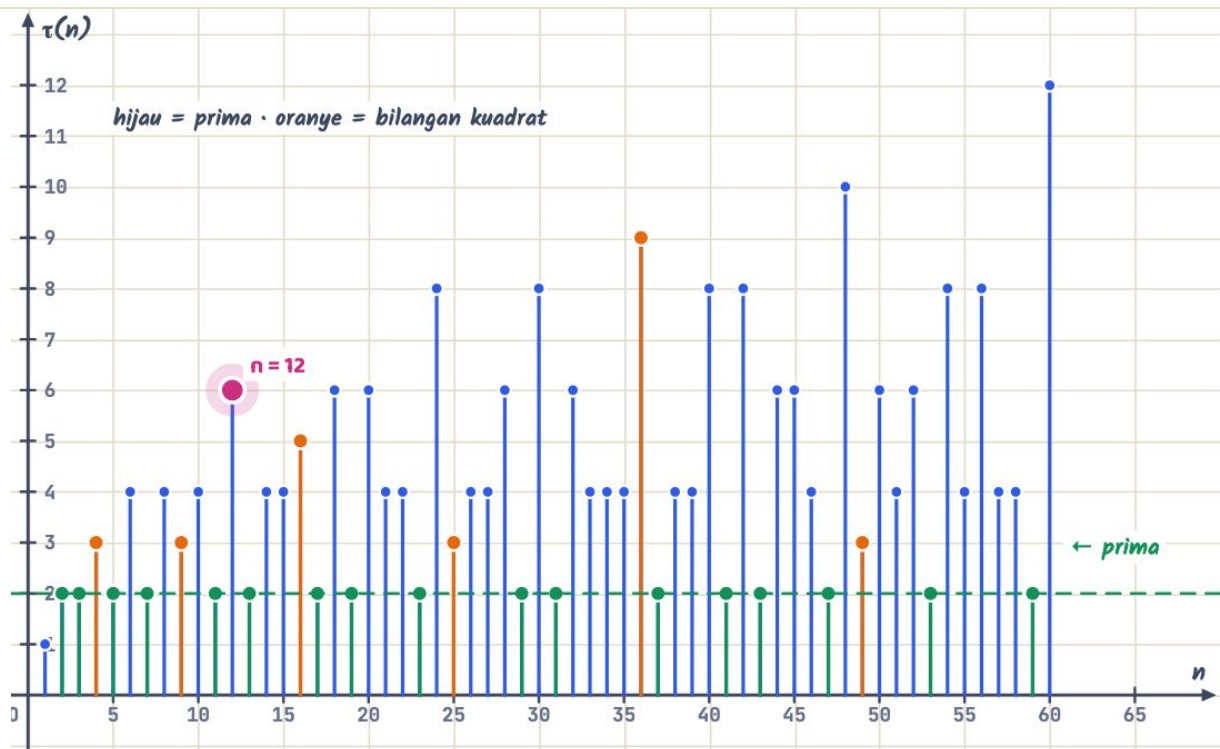
GRAFIK HIDUP

Grafik banyak faktor: prima selalu di lantai 2

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

$$\tau(n) = \text{banyak faktor dari } n$$

$$\tau(12) = 6$$



Faktor dari n

1, 2, 3, 4, 6, 12

Banyak faktor

6

Setiap tiang menunjukkan banyak faktor sebuah bilangan. Seret titik magenta ke kiri dan ke kanan.

Perhatikan: tiang hijau (prima) **tidak pernah** lebih tinggi dari 2, dan tiang oranye (bilangan kuadrat) selalu bernilai ganjil. Bilangan mana di bawah 60 yang paling "kaya" faktor?

Tentukan bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 6 faktor.

- 1 Banyak faktor adalah hasil kali (pangkat + 1). Angka 6 bisa ditulis sebagai 6 atau 3×2 .
- 2 Bentuk 6: satu prima berpangkat 5, yaitu p^5 . Yang terkecil $2^5 = 32$.
- 3 Bentuk 3×2 : $p^2 \times q^1$. Agar kecil, beri pangkat besar pada prima kecil: $2^2 \times 3 = 12$.
- 4 Bandingkan: $12 < 32$. Cek faktor 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Tepat 6. ✓

Jawabannya 12. Strategi "pangkat terbesar untuk prima terkecil" sering muncul di soal olimpiade.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

BILANGAN SEMPURNA

Jumlahkan semua faktor 6 selain 6 itu sendiri: $1 + 2 + 3 = 6$. Pas kembali ke 6! Bilangan seperti ini disebut **bilangan sempurna**. Berikutnya $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, lalu 496 dan 8.128. Euclid menemukan resepnya: jika $2^p - 1$ prima, maka $2^{p-1}(2^p - 1)$ sempurna. Contoh: $p = 3$ memberi $2^2 \times 7 = 28$. Sampai hari ini belum ada yang tahu apakah ada bilangan sempurna yang **ganjil**. Misteri berusia lebih dari 2.000 tahun ini masih menunggu pemecahnya. Siapa tahu kamu!

4.4 FPB dan KPK: membagi rata dan bertemu lagi

Ingat lampu kedip di komik? Waktu ketika dua lampu menyala bersamaan adalah kelipatan dari *kedua* selang kedipnya. Ada pula soal kebalikannya: membagi beberapa barang ke dalam kelompok yang sama persis, yang membutuhkan faktor dari *semua* bilangannya. Dua jenis soal ini punya dua alat.



DEFINISI

FPB (faktor persekutuan terbesar) dari dua bilangan atau lebih adalah bilangan terbesar yang menjadi faktor dari semua bilangan itu.

KPK (kelipatan persekutuan terkecil) adalah bilangan positif terkecil yang menjadi kelipatan dari semua bilangan itu.

Contoh: faktor 12 adalah 1, 2, 3, 4, **6**, 12 dan faktor 18 adalah 1, 2, 3, **6**, 9, 18, jadi $\text{FPB}(12, 18) = 6$. Kelipatan 12 adalah 12, 24, **36**, ... dan kelipatan 18 adalah 18, **36**, ..., jadi $\text{KPK}(12, 18) = 36$.

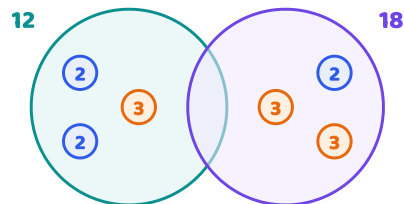
Mendaftar memang ampuh untuk bilangan kecil, tetapi melelahkan untuk bilangan besar. Cara yang lebih cerdas memakai faktorisasi prima. Tonton animasi berikut: setiap bola adalah satu "atom" prima.

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \quad 18 = 2 \times 3 \times 3$$



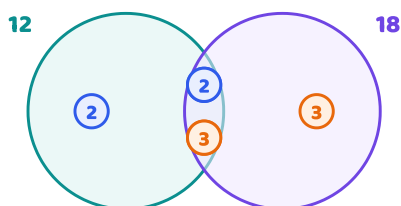
Langkah 1. Pecah kedua bilangan menjadi atom prima: $12 = 2 \times 2 \times 3$ dan $18 = 2 \times 3 \times 3$.

Lingkaran kiri: atom 12 · lingkaran kanan: atom 18



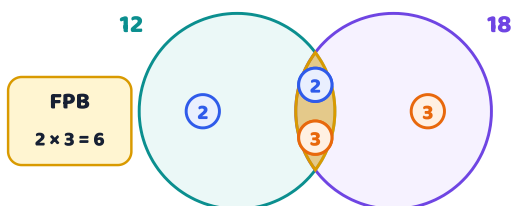
Langkah 2. Masukkan atom 12 ke lingkaran kiri dan atom 18 ke lingkaran kanan.

Lingkaran kiri: atom 12 · lingkaran kanan: atom 18



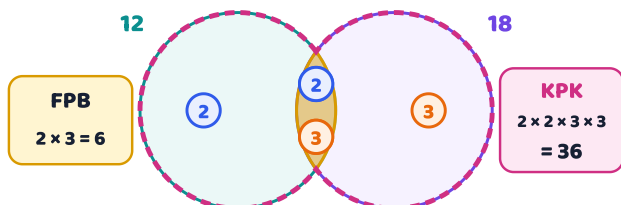
Langkah 3. Atom yang dimiliki **keduanya** (satu buah 2 dan satu buah 3) dipindah ke irisan dan dipakai bersama.

Irisan = atom milik bersama → kalikan untuk FPB



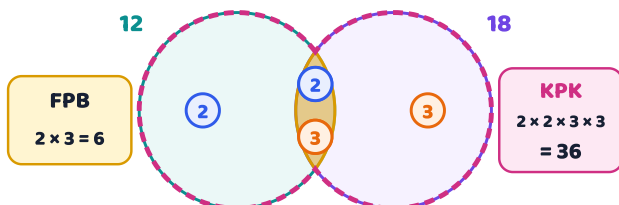
Langkah 4. FPB adalah hasil kali atom di **irisan**: $2 \times 3 = 6$. Itulah bagian terbesar yang dimiliki 12 dan 18 sekaligus.

Semua atom di gabungan → kalikan untuk KPK



Langkah 5. KPK adalah hasil kali **semua** atom di kedua lingkaran: $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$. Setiap atom dihitung sekali saja.

$$6 \times 36 = 216 = 12 \times 18$$



Langkah 6. Bonus ajaib: $\text{FPB} \times \text{KPK} = 6 \times 36 = 216$, sama persis dengan 12×18 . Kebetulan? Tidak! Atom di irisan terpakai dua kali (sekali di FPB, sekali di KPK) dan atom lainnya sekali, persis seperti atom-atom pada 12×18 .



ATURAN FPB DAN KPK LEWAT FAKTORISASI PRIMA

Tulis setiap bilangan dalam bentuk pangkat prima.

- **FPB:** ambil prima yang muncul di **semua** bilangan, dengan pangkat **terkecil**.
- **KPK:** ambil **semua** prima yang muncul, dengan pangkat **terbesar**.

Untuk dua bilangan a dan b selalu berlaku

$$\text{FPB}(a, b) \times \text{KPK}(a, b) = a \times b$$

▼ **Bukti singkat $\text{FPB} \times \text{KPK} = a \times b$**

Lihat satu prima p yang muncul dengan pangkat x di a dan pangkat y di b . Di FPB, pangkatnya $\min(x, y)$. Di KPK, pangkatnya $\max(x, y)$. Karena $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ (bilangan yang lebih kecil ditambah yang lebih besar sama dengan jumlah keduanya), pangkat p di $\text{FPB} \times \text{KPK}$ sama dengan pangkat p di $a \times b$. Ini berlaku untuk setiap prima, jadi kedua hasil kali sama.

RUMUS HIDUP KPK dari FPB (dua lampu kedip)

$$\text{KPK}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{FPB}(a, b)}$$

Kalikan kedua bilangan, lalu bagi dengan FPB-nya. Hasilnya adalah KPK: waktu tunggu sampai dua lampu menyala bersamaan lagi.

a Lampu A berkedip tiap detik

b Lampu B berkedip tiap detik

KPK Nyala bersamaan setiap detik

NYALA BERSAMAAN SETIAP

36

detik

$\text{FPB}(12, 18) = 6$, jadi $\text{KPK} = 12 \times 18 : 6 = 36$ detik. Cek: $\text{FPB} \times \text{KPK} = 6 \times 36 = 216$, sama persis dengan $a \times b = 216$.

Cek satuan: KPK selang kedip dalam detik juga bersatuan detik.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KPK-DARI-FPB](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-KPK-DARI-FPB)



Waktu

5,1 detik

Bareng setiap (KPK)

24 detik

Sudah bareng

0

Atur selang kedip lampu A dan B, lalu tekan ► **Jalankan**. Titik-titik di garis waktu adalah kelipatan masing-masing; garis magenta menandai saat lampu menyala bersamaan. Coba 6 dan 8 (lampu di komik), lalu 4 dan 5, lalu 7 dan 11 (pertanyaan Ancil!). Kapan KPK sama dengan hasil kali kedua bilangan? Nyalakan lampu C untuk tantangan tiga bilangan.

**TRIK KAK LINTANG**

Bingung memilih FPB atau KPK di soal cerita? Tanyakan: **apakah barangnya dibagi, atau peristiwanya berulang?**

- Kata kunci *dibagi rata, sebanyak-banyaknya, ukuran terbesar, tanpa sisa* → **FPB**. Hasilnya tidak lebih besar daripada bilangan terkecil.
- Kata kunci *bersamaan lagi, serentak, bertemu kembali, setiap ... sekali* → **KPK**. Hasilnya tidak lebih kecil daripada bilangan terbesar.

Bu RT punya 60 bungkus kurma, 48 botol sirup, dan 36 kaleng biskuit. Semuanya akan dibagi rata ke dalam bingkisan Lebaran sebanyak-banyaknya, tanpa sisa. Berapa bingkisan yang bisa dibuat, dan apa isi setiap bingkisan?

- 1 "Dibagi rata, sebanyak-banyaknya" → cari FPB.
- 2 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $48 = 2^4 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$.
- 3 Prima yang ada di ketiganya: 2 (pangkat terkecil 2) dan 3 (pangkat terkecil 1). $FPB = 2^2 \times 3 = 12$.
- 4 Isi tiap bingkisan: $60 : 12 = 5$ kurma, $48 : 12 = 4$ sirup, $36 : 12 = 3$ biskuit.

Ada 12 bingkisan, masing-masing berisi 5 bungkus kurma, 4 botol sirup, dan 3 kaleng biskuit.

Pak Joko mendapat giliran ronda setiap 4 hari, sedangkan Pak Made setiap 6 hari. Malam ini, Senin, mereka ronda bersama. Pada hari apa mereka ronda bersama lagi untuk pertama kalinya?

- 1 "Bersama lagi" → cari KPK. $4 = 2^2$ dan $6 = 2 \times 3$, jadi $KPK = 2^2 \times 3 = 12$.
- 2 Mereka ronda bersama lagi 12 hari kemudian.
- 3 Satu minggu 7 hari, dan $12 = 7 + 5$. Jadi harinya maju 5 dari Senin: Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu.

Mereka ronda bersama lagi pada hari Sabtu, 12 hari dari sekarang.

COBA SENDIRI Bus di halte

Di sebuah halte, bus jurusan A berangkat setiap 8 menit dan bus jurusan B setiap 12 menit. Pukul 05.30 keduanya berangkat bersamaan. Pukul berapa mereka berangkat bersamaan untuk ketiga kalinya setelah itu?

- 1 $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$, jadi $KPK = 2^3 \times 3 = 24$ menit.
- 2 Keberangkatan bersama berikutnya: 05.30 + 24 menit = 05.54, lalu 06.18, lalu 06.42.
- 3 Cek: dari 05.30 ke 06.42 adalah 72 menit = 3×24 . ✓

Pukul 06.42. Hati-hati menghitung "ketiga kalinya": 05.30 adalah titik awal, belum dihitung.



AWAS JEBAKAN

KPK dua bilangan tidak selalu sama dengan hasil kalinya. $KPK(4, 6) = 12$, bukan 24. KPK sama dengan $a \times b$ hanya jika kedua bilangan **relatif prima**, yaitu FPB-nya 1 (misalnya 4 dan 5, atau 7 dan 11). Periksa juga kewajaran: FPB tidak mungkin lebih besar daripada bilangan terkecil, dan KPK tidak mungkin lebih kecil daripada bilangan terbesar.



ADU CEPAT

KPK kilat: kapan lampu bareng?

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Daftar kelipatan bilangan yang lebih besar, lalu pilih yang pertama kali habis dibagi bilangan yang lebih kecil. Contoh: 6 dan 8 $\rightarrow$ 8, 16, 24 $\rightarrow$ 24.



MATEMATIKA NUSANTARA

Kalender Jawa memadukan **minggu tujuh hari** (Senin sampai Minggu) dengan **pasaran lima hari** (Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon). Gabungan keduanya disebut *weton*, misalnya Kamis Legi. Kapan weton yang sama datang lagi? Setiap $KPK(7, 5) = 35$ hari, yang disebut satu *selapan*. Di Bali, kalender *Pawukon* menjalankan sepuluh "minggu" sekaligus, dari yang panjangnya 1 hari sampai 10 hari, dalam satu siklus 210 hari. Bilangan $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ habis dibagi 1, 2, 3, 5, 6, 7, dan 10, tetapi tidak habis dibagi 4, 8, dan 9. Karena itu, minggu 4, 8, dan 9 hari dalam Pawukon memakai aturan sisipan khusus. Para penyusun kalender Nusantara sudah bermain KPK sejak berabad-abad lalu!



LANJUT · IB & OLIMPIADE

ALGORITMA EUCLID: FPB TANPA FAKTORISASI

Memfaktorkan bilangan besar itu sulit, tetapi FPB-nya tetap mudah dicari! Kuncinya: setiap faktor persekutuan a dan b juga membagi selisihnya, sehingga $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, a \bmod b)$, dengan $a \bmod b$ adalah sisa pembagian a oleh b . Ulangi sampai sisanya 0:

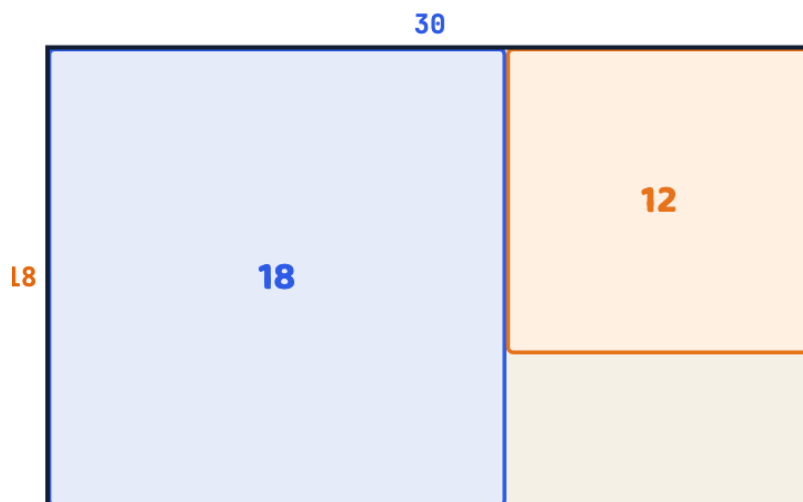
$$\text{FPB}(1071, 462) : \quad 1071 = 2 \times 462 + 147, \quad 462 = 3 \times 147 + 21, \quad 147 = 7 \times 21 + 0.$$

Jadi $\text{FPB}(1071, 462) = 21$, tanpa pernah memfaktorkan apa pun. Algoritma berumur lebih dari 2.000 tahun ini termuat dalam kitab *Elemen* karya Euclid dan masih dipakai setiap hari oleh komputer, termasuk dalam kriptografi.

LAB MINI

Ubin terbesar: potong persegi demi persegi

LAB MINI INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4



Langkah pembagian

$$\begin{aligned} 30 &= 1 \times 18 + 12 \\ 18 &= 1 \times 12 + 6 \end{aligned}$$

Persegi dipotong
2

Persegi terakhir
—

FPB
—

Lantai berukuran panjang $\times$ lebar (dalam desimeter) akan ditutup ubin persegi sebesar mungkin tanpa dipotong. Tekan ► **Jalankan**: dari lantai itu dipotong persegi terbesar berulang-ulang. Persegi terakhir yang pas tanpa sisa berukuran FPB! Bandingkan dengan langkah pembagian di kanan, lalu nyalakan **Tampilkan ubin FPB**. Coba juga dua bilangan relatif prima seperti 13 dan 8.

4.5 Ciri habis dibagi: detektif tanpa kalkulator

Koperasi sekolah menerima 7.416 buku tulis. Bisakah buku itu dibagi rata ke 9 kelas? Tanpa membagi panjang, jawabannya bisa diketahui dalam tiga detik: jumlahkan angka-angkanya. $7 + 4 + 1 + 6 = 18$, dan 18 habis dibagi 9. Jadi bisa! Berikut daftar ciri yang paling berguna.

Habis dibagi	Cirinya	Contoh
2	angka satuannya genap (0, 2, 4, 6, 8)	3.418
3	jumlah semua angkanya habis dibagi 3	4.821 $\rightarrow 4 + 8 + 2 + 1 = 15$
4	dua angka terakhirnya habis dibagi 4	7.316 $\rightarrow 16 = 4 \times 4$
5	angka satuannya 0 atau 5	2.025
6	habis dibagi 2 dan 3	5.394 $\rightarrow$ genap, $5 + 3 + 9 + 4 = 21$
8	tiga angka terakhirnya habis dibagi 8	13.112 $\rightarrow 112 = 8 \times 14$
9	jumlah semua angkanya habis dibagi 9	7.416 $\rightarrow 7 + 4 + 1 + 6 = 18$
11	selisih jumlah angka di posisi berselang-seling habis dibagi 11 (boleh 0)	9.273 $\rightarrow (9 + 7) - (2 + 3) = 11$



SIFAT SISA BAGI 9 DAN 11

Sebuah bilangan dan **jumlah angka-angkanya** memiliki sisa yang sama jika dibagi 9 (juga jika dibagi 3). Sebuah bilangan dan **jumlah berselang-seling** angkanya (tambah, kurang, tambah, ..., dimulai dari angka satuan) memiliki sisa yang sama jika dibagi 11.

▼ Bukti: mengapa jumlah angka bisa "membocorkan" sisa bagi 9?

Kuncinya: $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$. Setiap puluhan, ratusan, dan ribuan selalu "kelebihan 1" dari kelipatan 9. Untuk bilangan empat angka $\overline{abcd}$:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = \underbrace{(999a + 99b + 9c)}_{\text{kelipatan 9}} + (a + b + c + d).$$

Jadi sisa $\overline{abcd}$ dibagi 9 sama dengan sisa $a + b + c + d$ dibagi 9. Untuk 11, kuncinya $10 = 11 - 1$, $100 = 99 + 1$, dan $1000 = 1001 - 1$, sehingga $\overline{abcd} = (1001a + 99b + 11c) - a + b - c + d$. Bagian dalam kurung kelipatan 11, jadi yang menentukan adalah $d - c + b - a$.



Bahasa sederhana • Versi gampangnya: kalau jumlah angka sebuah bilangan habis dibagi 3, bilangan itu habis dibagi 3. Kalau jumlah angkanya habis dibagi 9, bilangan itu habis dibagi 9. Contoh: $126 \rightarrow 1 + 2 + 6 = 9$, jadi 126 habis dibagi 3 dan juga habis dibagi 9.

**ADU CEPAT****Sisa bagi 9 kilat**ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-4**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

Jumlahkan angka-angkanya, lalu cari sisa jumlah itu dibagi 9. Contoh: $4.728 \rightarrow 4 + 7 + 2 + 8 = 21 \rightarrow 21$ dibagi 9 sisa 3. Kalau habis, ketik 0.

**SULAP 1001 ALA ANCIL**

Minta temanmu menulis bilangan tiga angka, misalnya 365, lalu menulisnya dua kali menjadi 365.365. Kamu bisa langsung menebak bahwa bilangan itu habis dibagi 7, 11, **dan** 13. Lebih ajaib lagi: kalau dibagi 7, lalu 11, lalu 13, hasilnya kembali menjadi 365! Rahasiannya: $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1001$, dan $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

**LANJUT • IB & OLIMPIADE****ANGKA SATUAN: HANYA SATUAN YANG PENTING**

Angka satuan hasil kali hanya bergantung pada angka satuan bilangan yang dikalikan. Akibatnya, angka satuan pangkat selalu berputar dalam siklus. Untuk pangkat 3: 3, 9, 27, 81, 243, ... memiliki angka satuan 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... dengan siklus 4. Karena 100 habis dibagi 4, angka satuan 3^{100} sama dengan angka satuan 3^4 , yaitu 1. Gagasan "siklus sisa" ini akan menjadi senjata utama di Bab 38.

4.6**Prima tak berhingga dan kode rahasia**

Makin jauh kita melangkah, prima makin jarang. Dari 1 sampai 100 ada 25 prima, tetapi dari 901 sampai 1.000 hanya ada 14. Apakah suatu saat prima akan habis, sehingga ada "prima terbesar"? Sekitar tahun 300 SM, Euclid menjawab: **tidak pernah**. Buktinya pendek dan sangat cerdas.

**TEOREMA EUCLID**

Banyaknya bilangan prima **tak berhingga**. Daftar prima mana pun yang terbatas pasti belum lengkap.

Andaikan inilah SEMUA bilangan prima:

2 3 5 7 ...dan tidak ada lagi?

Langkah 1. Andaikan bilangan prima hanya sedikit, misalnya cuma 2, 3, 5, dan 7. (Cara ini berlaku untuk daftar terbatas apa pun.)

Andaikan inilah SEMUA bilangan prima:

2 3 5 7 ...dan tidak ada lagi?

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

Langkah 2. Kalikan **semua** prima dalam daftar: $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

Andaikan inilah SEMUA bilangan prima:

2 3 5 7 ...dan tidak ada lagi?

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

$$N = 210 + 1 = 211$$

Langkah 3. Tambahkan 1. Kita mendapat bilangan baru $N = 211$.

Andaikan inilah SEMUA bilangan prima:

2 3 5 7 ...dan tidak ada lagi?

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

$$N = 210 + 1 = 211$$

$$211 : 2 = 105 \\ \text{sisa } 1$$

$$211 : 3 = 70 \\ \text{sisa } 1$$

$$211 : 5 = 42 \\ \text{sisa } 1$$

$$211 : 7 = 30 \\ \text{sisa } 1$$

Langkah 4. Bagilah N dengan setiap prima di daftar. Sisanya **selalu 1**, karena 210 habis dibagi semuanya dan masih ada kelebihan 1. Jadi tidak ada prima di daftar yang membagi habis N .

Andaikan inilah SEMUA bilangan prima:

2 3 5 7

DAFTAR TIDAK LENGKAP!

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

$$N = 210 + 1 = 211$$

$$211 : 2 = 105 \\ \text{sisa } 1$$

$$211 : 3 = 70 \\ \text{sisa } 1$$

$$211 : 5 = 42 \\ \text{sisa } 1$$

$$211 : 7 = 30 \\ \text{sisa } 1$$

Langkah 5. Padahal, menurut Teorema Dasar Aritmetika, N pasti punya faktor prima. Faktor itu tidak ada di daftar, jadi pasti ada prima **baru**. Daftar terbatas mana pun selalu bolong, sehingga prima tak berhingga banyaknya!



Tebak Dulu!

Bilangan $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30.031$. Apakah N pasti bilangan prima?

Ya, bukti Euclid menjamin N selalu prima.

Tidak. Ternyata $30.031 = 59 \times 509$.

Tidak, karena N habis dibagi 13.

Ya, karena N ganjil.

Jawabannya: tidak! $30.031 = 59 \times 509$. Bukti Euclid tidak menjanjikan N prima. Yang dijanjikan hanyalah bahwa faktor prima N **tidak ada** di daftar semula. Benar saja, 59 dan 509 adalah prima baru yang tidak termasuk 2, 3, 5, 7, 11, atau 13.



AWAS JEBAKAN

Bilangan "hasil kali prima ditambah 1" tidak selalu prima. Kesalahan yang sering terjadi adalah menyimpulkan bahwa N pasti prima. Bukti Euclid hanya menjamin bahwa faktor prima N adalah prima **baru**, entah N sendiri atau faktor-faktornya.

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$$

Kalikan k bilangan prima pertama, lalu tambahkan 1. Hasilnya tidak habis dibagi satu pun prima di dalam daftar itu.

 k

Banyak prima pertama

 N

Bilangan Euclid

BILANGAN EUCLID

211kebetulan N prima

Hasil kali **4** prima pertama ($2 \times 3 \times 5 \times 7$) adalah **210**. Ditambah 1, hasilnya **211**. Dibagi prima mana pun di daftar itu, sisanya selalu 1. **211 adalah prima.**

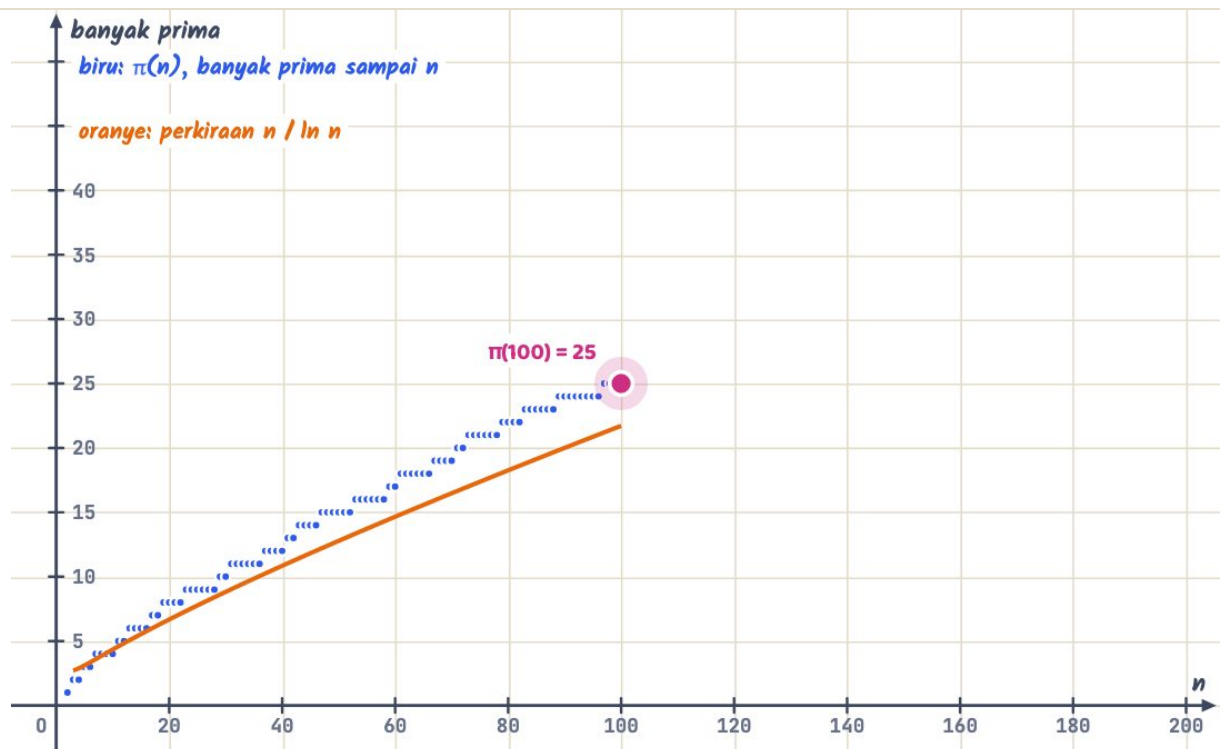
Cek satuan: N adalah bilangan asli tanpa satuan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BILANGAN-EUCLID](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-bilangan-euclid)

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$$

$$\pi(100) = 25 \quad \frac{100}{\ln 100} \approx 21,71$$

$\pi(n)$ adalah banyak bilangan prima dari 1 sampai n . Titik biru terus naik walaupun makin landai: prima makin jarang, tetapi tidak pernah berhenti muncul.

 $\pi(n)$

25

 $n / \ln n$

21,7

Persentase prima

25 %

Seret titik magenta atau tekan ► **Jalankan**. Perhatikan persentase prima yang terus mengecil: sekitar 25% sampai 100, sekitar 23% sampai 200, dan hanya 16,8% sampai 1.000. Namun, tangga biru tidak pernah berhenti naik. Kurva oranye adalah perkiraan yang ditemukan Gauss muda saat berusia sekitar 15 tahun.



TAMU DARI MASA LALU

Euclid dari Aleksandria (± 300 SM) menuliskan bukti di atas dalam kitab *Elemen*, salah satu buku pelajaran paling berpengaruh sepanjang sejarah. Lebih dari 2.000 tahun kemudian, orang masih berlomba mencari prima raksasa dengan komputer. Pada akhir 2024 ditemukan prima $2^{136.279.841} - 1$, yang jika ditulis memiliki lebih dari 41 juta angka! Prima berbentuk $2^p - 1$ seperti ini disebut **prima Mersenne**, sesuai nama biarawan Prancis Marin Mersenne (1588–1648).

Prima juga menjaga rahasiamu. Mengalikan dua prima itu mudah: $89 \times 97 = 8.633$ bisa dihitung dalam satu menit. Kebalikannya jauh lebih sulit. Coba temukan dua prima yang hasil kalinya 8.633 tanpa kalkulator! Untuk bilangan ratusan angka, komputer tercepat pun butuh waktu yang sangat lama. Ketimpangan "mudah dikalikan, sulit difaktorkan" inilah fondasi banyak sistem **kriptografi** (ilmu penyandian) yang melindungi pesan, mobile banking, dan transaksi digital.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

GEMBOK RSA DALAM SATU PARAGRAF

Sistem RSA memilih dua prima rahasia p dan q yang sangat besar, lalu mengumumkan hasil kalinya $n = pq$ sebagai "gembok terbuka". Siapa pun bisa mengunci pesan dengan n , tetapi untuk membuka kuncinya diperlukan p dan q . Pada kunci RSA 2.048 bit, n memiliki sekitar 617 angka. Dengan algoritma terbaik yang diketahui saat ini, memfaktorkan bilangan sebesar itu dianggap mustahil dalam waktu yang wajar. Contoh mini: $n = 8.633 = 89 \times 97$. Gembok ini mudah dibobol, karena kamu cukup mencoba pembagi prima sampai $\sqrt{8.633} \approx 93$.



MISTERI YANG BELUM TERPECAHKAN

Prima menyimpan teka-teki yang belum terjawab sampai sekarang. **Dugaan Goldbach** (1742): setiap bilangan genap lebih dari 2 adalah jumlah dua prima, misalnya $10 = 3 + 7$ dan $28 = 11 + 17$. Komputer sudah memeriksanya sampai bilangan yang sangat besar, tetapi belum ada yang bisa membuktikannya untuk *semua* bilangan. **Dugaan prima kembar**: pasangan prima yang berselisih 2, seperti (11, 13), (17, 19), dan (41, 43), tak berhingga banyaknya. Belum terbukti juga!



Jadwal ronda

Warga yang bergiliran ronda setiap 3, 4, atau 5 hari bertemu di pos ronda pada hari ke-KPK.



Bingkisan Lebaran

Membagi kue, sirup, dan kurma serata mungkin ke bingkisan sebanyak-banyaknya memakai FPB.



Bus di halte

Bus dua jurusan dengan selang keberangkatan berbeda kembali berangkat bersamaan setiap KPK menit.



Kode rahasia digital

Pesan di ponsel dan transaksi bank dilindungi kunci yang dibuat dari hasil kali dua prima raksasa.



Roda gigi mesin

Banyak gigi dua roda gigi yang bersinggungan sering dipilih relatif prima, agar setiap gigi bergiliran bertemu semua gigi lawannya dan ausnya merata.



Ubin lantai

Ukuran ubin persegi terbesar yang pas menutup lantai tanpa dipotong adalah FPB panjang dan lebar lantai.

Cek Cepat

Pasangan bilangan manakah yang relatif prima (FPB-nya 1)?

12 dan 18

9 dan 16

14 dan 21

15 dan 25

Bilangan manakah yang habis dibagi 11?

1.234

5.678

2.519

3.412

Banyak faktor positif dari $2^3 \times 3 \times 5^2$ adalah...

24

6

30

600

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A



Tantangan Rumah: orkestra tepuk KPK

Bahan: dua atau tiga teman atau anggota keluarga, kertas, pensil (boleh memakai aplikasi metronom di HP).

1. Hitung bersama dengan suara keras dan irama tetap: 1, 2, 3, ..., sampai 36.
2. Pemain A bertepuk tangan setiap hitungan kelipatan 4. Pemain B menghentakkan kaki setiap kelipatan 6.
3. Setiap kali tepuk dan hentak terjadi **bersamaan**, semua berteriak "BARENG!". Catat hitungan ke berapa saja itu terjadi.
4. Ulangi dengan pasangan irama lain: 3 dan 5, 6 dan 9, serta 2 dan 7.
5. Tantangan akhir: tambahkan pemain C yang bersiul setiap kelipatan 5 (hitung sampai 60) untuk irama 4, 6, dan 5.

Pertanyaan: Untuk setiap pasangan, tebak dulu kapan "BARENG!" pertama terjadi, lalu cocokkan dengan percobaanmu. Mengapa irama 4 dan 6 bertemu lebih cepat daripada $4 \times 6 = 24$, tetapi irama 3 dan 5 baru bertemu tepat di $3 \times 5 = 15$?



RINGKASAN KILAT

Bab 4 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- menemukan semua **faktor** dan **kelipatan** sebuah bilangan, serta menjelaskan mengapa faktor selalu berpasangan
- mengenali **bilangan prima** dan menyaringnya dengan **saringan Eratosthenes**
- menuliskan **faktorisasi prima** dengan pohon faktor dan menghitung banyak faktor tanpa mendaftarnya
- menghitung **FPB** dan **KPK**, lalu memilih yang tepat untuk soal cerita

- memakai **ciri habis dibagi** 3, 9, dan 11, serta membuktikan bahwa bilangan prima **tidak pernah habis**

Istilah kunci

faktor

kelipatan

Bilangan prima

bilangan komposit

faktorisasi prima

pohon faktor

FPB

KPK

relatif prima

kriptografi

Rumus penting

$$d_{\max} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

Batas uji bilangan prima. Untuk memeriksa apakah n prima, cukup coba bagi n dengan bilangan prima yang tidak lebih dari akar n . Kalau tidak ada yang membagi habis, n pasti prima.

$$\tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1)$$

Banyak faktor dari faktorisasi prima. Untuk $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$: tambahkan 1 pada setiap pangkat, lalu kalikan semuanya. Itulah banyak faktor n , tanpa perlu mendaftarnya satu per satu.

$$\text{KPK}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{FPB}(a, b)}$$

KPK dari FPB (dua lampu kedip). Kalikan kedua bilangan, lalu bagi dengan FPB-nya. Hasilnya adalah KPK: waktu tunggu sampai dua lampu menyala bersamaan lagi.

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$$

Bilangan Euclid: kalikan prima, tambah 1.

Kalikan k bilangan prima pertama, lalu tambahkan 1. Hasilnya tidak habis dibagi satu pun prima di dalam daftar itu.

Jangan sampai terjebak

- Bilangan yang "kelihatan prima" belum tentu prima.
- Pohon faktor harus berhenti di bilangan prima, dan angka 1 tidak pernah boleh menjadi daun.
- KPK dua bilangan tidak selalu sama dengan hasil kalinya.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=4

Teka-teki untuk Bab 5

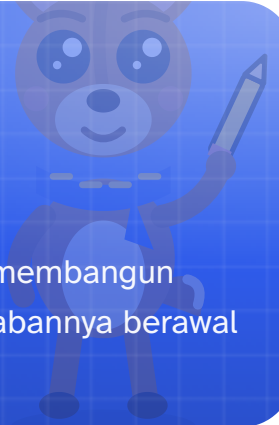
Kak Lintang membentangkan peta Sumatra berskala 1 : 250.000. Ayu mengukur jarak dua kota di peta: 8 cm. Dimas langsung bertanya, "Kenapa skalanya tidak ditulis 4 : 1.000.000 saja? Bukankah sama?" Siapa yang benar, dan berapa kilometer jarak sebenarnya kedua kota itu?

▼ Intip petunjuk

Dimas benar: kalikan kedua ruas 1 : 250.000 dengan 4, dan perbandingannya tetap sama, persis seperti pecahan senilai. Kebalikannya, membagi kedua ruas dengan FPB menyederhanakan perbandingan. Untuk jarak: 1 cm di peta mewakili 250.000 cm = 2,5 km. Jadi 8 cm mewakili ... km? Bab 5 membahas rasio, skala, dan perbandingan sampai tuntas!

05

Rasio, Proporsi & Laju: Seni Membandingkan



Mengapa 8 cm di peta bisa berarti 20 km perjalanan? Kalau 4 tukang membangun rumah dalam 30 hari, berapa lama jika tukangnyanya 6 orang? Semua jawabannya berawal dari satu ide sederhana: membandingkan dengan cara membagi.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menyatakan perbandingan dua besaran sebagai **rasio** paling sederhana dan **membagi** suatu jumlah menurut rasio;
- memakai **skala** untuk mengubah jarak di peta atau denah menjadi jarak sebenarnya, dan sebaliknya;
- membedakan **perbandingan senilai** dan **berbalik nilai**, lalu menyelesaikan soal ceritanya dengan tabel, perkalian silang, atau grafik;
- menghitung **laju** (kecepatan, debit, harga satuan), termasuk kecepatan rata-rata dan kerja bersama;
- mengenali **variasi langsung dan invers** $y = kx^n$ beserta grafiknya.

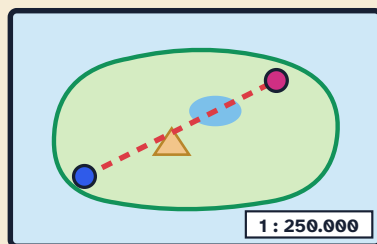
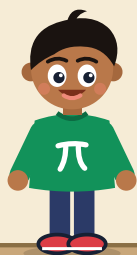
PETA MUDIK DIMAS

KOMIK • 4 PANEL

Malam sebelum mudik ke rumah Nenek

DIMAS

Lihat! Di peta, rumah Nenek ke pantai cuma 8 cm. Besok kita jalan kaki saja, yuk!



AYU

Tunggu dulu. Di pojok peta tertulis skala 1 : 250.000. Artinya, 1 cm di peta mewakili 250.000 cm di dunia nyata!



KAK LINTANG

Betul, Ayu. 250.000 cm itu 2,5 km. Jadi 8 cm di peta = $8 \times 2,5 = 20$ km. Lumayan jauh untuk jalan kaki!

**Ancil muncul dari balik angkot****ANCIL**

Jalan kaki ± 4 km per jam? 20 km butuh 5 jam! Naik angkot 40 km per jam, setengah jam saja sampai.

DIMAS

Jadi peta itu dunia yang dikecilkan 250.000 kali...

**Tebak Dulu!**

Ayu mencampur 2 gelas sirup dengan 3 gelas air. Dimas mencampur 4 gelas sirup dengan 5 gelas air. Minuman siapa yang terasa lebih manis?

Sama manisnya, karena pada keduanya air hanya 1 gelas lebih banyak daripada sirup.

Minuman Ayu, karena airnya lebih sedikit.

Minuman Dimas, karena bagian sirupnya lebih besar.

Tidak bisa ditentukan tanpa mencicipinya.

Jawabannya: minuman Dimas. Yang menentukan rasa bukan *selisih* gelas, melainkan **perbandingan**. Pada minuman Ayu, sirup mengisi $\frac{2}{5} = 40\%$ campuran. Pada minuman Dimas, sirup mengisi $\frac{4}{9} \approx 44\%$. Membandingkan dengan cara **membagi**, bukan mengurangi, adalah inti seluruh bab ini.

5.1 Rasio: membandingkan dengan cara membagi

Dimas punya 12 kelereng, Ayu punya 4. Ada dua cara membandingkannya. Dengan **mengurangi**: "Kelereng Dimas 8 butir lebih banyak." Dengan **membagi**: "Kelereng Dimas 3 kali kelereng Ayu." Cara kedua inilah yang disebut **rasio** atau perbandingan.



DEFINISI

Rasio dua besaran sejenis a dan b (dengan $b \neq 0$) ditulis $a : b$ dan dibaca " a berbanding b ". Nilainya sama dengan pecahan $\frac{a}{b}$. Seperti pecahan, rasio dapat **disederhanakan** dengan membagi kedua sukunya dengan bilangan yang sama, paling cepat dengan FPB-nya (ingat Bab 4).

$$12 : 4 = 3 : 1$$

$$12 : 18 = 2 : 3 \text{ (dibagi FPB 6)}$$

Bahasa sederhana • Rasio itu seperti resep. "Gula dan tepung 2 : 3" artinya setiap 2 sendok gula dipasangkan dengan 3 sendok tepung. Kalau gulanya 4 sendok, tepungnya 6 sendok. Angkanya boleh membesar, asalkan **pasangannya tetap seimbang**.

Rasio juga bisa membandingkan lebih dari dua besaran. Adonan kue dengan tepung : gula : mentega = 4 : 2 : 1 berarti tepungnya dua kali gula, dan gulanya dua kali mentega. Dua rasio yang nilainya sama, seperti 2 : 3 dan 4 : 6, disebut **rasio senilai**.



AWAS JEBAKAN

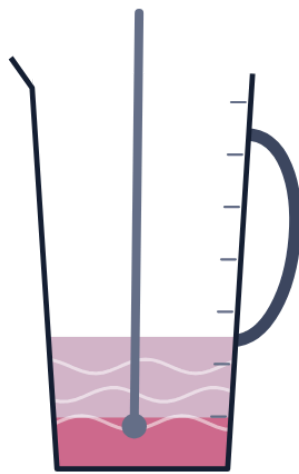
Sebelum menulis rasio, samakan dulu satuannya. Rasio 20 cm terhadap 1 m **bukan** 20 : 1, melainkan 20 cm : 100 cm = 1 : 5. Setelah satuannya sama, satuan itu boleh dihilangkan, karena rasio adalah bilangan tanpa satuan.

CONTOH Pensil dan meja

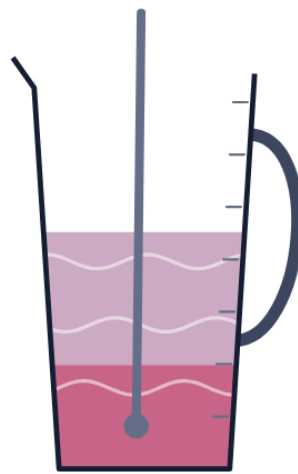
Panjang pensil Ayu 18 cm, sedangkan panjang mejanya 1,2 m. Tentukan rasio panjang pensil terhadap panjang meja dalam bentuk paling sederhana.

- 1 Samakan satuan: 1,2 m = 120 cm.
- 2 Rasionya 18 : 120. FPB dari 18 dan 120 adalah 6.
- 3 Bagi kedua suku dengan 6: 18 : 120 = 3 : 20.

Rasionya 3 : 20. Artinya, panjang meja $\frac{20}{3} \approx 6,7$ kali panjang pensil: kira-kira tujuh pensil yang dijejerkan.

**Teko A**

sirup : air = 2 : 3

**Teko B**

sirup : air = 4 : 5

Bagian sirup**A: 2 dari 5 bagian**
 **40%**
pecahan $\frac{2}{5}$ **B: 4 dari 9 bagian**
 **44,4%**
pecahan $\frac{4}{9}$ **Uji perkalian silang:**

$$2 \times 9 = 18 < 20 = 4 \times 5$$

B lebih manis*Mengaduk...*

Kadar sirup A

40 %

Kadar sirup B

44,4 %

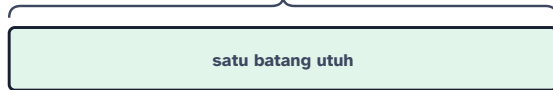
Lebih manis

teko B

Atur takaran sirup dan air di kedua teko, lalu tekan ► **Jalankan** untuk mengaduk. Tekan ⚖ **Gandakan A ke B**: teko B berisi dua kali sirup *dan* dua kali air teko A. Apakah warnanya berbeda? Bisakah kamu membuat dua campuran yang sama manis dengan angka yang belainan?

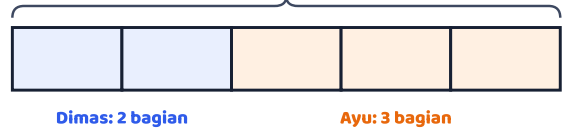
Soal rasio yang paling sering muncul dalam kehidupan adalah **membagi menurut rasio**: membagi uang, hasil panen, atau tugas secara adil sesuai kesepakatan. Kuncinya, ubah rasio menjadi **bagian-bagian yang sama besar**. Model batang di bawah ini membuatnya terlihat jelas.

Keuntungan Rp 75.000



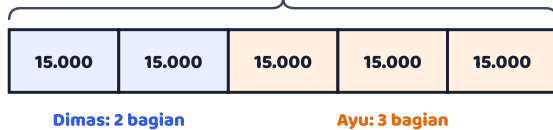
Langkah 1. Dimas dan Ayu berjualan es teh di bazar sekolah. Modal Dimas Rp 20.000 dan modal Ayu Rp 30.000. Keuntungannya, Rp 75.000, akan dibagi menurut rasio modal mereka.

Keuntungan Rp 75.000



Langkah 2. Rasio modal Rp 20.000 : Rp 30.000 = 2 : 3. Potong batang keuntungan menjadi 2 + 3 = 5 bagian yang sama besar: 2 bagian untuk Dimas dan 3 bagian untuk Ayu.

Keuntungan Rp 75.000



$\text{Rp } 75.000 \div 5 = \text{Rp } 15.000$ per bagian

Langkah 3. Satu bagian bernilai $\text{Rp } 75.000 \div 5 = \text{Rp } 15.000$.

Keuntungan Rp 75.000



Langkah 4. Dimas mendapat $2 \times \text{Rp } 15.000 = \text{Rp } 30.000$, sedangkan Ayu mendapat $3 \times \text{Rp } 15.000 = \text{Rp } 45.000$.

Keuntungan Rp 75.000



Langkah 5. Selalu cek dua hal: jumlahnya kembali utuh ($\text{Rp } 30.000 + \text{Rp } 45.000 = \text{Rp } 75.000$) dan rasionya tetap ($30.000 : 45.000 = 2 : 3$). Keduanya benar!



ATURAN MEMBAGI MENURUT RASIO

Jika jumlah T dibagi menurut rasio $a : b$, maka

$$\text{bagian pertama} = \frac{a}{a+b} \times T, \quad \text{bagian kedua} = \frac{b}{a+b} \times T$$

Penyebutnya $a + b$, yaitu banyak seluruh bagian, bukan b .

$$A = \frac{a}{a + b} \times T$$

Jumlahkan suku-suku rasio untuk mendapat banyak bagian, bagi totalnya, lalu kalikan dengan suku milikmu.

a Suku pertama bagian

b Suku kedua bagian

T Total ribu Rp

A Bagian pertama ribu Rp

BAGIAN PERTAMA

30

ribu Rp

✨ setiap bagian bernilai bulat

Total **75** ribu dibagi menjadi **5** bagian sama besar, masing-masing **15** ribu. Orang pertama mendapat **2** bagian = **30** ribu, orang kedua **3** bagian = **45** ribu. Jumlahnya kembali **75** ribu.

Cek satuan: ribu rupiah $\times$ (bagian $\div$ bagian) = ribu rupiah. Suku-suku rasio tidak bersatuan, jadi satuan hasilnya sama dengan satuan total.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BAGI-RASIO



MATEMATIKA NUSANTARA

Petani di pedesaan Jawa sejak lama mengenal bagi hasil sawah antara pemilik lahan dan penggarap. Dalam sistem *maro*, hasil panen dibagi dua sama besar (rasio 1 : 1). Dalam sistem *mertelu*, hasil panen dibagi menjadi tiga bagian: satu pihak menerima satu bagian dan pihak lain dua bagian (rasio 1 : 2), sesuai kesepakatan. Nelayan pun membagi hasil tangkapan antara pemilik perahu dan para awak dengan rasio yang disepakati sebelum melaut. Membagi menurut rasio adalah cara leluhur kita menjaga keadilan!

5.2 Skala: dunia yang dikecilkan

Teka-teki di akhir Bab 4 menyinggung peta berskala 1 : 250.000. Saatnya membongkar artinya. Peta, denah rumah, dan maket adalah gambar dunia nyata yang **diperkecil dengan rasio yang sama** ke segala arah. Rasio itu disebut **skala**.



DEFINISI

Skala adalah rasio antara jarak pada gambar (peta, denah, atau maket) dan jarak sebenarnya, dengan **satuan yang sama**:

$$\text{skala} = \text{jarak pada peta} : \text{jarak sebenarnya}$$

Skala 1 : 250.000 berarti 1 cm pada peta mewakili 250.000 cm di dunia nyata.



DUA RUMUS KEMBAR

Untuk peta berskala 1 : n :

$$\text{jarak sebenarnya} = \text{jarak pada peta} \times n, \quad \text{jarak pada peta} = \frac{\text{jarak sebenarnya}}{n}.$$

Bahasa sederhana • Bayangkan dunia dimasukkan ke "mesin pengecil" yang mengecilkan semuanya 250.000 kali. Satu langkah kakimu (± 50 cm) di peta itu hanya 0,0002 cm, jauh lebih tipis daripada sehelai rambut! Sebaliknya, 8 cm di peta Dimas mewakili **20 km** di dunia nyata.

Denah rumah • skala 1 : 100



7 cm di denah = 7 m sebenarnya

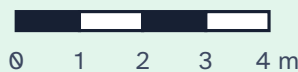
① Skala angka

1 : 100

② Skala kalimat

1 cm pada denah mewakili 1 m

③ Skala garis



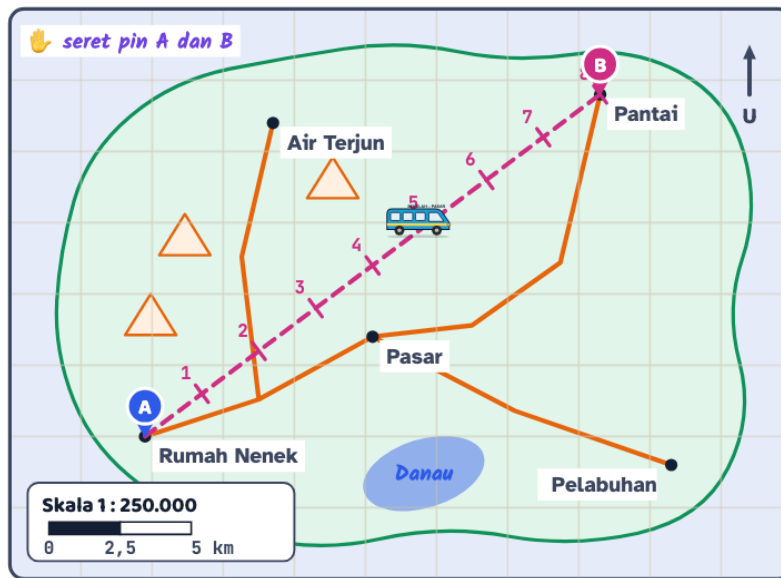
tiap ruas 1 cm

Tiga cara menulis skala yang sama. Kelebihan skala garis: tetap benar walaupun gambarnya diperbesar atau diperkecil saat difotokopi, karena garisnya ikut berubah ukuran.



TRIK KAK LINTANG

Ingat **1 km = 100.000 cm** (lima nol). Untuk tahu "1 cm di peta = berapa km?", bagi penyebut skala dengan 100.000, yaitu geser koma lima langkah ke kiri. Skala 1 : 250.000 $\rightarrow$ 1 cm = 2,5 km. Skala 1 : 50.000 $\rightarrow$ 1 cm = 0,5 km. Skala 1 : 1.000.000 $\rightarrow$ 1 cm = 10 km.

**Skala 1 : 250.000**

1 cm ↔ 2,5 km

Penggaris di peta:

8 cm

Jarak sebenarnya:

 $8 \times 2,5 = 20 \text{ km}$ **Laju 40 km/jam** $20 \div 40 = 0,5 \text{ jam}$ **≈ 30 menit**di perjalanan
18 menit

Skala

1 : 250.000

Jarak di peta

8 cm

Jarak sebenarnya

20 km

Waktu tempuh

30 menit

Seret pin **A** dan **B** ke mana saja di pulau, lalu ganti **skala peta**. Gambar pulauanya mengecil dan jarak di peta berubah, tetapi jarak sebenarnya tetap sama! Tekan ► **Jalankan** untuk mengirim angkot dari A ke B dengan kecepatan pilihanmu. (Jaraknya diukur lurus seperti penggaris; jalan sungguhan biasanya lebih panjang.)

$$J = \frac{p \times n}{100.000}$$

Kalikan jarak di peta dengan penyebut skala untuk mendapat jarak sebenarnya dalam cm, lalu bagi 100.000 untuk mengubahnya menjadi km.

p Jarak di peta cm

n Penyebut skala (1 : n)

J Jarak sebenarnya km

JARAK SEBENARNYA

20

km

peta skala kecil: muat satu pulau atau provinsi

Skala 1 : **250.000** berarti 1 cm di peta mewakili **250.000** cm = **2,5** km. Jadi **8** cm di peta mewakili **20** km, atau **20.000** m.

Cek satuan: cm dikali n (tanpa satuan) tetap cm; lalu $\text{cm} \div 100.000 = \text{km}$, karena $1 \text{ km} = 1.000 \text{ m} = 100.000 \text{ cm}$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SKALA-PETA

Di sebuah peta, jarak dua kota 7,2 cm, padahal jarak sebenarnya 36 km. (a) Tentukan skala peta itu. (b) Pada peta yang sama, jarak dua desa 1,5 cm. Berapa km jarak sebenarnya?

1 Samakan satuan: $36 \text{ km} = 36 \times 100.000 \text{ cm} = 3.600.000 \text{ cm}$.

2 Skala = $7,2 : 3.600.000$. Bagi kedua suku dengan 7,2: $1 : \frac{3.600.000}{7,2} = 1 : 500.000$.

3 Pada skala 1 : 500.000, 1 cm mewakili 5 km. Jadi 1,5 cm mewakili $1,5 \times 5 = 7,5 \text{ km}$.

(a) Skala 1 : 500.000. (b) Jarak kedua desa 7,5 km.



ADU CEPAT

Skala kilat: dari peta ke kmADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

Geser koma penyebut skala lima langkah ke kiri untuk mendapat "1 cm = ... km", lalu kalikan dengan jarak di peta. Contoh: $1 : 200.000 \rightarrow 1 \text{ cm} = 2 \text{ km}$, jadi $7 \text{ cm} = 14 \text{ km}$.

**PETA RUPABUMI INDONESIA**

Badan Informasi Geospasial (BIG) menerbitkan peta resmi Indonesia dalam beberapa skala, antara lain $1 : 25.000$, $1 : 50.000$, dan $1 : 250.000$. Peta berpenyebut kecil disebut **berskala besar**: wilayahnya sempit, tetapi rinciannya banyak. Peta berpenyebut besar disebut **berskala kecil**: muat satu pulau, tetapi jalan kampung tidak lagi tampak.

**LANJUT • IB & OLIMPIADE****SKALA UNTUK LUAS DAN VOLUME**

Jika skala panjang $1 : n$, maka skala luas $1 : n^2$ dan skala volume $1 : n^3$. Alasannya, luas adalah panjang $\times$ lebar, dan *keduanya* diperbesar n kali. Kamar $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ pada denah $1 : 100$ luasnya 12 cm^2 di kertas, tetapi $12 \times 100^2 = 120.000 \text{ cm}^2 = 12 \text{ m}^2$ di dunia nyata, bukan 1.200 cm^2 . Maket gedung berskala $1 : 100$ yang volumenya 1 liter mewakili gedung bervolume $100^3 = 1.000.000$ liter, yaitu 1.000 m^3 .

5.3**Perbandingan senilai: naik bersama, rasionya tetap**

Di pasar, harga beras Rp 14.000 per kg. Dua kg harganya Rp 28.000, tiga kg Rp 42.000. Setiap kali beratnya dikali 2, harganya juga dikali 2. Pasangan besaran seperti ini disebut **perbandingan senilai** (berbanding lurus).

Berat beras x (kg)	0,5	1	2	3	5
Harga y (Rp)	7.000	14.000	28.000	42.000	70.000
$y : x$ (Rp per kg)	14.000	14.000	14.000	14.000	14.000

**DEFINISI**

Dua besaran x dan y disebut **senilai** jika rasio $\frac{y}{x}$ selalu sama, yaitu $y = kx$ untuk suatu bilangan tetap k yang disebut **konstanta perbandingan**. Jika x dikali berapa pun, y ikut dikali bilangan yang sama.



SIFAT PROPORSI (PERKALIAN SILANG)

Kesamaan dua rasio disebut **proporsi**. Untuk $b \neq 0$ dan $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$$

▼ Mengapa perkalian silang boleh dipakai?

Kalikan kedua ruas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dengan bd , yang tidak nol: $\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$, sehingga $ad = bc$. Sebaliknya, jika $ad = bc$, bagi kedua ruas dengan bd untuk kembali ke $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Jadi perkalian silang bukan sulap: ia hanya "mengalikan kedua ruas dengan bilangan yang sama".

CONTOH Harga beras: satuan dulu atau kali silang

Harga 3 kg beras Rp 42.000. Berapa harga 5 kg beras yang sama?

1 **Cara satuan:** harga 1 kg = Rp 42.000 ÷ 3 = Rp 14.000, jadi harga 5 kg = 5 × Rp 14.000 = Rp 70.000.

2 **Cara proporsi:** $\frac{3}{42.000} = \frac{5}{y}$, sehingga $3y = 5 \times 42.000 = 210.000$ dan $y = 70.000$.

Harga 5 kg beras Rp 70.000. Dua cara, satu jawaban!



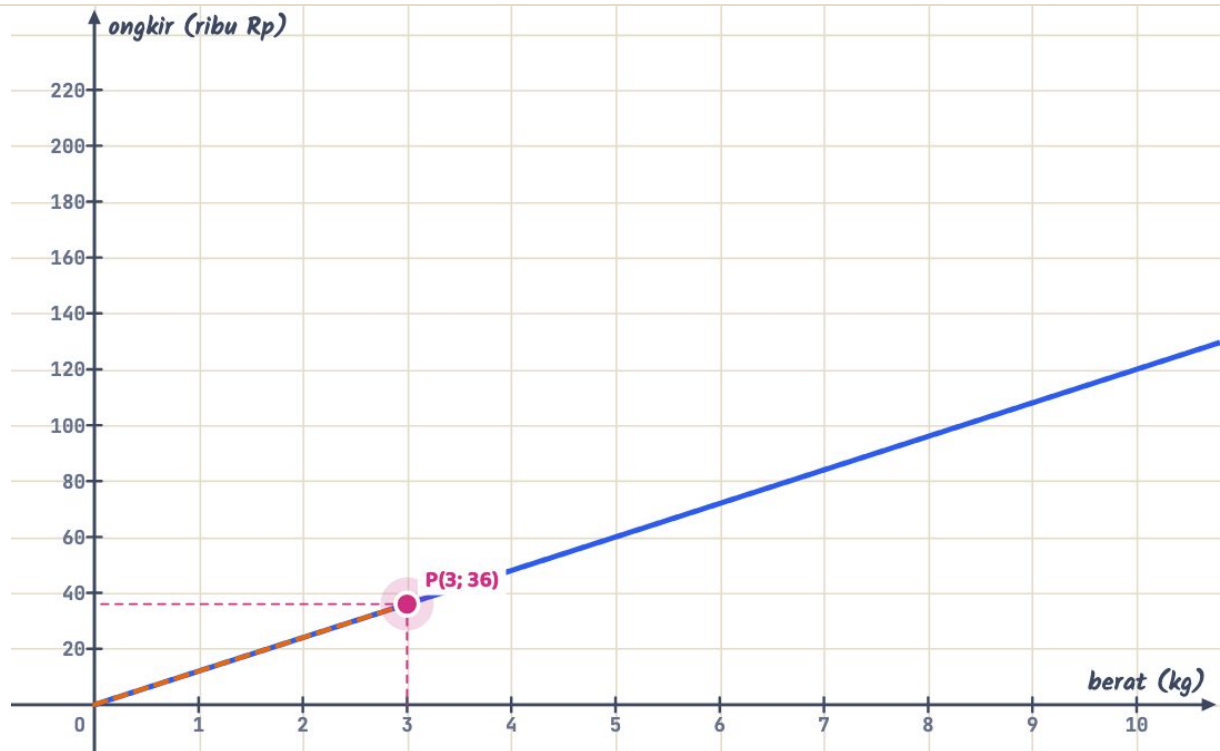
TRIK KAK LINTANG

Bingung mana yang dikali dan mana yang dibagi? Pakai **cara satuan**: cari dulu nilai untuk *satuan* (1 kg, 1 porsi, 1 jam), lalu kalikan. Rp 42.000 untuk 3 kg → Rp 14.000 untuk 1 kg → Rp 70.000 untuk 5 kg. Cara ini hampir tidak pernah tersesat.

Kalau pasangan (x, y) yang senilai digambar di bidang koordinat, titik-titiknya selalu berada pada **garis lurus yang melewati titik asal O**. Mengapa harus lewat O? Karena 0 kg beras harganya Rp 0!

$$y = km + b$$

$$y = 12m + 0 \quad \frac{y}{m} = \frac{36}{3} = 12$$



✓ **senilai: $y : m$ selalu 12, dan garisnya melewati O**

berat m
3 kg

ongkir y
36 ribu Rp

y : m
12

Seret titik P di sepanjang garis. Selama biaya admin $b = 0$, ruas putus-putus OP menempel pada garis dan $y : m$ tidak pernah berubah. Sekarang naikan b . Garisnya masih lurus, tetapi apa yang terjadi pada $y : m$?



AWAS JEBAKAN

Garis lurus belum tentu senilai. Ongkos kirim Rp 12.000 per kg **ditambah** biaya admin Rp 5.000 memang naik bersama beratnya, tetapi ongkos 2 kg (Rp 29.000) tidak sama dengan dua kali ongkos 1 kg (Rp 34.000). Uji senilai yang sah: apakah $y : x$ selalu sama, atau apakah grafiknya melewati O?

Resep rendang untuk 8 porsi memerlukan 1 kg daging, 3 butir kelapa (untuk santan), dan 200 g cabai merah giling. Ibu ingin memasak 20 porsi. Berapa banyak setiap bahan?

- 1 Banyak porsi dan banyak bahan senilai. Faktor pengalinya $\frac{20}{8} = 2,5$.
- 2 Daging: $1 \times 2,5 = 2,5$ kg. Cabai: $200 \times 2,5 = 500$ g.
- 3 Kelapa: $3 \times 2,5 = 7,5$ butir. Karena kelapa dibeli utuh, praktisnya beli 8 butir.

2,5 kg daging, 8 butir kelapa (tepatnya 7,5), dan 500 g cabai. Matematika memberi 7,5; akal sehat membulatkannya ke atas!



ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Sederhanakan dulu pasangan pertama. Contoh: $6 : 9 = 2 : 3$, jadi $10 : ?$ juga harus $2 : 3$, yaitu $10 : 15$.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 240 SM, Eratosthenes, kepala perpustakaan besar di Aleksandria (Mesir), mendengar bahwa pada tengah hari tertentu di kota Syene, sinar matahari jatuh tegak lurus sampai menerangi dasar sumur yang dalam. Pada saat yang sama di Aleksandria, tiang tegak masih membuat bayangan dengan sudut sekitar $7,2^\circ$, yaitu $\frac{1}{50}$ lingkaran penuh. Dengan perbandingan senilai ia menalar: jarak Aleksandria–Syene (± 5.000 stadia) juga $\frac{1}{50}$ keliling Bumi, jadi keliling Bumi ± 250.000 stadia. Panjang satu stadion pada zaman itu tidak diketahui pasti, tetapi menurut banyak perkiraan hasilnya tidak jauh dari nilai modern, sekitar 40.000 km. Hanya dengan tongkat, bayangan, dan proporsi!

5.4 Perbandingan berbalik nilai: yang satu naik, yang lain turun



Tebak Dulu!

Tiga tukang cat dapat mengecat pagar sekolah dalam 12 jam. Jika ada 6 tukang yang sama cekatannya, berapa lama pekerjaan itu selesai?

24 jam, karena tukangnya dua kali lipat.

6 jam.

9 jam, karena ada 3 tukang tambahan.

12 jam, karena pagarnya tetap sama.

Jawabannya: 6 jam. Pekerjaannya $3 \times 12 = 36$ "tukang-jam". Dibagi kepada 6 tukang, masing-masing cukup bekerja $36 \div 6 = 6$ jam. Banyak tukang dikali 2, waktunya justru **dibagi 2**. Inilah perbandingan berbalik nilai.

Sebuah rumah sederhana membutuhkan pekerjaan sebanyak **120 orang-hari**: satu tukang butuh 120 hari, dua tukang 60 hari, empat tukang 30 hari. Makin banyak tukang, makin *sedikit* harinya, tetapi hasil kali keduanya selalu 120.

Banyak tukang x	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Lama kerja y (hari)	120	60	40	30	24	20	15	12	10
$x \times y$	120	120	120	120	120	120	120	120	120



DEFINISI

Dua besaran x dan y disebut **berbalik nilai** (berbanding terbalik) jika hasil kalinya selalu sama:

$$x \times y = k \quad \text{atau} \quad y = \frac{k}{x}$$

Jika x dikali 2, y dibagi 2; jika x dikali 3, y dibagi 3.

Bahasa sederhana • Bayangkan sekotak kue yang dibagi rata. Makin banyak temanmu yang ikut makan, makin sedikit kue yang kamu dapat. Banyak teman dikali 2, bagianmu dibagi 2. Kuenya sendiri tidak berubah: itulah "hasil kali yang tetap".

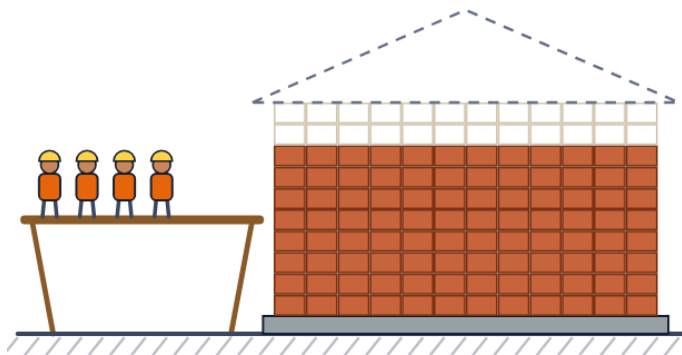
LAB MINI

Tukang dan tembok: catat, lalu lihat polanya

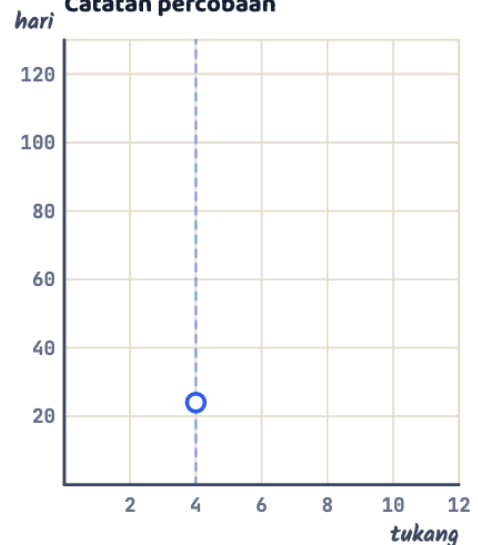
LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-5

Hari ke-24

Rumah butuh 120 orang-hari kerja.
1 bata = kerja 1 tukang selama 1 hari.



Catatan percobaan



Selesai dalam

—

tukang × hari

—

Titik tercatat

0

Pilih banyak tukang, lalu tekan ► **Jalankan**. Setiap kali rumah selesai, titik (tukang, hari) dicatat di grafik kanan. Coba 1, 2, 3, 4, 6, dan 12 tukang. Apakah titik-titiknya membentuk garis lurus atau lengkungan? Hitung juga tukang × hari untuk setiap titik!

$$t = \frac{k}{n}$$

Waktu selesai sama dengan beban kerja dibagi banyak pekerja. Pekerjaanya dikali dua, waktunya tinggal separuh.

k

Beban kerja orang-hari

n

Banyak tukang orang

t

Waktu selesai hari

WAKTU SELESAI

30

hari

✨ selesai dalam hari bulat

4 tukang × **30** hari = **120** orang-hari. Kalau tukangnya dua kali lipat (**8** orang), waktunya tinggal **15** hari. Kalau hanya ada 1 tukang, waktunya **120** hari.

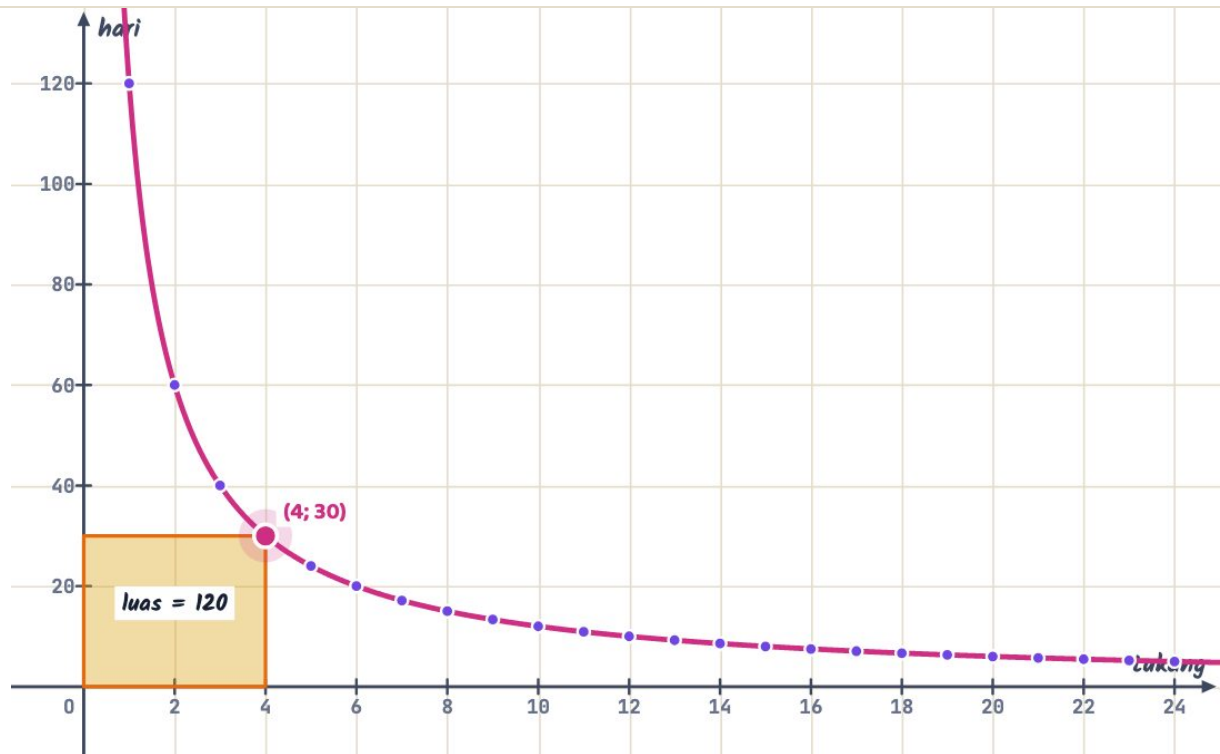
Cek satuan: orang-hari ÷ orang = hari. Satuan "orang" saling mencoret.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KERJA-TUKANG

Kurva lengkung yang muncul di Lab Mini tadi disebut **hiperbola**. Rahasiannya terlihat jelas di Grafik Hidup berikut: dari titik mana pun pada kurva, persegi panjang yang ditarik ke sumbu-sumbu **selalu sama luasnya**.

$$y = \frac{k}{x} \iff x \times y = k$$

$$x \times y = 4 \times 30 = 120$$



✦ banyak hari juga bulat

tukang x
4

hari y
30

$x \times y$
120

Seret titik di kurva. Persegi panjang kuning berubah dari tinggi-kurus menjadi pendek-lebar, tetapi luasnya tetap k . Titik ungu kecil menandai banyak tukang yang bulat: data sungguhan, sedangkan kurvanya menunjukkan polanya.

Senilai

Berbalik nilai

Yang selalu tetap

rasio $y : x = k$

hasil kali $x \times y = k$

Rumus

$y = kx$

$y = \frac{k}{x}$

Jika x dikali 2	y dikali 2	y dibagi 2
Grafik	garis lurus melewati O	hiperbola yang tidak pernah menyentuh sumbu
Hitung cepat	kali silang: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	kali lurus: $x_1y_1 = x_2y_2$
Contoh	berat & harga, porsi & bahan, jarak peta & jarak sebenarnya	tukang & hari, kecepatan & waktu tempuh, banyak ayam & lama pakan



TRIK KAK LINTANG

Sebelum menghitung, ajukan satu pertanyaan: "Kalau yang satu **dikali 2**, yang lain **dikali 2** atau **dibagi 2**?" Dikali 2 → senilai, pakai kali silang. Dibagi 2 → berbalik nilai, pakai kali lurus. Pertanyaan sepuluh detik ini menyelamatkan banyak nilai ulangan!

COBA SENDIRI

Tukang tambahan di tengah jalan

Sebuah rumah direncanakan selesai dikerjakan 4 tukang dalam 30 hari. Setelah 10 hari bekerja, datang 2 tukang lagi yang sama cekatannya. Pada hari ke berapa rumah itu selesai?

- 1 Seluruh pekerjaan: $4 \times 30 = 120$ orang-hari.
- 2 Selama 10 hari pertama: $4 \times 10 = 40$ orang-hari selesai. Sisanya $120 - 40 = 80$ orang-hari.
- 3 Sisa itu dikerjakan 6 tukang: $80 \div 6 = 13\frac{1}{3}$ hari.
- 4 Total $10 + 13\frac{1}{3} = 23\frac{1}{3}$ hari.

Rumah selesai pada hari ke-24 (pada hari itu mereka hanya perlu bekerja sepertiga hari), 6 hari lebih cepat daripada rencana semula.

MITOS

"Rasio 2 : 3 berarti bagian pertama adalah $\frac{2}{3}$ dari seluruhnya."

MITOS

"Kalau dua besaran sama-sama naik, pasti senilai."

FAKTA

Rasio 2 : 3 membagi keseluruhan menjadi 5 bagian. Bagian pertama $\frac{2}{5}$ dari total. Pecahan $\frac{2}{3}$ membandingkan bagian pertama dengan bagian kedua, bukan dengan keseluruhan.

FAKTA

Umur dan tinggi badan sama-sama naik, tetapi anak 10 tahun tidak dua kali lebih tinggi daripada anak 5 tahun. Senilai berarti rasionya **tetap**, bukan sekadar naik bersama.

MITOS

"Peta 1 : 1.000.000 lebih rinci daripada peta 1 : 50.000, karena angkanya lebih besar."

MITOS

"Makin banyak pekerja, pekerjaan apa pun makin cepat selesai."

FAKTA

Kebalikannya! Penyebut besar berarti dunia dikecilkan lebih banyak. Peta 1 : 50.000 masih menampilkan jalan desa, sedangkan peta 1 : 1.000.000 hanya muat kota-kota besar.

FAKTA

Hanya jika pekerjaannya bisa dibagi. Induk ayam mengerami telur sekitar 21 hari; tiga induk ayam tidak bisa menetas telur yang sama dalam 7 hari!

5.5 Laju: kecepatan, debit, dan harga satuan

Rasio biasanya membandingkan besaran yang *sejenis*. Bagaimana kalau jenisnya berbeda, misalnya kilometer dan jam, atau rupiah dan kilogram? Hasil baginya disebut **laju**, dan satuannya selalu memuat kata "**per**".



DEFINISI

Laju adalah rasio dua besaran yang berbeda satuan, yaitu "banyaknya sesuatu per satu satuan besaran lain".

- Kecepatan** = jarak ÷ waktu, misalnya km/jam atau m/detik: $v = \frac{s}{t}$.
- Debit** = volume ÷ waktu, misalnya liter/detik: $Q = \frac{V}{t}$.
- Harga satuan** = harga ÷ banyak barang, misalnya rupiah/kg.
- Kurs** = rupiah per satu satuan mata uang asing. Misalkan 1 dolar AS = Rp 16.000; maka 50 dolar = Rp 800.000.

Kereta cepat **Whoosh** Jakarta–Bandung dirancang melaju hingga ± 350 km/jam, hampir 100 m setiap detik! Panjang jalurnya ± 142 km. Seandainya kereta itu bisa melaju 350 km/jam dari awal sampai akhir tanpa berhenti, perjalanannya hanya ± 24 menit. Kenyataannya perjalanan lebih lama, karena kereta perlu mempercepat, memperlambat, dan berhenti di stasiun. Coba hitung sendiri dengan Rumus Hidup ini.

RUMUS HIDUP Waktu tempuh

$$t = \frac{s}{v} \times 60$$

Jarak dibagi kecepatan menghasilkan waktu dalam jam; kalikan dengan 60 untuk mendapat menit.

s Jarak km

v Kecepatan km/jam

t Waktu tempuh menit

WAKTU TEMPUH

24,3

menit

 secepat kereta cepat

142 km dengan kecepatan tetap **350** km/jam butuh **0,406** jam, yaitu **24,3** menit (sekitar **0** jam **24** menit). Kecepatan ini sama dengan **97,222** m/detik.

Cek satuan: km ÷ (km/jam) = jam. Satuan km saling mencoret dan tersisa jam; dikali 60 menjadi menit.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-WAKTU-TEMPUH](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-waktu-tempuh)



Tebak Dulu!

Dimas bersepeda ke rumah Nenek sejauh 12 km. Berangkatnya jalan menurun, jadi kecepatannya 12 km/jam. Pulangnya menanjak, hanya 6 km/jam. Berapa kecepatan rata-ratanya untuk perjalanan pulang-pergi?

9 km/jam, rata-rata dari 12 dan 6.

8 km/jam.

6 km/jam, karena yang lambat selalu menentukan.

18 km/jam, jumlah kedua kecepatan.

Jawabannya: 8 km/jam. Berangkat butuh $12 \div 12 = 1$ jam, pulang $12 \div 6 = 2$ jam. Total jarak 24 km dalam 3 jam, jadi rata-ratanya $24 \div 3 = 8$ km/jam. Hasilnya lebih dekat ke 6 daripada ke 12, karena Dimas menghabiskan **lebih banyak waktu** di tanjakan yang lambat.



AWAS JEBAKAN

Kecepatan rata-rata bukan rata-rata kecepatan. Selalu hitung dengan **total jarak $\div$ total waktu**. Merata-ratakan dua kecepatan hanya benar jika *waktu* tempuh keduanya sama, bukan jaraknya.

CONTOH

Mana yang lebih hemat?

Di warung, minyak goreng kemasan 1 liter dijual Rp 18.000, sedangkan kemasan 2 liter Rp 34.000. Mana yang lebih hemat?

- 1 Bandingkan harga satuannya (harga per liter). Kemasan 1 liter: Rp 18.000 per liter.
- 2 Kemasan 2 liter: $\text{Rp } 34.000 \div 2 = \text{Rp } 17.000$ per liter.

Kemasan 2 liter lebih hemat Rp 1.000 per liter. Harga satuan adalah cara paling adil untuk membandingkan kemasan yang berbeda ukuran.

Bak mandi berkapasitas 120 liter diisi dari keran berdebit 0,25 liter/detik. (a) Berapa menit bak kosong itu penuh? (b) Berapa menit jika bak sudah berisi 30 liter?

1 Dari $Q = \frac{V}{t}$ diperoleh $t = \frac{V}{Q}$.

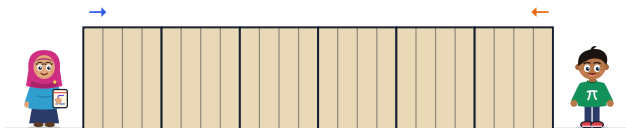
2 (a) $t = \frac{120}{0,25} = 480 \text{ detik} = 8 \text{ menit}$.

3 (b) Yang perlu diisi tinggal $120 - 30 = 90$ liter, jadi $t = \frac{90}{0,25} = 360 \text{ detik} = 6 \text{ menit}$.

(a) 8 menit; (b) 6 menit. Cek cepat: 0,25 liter/detik sama dengan 15 liter/menit, dan $120 \div 15 = 8$. Cocok!

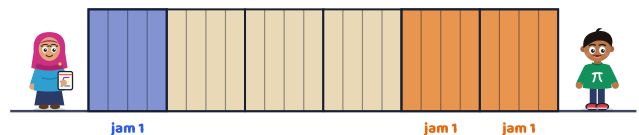
Laju juga menjadi kunci soal **kerja bersama**. Rahasiannya: jangan menjumlahkan waktunya, tetapi **jumlahkan lajunya**.

Ayu sendirian: 6 jam → 1 panel per jam
Dimas sendirian: 3 jam → 2 panel per jam



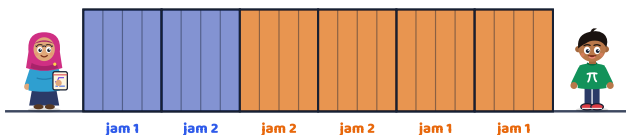
Langkah 1. Ayu sendirian mengecat pagar 6 panel ini dalam 6 jam, jadi lajunya 1 panel per jam. Dimas lebih cepat: 3 jam, jadi lajunya 2 panel per jam. Mereka mulai bersamaan dari dua ujung.

Setelah 1 jam: 1 + 2 = 3 panel



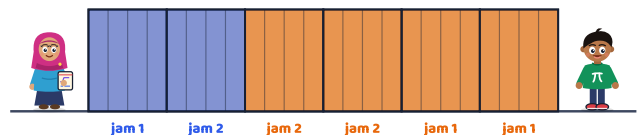
Langkah 2. Setelah 1 jam, Ayu menyelesaikan 1 panel (biru) dan Dimas 2 panel (oranye). Total 3 panel, separuh pagar.

Setelah 2 jam: 6 panel. Selesai!



Langkah 3. Pada jam kedua, 3 panel lagi selesai. Keenam panel tuntas dalam 2 jam!

Setelah 2 jam: 6 panel. Selesai!



$\text{laju bersama} = 1/6 + 1/3 = 1/2 \text{ pagar per jam} \Rightarrow 2 \text{ jam}$

Langkah 4. Dalam pecahan: laju bersama $= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ pagar per jam, jadi waktunya $1 \div \frac{1}{2} = 2$ jam. Cek kewajaran: berdua harus **lebih cepat** daripada yang tercepat (3 jam). Jawaban 4,5 jam (rata-rata 6 dan 3) pasti salah.



ATURAN KERJA BERSAMA

Jika A sendirian menyelesaikan suatu pekerjaan dalam a jam dan B dalam b jam, maka bersama-sama mereka butuh t jam dengan

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Yang dijumlahkan adalah **laju** (bagian pekerjaan per jam), bukan waktunya.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

RATA-RATA HARMONIK DAN DUA TEKA-TEKI LAJU

Jika jarak yang sama ditempuh dengan kecepatan v_1 , lalu dengan v_2 , kecepatan rata-ratanya

$$\bar{v} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2},$$

yang disebut **rata-rata harmonik**. Untuk 12 dan 6 hasilnya $\frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{18} = 8$, cocok dengan Tebak Dulu tadi.

Teka-teki 1. Sebuah mobil mendaki bukit sejauh 2 km dengan kecepatan 30 km/jam. Berapa kecepatan turunnya (juga 2 km) agar rata-rata seluruh perjalanan 60 km/jam? Jawabannya mengejutkan: **tidak mungkin!** Rata-rata 60 km/jam untuk 4 km berarti total waktunya 4 menit, padahal mendaki saja sudah menghabiskan 4 menit.

Teka-teki 2. Dua kereta berjarak 120 km saling mendekat dengan kecepatan 40 km/jam dan 60 km/jam. Seekor burung walet terbang bolak-balik di antara keduanya dengan kecepatan 90 km/jam sampai kedua kereta bertemu. Berapa total jarak terbang walet? Tidak perlu menjumlahkan deret tak hingga! Kereta bertemu setelah $120 \div (40 + 60) = 1,2$ jam, jadi walet terbang $90 \times 1,2 = 108$ km. Konon, matematikawan John von Neumann langsung menjawab teka-teki semacam ini dengan menjumlahkan deretnya di kepala.

5.6 Variasi langsung dan invers: keluarga $y = kx^n$

Senilai ($y = kx$) dan berbalik nilai ($y = \frac{k}{x}$) ternyata kakak-beradik dalam satu keluarga besar. Di kurikulum internasional seperti IGCSE dan IB, keluarga ini disebut *variation*.



DEFINISI

Untuk $n > 0$ dan konstanta k :

- y **berbanding lurus** dengan x^n (variasi langsung, *direct variation*) jika $y = kx^n$;
- y **berbanding terbalik** dengan x^n (variasi invers, *inverse variation*) jika $y = \frac{k}{x^n}$.

Jika x dikali 2, maka y dikali 2^n pada variasi langsung, dan dibagi 2^n pada variasi invers.

Hubungan	Rumus	x dikali 2 $\Rightarrow$ y dikali
Harga beras & berat	$y = kx$	2
Luas martabak & diameter	$L = kd^2 \left(k = \frac{\pi}{4}\right)$	4
Volume bola & jari-jari	$V = kr^3 \left(k = \frac{4\pi}{3}\right)$	8
Lama kerja & banyak tukang	$t = \frac{k}{n}$	$\frac{1}{2}$
Terang cahaya & jarak dari lampu	$I = \frac{k}{d^2}$	$\frac{1}{4}$
Waktu jatuh bebas & tinggi jatuh	$t = k\sqrt{h}$	$\sqrt{2} \approx 1,41$

Soal variasi gaya IGCSE selalu bisa diselesaikan dengan **tiga langkah**: (1) tulis bentuk umumnya, misalnya $y = kx^2$; (2) cari k dari pasangan data yang diketahui; (3) pakai rumus lengkapnya untuk nilai yang ditanyakan.

KERJAKAN BERSAMA

Terang lampu belajar

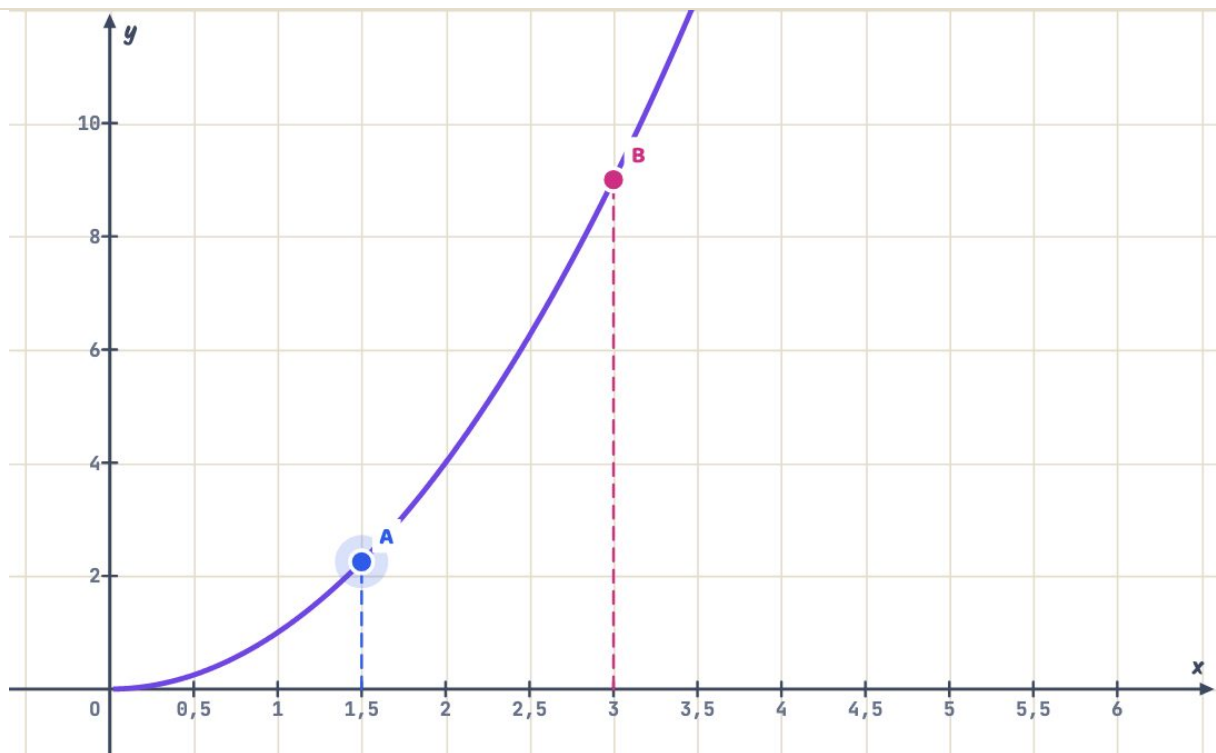
Terang cahaya I dari lampu belajar berbanding terbalik dengan kuadrat jarak d . Pada jarak 30 cm, terangnya 400 lux. Berapa terangnya pada jarak 60 cm?

- 1 Bentuk umum: $I = \frac{k}{d^2}$.
- 2 Cari k : $k = Id^2 = 400 \times 30^2 = 360.000$.
- 3 Untuk $d = 60$: $I = \frac{360.000}{60^2} = \frac{360.000}{3.600} = 100$ lux.

Terangnya 100 lux, tinggal seperempat. Jarak dikali 2, terang dibagi $2^2 = 4$. Itulah sebabnya buku sebaiknya tidak terlalu jauh dari lampu!

$$y = k x^n$$

$$y = 1 x^2 \quad x \times 2 \Rightarrow y \times 2^2 = y \times 4$$



variasi langsung: x naik, y ikut naik

y di A
2,25

y di B
9

$y(B) : y(A)$
4

Titik B selalu berada di x yang dua kali x titik A. Seret titik A ke kiri dan ke kanan: rasio $y(B) : y(A)$ tidak berubah! Lalu ganti pangkat n . Kapan rasionya 4? Kapan $\frac{1}{4}$?

Martabak manis berdiameter 20 cm dijual Rp 30.000, sedangkan yang berdiameter 30 cm Rp 60.000. Ketebalannya sama. Mana yang lebih hemat?

- 1 Luas lingkaran berbanding lurus dengan kuadrat diameter: $L = kd^2$.
- 2 Diameternya dikali $\frac{30}{20} = 1,5$, jadi luasnya dikali $1,5^2 = 2,25$.
- 3 Harganya hanya dikali $\text{Rp } 60.000 \div \text{Rp } 30.000 = 2$. Kamu mendapat 2,25 kali martabak dengan membayar 2 kali lipat.
- 4 Harga per cm^2 martabak besar hanya $\frac{2}{2,25} \approx 0,89$ kali harga per cm^2 martabak kecil, sekitar 11% lebih murah.

Martabak 30 cm lebih hemat. Intuisi "1,5 kali lebih lebar, jadi 1,5 kali lebih banyak" keliru: luas tumbuh menurut kuadrat!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA TIDAK ADA SEMUT SEBESAR GAJAH?

Bayangkan seekor semut diperbesar 100 kali ke segala arah. Kekuatan otot sebanding dengan **luas penampang** otot, jadi naik $100^2 = 10.000$ kali. Berat badan sebanding dengan **volume**, jadi naik $100^3 = 1.000.000$ kali. Rasio kekuatan terhadap berat turun menjadi $\frac{1}{100}$ semula! Semut raksasa itu akan kesulitan menopang tubuhnya sendiri. Galileo Galilei menjelaskan "hukum kuadrat-kubus" ini dalam bukunya tahun 1638. Itulah sebabnya hewan besar seperti gajah butuh kaki yang sangat tebal.



Resep rendang

Memasak untuk arisan 40 orang dari resep 8 porsi? Semua bahan dikali 5: itulah perbandingan senilai.



Peta di ponselmu

Saat kamu mencubit layar peta digital, skalanya berubah, dan garis skala di pojok layar ikut menyesuaikan.



Kurs rupiah

Penukaran uang memakai kurs, yaitu laju rupiah per satu mata uang asing. Makin banyak dolar, makin banyak rupiahnya.



Kereta cepat

Pada ± 350 km/jam, kereta menempuh hampir 100 m setiap detik, kira-kira sepanjang lapangan sepak bola.



Tagihan PDAM

Pemakaian air dihitung per meter kubik dengan tarif bertingkat: makin boros, makin mahal tarif per m^3 . Jadi tagihan tidak selalu senilai dengan pemakaian!



Maket & denah

Arsitek membuat denah 1 : 100 dan maket 1 : 200 agar calon pemilik bisa membayangkan bangunannya sebelum dibangun.

Cek Cepat

Rasio 24 : 36 dalam bentuk paling sederhana adalah...

4 : 6

12 : 18

2 : 3

3 : 2

Pada peta berskala 1 : 200.000, jarak dua kota 7 cm. Jarak sebenarnya adalah...

14 km

1,4 km

140 km

28 km

Lima keran yang sama mengisi kolam dalam 12 jam. Jika hanya 3 keran yang dipakai, waktunya...

7,2 jam

10 jam

15 jam

20 jam

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: denah harta karun

Bahan: kertas berpetak (atau kertas biasa dan penggaris), pensil, meteran atau langkah kakimu, dan sebuah benda kecil sebagai "harta".

1. Ukur panjang langkahmu: berjalanlah 10 langkah biasa, ukur jaraknya dengan meteran, lalu bagi 10. (Contoh: $5 \text{ m} \div 10 = 50 \text{ cm}$ per langkah.)
2. Ukur panjang dan lebar sebuah ruangan di rumahmu dengan langkah, lalu ubah ke meter.
3. Gambar denah ruangan itu dengan skala 1 : 50 (2 cm di kertas = 1 m sebenarnya), lengkap dengan meja, lemari, atau kasur.
4. Sembunyikan "harta" di ruangan itu, lalu tandai lokasinya dengan $\times$ di denah.
5. Minta anggota keluarga menemukan harta itu hanya dengan membaca denah dan memakai penggaris.

Pertanyaan: Jika ruanganmu berukuran $4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$, berapa ukuran gambarnya pada skala 1 : 50? Muatlah denah itu di kertas A4 ($21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$)? Skala berapa yang akan kamu pilih untuk menggambar denah seluruh rumah di kertas yang sama?

RINGKASAN KILAT Bab 5 dalam 3 menit

☒ Kamu sekarang bisa...

- menyatakan perbandingan dua besaran sebagai **rasio** paling sederhana dan **membagi** suatu jumlah menurut rasio
- memakai **skala** untuk mengubah jarak di peta atau denah menjadi jarak sebenarnya, dan sebaliknya
- membedakan **perbandingan senilai** dan **berbalik nilai**, lalu menyelesaikan soal ceritanya dengan tabel, perkalian silang, atau grafik

- menghitung **laju** (kecepatan, debit, harga satuan), termasuk kecepatan rata-rata dan kerja bersama
- mengenali **variasi langsung dan invers** $y = kx^n$ beserta grafiknya

Istilah kunci

rasio disederhanakan rasio senilai membagi menurut rasio skala Skala
 perbandingan senilai senilai konstanta perbandingan proporsi berbalik nilai
 hiperbola laju Laju Kecepatan Debit

Rumus penting

$$A = \frac{a}{a+b} \times T$$

Membagi menurut rasio. Jumlahkan suku-suku rasio untuk mendapat banyak bagian, bagi totalnya, lalu kalikan dengan suku milikmu.

$$J = \frac{p \times n}{100.000}$$

Dari peta ke jarak sebenarnya. Kalikan jarak di peta dengan penyebut skala untuk mendapat jarak sebenarnya dalam cm, lalu bagi 100.000 untuk mengubahnya menjadi km.

$$t = \frac{k}{n}$$

Waktu kerja berbalik nilai. Waktu selesai sama dengan beban kerja dibagi banyak pekerja. Pekerjaanya dikali dua, waktunya tinggal separuh.

$$t = \frac{s}{v} \times 60$$

Waktu tempuh. Jarak dibagi kecepatan menghasilkan waktu dalam jam; kalikan dengan 60 untuk mendapat menit.

Jangan sampai terjebak

- Sebelum menulis rasio, samakan dulu satuannya.
- Garis lurus belum tentu senilai.
- Kecepatan rata-rata bukan rata-rata kecepatan.

 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=5

Teka-teki untuk Bab 6

Selemba kertas HVS tebalnya sekitar 0,1 mm. Setiap kali dilipat dua, tebalnya menjadi dua kali lipat: rasio tebal baru terhadap tebal lama selalu 2 : 1. Seandainya kertas itu bisa dilipat 42 kali, apakah tumpukannya bisa mencapai Bulan, yang jaraknya sekitar 384.000 km dari Bumi?

▼ Intip petunjuk

Hitung beberapa lipatan pertama: 0,2 mm, 0,4 mm, 0,8 mm, dan seterusnya. Setelah 10 lipatan, tebalnya $0,1 \times 2^{10} = 102,4$ mm, sekitar 10 cm. Setelah 20 lipatan, sudah lebih dari 100 m! Mengalikan 2 berulang-ulang seperti ini disebut **pemangkatan**, dan bilangan raksasa yang muncul paling enak ditulis dengan **notasi ilmiah**. Semuanya menunggumu di Bab 6.

06 Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah: Melipat Kertas sampai ke Bulan

Bisakah selembar kertas tipis menjulang sampai ke Bulan hanya dengan 42 kali lipatan? Di bab ini kamu akan melihat betapa liarnya perkalian berulang, menjinakkan akar, dan menulis bilangan sebesar alam semesta atau sekecil atom dengan beberapa angka saja.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menulis perkalian berulang sebagai **bilangan berpangkat** dan merasakan betapa cepat pangkat tumbuh;
- memakai **sifat-sifat pangkat** dan menjelaskan mengapa sifat itu benar dengan menghitung banyak faktor;
- memaknai **pangkat nol, pangkat negatif, dan pangkat pecahan**;
- menyederhanakan **bentuk akar** dan **merasionalkan penyebut**;
- menulis bilangan raksasa dan bilangan mungil dalam **notasi ilmiah**, menghitung dengannya, dan memakai **angka penting**.

KERTAS MENUJU BULAN

KOMIK • 4 PANEL

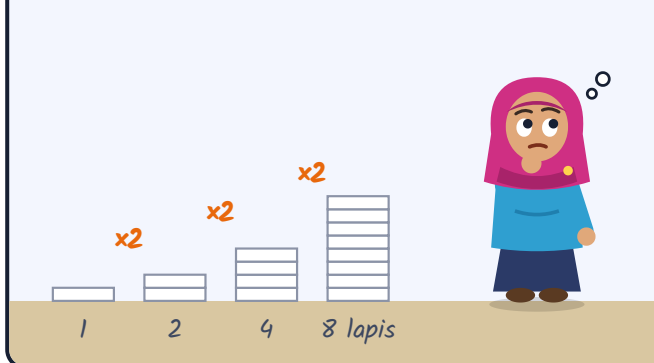
Sore hari di teras rumah Dimas

DIMAS

Kata video di HP-ku, kertas yang dilipat 42 kali tebalnya sampai ke Bulan. Hoaks, kan? Kertas kan tipis banget!

AYU

Tiap lipatan, tebalnya jadi dua kali: $0,1 \rightarrow 0,2 \rightarrow 0,4 \rightarrow 0,8$ mm... Lho, kok masih setipis kuku?



KAK LINTANG

Sabar, pangkat itu licik! Lipatan ke-10 baru ± 10 cm. Ke-20 sudah ± 105 m. Ke-30? ± 107 km, lewat batas angkasa!



$$\begin{aligned} \text{tebal} &= 0,1 \text{ mm} \times 2^n \\ n = 10 &\rightarrow \pm 10 \text{ cm} \\ n = 20 &\rightarrow \pm 105 \text{ m} \\ n = 30 &\rightarrow \pm 107 \text{ km} \end{aligned}$$

Tiba-tiba dari balik pot bunga...**ANCIL**

Lipatan ke-42: $0,1 \text{ mm} \times 2^{42} \approx 440.000$ km. Bulan cuma ± 384.000 km. Lewat!

DIMAS

Cuma 42 kali?! Kok bisa?



WUSS!

**Tebak Dulu!**

Kamu boleh memilih uang saku selama 30 hari. Pilihan A: Rp1.000.000 setiap hari. Pilihan B: Rp1 pada hari pertama, Rp2 pada hari kedua, Rp4 pada hari ketiga, dan seterusnya (selalu dua kali lipat hari sebelumnya). Mana yang totalnya lebih besar?

Pilihan A, jauh lebih besar. Rp1 kan kecil sekali!

Kira-kira sama saja.

Pilihan B, jauh lebih besar.

Pilihan B, tetapi hanya menang sedikit.

Jawabannya: Pilihan B, dan menangnya telak! Pilihan A memberi Rp30.000.000. Pilihan B lama sekali tertinggal: setelah dua minggu, totalnya baru Rp16.383. Namun pada hari ke-25 B menyalip, dan pada hari ke-30 saja kamu menerima $2^{29} = \text{Rp}536.870.912$. Totalnya $2^{30} - 1 = \text{Rp}1.073.741.823$, lebih dari **satu miliar rupiah!** Perkalian berulang selalu menyalip pada akhirnya. Itulah kekuatan **pangkat**.

6.1 Pangkat: perkalian berulang yang meledak

Setiap kali kertas dilipat, banyak lapisannya menjadi dua kali lipat: 1, 2, 4, 8, 16, ... Setelah 5 lipatan ada $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ lapis. Menulis " $2 \times 2 \times 2 \times \dots$ " sebanyak 42 kali tentu melelahkan. Maka matematikawan membuat singkatan yang hemat tinta: **bilangan berpangkat**.



DEFINISI

Untuk bilangan a dan bilangan asli n ,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Bilangan a disebut **basis** (bilangan pokok), sedangkan n disebut **pangkat** atau **eksponen**. Bentuk a^n dibaca "a pangkat n". Khusus a^2 dibaca "a kuadrat" dan a^3 dibaca "a pangkat tiga".

$2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ faktor yang sama}} = 32$

basis (bilangan pokok) *pangkat (eksponen)* *5 faktor yang sama*

Pangkat memberi tahu **berapa banyak faktor** yang dikalikan, bukan bilangan pengali.

Bahasa sederhana • Gampangnya: angka kecil di kanan atas memberi tahu berapa kali angka besar dikalikan dengan **dirinya sendiri**. Jadi $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, bukan 3×4 .

Sekarang kita lihat mengapa Kak Lintang menyebut pangkat "licik". Kertas HVS biasa tebalnya sekitar 0,1 mm. Perhatikan apa yang terjadi bila lipatan terus ditambah.

Lipatan n	Banyak lapis 2^n	Tebal tumpukan	Setinggi apa?
0	1	0,1 mm	selembar kertas
5	32	3,2 mm	sebuah koin
10	1.024	±10 cm	sebuah gelas
20	1.048.576	±105 m	hampir setinggi Monas (132 m)
30	1.073.741.824	±107 km	melewati batas angkasa (100 km)
42	±4,4 triliun	±440.000 km	melewati Bulan (±384.400 km)

Sepuluh lipatan pertama hanya menghasilkan setinggi gelas. Namun setiap lipatan berikutnya menggandakan *semua* yang sudah ada, sehingga pertumbuhannya makin lama makin buas. Pertumbuhan seperti ini disebut **pertumbuhan eksponensial**.

$$t = t_0 \cdot 2^n$$

Setiap lipatan menggandakan tebal. Jadi tebal awal dikalikan 2 sebanyak n kali.

 t_0

Tebal awal mm

 n

Banyak lipatan kali

 t

Tebal tumpukan m

TEBAL TUMPUKAN

104,858

m



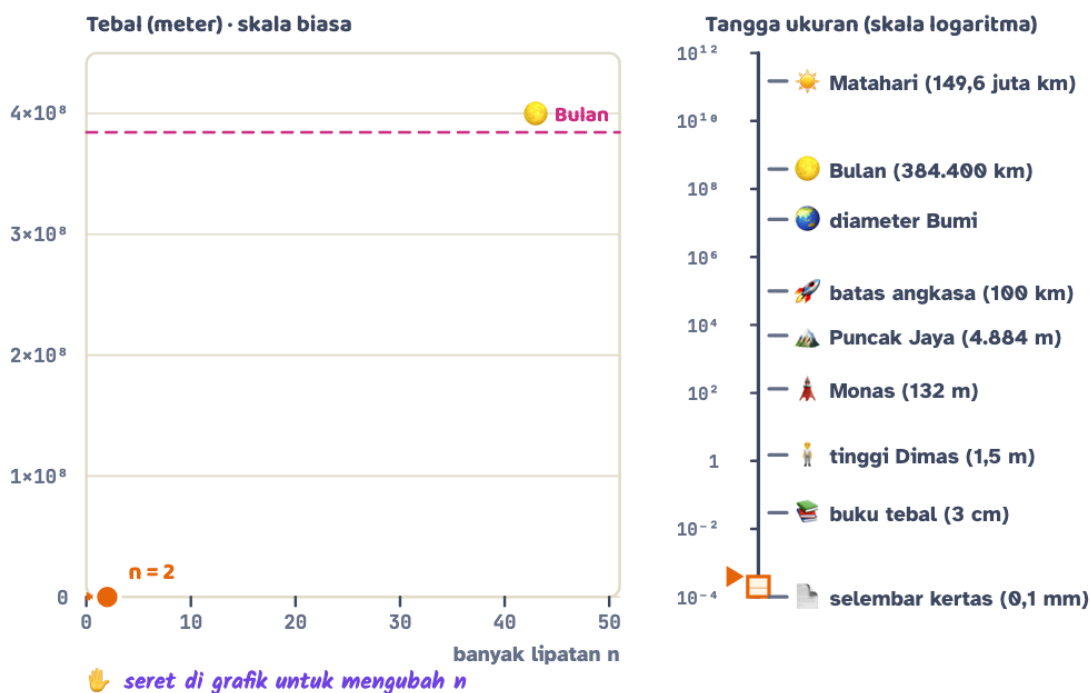
lebih tinggi daripada Dimas

Ada $1,049 \times 10^6$ lapis kertas. Tebalnya $0,1 \text{ mm} \times 1,049 \times 10^6 = 104.857,6 \text{ mm}$, atau **104,858 m**.

Satuan Nusantara: $\approx 100\%$ dari panjang lapangan sepak bola $\cdot \approx 79\%$ dari tinggi Monas $\cdot \approx 2\%$ dari tinggi Puncak Jaya

Cek satuan: t_0 ditulis dalam mm, lalu hasilnya dibagi 1.000 agar menjadi meter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEBAL-LIPATAN-KERTAS](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-TEBAL-LIPATAN-KERTAS)

Banyak lapisan 2^n

4

Tebal tumpukan

0,4 mm

Terakhir dilewati

belum ada

Tekan ► **Jalankan** dan lihat kertas dilipat satu per satu. Pada skala biasa, tebalnya seperti diam di dasar lalu tiba-tiba meroket. Sekarang nyalakan **skala logaritma**: kurvanya berubah menjadi garis lurus! Pada skala ini setiap garis bantu berarti 100 kali lebih besar, dan setiap lipatan menaikkan titik dengan jarak yang sama. Di lipatan ke berapa kertasmu melewati Monas? Bulan? Matahari?



TRIK KAK LINTANG

Hafalkan satu fakta ajaib: $2^{10} = 1.024 \approx 1.000 = 10^3$. Dengan itu kamu bisa menaksir pangkat dua yang besar tanpa kalkulator. Contoh: $2^{42} = 2^2 \times (2^{10})^4 \approx 4 \times (10^3)^4 = 4 \times 10^{12}$. Kalikan dengan 0,1 mm = 10^{-4} m, hasilnya $\approx 4 \times 10^8$ m = 400.000 km. Bulan pun terlewati!

CONTOH**Bakteri di nasi yang lupa disimpan**

Dalam suasana hangat, satu bakteri dapat membelah menjadi dua setiap 20 menit. Sepiring nasi tertinggal di meja dengan 1 bakteri di atasnya. Berapa banyak bakteri setelah 4 jam?

- 1 4 jam = 240 menit. Banyak pembelahan: $240 : 20 = 12$ kali.
- 2 Setiap pembelahan menggandakan jumlah bakteri, jadi banyaknya 2^{12} .
- 3 $2^{12} = 2^{10} \times 2^2 = 1.024 \times 4 = 4.096$.

Ada 4.096 bakteri setelah 4 jam. Setelah 8 jam (24 kali pembelahan): $2^{24} = 16.777.216$, lebih dari 16 juta! Itulah sebabnya makanan matang sebaiknya tidak dibiarkan berjam-jam di suhu ruang.

**BISAKAH KERTAS SUNGGUHAN DILIPAT 42 KALI?**

Tidak! Setiap lipatan juga membagi dua **luas** kertas, dan kertas yang makin tebal makin sulit ditekuk. Kertas HVS biasanya menyerah setelah 7 atau 8 lipatan. Pada 2002, seorang pelajar SMA di Amerika Serikat, Britney Gallivan, memecahkan rekor dengan melipat kertas yang sangat panjang ($\pm 1,2$ km) sebanyak 12 kali. Jadi "kertas sampai ke Bulan" adalah percobaan pikiran: hitungannya benar, tetapi tak mungkin dilakukan.

6.2**Sifat-sifat pangkat: cukup hitung faktornya**

Karena pangkat hanyalah "banyak faktor yang sama", semua sifatnya bisa ditemukan dengan **menghitung faktor**. Tidak ada yang perlu dihafal buta. Tonton animasi di bawah langkah demi langkah.



Pangkat = banyak faktor
 Biru: tiga faktor 2.
 Oranye: dua faktor 2.
 Kalau dikalikan?

Langkah 1. 2^3 adalah tiga faktor 2 (biru), dan 2^2 adalah dua faktor 2 (oranye).

Kali = gabung barisan

Faktornya menjadi
 $3 + 2 = 5$ buah.

$$2^3 \times 2^2 = 2^5$$



$$2^5 = 32$$

$3 + 2 = 5$ faktor

Langkah 2. Mengalikan berarti menggabungkan semua faktor dalam satu barisan: ada $3 + 2 = 5$ faktor, jadi $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$.



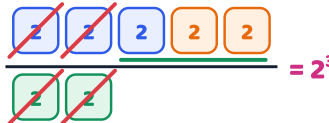
Bagi = tulis pecahan
 Sekarang $2^5 : 2^2$.
 5 faktor di atas,
 2 faktor di bawah.

Langkah 3. Untuk membagi 2^5 dengan 2^2 , tulis sebagai pecahan: lima faktor 2 di pembilang, dua faktor 2 di penyebut.

Coret pasangan $2/2 = 1$

Sisa $5 - 2 = 3$ faktor.

$$2^5 : 2^2 = 2^3$$



Langkah 4. Setiap pasangan $\frac{2}{2} = 1$ boleh dicoret. Tersisa $5 - 2 = 3$ faktor, jadi $2^5 : 2^2 = 2^3$.

$$2^3 \left[\begin{array}{c} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \\ \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \text{ kelompok} \\ (2^3)^2 = 2^6 \\ 2 \times 3 = 6 \text{ faktor} \end{array}$$

Pangkat dari pangkat
 $(2^3)^2$ = dua kelompok 2^3 .
 Faktornya $2 \times 3 = 6$.

Langkah 5. $(2^3)^2$ berarti dua kelompok 2^3 . Banyak faktornya $2 \times 3 = 6$, jadi $(2^3)^2 = 2^6$.

$$2^3 \left[\begin{array}{c} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \\ \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \text{ kelompok} \\ (2^3)^2 = 2^6 \\ 2 \times 3 = 6 \text{ faktor} \end{array}$$

Tiga sifat utama

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Langkah 6. Ganti 2 dengan basis apa pun dan banyak faktor dengan m, n : kamu mendapat tiga sifat utama pangkat.



SIFAT-SIFAT PANGKAT

Untuk bilangan $a, b \neq 0$ dan bilangan asli m, n :

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (kali: pangkat dijumlahkan)
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ (bagi: pangkat dikurangkan)
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (pangkat dari pangkat: dikalikan)
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (pangkat menyebar ke setiap faktor)
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

▼ Mengapa $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$?

Tulis panjang, lalu atur ulang urutan faktornya (perkalian boleh ditukar urutannya):

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ kali}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_n = a^n b^n.$$

Contoh: $(2 \times 5)^3 = 10^3 = 1.000$ dan $2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1.000$. Cocok!



RUMUS HIDUP

Mengalikan pangkat sebasis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Basisnya sama? Pangkatnya tinggal dijumlahkan, karena semua faktornya digabung dalam satu barisan.



$2^3 \times 2^4$: ada **3** faktor **2**, lalu **4** faktor **2** lagi, total **7** faktor. Hasilnya $8 \times 16 = 128$.

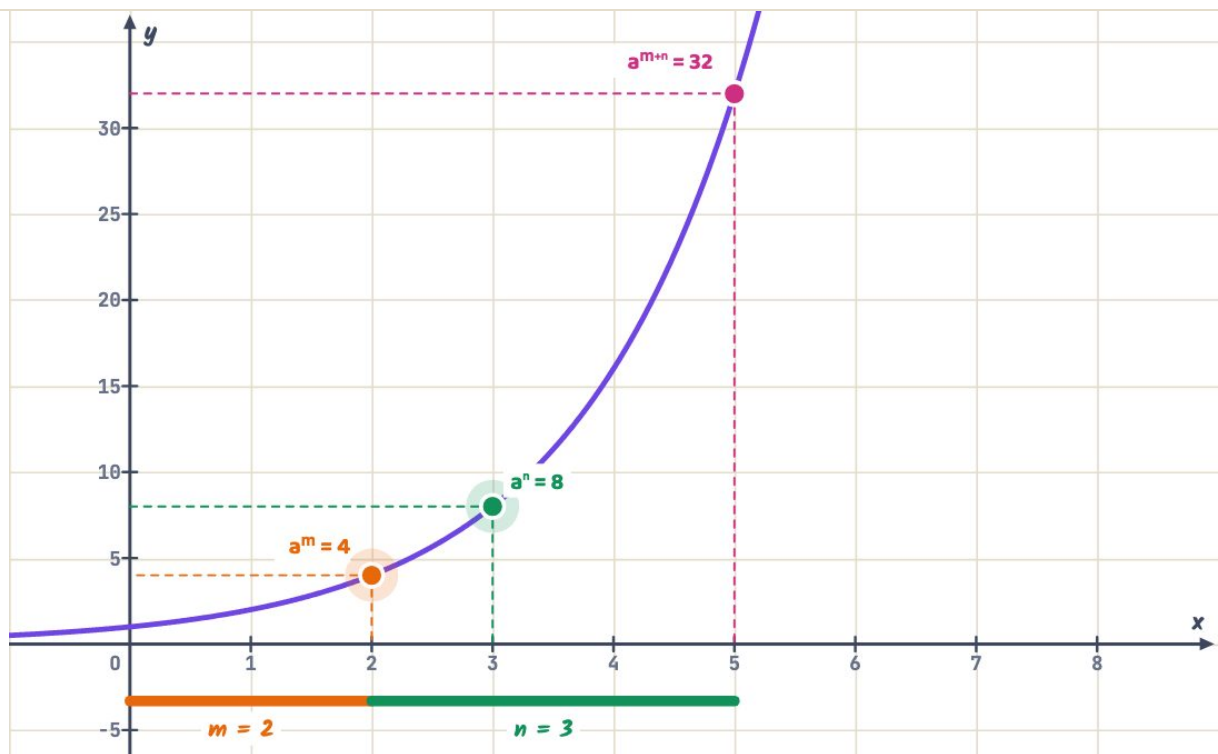
Cek satuan: tidak ada satuan; ini perkalian bilangan murni.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KALI-PANGKAT-SEBASIS

Sifat pertama juga bisa dilihat pada grafik. Pada kurva $y = a^x$, menjumlahkan dua langkah di sumbu mendatar sama dengan **mengalikan** dua tinggi di sumbu tegak.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32 = 2^5$$

 a^m

4

 a^n

8

 $a^m \times a^n$

32

 a^{m+n}

32

Seret titik oranye (m) dan hijau (n) di sepanjang kurva. Titik magenta selalu berada di $x = m + n$, dan tingginya selalu sama dengan **hasil kali** tinggi titik oranye dan hijau. Coba juga pangkat pecahan seperti 1,5!

**AWAS JEBAKAN**

Pangkat hanya boleh dijumlahkan jika basisnya sama **dan** keduanya dikalikan. $2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$, bukan $2^5 = 32$. Basis yang berbeda juga tidak bisa digabung: $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$, bukan 6^5 . Dan ingat, $(2^3)^2 = 2^6$, bukan 2^9 .



TRIK KAK LINTANG

Bertemu basis yang berbeda-beda? **Samakan dulu basisnya!** Kenali pangkat-pangkat kecil: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $25 = 5^2$, $125 = 5^3$. Setelah basisnya sama, sifat pangkat bekerja seperti sulap.

KERJAKAN BERSAMA

Hitung tanpa kalkulator

Hitung $\frac{4^5 \times 8^2}{16^3}$.

- 1 Samakan basis menjadi 2: $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$, $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$.
- 2 Pembilang: $2^{10} \times 2^6 = 2^{16}$.
- 3 Bagi: $2^{16} : 2^{12} = 2^4 = 16$.

Hasilnya 16. Cek dengan kalkulator: $1.024 \times 64 : 4.096 = 16$. Cocok!

COBA SENDIRI

Sederhanakan bentuk aljabar

Sederhanakan $\frac{(2x^3)^2 \cdot x^4}{4x^5}$ untuk $x \neq 0$.

- 1 Pangkat menyebar ke setiap faktor: $(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2 = 4x^6$.
- 2 Pembilang: $4x^6 \cdot x^4 = 4x^{10}$.
- 3 Bagi: $\frac{4x^{10}}{4x^5} = \frac{4}{4} \cdot x^{10-5} = x^5$.

Bentuk sederhananya x^5 . Cek dengan $x = 2$: $\frac{(16)^2 \cdot 16}{4 \cdot 32} = \frac{4.096}{128} = 32 = 2^5$. ✓

**ADU CEPAT****Sifat pangkat kilat**ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

Isi kotak dengan pangkatnya saja. Pangkat dari pangkat → kalikan, kali → jumlahkan, bagi → kurangkan.

Contoh: $(2^3)^2 \times 2^4 : 2^5 = 2$ pangkat $6 + 4 - 5 = 5$.**LANJUT • IB & OLIMPIADE****DUEL RAKSASA DAN ANGKA SATUAN**

Mana lebih besar, 2^{300} atau 3^{200} ? Kalkulator biasa menyerah, tetapi sifat pangkat tidak. Tulis keduanya dengan pangkat 100: $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ dan $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$. Jelas $9^{100} > 8^{100}$, jadi 3^{200} menang.

Trik kedua: **angka satuan**. Angka satuan pangkat 3 berulang dengan pola 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... (periode 4). Karena $100 = 4 \times 25$, angka satuan 3^{100} sama dengan angka satuan $3^4 = 81$, yaitu 1. Pola berulang seperti ini adalah senjata favorit di soal olimpiade.

6.3 Pangkat nol, pangkat negatif, dan pangkat pecahan

Definisi a^n tadi hanya masuk akal untuk $n = 1, 2, 3, \dots$. Lalu apa arti "2 dikalikan dengan dirinya sendiri nol kali", atau "minus tiga kali"? Matematikawan memilih arti yang membuat **pola dan sifat pangkat tetap berlaku**. Mari kita tebak dulu.

**Tebak Dulu!** $2^3 = 8, 2^2 = 4, 2^1 = 2$. Menurutmu, berapa 2^0 ?

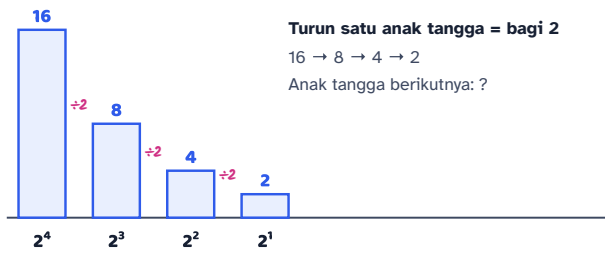
0, karena dikalikan nol kali berarti tidak ada apa-apa.

1

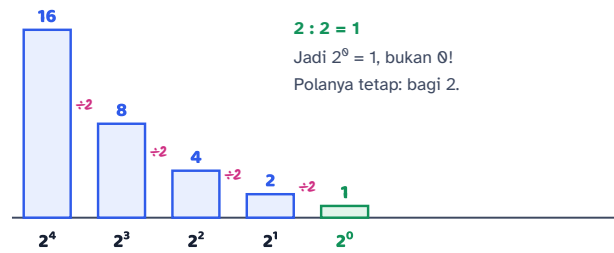
2

Tidak punya arti.

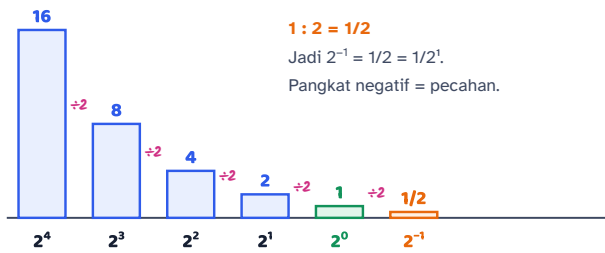
Jawabannya: 1. Perhatikan polanya: setiap pangkat turun satu, nilainya dibagi 2 ($8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Turun sekali lagi dari $2^1 = 2 : 2 : 2 = 1$. Jadi $2^0 = 1$. Lihat tangganya di bawah.



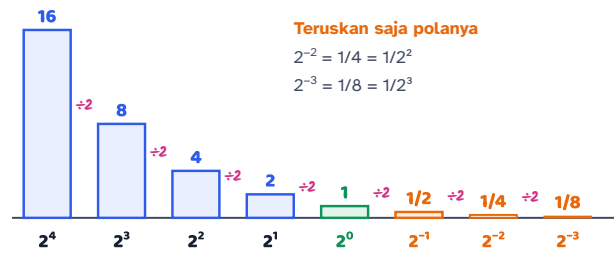
Langkah 1. Pada tangga pangkat dua, setiap turun satu anak tangga, nilainya dibagi 2: 16, 8, 4, 2.



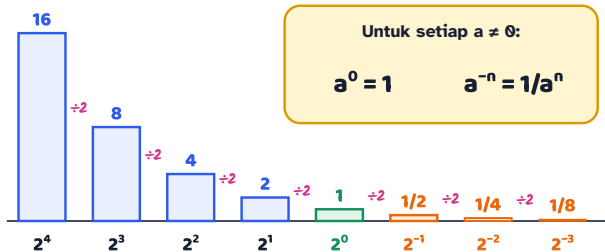
Langkah 2. Turun sekali lagi dari $2^1 = 2 : 2 : 2 = 1$. Jadi $2^0 = 1$.



Langkah 3. Turun lagi: $1 : 2 = \frac{1}{2}$. Jadi $2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$.



Langkah 4. Polanya berlanjut: $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ dan $2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$.



Langkah 5. Kesimpulan untuk basis $a \neq 0$ mana pun: $a^0 = 1$ dan $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.



DEFINISI PANGKAT NOL, NEGATIF, DAN PECAHAN

Untuk $a \neq 0$ dan bilangan asli n :

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Untuk $a > 0$ dan bilangan bulat m , bilangan asli n :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dengan definisi ini, kelima sifat pangkat di subbab 6.2 tetap berlaku untuk **semua** pangkat bulat dan pecahan.

▼ Mengapa $a^0 = 1$ dan $a^{1/2} = \sqrt{a}$? (bukti dengan sifat pangkat)

Pangkat nol. Menurut sifat pembagian, $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. Padahal bilangan apa pun (selain nol) dibagi dirinya sendiri sama dengan 1. Jadi $a^0 = 1$.

Pangkat negatif. $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$. Dua bilangan yang hasil kalinya 1 saling berkebalikan, jadi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

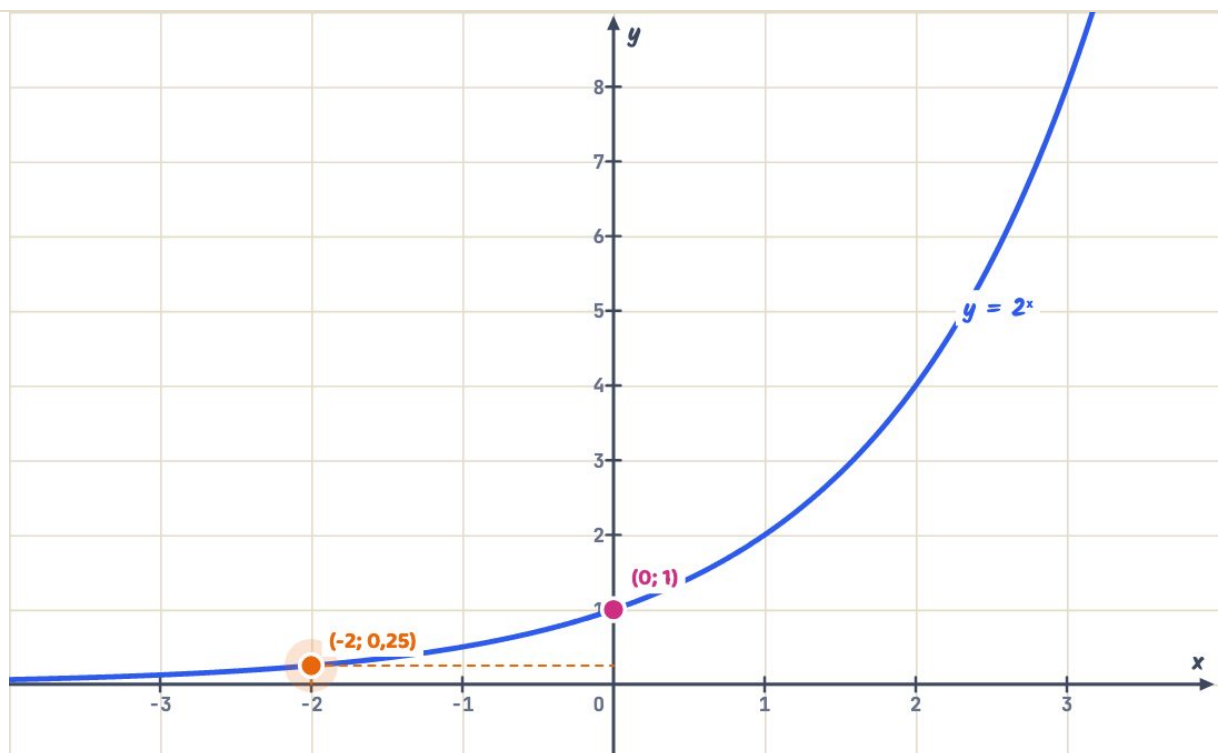
Pangkat setengah. $a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a$. Jadi $a^{1/2}$ adalah bilangan (positif) yang kuadratnya a , yaitu $\sqrt{a}$. Dengan cara yang sama, $(a^{1/3})^3 = a$, sehingga $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$.



Bahasa sederhana • Ingat tangganya: setiap turun satu pangkat, nilainya dibagi dua. Jadi pangkat nol menghasilkan 1, pangkat -1 menghasilkan setengah, dan pangkat -2 menghasilkan seperempat. Pangkat negatif membuat bilangan menjadi **pecahan kecil**, bukan bilangan negatif.

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(2)^{-2} = \frac{1}{(2)^2} = 0,25$$



pangkat negatif $\Rightarrow$ kebalikan, hasilnya tetap positif

 a^x

0,25

 $a^{-x} = 1/a^x$

4

 $a^x \cdot a^{-x}$

1

Seret titik oranye ke kiri melewati sumbu y . Nilainya tidak pernah negatif, hanya makin mendekati nol. Lalu nyalakan cermin (geser ke 1): kurva $y = (1/a)^x$ adalah bayangan cermin $y = a^x$, karena $a^{-x} = (1/a)^x$. Taruh titik di $x = 0,5$ dan bandingkan nilainya dengan $\sqrt{a}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Penyebut pecahan menjadi akarnya, pembilang menjadi pangkatnya. Ambil akarnya dulu supaya angkanya kecil.



HASIL

4

✨ hasilnya bilangan bulat!

Akar pangkat 3 dari 8 adalah 2. Dipangkatkan 2, hasilnya 4. Cara lain: $8^2 = 64$, lalu diakarkan pangkat 3, hasilnya sama.

Cek satuan: tanpa satuan. Coba $a = 8$, $m = 2$, $n = 3$: akar pangkat tiga dari 8 adalah 2, dan $2^2 = 4$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PANGKAT-PECAHAN-AKAR

CONTOH Pangkat pecahan dan negatif

Hitung $8^{2/3}$ dan $16^{-3/4}$.

1 $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$. (Akar pangkat tiga dari 8 adalah 2, karena $2^3 = 8$.)

2 $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.

3 Pangkat negatif berarti kebalikan: $16^{-3/4} = \frac{1}{16^{3/4}} = \frac{1}{8}$.

$8^{2/3} = 4$ dan $16^{-3/4} = \frac{1}{8} = 0,125$. Ambil akarnya dulu, baru dipangkatkan: angkanya tetap kecil dan ramah.



AWAS JEBAKAN

Tanda kurung mengubah segalanya: $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$, tetapi $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$, karena pangkat dikerjakan sebelum tanda minus. Selain itu, 0^{-1} tidak terdefinisi (tidak boleh membagi dengan nol), dan di sekolah 0^0 biasanya dibiarkan tidak didefinisikan.

6.4 Akar dan bentuk akar

Akar adalah kebalikan dari kuadrat. Jika sebuah ubin persegi luasnya 49 cm^2 , sisinya 7 cm, karena $7^2 = 49$. Kita menuliskannya $\sqrt{49} = 7$.



DEFINISI

Untuk $a \geq 0$, **akar kuadrat** $\sqrt{a}$ adalah bilangan **tak negatif** yang kuadratnya sama dengan a . Akar pangkat tiga $\sqrt[3]{a}$ adalah bilangan yang pangkat tiganya sama dengan a (di sini a boleh negatif, misalnya $\sqrt[3]{-8} = -2$).

Akar yang hasilnya bukan bilangan rasional, seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, dan $\sqrt{5}$, disebut **bentuk akar**. Bilangan $\sqrt{9} = 3$ bukan bentuk akar.

Bahasa sederhana • Cara membaca $\sqrt{\quad}$: "bilangan berapa yang kalau dikalikan dengan dirinya sendiri menghasilkan angka di dalam akar?" Misalnya $\sqrt{64} = 8$ karena $8 \times 8 = 64$.



Tebak Dulu!

Dimas menulis $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Benarkah?

Benar, akar boleh dipecah seperti itu.

Benar, tetapi hanya untuk bilangan kuadrat.

Salah, karena $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Salah, seharusnya $\sqrt{9+16} = 25$.

Jawabannya: salah. Hitung dulu isi akarnya: $9 + 16 = 25$, dan $\sqrt{25} = 5$, bukan 7. Akar boleh dipecah pada **perkalian** ($\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$), tetapi **tidak** pada penjumlahan. (Diam-diam, 3, 4, dan 5 ini akan kamu temui lagi di Bab 18!)



SIFAT-SIFAT AKAR

Untuk $a, b \geq 0$:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dan $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (untuk $b > 0$);
- $(\sqrt{a})^2 = a$;
- bentuk akar sejenis bisa dijumlahkan seperti suku sejenis: $p\sqrt{a} + q\sqrt{a} = (p + q)\sqrt{a}$.

Sifat pertama adalah sifat pangkat $(ab)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2}$ yang menyamar!

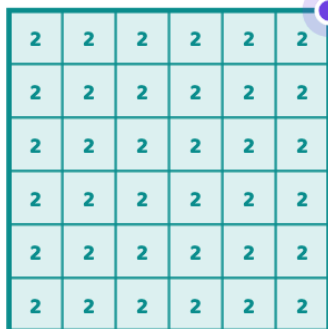
Sifat pertama membuat kita bisa **menyederhanakan** bentuk akar: cari bilangan kuadrat terbesar yang membagi isi akar, lalu keluarkan. Contohnya $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Lab di bawah memperlihatkan mengapa ini masuk akal: persegi seluas 72 bisa dipotong menjadi 6×6 persegi kecil yang masing-masing luasnya 2.

LAB MINI

Potong persegi, keluarkan akarnya

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6

sisi = $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$



6 potong $\times \sqrt{2}$

Luas persegi = 72

$$72 = 36 \times 2$$

($36 = 6^2$, kuadrat terbesar)

$$\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} \approx 8,4853$$

Letak $\sqrt{n}$ di garis bilangan:



👉 seret pojok ungu untuk mengubah luas

$\sqrt{n} \approx$

8,4853

Kuadrat terbesar yang membagi n

36

Bentuk paling sederhana

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Seret pojok ungu atau geser slider untuk mengubah luas persegi n . Persegi dipotong menjadi $k \times k$ persegi kecil yang sama, masing-masing seluas b . Sisinya k potong kali $\sqrt{b}$, jadi $\sqrt{n} = k\sqrt{b}$. Coba cari: luas berapa saja yang tidak bisa dipotong (selain 1×1)? Luas berapa yang menghasilkan persegi hijau?

ADU CEPAT Keluarkan dari akar

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-6

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Isi kotak dengan bilangan bulat. Cari kuadrat sempurna terbesar yang membagi isi akar: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

KERJAKAN BERSAMA Menjumlahkan bentuk akar

Sederhanakan $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50}$.

- 1 Sekilas tidak sejenis. Sederhanakan dulu masing-masing: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$.
- 2 $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$ dan $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.
- 3 Sekarang semuanya sejenis: $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

Hasilnya $10\sqrt{2} \approx 14,14$. Perhatikan, $\sqrt{8+18+50} = \sqrt{76} \approx 8,72$ hasilnya berbeda jauh!

COBA SENDIRI Mana yang lebih besar?

Tanpa kalkulator, manakah yang lebih besar: $3\sqrt{5}$ atau $5\sqrt{2}$?

- 1 Masukkan angka di depan ke dalam akar: $3\sqrt{5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = \sqrt{45}$.
- 2 Dengan cara yang sama, $5\sqrt{2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = \sqrt{50}$.
- 3 Karena $50 > 45$, maka $\sqrt{50} > \sqrt{45}$.

$5\sqrt{2}$ lebih besar ($\approx 7,07$ dibanding $\approx 6,71$). Trik "masukkan ke dalam akar" membuat perbandingan menjadi sangat mudah.



TEOREMA: $\sqrt{2}$ ADALAH BILANGAN IRASIONAL

Tidak ada pecahan $\frac{p}{q}$ (dengan p, q bilangan bulat) yang kuadratnya tepat 2. Akibatnya, desimal $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ tidak pernah berhenti dan tidak pernah berulang.

▼ Bukti dengan kontradiksi (bukti klasik berumur lebih dari 2.000 tahun)

Andaikan $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dengan p, q bilangan asli dan pecahannya sudah paling sederhana (p dan q tidak punya faktor persekutuan).

Kuadratkan: $p^2 = 2q^2$. Jadi p^2 genap, sehingga p juga genap (kuadrat bilangan ganjil selalu ganjil). Tulis $p = 2s$.

Maka $4s^2 = 2q^2$, atau $q^2 = 2s^2$. Jadi q^2 genap dan q juga genap.

Sekarang p dan q sama-sama genap, berarti keduanya punya faktor persekutuan 2. Ini bertentangan dengan pengandaian bahwa pecahannya sudah paling sederhana. Jadi $\sqrt{2}$ tidak mungkin berupa pecahan. ■



TAMU DARI MASA LALU

Sebuah lempeng tanah liat Babilonia yang dikenal sebagai YBC 7289 (± 1800 – 1600 SM) menggambar sebuah persegi dengan dua diagonalnya. Di sepanjang diagonal tertulis bilangan dalam sistem basis 60 yang nilainya sekitar 1,414213, yaitu $\sqrt{2}$ yang tepat hingga lima angka di belakang koma! Lambang $\sqrt{}$ sendiri jauh lebih muda: lambang ini dipopulerkan oleh matematikawan Jerman Christoph Rudolff pada 1525, mungkin dari huruf r untuk *radix* (bahasa Latin untuk "akar").



AWAS JEBAKAN

Akar tidak bisa dipecah pada penjumlahan atau pengurangan: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Selain itu, $\sqrt{9} = 3$, bukan ± 3 . Memang $x^2 = 9$ punya dua penyelesaian ($x = 3$ atau $x = -3$), tetapi lambang $\sqrt{}$ selalu berarti akar yang **tak negatif**.

MITOS

"

$$2^3$$

sama dengan

$$2 \times 3 = 6$$

."

MITOS

"Pangkat negatif menghasilkan bilangan negatif."

FAKTA

Pangkat adalah perkalian
berulang

:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

. Yang sama dengan 6 adalah

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2$$

, yaitu penjumlahan berulang.

FAKTA

$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$

, tetap positif! Tanda minus pada pangkat berarti "ambil kebalikannya", bukan "jadikan negatif".

MITOS

"
."
."

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

MITOS

"Angka nol tidak pernah termasuk angka penting."

FAKTA

Coba

$$a = 9$$

dan

$$b = 16$$

: ruas kiri

$$\sqrt{25} = 5$$

, ruas kanan

$$3 + 4 = 7$$

. Akar hanya akrab dengan perkalian dan pembagian, bukan penjumlahan.

FAKTA

Nol di antara angka lain (2,05) dan nol di belakang koma desimal (3,40) termasuk angka penting. Hanya nol di depan, seperti pada 0,004, yang sekadar penunjuk letak koma.

6.5 Merasionalkan penyebut

Coba hitung $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dengan tangan. Kamu harus membagi 1 dengan 1,41421..., pembagian yang menyiksa.

Bandingkan dengan $\frac{\sqrt{2}}{2}$: cukup bagi 1,41421 dengan 2, hasilnya 0,70711. Padahal keduanya bernilai **sama**!

Mengubah penyebut berbentuk akar menjadi bilangan rasional disebut **merasionalkan penyebut**. Selain memudahkan hitungan, bentuk ini juga disepakati sebagai bentuk "rapi" sebuah jawaban.



CARA MERASIONALKAN PENYEBUT

Kalikan pecahan dengan "1 yang cerdas", yaitu pecahan yang pembilang dan penyebutnya sama:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{a}{\sqrt{b}} &= \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \\ \bullet \quad \frac{c}{a+\sqrt{b}} &= \frac{c}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b} \\ \bullet \quad \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} \end{aligned}$$

Bentuk $a - \sqrt{b}$ disebut **sekawan** dari $a + \sqrt{b}$. Rahasiannya: $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$. Akarnya lenyap!

Mengapa sekawan menghapus akar? Kalikan satu per satu: $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - a\sqrt{b} + a\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b$. Dua suku tengah saling menghapus. Kamu akan melihat pola $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ini lagi di bab aljabar.

CONTOH Penyebut berupa satu akar

Rasionalkan penyebut $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

1 Kalikan dengan $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$: $\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$.

2 Sederhanakan: $\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

$\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$. **Cek:** $6 : 1,732 \approx 3,46$. ✓

KERJAKAN BERSAMA Memakai sekawan

Rasionalkan penyebut $\frac{6}{3 - \sqrt{3}}$.

1 Sekawan dari $3 - \sqrt{3}$ adalah $3 + \sqrt{3}$. Kalikan pembilang dan penyebut dengannya.

2 Penyebut: $(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 9 - 3 = 6$.

3 Pembilang: $6(3 + \sqrt{3})$. Jadi $\frac{6(3 + \sqrt{3})}{6} = 3 + \sqrt{3}$.

$\frac{6}{3 - \sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3} \approx 4,732$. **Cek:** $6 : (3 - 1,732) = 6 : 1,268 \approx 4,732$. ✓

**LANJUT · IB & OLIMPIADE****AKAR BERSARANG**

Kadang akar bersembunyi di dalam akar. Misalnya $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$. Tebak bentuknya $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, lalu kuadratkan: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$. Kita butuh $x + y = 5$ dan $xy = 6$, yaitu $x = 3, y = 2$. Jadi

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Tantangan untukmu: tunjukkan bahwa $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. (Petunjuk: $4\sqrt{3} = 2\sqrt{12}$, dan hati-hati memilih tanda supaya hasilnya positif.)

6.6 Notasi ilmiah dan angka penting

Jarak Bumi ke Matahari sekitar 149.600.000.000 m. Diameter sebuah virus sekitar 0,000 000 1 m. Menulis nol sebanyak itu melelahkan dan rawan salah hitung. Para ilmuwan memakai cara yang jauh lebih hemat.



DEFINISI

Sebuah bilangan ditulis dalam **notasi ilmiah** (bentuk baku, *standard form*) jika berbentuk

$$a \times 10^n, \quad 1 \leq |a| < 10, \quad n \text{ bilangan bulat.}$$

Contoh: $149.600.000.000 = 1,496 \times 10^{11}$ dan $0,0000001 = 1 \times 10^{-7}$.



TRIK KAK LINTANG

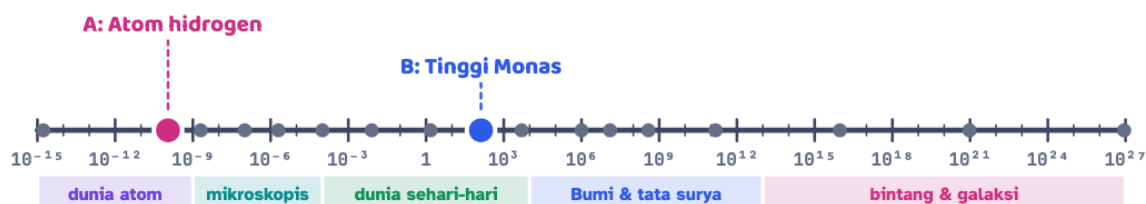
Bayangkan koma sebagai katak yang melompat. Lompatkan koma sampai tersisa **satu** angka bukan nol di depannya, lalu hitung lompatannya. Lompat ke **kiri** (bilangan besar) → pangkatnya **positif**.

Lompat ke **kanan** (bilangan kecil) → pangkatnya **negatif**. Contoh: 0,00052 → koma melompat 4 kali ke kanan → $5,2 \times 10^{-4}$.

Bahasa sederhana • Notasi ilmiah itu seperti singkatan. Angka di depan memberi tahu "berapa", dan pangkat 10 memberi tahu "berapa banyak nol". Jadi 3×10^6 artinya 3 diikuti 6 nol: 3.000.000.

Dengan notasi ilmiah, kita bisa menyusun seluruh alam semesta pada satu penggaris: setiap anak tangga berarti 10 kali lebih besar. Jarak dari inti atom sampai alam semesta yang teramati hanya sekitar 42 anak tangga!

Penggaris ukuran alam semesta (dalam meter, skala logaritma)

**A: Atom hidrogen**Notasi ilmiah $1,1 \times 10^{-10} \text{ m}$

Bentuk biasa

0,000 000 000 11 m

B: Tinggi MonasNotasi ilmiah $1,32 \times 10^2 \text{ m}$

Bentuk biasa

132 m

$$A : B = (1,1 : 1,32) \times 10^{-10-2} \approx 8,33 \times 10^{-13}$$

Artinya, B sekitar 1,2 triliun kali lebih besar daripada A.

A (notasi ilmiah)

 $1,1 \times 10^{-10} \text{ m}$

B (notasi ilmiah)

 $1,32 \times 10^2 \text{ m}$

A : B

 $8,33 \times 10^{-13}$

Pilih benda A dan B, atau klik sebuah titik di penggaris untuk memilih A. Bandingkan cara menulis bentuk biasa (yang panjang!) dengan notasi ilmiahnya. Lihat bagaimana membagi dua bilangan cukup dengan membagi angka depan dan **mengurangkan** pangkatnya. Tekan ► **Jalankan** untuk berkelana dari inti atom sampai tepi alam semesta.

Satuan yang sering kamu jumpai sebenarnya adalah pangkat 10 yang menyamar sebagai **awalan satuan**:

Awalan	Lambang	Nilai	Contoh
tera	T	10^{12}	hard disk 1 TB ($\pm 10^{12}$ byte)
giga	G	10^9	kuota internet 10 GB
mega	M	10^6	pembangkit listrik ratusan MW
kilo	k	10^3	1 km, 1 kg
mili	m	10^{-3}	tablet obat 500 mg
mikro	μ	10^{-6}	bakteri $\pm 2 \mu\text{m}$
nano	n	10^{-9}	virus korona $\pm 100 \text{ nm}$

Menghitung dengan notasi ilmiah sangat mudah karena sifat pangkat bekerja untuk kita. Saat mengalikan, kalikan angka depannya dan **jumlahkan** pangkatnya. Saat membagi, bagi angka depannya dan **kurangkan** pangkatnya. Terakhir, rapikan agar angka depan kembali di antara 1 dan 10:

$$(6 \times 10^4) \times (5 \times 10^3) = 30 \times 10^7 = 3 \times 10^8$$

RUMUS HIDUP**Waktu tempuh cahaya**

$$t = \frac{m \times 10^k \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

Cahaya menempuh 300.000 km setiap detik. Bagi angka depan jarak dengan 3, lalu kurangkan pangkat sepuluhnya dengan 5.

m

Angka depan jarak

k

Pangkat sepuluh jarak

t

Waktu tempuh cahaya s

WAKTU TEMPUH CAHAYA**1,28**

s

☐ kira-kira jarak Bumi-Bulan

Jarak $3,84 \times 10^5$ km = **384.000** km. Waktunya $(3,84 : 3) \times 10^0 = 1,28 \times 10^0 = 1,28$ detik, atau sekitar **0,021** menit.

Satuan Nusantara: $\approx 4,3 \times$ kedipan mata $\cdot \approx 2\%$ dari satu menit

Cek satuan: km dibagi km/s menghasilkan s (detik).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEMPUH-CAHAYA

CONTOH Menulis jarak Bumi–Matahari

Jarak rata-rata Bumi ke Matahari sekitar 149.600.000 km. Tuliskan dalam notasi ilmiah, dalam km lalu dalam meter.

1 Lompatkan koma ke kiri sampai tersisa satu angka di depannya: 1,49600000. Koma melompat 8 kali, jadi $1,496 \times 10^8$ km.

2 $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, jadi jaraknya $1,496 \times 10^8 \times 10^3 = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$.

$1,496 \times 10^8 \text{ km} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$. Jauh lebih ringkas daripada menulis 149.600.000.000 m!

KERJAKAN BERSAMA Cahaya Matahari yang terlambat

Cahaya merambat dengan kecepatan $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Berapa lama cahaya Matahari menempuh $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ sampai ke Bumi?

1 Waktu = jarak : kecepatan = $\frac{1,5 \times 10^{11}}{3 \times 10^8}$.

2 Bagi angka depan: $1,5 : 3 = 0,5$. Kurangkan pangkat: $10^{11-8} = 10^3$.

3 $0,5 \times 10^3 = 5 \times 10^2 = 500$ detik.

Sekitar 500 detik, atau 8 menit 20 detik. Jadi saat melihat Matahari terbenam, kamu sedang melihat Matahari 8 menit yang lalu!



AWAS JEBAKAN

Dalam notasi ilmiah, angka depan harus memenuhi $1 \leq a < 10$. Bentuk 34×10^5 dan $0,34 \times 10^7$ bernilai benar, tetapi belum baku; bentuk bakunya $3,4 \times 10^6$. Hati-hati juga dengan tanda pangkat: $10^{-3} = 0,001$ adalah bilangan positif yang kecil, bukan bilangan negatif.

Hasil pengukuran tidak pernah tepat sempurna. Penggaris berskala milimeter bisa mengukur 12,3 cm, tetapi tidak bisa memastikan 12,34 cm. Angka-angka yang benar-benar bermakna dalam hasil pengukuran disebut **angka penting**. Notasi ilmiah membuat banyaknya angka penting terlihat jelas: semua angka pada bagian a adalah angka penting.

Aturan angka penting

Contoh

Banyak angka penting

Semua angka bukan nol adalah angka penting.	254	3
Nol di antara angka bukan nol adalah angka penting.	$2,05 \cdot 1.007$	$3 \cdot 4$
Nol di depan angka bukan nol pertama bukan angka penting.	0,0042	2
Nol di belakang koma desimal adalah angka penting.	$3,40 \cdot 2,000$	$3 \cdot 4$
Nol di ujung bilangan bulat meragukan; pakai notasi ilmiah.	$1,5 \times 10^3 \cdot 1,500 \times 10^3$	$2 \cdot 4$

Untuk **membulatkan** ke k angka penting, lihat angka ke- $(k + 1)$: bulatkan ke atas jika angka itu 5 atau lebih. Contoh: 384.400 dibulatkan ke 2 angka penting menjadi $380.000 = 3,8 \times 10^5$, dan 0,004567 menjadi 0,0046. Saat mengalikan atau membagi hasil ukur, tulis hasilnya dengan banyak angka penting **paling sedikit** di antara bilangan yang dihitung. Misalnya $2,5 \text{ cm} \times 3,47 \text{ cm} = 8,675 \text{ cm}^2$, ditulis $8,7 \text{ cm}^2$ (2 angka penting, mengikuti 2,5).

COBA SENDIRI Menaksir butir nasi se-Indonesia

Kira-kira berapa butir beras yang dimakan seluruh penduduk Indonesia dalam setahun? Anggap setiap orang makan ± 250 g beras sehari, sebutir beras beratnya $\pm 0,02$ g, dan penduduk Indonesia $\pm 2,8 \times 10^8$ jiwa.

- 1 Butir per orang per hari: $250 : 0,02 = 12.500 = 1,25 \times 10^4$ butir.
- 2 Per orang per tahun: $1,25 \times 10^4 \times 365 \approx 4,56 \times 10^6$ butir.
- 3 Seluruh penduduk: $4,56 \times 10^6 \times 2,8 \times 10^8 \approx 12,8 \times 10^{14} \approx 1,3 \times 10^{15}$ butir.

Sekitar $1,3 \times 10^{15}$ butir, yaitu angka 13 diikuti 14 angka nol! Taksiran kasar seperti ini disebut estimasi Fermi. Hasilnya cukup ditulis dengan 2 angka penting, karena data awalnya pun hanya perkiraan.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 250 SM, Archimedes dari Syrakusa menulis karya yang dikenal sebagai *Sang Penghitung Pasir*. Ia ingin membuktikan bahwa banyaknya butir pasir yang dapat mengisi seluruh alam semesta (menurut ukuran yang dikenal saat itu) tetap bisa dihitung, tidak "tak terhingga". Bahasa Yunani saat itu hanya punya nama bilangan sampai *myriad* (10.000), maka Archimedes menciptakan sistem bertingkat "myriad dari myriad" yang mirip pangkat. Taksirannya: tidak lebih dari sekitar 10^{63} butir. Gagasan menulis bilangan raksasa dengan pangkat ternyata sudah berumur lebih dari 2.000 tahun.



MATEMATIKA NUSANTARA

Jauh sebelum notasi ilmiah dikenal, bahasa Melayu sudah punya nama untuk bilangan besar: **laksa** ($10.000 = 10^4$), **keti** ($100.000 = 10^5$), dan **juta** ($1.000.000 = 10^6$). Bahasa Jawa punya kata serupa: *leksa*, *kethi*, dan *yuta*. Kata laksa dan keti berasal dari bahasa Sanskerta (*lakṣa* dan *koṭi*), tetapi nilainya bergeser: di India, *lakh* berarti 100.000 dan *crore* berarti 10.000.000. Ungkapan "beribu-ribu laksa" dalam hikayat lama berarti "banyak sekali". Coba tanyakan kakek atau nenekmu: pernahkah mereka mendengar kata *selaksa*?



Nasi basi

Dalam suhu hangat, bakteri bisa berlipat dua setiap ± 20 menit. Dalam 8 jam, satu bakteri bisa menjadi 2^{24} , lebih dari 16 juta. Simpan makanan matang di kulkas!



Memori HP

Komputer bekerja dengan pangkat dua, misalnya $2^{10} = 1.024$ byte. Itulah sebabnya kapasitas memori HP berupa 32, 64, 128, atau 256 GB.



Pesan berantai

Jika setiap orang meneruskan hoaks ke 5 orang, setelah 10 putaran penerima barunya $5^{10} \approx 9,8$ juta orang. Periksa dulu sebelum ikut menyebarkan!



Observatorium Bosscha

Astronom di Lembang menyatakan jarak bintang dalam tahun cahaya ($\approx 9,46 \times 10^{15}$ m). Tanpa notasi ilmiah, angkanya tak muat di buku catatan.



Label obat & gizi

Kandungan vitamin ditulis dalam mg (10^{-3} g) atau μg (10^{-6} g). Salah membaca awalan berarti salah seribu kali lipat!



Kalkulator ilmiah

Layar kalkulator menampilkan $3.2\text{E}12$ untuk $3,2 \times 10^{12}$. Huruf E artinya "kali sepuluh pangkat".



Cek Cepat

Bentuk sederhana dari $\frac{3^5 \times 3^2}{3^4}$ adalah...

Bentuk paling sederhana dari $\sqrt{48}$ adalah...

$4\sqrt{3}$

$2\sqrt{12}$

$16\sqrt{3}$

$3\sqrt{4}$

Massa Bumi sekitar 5.970.000.000.000.000.000.000.000 kg. Dalam notasi ilmiah, massa itu ditulis...

$597 \times 10^{22} \text{ kg}$

$5,97 \times 10^{25} \text{ kg}$

$5,97 \times 10^{-24} \text{ kg}$

$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. A • 3. D



Tantangan Rumah: berapa kali kertasmu bisa dilipat?

Bahan: selembar kertas HVS, selembar kertas koran, penggaris, buku catatan (opsional: satu rim kertas HVS berisi 500 lembar).

1. Ukur tebal satu rim kertas (biasanya ± 5 cm), lalu bagi dengan 500 untuk mendapatkan tebal selembar. Tuliskan hasilnya dalam meter dengan notasi ilmiah.
2. Lipat kertas HVS menjadi dua, lalu dua lagi, dan seterusnya. Setiap kali melipat, catat banyak lapisannya (2, 4, 8, ...).
3. Setelah lipatan ke-5 atau ke-6, ukur tebal tumpukan dengan penggaris. Bandingkan dengan perkiraan $t_0 \times 2^n$.
4. Teruskan sampai kertas benar-benar tidak bisa dilipat lagi. Catat lipatan terakhirmu.
5. Ulangi dengan kertas koran yang lebih lebar dan lebih tipis.

Pertanyaan: Berapa lipatan terbanyak yang berhasil kamu buat? Berapa lapis kertas pada lipatan itu? Mengapa melipat makin lama makin sulit? (Petunjuk: setiap lipatan, tebal dikalikan 2 dan luas dibagi 2.) Apakah kertas koran bisa dilipat lebih banyak? Jelaskan dengan pangkat.

✓ Kamu sekarang bisa...

- menulis perkalian berulang sebagai **bilangan berpangkat** dan merasakan betapa cepat pangkat tumbuh
- memakai **sifat-sifat pangkat** dan menjelaskan mengapa sifat itu benar dengan menghitung banyak faktor
- memaknai **pangkat nol, pangkat negatif, dan pangkat pecahan**
- menyederhanakan **bentuk akar** dan **merasionalkan penyebut**
- menulis bilangan raksasa dan bilangan mungil dalam **notasi ilmiah**, menghitung dengannya, dan memakai **angka penting**

🔑 Istilah kunci

bilangan berpangkat

basis

pangkat

eksponen

pertumbuhan eksponensial

akar kuadrat

bentuk akar

merasionalkan penyebut

sekawan

notasi ilmiah

awalan satuan

angka penting

📖 Rumus penting

$$t = t_0 \cdot 2^n$$

Tebal kertas terlipat. Setiap lipatan menggandakan tebal. Jadi tebal awal dikalikan 2 sebanyak n kali.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Mengalikan pangkat sebasis. Basisnya sama? Pangkatnya tinggal dijumlahkan, karena semua faktornya digabung dalam satu barisan.

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Pangkat pecahan = akar lalu pangkat. Penyebut pecahan menjadi akarnya, pembilang menjadi pangkatnya. Ambil akarnya dulu supaya angkanya kecil.

$$t = \frac{m \times 10^k \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

Waktu tempuh cahaya. Cahaya menempuh 300.000 km setiap detik. Bagi angka depan jarak dengan 3, lalu kurangkan pangkat sepuluhnya dengan 5.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Pangkat hanya boleh dijumlahkan jika basisnya sama dan keduanya dikalikan.
- Tanda kurung mengubah segalanya: $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$, tetapi $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$, karena pangkat dikerjakan sebelum tanda minus.
- Akar tidak bisa dipecah pada penjumlahan atau pengurangan: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.



Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=6

Teka-teki untuk Bab 7

Ancil punya trik sulap. "Pikirkan sebuah bilangan bulat, rahasiakan! Kuadratkan bilangan *sesudahnya*, lalu kurangi dengan kuadrat bilangan *sebelumnya*. Bagi hasilnya dengan 4." Lalu Ancil berseru, "Hasilnya pasti bilangan yang kamu pikirkan!" Coba dengan 7: $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$, dan $28 : 4 = 7$. Tepat! Apakah trik ini selalu berhasil, bahkan untuk bilangan negatif? Mengapa?

▼ Intip petunjuk

Sebut bilangan rahasiamu sebagai "kotak misteri" n . Bilangan *sesudahnya* $n + 1$ dan *sebelumnya* $n - 1$. Hitunglah $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$. Bab 7 akan mengajarimu **bahasa aljabar** untuk membongkar trik sulap seperti ini, lengkap dengan bentuk $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ yang ajaib.

07

Bahasa Aljabar: Kotak Misteri dan Sulap Bilangan

Ancil bisa menebak hasil hitunganmu tanpa mengintip. Ilmu sihir? Bukan! Rahasiannya adalah sebuah bahasa yang memakai huruf sebagai kotak misteri. Kuasai bahasa ini, dan kamu bisa membongkar trik sulap, menghitung 99^2 di luar kepala, serta menulis satu aturan yang berlaku untuk semua bilangan sekaligus.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memakai huruf sebagai **variabel** (kotak misteri) dan menghitung nilai sebuah **ekspresi aljabar**;
- menerjemahkan cerita sehari-hari, seperti tarif ojek dan paket kuota, menjadi ekspresi aljabar;
- menyederhanakan ekspresi dengan mengumpulkan **suku sejenis**;
- melakukan **ekspansi** dengan sifat distributif dan model luas, serta **memfaktorkan** dengan faktor persekutuan;
- membongkar trik sulap bilangan dan berhitung kilat dengan identitas $(a + b)^2$ dan $a^2 - b^2$.

ANCIL MEMBACA PIKIRAN?

KOMIK • 4 PANEL

Jam istirahat, di bawah pohon ketapang

ANCIL

Pikirkan sebuah bilangan. Kalikan 2, tambah 10, bagi 2, lalu kurangi dengan bilangan awalmu. Simpan hasilnya di kepala!

DIMAS

Aku pilih 7... jadi 14... 24... 12... lalu 5.

ANCIL

Hasilnya 5, kan? Sim salabim!

DIMAS

KOK TAHU?! Ancil bisa membaca pikiran!



AYU

Aku coba satu juta. Hasilnya tetap 5! Ini bukan membaca pikiran. Pasti ada rahasianya, Cil!

ANCIL

Waduh... ketahuan.



1.000.000
2.000.000
2.000.010
1.000.005
5 ?!



Kak Lintang datang membawa kapur

KAK LINTANG

Ganti bilanganmu dengan kotak misteri x . Lihat papan: kotak x lenyap di langkah terakhir, jadi hasilnya pasti 5. Inilah bahasa aljabar!



$x \rightarrow 2x$
 $\rightarrow 2x + 10$
 $\rightarrow x + 5$
 $\rightarrow 5$ (tanpa x !)



Tebak Dulu!

Ancil yakin triknya selalu menghasilkan 5. Bagaimana jika Dimas memilih bilangan negatif, misalnya -3 , atau pecahan $\frac{1}{2}$?

Hasilnya ikut negatif, karena bilangan awalnya negatif.

Triknya gagal untuk pecahan, karena langkah "bagi 2" membuat hasilnya berkoma.

Tetap 5, untuk bilangan apa pun.

Trik itu hanya berhasil untuk bilangan 1 sampai 10.

Jawabannya: tetap 5. Coba -3 : dikali 2 menjadi -6 , ditambah 10 menjadi 4, dibagi 2 menjadi 2, lalu dikurangi -3 menjadi $2 + 3 = 5$. Coba $\frac{1}{2}$: menjadi 1, lalu 11, lalu $5\frac{1}{2}$, dan akhirnya $5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 5$. Tetapi mencoba seribu contoh pun belum membuktikan bahwa trik itu *selalu* berhasil. Kita butuh alat yang mewakili semua bilangan sekaligus. Alat itu bernama aljabar.

7.1 Variabel: kotak misteri

Mari bongkar trik Ancil. Kita tidak tahu bilangan pilihan Dimas, jadi kita tulis saja sebagai **kotak misteri**. Matematikawan biasanya memakai huruf, misalnya x . Sekarang ikuti setiap perintah Ancil, dengan angka dan dengan kotak misteri:

Perintah Ancil	Dimas memilih 7	Ayu memilih 1.000.000	Kotak misteri x
Pikirkan sebuah bilangan	7	1.000.000	x
Kalikan 2	14	2.000.000	$2x$
Tambah 10	24	2.000.010	$2x + 10$
Bagi 2	12	1.000.005	$x + 5$
Kurangi bilangan awal	5	5	5

Lihat kolom terakhir. Kotak misterinya **lenyap** pada langkah terakhir, dan yang tersisa hanya 5. Artinya, hasilnya 5 *apa pun* isi kotaknya: 7, satu juta, -3 , atau $\frac{1}{2}$. Ancil tidak membaca pikiran. Ia membaca aljabar!

Masih ingat teka-teki Ancil di akhir Bab 6? Kuadrat bilangan sesudahnya dikurangi kuadrat bilangan sebelumnya, lalu dibagi 4, dan hasilnya selalu bilangan awalmu. Trik itu bekerja dengan rahasia yang sama. Kita akan membongkarnya di [subbab 7.6](#), setelah kamu punya alat yang tepat.

Bahasa sederhana • Bayangkan x seperti kotak kado yang masih tertutup. Kita belum tahu isinya, tetapi kita tetap bisa berhitung dengannya. Dua kotak yang sama ditambah 10 permen kita tulis $2x + 10$. Kalau kotaknya dibuka dan isinya 7, nilainya $2 \times 7 + 10 = 24$.



DEFINISI

Variabel adalah huruf (atau lambang) yang mewakili sebuah bilangan yang belum diketahui atau yang nilainya boleh berubah-ubah. Gabungan bilangan, variabel, dan operasi hitung disebut **ekspresi aljabar** (atau *bentuk aljabar*), misalnya $2x + 10$, $3a - 5b$, atau $x^2 + 1$. Mengganti variabel dengan sebuah bilangan disebut **substitusi**.



Tebak Dulu!

Jika $x = 4$, berapakah nilai $3x$?

34, karena angka 3 ditulis di depan 4.

7, karena 3 ditambah 4.

12.

3,4.

Jawabannya: 12. Dalam aljabar, $3x$ berarti $3 \times x$; tanda kalinya hanya disembunyikan. Saat x diganti 4, tanda kali itu muncul lagi: $3 \times 4 = 12$. Supaya tidak keliru, tuliskan substitusi dengan kurung: $3(4) = 12$.



TATA BAHASA ALJABAR

- $2x$ berarti $2 \times x$. Angka ditulis di depan: $2x$, bukan $x2$.
- ab berarti $a \times b$, dan $ab = ba$.
- $1x$ cukup ditulis x , dan $-1x$ ditulis $-x$.
- x^2 berarti $x \times x$, sedangkan $2x$ berarti $x + x$. Keduanya berbeda!
- $\frac{x}{3}$ berarti $x \div 3$.
- Saat substitusi bilangan negatif, **pakai kurung**: untuk $x = -3$, $x^2 = (-3)^2 = 9$ dan $5 - 2x = 5 - 2(-3) = 11$.

CONTOH

Mengisi kotak misteri

Hitung nilai $5n - 2$ untuk $n = 4$, lalu untuk $n = -1$.

1 Untuk $n = 4$: $5n - 2 = 5(4) - 2 = 20 - 2 = 18$.

2 Untuk $n = -1$: $5n - 2 = 5(-1) - 2 = -5 - 2 = -7$.

Nilainya 18 dan -7. Satu ekspresi bisa punya banyak nilai, tergantung isi kotak misterinya.

**ADU CEPAT****Isi kotak misteri**ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

Ganti x dengan bilangannya, kalikan dulu, baru tambah atau kurangi. Contoh: $x = -2 \Rightarrow 3x + 4 = 3 \cdot (-2) + 4 = -2$.

**TAMU DARI MASA LALU**

Kata *aljabar* berasal dari judul buku karya Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi**, ilmuwan di Baghdad, sekitar tahun 820 M: *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala*. Kata *al-jabr* berarti "memulihkan" atau "menyatukan kembali". Uniknya, al-Khwarizmi menulis semua soalnya dengan **kata-kata**, tanpa satu huruf x pun! Lambang huruf baru dipakai secara luas ratusan tahun kemudian: François Viète (Prancis, akhir abad ke-16) memakai huruf untuk mewakili besaran, lalu René Descartes (1637) mempopulerkan x , y , z untuk besaran yang belum diketahui. Nama al-Khwarizmi sendiri berubah menjadi kata *algoritma*.

7.2 Menyusun ekspresi dari cerita

Aljabar adalah sebuah bahasa. Seperti menerjemahkan bahasa Jawa ke bahasa Indonesia, kita bisa menerjemahkan cerita menjadi ekspresi. Kata "lebihnya" atau "ditambah" menjadi $+$; "kurangnya" atau "selisih" menjadi $-$; "kali", "lipat", atau "per" menjadi $\times$; "dibagi" atau "setengah" menjadi $\div$.

Bahasa sehari-hari	Bahasa aljabar
lima lebihnya dari sebuah bilangan n	$n + 5$
lima kurangnya dari n	$n - 5$ (bukan $5 - n$!)
tiga kali sebuah bilangan, lalu dikurangi 2	$3n - 2$
setengah dari jumlah a dan b	$\frac{a + b}{2}$
kuadrat dari jumlah a dan b	$(a + b)^2$
jumlah kuadrat a dan b	$a^2 + b^2$
harga p pensil @Rp2.000 dan q buku @Rp5.000	$2.000p + 5.000q$

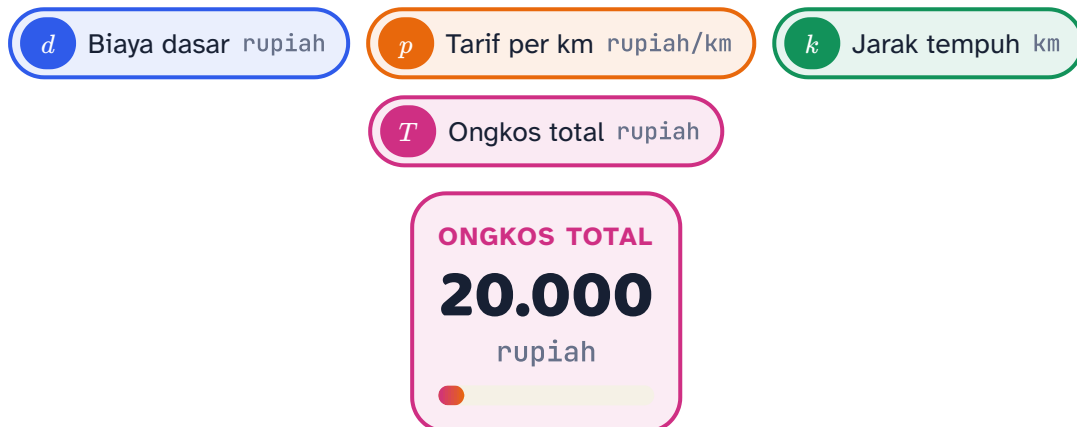
Bahasa sederhana • Perhatikan urutannya. "Lima kurangnya dari n " berarti n dikurangi 5. Kalau Dimas punya n kelereng dan Ayu punya lima kurangnya dari Dimas, kelereng Ayu $n - 5$.

Ambil contoh **ongkos ojek daring**. Ada **biaya dasar** yang dibayar sekali di awal, lalu tarif untuk setiap kilometer. Jaraknya berubah-ubah, jadi jarak adalah variabel. Biaya dasar tidak ikut berubah: itulah **konstanta**. Tarif per km menempel di depan variabel jarak: itulah **koefisien**.

RUMUS HIDUP Ongkos ojek daring

$$T = d + p \times k$$

Ongkos ojek = biaya dasar (dibayar sekali di awal) ditambah tarif per kilometer dikali jarak tempuh.



ongkos jarak sudah lebih besar daripada biaya dasar

Biaya dasar Rp**5.000** ditambah $\text{Rp}2.500 \times 6 \text{ km} = \text{Rp}15.000$. Ongkos totalnya Rp**20.000**. Setiap kilometer tambahan selalu menambah Rp**2.500**, berapa pun jaraknya.

Cek satuan: rupiah + (rupiah/km) $\times$ km = rupiah. Satuan km saling meniadakan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ALJABAR-OJEK



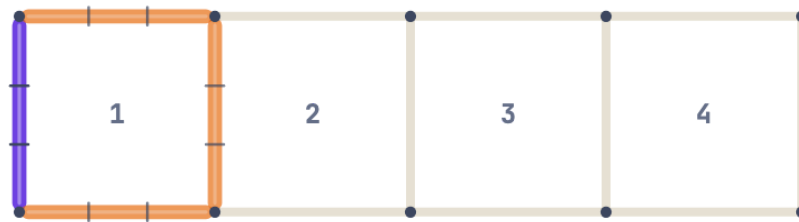
TRIK KAK LINTANG

Saat menerjemahkan cerita, tanyakan tiga hal. **Apa yang berubah-ubah?** Itu variabelnya. **Apa yang dibayar atau ditambahkan sekali saja?** Itu konstantanya. **Ada kata "per" atau "setiap"?** Angka di dekatnya biasanya menjadi koefisien, yang menempel di depan variabel.

Ekspresi juga bisa lahir dari **pola gambar**. Pak Sastro membuat pagar bambu berpetak-petak. Satu petak butuh 4 batang, dua petak 7 batang, tiga petak 10 batang. Berapa batang untuk n petak? Ada banyak cara menghitungnya. Hebatnya, semua cara yang benar berujung pada ekspresi yang sama.

LAB MINI Pagar bambu: dari pola ke ekspresi

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7



Cara A • 1 batang awal, lalu tambah per petak

$$1 + 3n = 3n + 1$$

$$1 = 1 \dots$$

petak

4

batang (dihitung satu per satu)

13

ekspresi cara ini

$$1 + 3n$$

disederhanakan

$$3n + 1$$

Pilih bentuk pagar dan cara menghitung, lalu tekan ► **Jalankan** untuk melihat bambu dihitung kelompok demi kelompok. Setiap cara menghasilkan ekspresi yang tampak berbeda. Setelah disederhanakan, apakah semuanya sama?

KERJAKAN BERSAMA Uang kembalian Ayu

Ayu membeli p pensil seharga Rp3.000 per buah dan 2 buku tulis seharga Rp7.000 per buah. Ia membayar dengan selembar Rp50.000. Tuliskan ekspresi uang kembaliannya, lalu hitung kembaliannya jika ia membeli 4 pensil.

1 Harga pensil: $3.000p$ (berubah sesuai banyak pensil). Harga buku: $2 \times 7.000 = 14.000$ (tetap).

2 Total belanja $3.000p + 14.000$. Kembalian = $50.000 - (3.000p + 14.000) = 36.000 - 3.000p$.

3 Untuk $p = 4$: $36.000 - 3.000(4) = 36.000 - 12.000 = 24.000$.

Kembaliannya $36.000 - 3.000p$ rupiah; untuk 4 pensil, Rp24.000. Cek: belanja $12.000 + 14.000 = 26.000$, dan $50.000 - 26.000 = 24.000$ ✓.



Ongkos ojek daring

Aplikasi menghitung $T = d + pk$: biaya dasar, tarif per km, dan jarak. Hanya k yang berubah di setiap perjalanan.



Paket kuota

Paket Rp30.000 berisi 12 GB, lalu Rp4.000 per GB tambahan. Untuk g GB biayanya $30.000 + 4.000(g - 12)$.



Lembar kerja (*spreadsheet*)

Rumus seperti $=B2 \times C2 + 5000$ adalah ekspresi aljabar. Sel B2 dan C2 berperan sebagai variabel.



Resep kolak

Untuk n orang: pisang $2n$ buah dan gula merah $50n$ gram. Satu ekspresi melayani arisan kecil maupun hajatan besar.



Skor gim

Skor $= 10k + 50b$ untuk k koin dan b bintang. Pembuat gim menulis aturannya sekali, dan aturan itu berlaku untuk jutaan pemain.

7.3

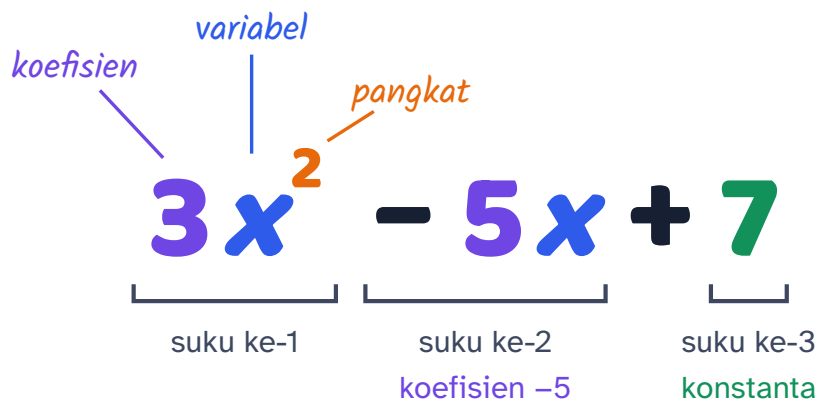
Suku sejenis dan menyederhanakan

Di pasar, Bu Darmi menghitung belanjaan: 3 mangga, 2 salak, lalu 4 mangga lagi. Ia tidak menulis "9 buah campur", tetapi "7 mangga dan 2 salak". Mangga dijumlahkan dengan mangga, salak dengan salak. Aljabar bekerja persis seperti itu: $3m + 2s + 4m = 7m + 2s$.



DEFINISI: SUKU, KOEFISIEN, KONSTANTA

Bagian-bagian ekspresi yang dipisahkan tanda $+$ atau $-$ disebut **suku**. Bilangan di depan variabel disebut **koefisien** (tandanya ikut!), dan suku tanpa variabel disebut **konstanta**. Dua suku disebut **suku sejenis** jika variabel **dan** pangkatnya sama persis; hanya koefisiennya yang boleh berbeda.



Sejenis?

3x dan -7x	✓
2x dan 2x ²	✗
ab dan 5ba	✓
4 dan 4x	✗
ingat: $ab = ba$	

Ekspresi $3x^2 - 5x + 7$ punya tiga suku. Suku $3x^2$ dan $-5x$ **tidak** sejenis karena pangkat x -nya berbeda.



ATURAN MENYEDERHANAKAN

Suku sejenis dijumlahkan atau dikurangkan dengan mengoperasikan **koefisiennya**, sedangkan variabelnya tetap:

$$3x + 5x = 8x$$

$$7a^2 - a^2 = 6a^2$$

$$4xy - 9y$$

Suku yang tidak sejenis dibiarkan berdampingan, seperti mangga dan salak.

▼ Mengapa boleh begitu?

Karena sifat distributif (yang akan kita bahas di subbab 7.4): $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$. Dalam bahasa kotak misteri: 3 kotak ditambah 5 kotak sama dengan 8 kotak, apa pun isi kotaknya. Sebaliknya, $3x + 5y$ tidak bisa digabung karena kotak x dan kotak y boleh berisi bilangan yang berbeda.

Bahasa sederhana • Ingat pasar: mangga dengan mangga, salak dengan salak. Suku x dikumpulkan dengan suku x , suku x^2 dengan suku x^2 , dan angka biasa dengan angka biasa.



AWAS JEBAKAN

$x + x = 2x$, bukan x^2 ; begitu pula $2x + 3y$ tidak bisa ditulis $5xy$. Menjumlahkan dua kotak yang sama menghasilkan "dua kotak" ($2x$), sedangkan x^2 berarti kotak dikali kotak. Coba $x = 3$: $x + x = 6$, padahal $x^2 = 9$.

CONTOH Kumpulkan yang sejenis

Sederhanakan $5a + 3b - 2a + 4b - b$.

1 Kelompokkan suku sejenis (bawa tandanya!): $(5a - 2a) + (3b + 4b - b)$.

2 Operasikan koefisiennya: $5 - 2 = 3$ dan $3 + 4 - 1 = 6$.

$5a + 3b - 2a + 4b - b = 3a + 6b$. Ingat, $-b$ berarti $-1b$.

KERJAKAN BERSAMA Paket kuota internet

Paket bulanan Rp30.000 berisi 12 GB. Setiap GB tambahan dikenai Rp4.000. Tuliskan biaya untuk pemakaian g GB (dengan $g > 12$) dalam bentuk paling sederhana, lalu hitung biayanya untuk 17 GB.

1 Kelebihan pemakaian $g - 12$ GB, jadi biayanya $30.000 + 4.000(g - 12)$.

2 Kalikan 4.000 dengan setiap suku dalam kurung (sifat distributif, lihat 7.4): $30.000 + 4.000g - 48.000$.

3 Kumpulkan konstanta: $4.000g - 18.000$.

4 Untuk $g = 17$: $4.000(17) - 18.000 = 68.000 - 18.000 = 50.000$.

Biayanya $4.000g - 18.000$ rupiah, dan untuk 17 GB Rp50.000. Cek dengan cerita: 5 GB tambahan $\times$ Rp4.000 = Rp20.000, ditambah Rp30.000 = Rp50.000 $\checkmark$.

7.4 Ekspansi: sifat distributif dan model luas

Bagaimana menghitung 7×104 di luar kepala? Pecah 104 menjadi $100 + 4$: tujuh kali seratus ditambah tujuh kali empat, yaitu $700 + 28 = 728$. Kamu baru saja memakai aturan terpenting dalam aljabar.



SIFAT DISTRIBUTIF

Untuk semua bilangan a , b , dan c ,

$$a(b + c) = ab + ac$$

Rumus ini bercerita: *persegi panjang selebar a dan sepanjang $b + c$ dapat dipotong menjadi dua persegi panjang, ab dan ac . Mengubah bentuk berkurung menjadi jumlah suku-suku disebut **ekspansi** (menjabarkan).*

Contohnya, $3(2x + 5) = 6x + 15$ dan $x(x - 4) = x^2 - 4x$. Pengali di luar kurung harus "mengetuk pintu" **setiap** suku di dalam kurung, tanpa ada yang terlewat.



AWAS JEBAKAN

Tanda minus di depan kurung ikut mengalikan setiap suku di dalamnya: $-(x - 3) = -x + 3$, bukan $-x - 3$. Begitu pula $-2(5x - 7) = -10x + 14$, karena minus kali minus menjadi plus.



Tebak Dulu!

Martabak manis berbentuk persegi bersisi 30 cm. Pak Udin membuat versi jumbo: setiap sisinya ditambah 10 cm. Berapa pertambahan luasnya?

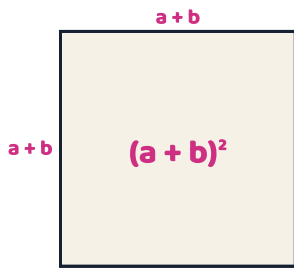
100 cm², karena $10^2 = 100$.

400 cm².

700 cm².

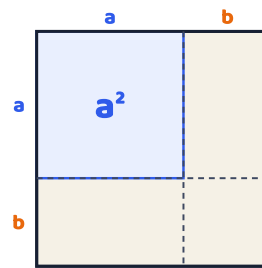
1.600 cm².

Jawabannya: 700 cm². Luas baru $(30 + 10)^2 = 40^2 = 1.600$ cm², luas lama $30^2 = 900$ cm², jadi luasnya bertambah 700 cm². Pojok kecil 10×10 hanya 100 cm². Sisa 600 cm² berasal dari dua "pita" martabak berukuran 30×10 di tepi kanan dan tepi bawah. Animasi berikut menunjukkannya.



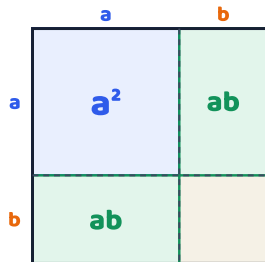
Persegi bersisi $a + b$.
Luasnya $(a + b)^2$.
Kita potong per bagian.

Langkah 1. Sebuah persegi bersisi $a + b$ mempunyai luas $(a + b)^2$. Kita hitung luasnya per bagian.



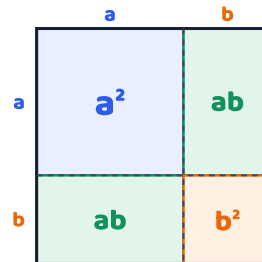
Pecah sisinya: a dan b .
Pojok kiri atas adalah persegi $a \times a = a^2$.

Langkah 2. Pecah setiap sisi menjadi a dan b . Pojok kiri atas menjadi persegi bersisi a , luasnya a^2 .



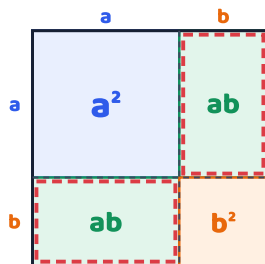
Dua persegi panjang $a \times b$.
Masing-masing luasnya ab , jadi bersama-sama $2ab$.

Langkah 3. Di kanan atas dan kiri bawah ada dua persegi panjang berukuran $a \times b$. Luas keduanya $2ab$.



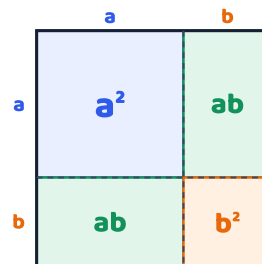
Pojok kanan bawah:
persegi $b \times b = b^2$.

Langkah 4. Pojok kanan bawah adalah persegi bersisi b , luasnya b^2 .



Kalau hanya $a^2 + b^2$...
dua persegi panjang bergaris merah ini terlupakan!

Langkah 5. Jebakan klasik: menulis $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ sama saja dengan melupakan dua persegi panjang ini.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$40^2 = 900 + 600 + 100 = 1.600$$

Langkah 6. Jumlahkan keempat bagian: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Untuk martabak Pak Udin: $30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 10 + 10^2 = 1.600$.



PERKALIAN DUA SUKU DUA

Dengan sifat distributif (atau model luas):

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

▼ Bukti dengan sifat distributif

Pandang $(x + a)$ sebagai satu pengali, lalu distribusikan dua kali:

$$(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Untuk $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, distribusikan dengan cara yang sama: $a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Untuk $(a - b)^2$, ganti b dengan $-b$: suku tengahnya menjadi $-2ab$, sedangkan $(-b)^2 = b^2$ tetap positif.



RUMUS HIDUP

Model luas $(a + b)^2$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

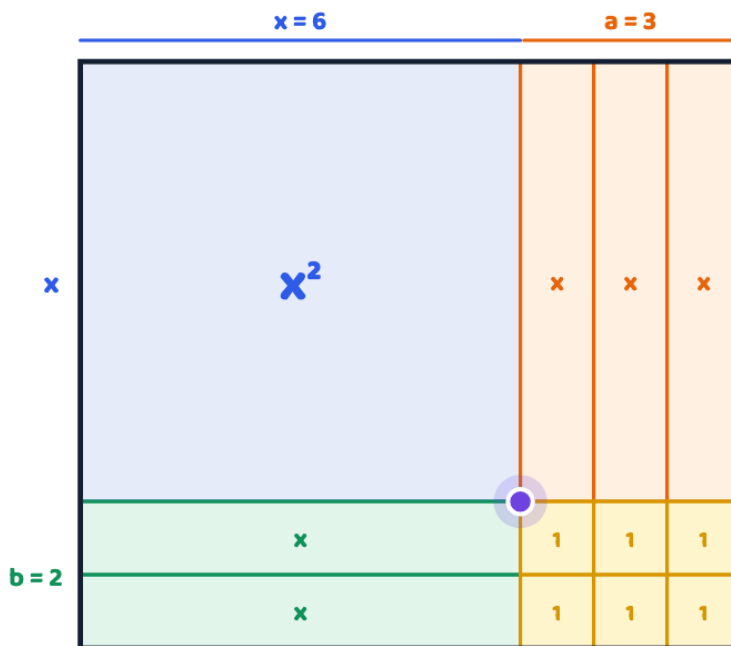
Persegi bersisi $a + b$ terbelah menjadi empat bagian: persegi a^2 , persegi b^2 , dan DUA persegi panjang ab .



Persegi $a^2 = 900$, persegi $b^2 = 100$, dan dua persegi panjang $2ab = 600$. Jumlahnya **1.600** cm^2 . Kalau kamu hanya menghitung $a^2 + b^2 = 1.000$, ada **600** cm^2 yang hilang!

Cek satuan: $\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ALJABAR-KUADRAT



👉 seret titik ungu: x melar & menyusut

$$(x + 3)(x + 2)$$

$$= x^2 + 3x + 2x + 6$$

$$= x^2 + 5x + 6$$

Jika $x = 6$:

luas utuh

$$9 \times 8 = 72$$

jumlah ubin

$$36 + 30 + 6 = 72$$

✓ selalu sama!

x^2
 x
 1
 ubin

ubin x^2
36

batang $(a + b) \cdot x$
30

kotak satuan ab
6

luas total
72

Keadaan
mengalikan

Ubin biru adalah x^2 , batang oranye dan hijau adalah x , dan kotak kuning bernilai 1. Atur a dan b , lalu seret titik ungu (atau tekan ► **Jalankan**) untuk membuat x melar dan menyusut. Ukuran ubinnya berubah, tetapi **banyaknya** ubin tidak pernah berubah. Itulah sebabnya $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ berlaku untuk setiap x . Pilih mode **Teka-teki faktor** untuk tantangan kebalikannya!

KERJAKAN BERSAMA

Ekspansi dengan tabel luas

Ekspansikan $(x + 4)(x + 3)$.

- 1 Gambar persegi panjang bersisi $x + 4$ dan $x + 3$, lalu bagi menjadi empat petak: $x \cdot x$, $x \cdot 3$, $4 \cdot x$, dan $4 \cdot 3$.
- 2 Luas keempat petak: x^2 , $3x$, $4x$, dan 12.
- 3 Jumlahkan dan kumpulkan suku sejenis: $x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$.

$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 7x + 12$. Perhatikan polanya: $7 = 4 + 3$ dan $12 = 4 \times 3$.

Ekskansikan $(2x - 3)(x + 5)$, lalu periksa hasilmu dengan $x = 1$.

1 Setiap suku di kurung pertama mengetuk setiap suku di kurung kedua: $2x \cdot x + 2x \cdot 5 + (-3) \cdot x + (-3) \cdot 5$.

2 $= 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$.

3 Cek dengan $x = 1$: ruas kiri $(2 - 3)(1 + 5) = -6$; ruas kanan $2 + 7 - 15 = -6 \checkmark$.

$$(2x - 3)(x + 5) = 2x^2 + 7x - 15.$$



AWAS JEBAKAN

$(a + b)^2$ **tidak sama** dengan $a^2 + b^2$. Coba $a = 3$ dan $b = 4$: $(3 + 4)^2 = 49$, padahal $3^2 + 4^2 = 25$. Selisihnya $24 = 2ab$, yaitu dua persegi panjang yang terlupakan.



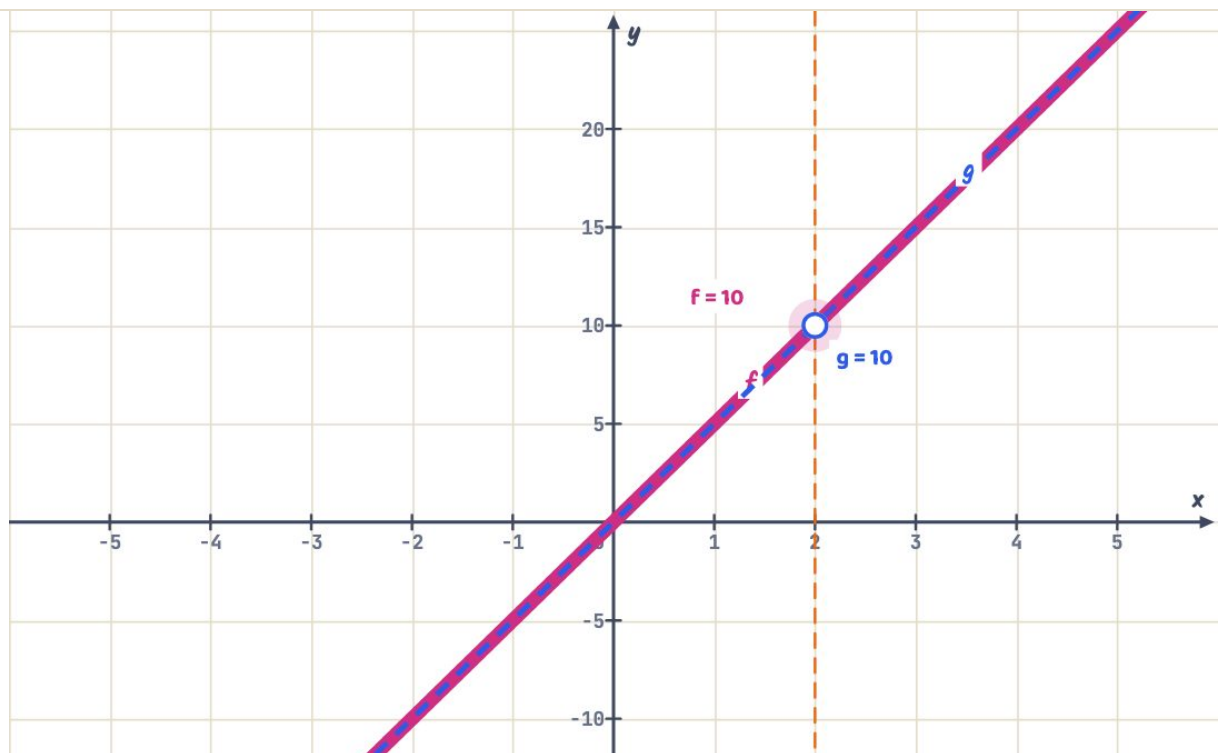
TRIK KAK LINTANG

Uji dengan angka. Setelah mengekspansi atau menyederhanakan, ganti x dengan angka kecil (misalnya 2) di soal dan di jawabanmu. Kalau hasilnya berbeda, pasti ada yang salah. Kalau sama, kemungkinan besar benar; uji sekali lagi dengan angka lain agar lebih yakin. Grafik Hidup berikut menunjukkan alasannya.

$$f(x) \stackrel{?}{=} g(x)$$

$$f(x) = 2x + 3x \quad g(x) = 5x$$

Dua ekspresi disebut setara (kembar) jika nilainya sama untuk *SETIAP* x . Di grafik, kedua kurvanya berimpit sempurna.



☒ **Kembar: grafiknya berimpit, nilainya sama untuk SEMUA x**

$f(x \text{ uji})$

10

$g(x \text{ uji})$

10

selisih $f - g$

0

Geser **Pasangan ke-** untuk menguji delapan pasangan ekspresi. Kurva magenta adalah f , kurva biru putus-putus adalah g . Seret titik magenta untuk mengganti x uji. Pada pasangan 2, coba $x = 2$: nilainya sama, padahal grafiknya berbeda! Tak perlu tahu cara menggambar kurvanya; cukup perhatikan apakah keduanya berimpit.

**ADU CEPAT****Ekspansi kilat: isi kotaknya**ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7**Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.**

Bilangan di kotak adalah $a + b$, sedangkan konstantanya ab . Contoh: $(x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10$, jadi kotaknya 3.

**LANJUT • IB & OLIMPIADE****NAIK SATU DIMENSI: $(A + B)^3$**

Model luas punya saudara tiga dimensi. Kubus bersisi $a + b$ dapat dipotong menjadi 8 balok: satu kubus a^3 , satu kubus b^3 , tiga balok $a \times a \times b$, dan tiga balok $a \times b \times b$. Jadi

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Koefisien 1, 3, 3, 1 adalah baris ke-3 segitiga Pascal. Bentuk lain yang sering berguna di olimpiade: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Contohnya, jika $a + b = 5$ dan $ab = 6$, maka $a^3 + b^3 = 125 - 90 = 35$ tanpa perlu mencari a dan b .

7.5**Faktorisasi: membungkus kembali**

Ekspansi itu seperti membuka bungkus: $3(2x + 5)$ dibuka menjadi $6x + 15$. **Faktorisasi** adalah kebalikannya, yaitu membungkus kembali sebuah jumlah menjadi perkalian. Caranya, cari sesuatu yang dimiliki **semua** suku, lalu keluarkan ke depan kurung.

**FAKTOR PERSEKUTUAN**

Jika setiap suku memuat faktor k yang sama, faktor itu dapat dikeluarkan:

$$ka + kb = k(a + b)$$

Faktor terbaik adalah **faktor persekutuan terbesar**: FPB dari koefisien-koefisiennya dikali variabel yang muncul di setiap suku, masing-masing dengan pangkat terkecilnya.

1. Cari FPB dari semua koefisien.
2. Cari variabel yang muncul di **setiap** suku, ambil pangkat terkecilnya.
3. Bagi setiap suku dengan faktor persekutuan itu, lalu tulis hasilnya di dalam kurung.
4. Cek dengan mengekspansi kembali. Hasilnya harus sama dengan soal semula.

Bahasa sederhana • Contoh gampang: $10x + 15$. Angka 10 dan 15 sama-sama habis dibagi 5. Keluarkan 5 ke depan: $5(2x + 3)$. Cek: $5 \times 2x = 10x$ dan $5 \times 3 = 15$ ✓.

Faktorkan $6x^2 + 9x$ sepenuhnya.

- 1 FPB dari 6 dan 9 adalah 3.
- 2 Variabel x ada di kedua suku; pangkat terkecilnya 1. Jadi faktor persekutuan terbesarnya $3x$.
- 3 Bagi setiap suku dengan $3x$: $6x^2 \div 3x = 2x$ dan $9x \div 3x = 3$. Hasilnya $3x(2x + 3)$.
- 4 Cek: $3x \cdot 2x + 3x \cdot 3 = 6x^2 + 9x$ ✓.

$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$. Bentuk $3(2x^2 + 3x)$ juga benar, tetapi belum "sepenuhnya" karena masih ada x yang bisa dikeluarkan.



AWAS JEBAKAN

Saat sebuah suku habis dikeluarkan, di dalam kurung tersisa angka 1, bukan nol: $4x + 4 = 4(x + 1)$, bukan $4x$ atau $4(x + 0)$. Cek dengan ekspansi: $4(x + 1) = 4x + 4$ ✓.

Hitung $47 \times 36 + 47 \times 64$ tanpa kalkulator.

- 1 Kedua suku memuat faktor 47. Keluarkan: $47 \times (36 + 64)$.
- 2 $36 + 64 = 100$, jadi hasilnya $47 \times 100 = 4.700$.

Hasilnya 4.700. Faktorisasi mengubah dua perkalian sulit menjadi satu perkalian mudah.



MATEMATIKA NUSANTARA

Di puncak **Candi Borobudur** ada tiga teras melingkar yang mengelilingi stupa induk. Teras-teras itu memuat 32, 24, dan 16 stupa berlubang. Perhatikan: semuanya kelipatan 8! Dengan faktorisasi, $32 + 24 + 16 = 8 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 8(4 + 3 + 2) = 8 \times 9 = 72$ stupa. Pola berkelipatan seperti ini memudahkan para pembangun menata stupa secara simetris di sekeliling lingkaran.

Kembalilah ke Lab Ubin di atas dan pilih **Teka-teki faktor**. Kamu diberi ekspresi seperti $x^2 + 5x + 6$ dan harus menyusunnya menjadi persegi panjang $(x + a)(x + b)$. Itu faktorisasi dengan tangan! Di Bab 11 kamu akan memfaktorkan bentuk seperti ini secara sistematis.

7.6 Trik sulap bilangan dibongkar aljabar

Setiap trik "pikirkan sebuah bilangan" bekerja dengan cara yang sama: perintah-perintahnya disusun agar kotak misteri x **lenyap** (hasilnya selalu sama) atau **mudah dibongkar** (hasilnya bisa diubah kembali menjadi bilanganmu). Lab berikut menggambarkan x sebagai kantong misteri dan konstanta sebagai permen.

LAB MINI Mesin sulap: kantong misteri dan permen

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7

x	$\times 2$	$+ 10$	$\div 2$	$- x$
-----	------------	--------	----------	-------

kantong misteri (x)


permen (satuan)
(tidak ada permen)

Aljabar: $2x$

Bilanganmu: $7 \rightarrow 14$

Langkah 1: Kalikan 2

bilangan awal
7

nilai sekarang
14

bentuk aljabar
 $2x$

langkah
1 dari 4

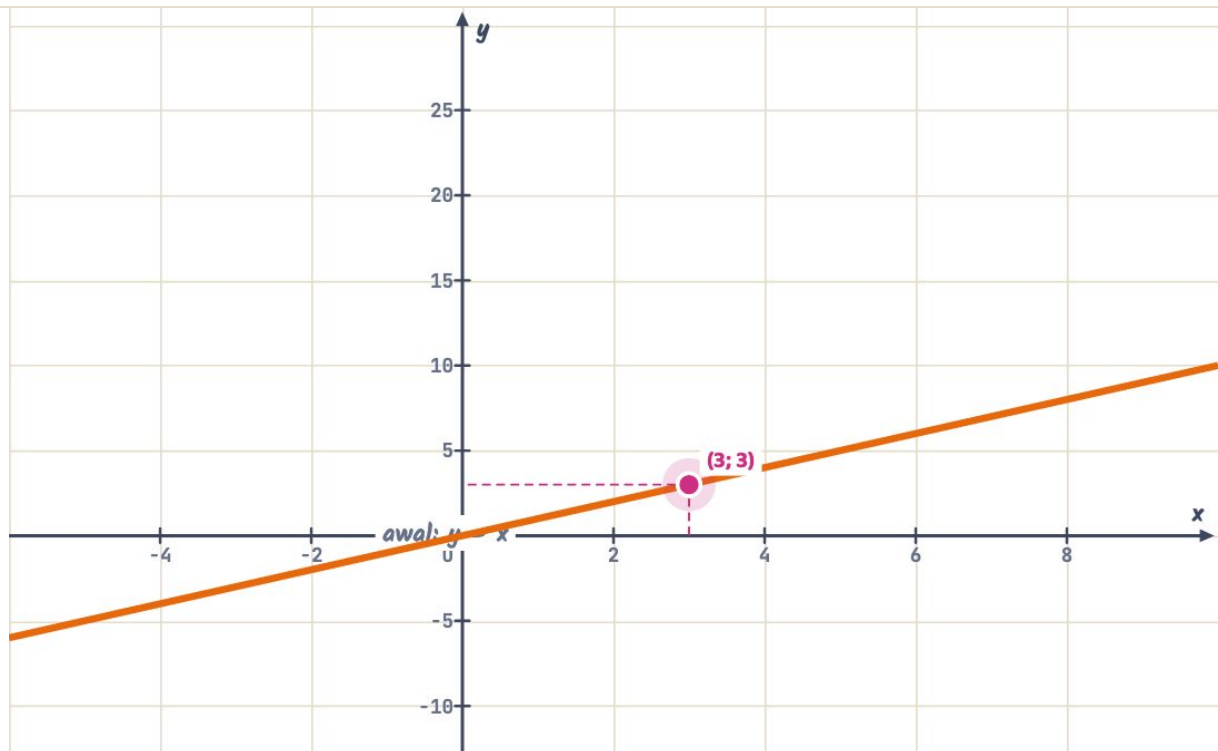
Pilih trik dan bilanganmu, lalu tekan ► **Jalankan**. Perhatikan kantong-kantongnya: berapa yang tersisa di akhir? Pada trik "Tebak bilanganmu", mengapa Ancil cukup membuang angka 0 di belakang hasilmu?

Kita juga bisa melihat trik yang sama sebagai **grafik**. Untuk setiap bilangan awal, gambar titik (bilangan awal; nilai sekarang). Semua titik itu membentuk garis. Saat trik berjalan, garisnya berputar, naik, lalu rebah mendatar, tanda bahwa hasilnya tidak lagi bergantung pada bilangan awal.

$$x \rightarrow 2x \rightarrow 2x + 10 \rightarrow x + 5 \rightarrow 5$$

$$\text{nilai} = 1x + 0$$

Setiap titik di garis oranye adalah pasangan (bilangan awal; nilai sekarang). Saat sulap berjalan, garisnya berputar, naik, lalu rebah mendatar.



Mulai: nilai sekarang = bilangan awal, jadi titiknya di garis $y = x$

Langkah

1. Pikirkan bilangan

Bentuk aljabar

x

Nilai untuk bilanganmu

3

Tekan ► **Jalankan** atau geser **Langkah sulap**. Garis oranye memuat semua bilangan awal sekaligus. Seret titik magenta untuk memilih bilanganmu. Saat garisnya rebah mendatar, berapa pun bilanganmu, nilainya 5. (Garis seperti ini akan kamu pelajari lebih dalam di Bab 9.)

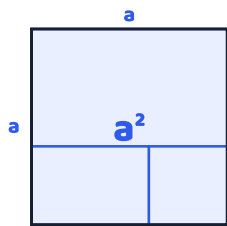
Pilih bilangan tiga angka yang angka pertama dan terakhirnya berselisih minimal 2, misalnya 741. Balik urutan angkanya (147), lalu kurangkan yang besar dengan yang kecil: $741 - 147 = 594$. Balik lagi hasilnya (495) dan jumlahkan: $594 + 495 = 1.089$. Buktikan bahwa hasilnya selalu 1.089.

- 1 Tulis bilangannya sebagai $100a + 10b + c$ dengan $a > c$. Bilangan yang dibalik adalah $100c + 10b + a$.
- 2 Selisihnya $99a - 99c = 99(a - c)$. Jadi hasil pengurangan selalu kelipatan 99: 198, 297, 396, ..., 891.
- 3 Misalkan $k = a - c$. Bilangan $99k = 100(k - 1) + 10 \cdot 9 + (10 - k)$, jadi angka-angkanya $k - 1$, 9, dan $10 - k$.
- 4 Dibalik menjadi $100(10 - k) + 90 + (k - 1)$. Jumlahkan: $100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1.089$. Variabel k lenyap!

Hasilnya selalu 1.089, apa pun bilangan awalmu. Kuncinya menuliskan nilai tempat dengan aljabar: $100a + 10b + c$.

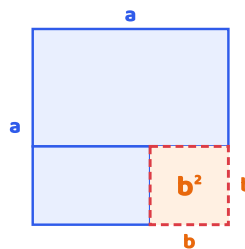
Identitas cerdik untuk berhitung kilat

Ada satu identitas lagi yang membuat orang mengira kamu kalkulator berjalan. Potong persegi kecil dari pojok persegi besar, lalu susun ulang sisanya:



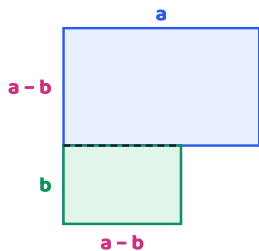
Persegi bersisi a .
Luasnya a^2 .

Langkah 1. Mulai dari persegi bersisi a . Luasnya a^2 .



Potong persegi kecil
bersisi b di pojoknya.
Sisa luas: $a^2 - b^2$

Langkah 2. Potong persegi kecil bersisi b dari pojok kanan bawah. Luas yang tersisa $a^2 - b^2$.



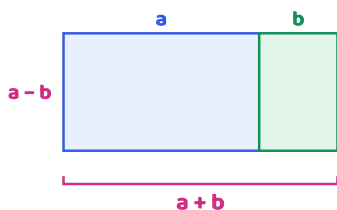
Sisanya berbentuk L.
Potong menjadi dua
persegi panjang.

Langkah 3. Sisanya berbentuk huruf L. Potong menjadi dua persegi panjang: yang atas berukuran $a \times (a - b)$, yang bawah berukuran $(a - b) \times b$.



Putar yang hijau 90° ,
lalu tempel di kanan.
Luasnya tidak berubah.

Langkah 4. Putar persegi panjang hijau 90° dan tempelkan di sebelah kanan. Memutar dan menggeser tidak mengubah luas.



Jadilah persegi panjang
 $(a + b) \times (a - b)$.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$52 \times 48 = 50^2 - 2^2 = 2.496$$

Langkah 5. Hasilnya persegi panjang dengan panjang $a + b$ dan lebar $a - b$. Jadi $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.



SELISIH DUA KUADRAT

Untuk semua bilangan a dan b ,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Dua bilangan yang sama jauhnya dari m mempunyai hasil kali $(m + d)(m - d) = m^2 - d^2$. Contoh:
 $99 \times 101 = 100^2 - 1^2 = 9.999$, dan $99^2 = (99^2 - 1^2) + 1 = 98 \times 100 + 1 = 9.801$.

▼ Bukti dengan ekspansi

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$. Suku $-ab$ dan $+ba$ saling menghapus, sehingga hanya dua kuadrat yang tersisa.

KERJAKAN BERSAMA

Membongkar teka-teki Ancil dari Bab 6

Pikirkan sebuah bilangan bulat n . Kuadratkan bilangan sesudahnya, kurangi dengan kuadrat bilangan sebelumnya, lalu bagi 4. Benarkah hasilnya selalu n , bahkan untuk bilangan negatif?

- 1 Bilangan sesudahnya $n + 1$ dan bilangan sebelumnya $n - 1$. Kita perlu menghitung $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$.
- 2 Pakai selisih dua kuadrat: $[(n + 1) + (n - 1)][(n + 1) - (n - 1)] = 2n \cdot 2 = 4n$.
- 3 Cara ekspansi memberi hasil yang sama: $(n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) = 4n$. Dibagi 4, hasilnya n .
- 4 Cek dengan $n = -5$: $(-4)^2 - (-6)^2 = 16 - 36 = -20$, dan $-20 : 4 = -5 \checkmark$.

Hasilnya selalu n , untuk bilangan bulat apa pun (bahkan untuk pecahan). Kali ini kotak misterinya tidak lenyap, tetapi terbungkus rapi menjadi $4n$. Ancil tinggal membaginya dengan 4.

$$(m + d)(m - d) = m^2 - d^2$$

Persegi panjang $(m + d) \times (m - d)$ luasnya sama dengan persegi m^2 dikurangi persegi kecil d^2 . Jadi $52 \times 48 = 50^2 - 2^2$.

m Bilangan tengah m cm

d Jarak d cm

P Luas persegi panjang cm^2

LUAS PERSEGI PANJANG

2.496

cm^2

✨ m kelipatan 10: m^2 gampang dihitung di kepala

Persegi panjang 52×48 : luasnya $50^2 - 2^2 = 2.500 - 4 = 2.496 \text{ cm}^2$. Tanpa perkalian bersusun!

Cek satuan: $\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ALJABAR-KEMBAR



TRIK KAK LINTANG

Kuadrat bilangan berakhiran 5. Bilangan seperti 35 dapat ditulis $10a + 5$ dengan $a = 3$. Ekspansikan: $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a(a + 1) + 25$. Jadi kalikan angka puluhannya dengan bilangan sesudahnya, lalu tempelkan 25 di belakangnya: 35^2 : $3 \times 4 = 12$, hasilnya 1.225. Coba 65^2 : $6 \times 7 = 42$, hasilnya 4.225!



ADU CEPAT

Kuadrat kilat dengan $(m \pm d)^2$

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-7

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pecah menjadi kelipatan 10 $\pm$ sedikit: $49^2 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$, dan $102^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$.



IDENTITAS SOPHIE GERMAIN

Matematikawan Prancis Sophie Germain (1776–1831) memakai trik "tambah lalu kurangi" yang cerdas:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2).$$

Langkah pertama menambahkan $4a^2b^2$ agar terbentuk kuadrat sempurna, lalu mengurangnya lagi sebagai $(2ab)^2$. Setelah itu, selisih dua kuadrat menyelesaikan sisanya. Akibatnya, $n^4 + 4$ dengan $n > 1$ **tidak pernah prima**, karena $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ dan faktor keduanya $(n - 1)^2 + 1 > 1$. Contoh: $3^4 + 4 = 85 = 17 \times 5$.

MITOS

"Huruf x selalu menyembunyikan satu bilangan rahasia."

MITOS

"
 $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
 , kan tinggal kuadratkan masing-masing."

FAKTA

Dalam persamaan, ya. Tetapi pada identitas seperti
 $2(x + 3) = 2x + 6$
 ,
 x
 boleh diisi bilangan apa saja dan kedua ruas tetap sama. Karena nilainya boleh berubah-ubah, huruf ini disebut **variabel**.
 .

FAKTA

Coba
 $a = 3$
 ,
 $b = 4$
 :
 $7^2 = 49$
 , sedangkan
 $9 + 16 = 25$
 . Selisih 24 itu adalah
 $2ab$
 , yaitu dua persegi panjang yang terlupakan di model luas.

MITOS

"Aljabar cuma permainan huruf, tidak berguna dalam hidup sehari-hari."

FAKTA

Tarif ojek di aplikasi, rumus di lembar kerja, dan skor gim semuanya ditulis dalam bahasa aljabar. Aljabar adalah cara menulis satu aturan yang berlaku untuk jutaan bilangan sekaligus.

Cek Cepat

Bentuk sederhana dari $4x + 3 - x + 5$ adalah...

$11x$

$5x + 8$

$3x + 8$

$3x + 2$

Hasil ekspansi $x(x + 6)$ adalah...

$x^2 + 6x$

$x^2 + 6$

$2x + 6$

$7x$

Faktor persekutuan terbesar dari $6x^2$ dan $9x$ adalah...

3

x

$18x^2$

$3x$

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. A • 3. D

Tantangan Rumah: sulap kalender

Bahan: kalender bulanan (kalender dinding atau di HP), pensil, kertas, kalkulator boleh.

1. Pilih kotak berukuran 3×3 tanggal pada kalender (9 tanggal).
2. Jumlahkan kesembilan tanggal itu. Bandingkan dengan $9 \times$ tanggal di tengahnya.
3. Sekarang pilih kotak 2×2 tanggal. Kalikan tanggal kiri atas dengan kanan bawah, lalu kanan atas dengan kiri bawah. Hitung selisih kedua hasil kali itu.
4. Ulangi langkah 1–3 di tempat lain dan di bulan lain. Catat hasilnya dalam tabel.
5. Pamerkan sebagai trik sulap: minta temanmu memilih kotak 3×3 diam-diam dan menyebut tanggal tengahnya. Kamu langsung tahu jumlahnya!

Pertanyaan: Mengapa jumlah kotak 3×3 selalu 9 kali tanggal tengahnya, dan selisih pada kotak 2×2 selalu 7? Petunjuk: misalkan tanggal tengah n . Tanggal di atasnya $n - 7$, di kirinya $n - 1$. Tuliskan kesembilan tanggal dalam n , lalu sederhanakan.

RINGKASAN KILAT **Bab 7 dalam 3 menit**

Kamu sekarang bisa...

- memakai huruf sebagai **variabel** (kotak misteri) dan menghitung nilai sebuah **ekspresi aljabar**
- menerjemahkan cerita sehari-hari, seperti tarif ojek dan paket kuota, menjadi ekspresi aljabar
- menyederhanakan ekspresi dengan mengumpulkan **suku sejenis**
- melakukan **ekspansi** dengan sifat distributif dan model luas, serta **memfaktorkan** dengan faktor persekutuan
- membongkar trik sulap bilangan dan berhitung kilat dengan identitas $(a + b)^2$ dan $a^2 - b^2$

Istilah kunci

Variabel

ekspresi aljabar

substitusi

biaya dasar

konstanta

koefisien

suku

suku sejenis

ekspansi

Faktorisasi

faktor persekutuan terbesar

Rumus penting

$$T = d + p \times k$$

Ongkos ojek daring. Ongkos ojek = biaya dasar (dibayar sekali di awal) ditambah tarif per kilometer dikali jarak tempuh.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Model luas $(a + b)^2$. Persegi bersisi $a + b$ terbelah menjadi empat bagian: persegi a^2 , persegi b^2 , dan DUA persegi panjang ab .

$$(m + d)(m - d) = m^2 - d^2$$

Perkalian kembar: selisih dua kuadrat. Persegi panjang $(m + d) \times (m - d)$ luasnya sama dengan persegi m^2 dikurangi persegi kecil d^2 . Jadi $52 \times 48 = 50^2 - 2^2$.

⚠ Jangan sampai terjebak

- $x + x = 2x$, bukan x^2 ; begitu pula $2x + 3y$ tidak bisa ditulis $5xy$.
- Tanda minus di depan kurung ikut mengalikan setiap suku di dalamnya: $-(x - 3) = -x + 3$, bukan $-x - 3$.
- $(a + b)^2$ tidak sama dengan $a^2 + b^2$.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=7

🧩 Teka-teki untuk Bab 8

Di pasar, Bu Darmi memakai timbangan dua lengan. Di piring kiri ia menaruh 3 kantong gula pasir yang sama beratnya dan anak timbangan 2 kg. Di piring kanan ada 1 kantong gula yang sama dan anak timbangan 8 kg. Ajaib, timbangannya seimbang! Berapa kilogram isi satu kantong gula?

▼ Intip petunjuk

Dalam bahasa aljabar, ceritanya menjadi $3x + 2 = x + 8$. Timbangan tetap seimbang jika kamu mengambil benda yang sama dari kedua piring. Coba ambil 1 kantong dan 2 kg dari setiap piring. Apa yang tersisa? Bab 8 mengajarmu menyelesaikan persamaan dengan cara "timbangan" ini.

08 Persamaan & Pertidaksamaan: Seni Menjaga Timbangan

Bagaimana Bu Darmi tahu berat sekantong gula tanpa membukanya? Mengapa tanda " $<$ " tiba-tiba berbalik arah ketika dikali bilangan negatif? Semua rahasianya tersimpan di sebuah timbangan pasar.

Setelah bab ini, kamu bisa

- memandang persamaan sebagai **timbangan seimbang** dan menyelesaikan persamaan linear satu variabel dengan operasi yang sama pada kedua ruas;
- menyelesaikan persamaan yang memuat **kurung dan pecahan**, serta mengenali persamaan yang tidak punya penyelesaian atau punya tak hingga banyak penyelesaian;
- mengubah **soal cerita** (parkir, kuota internet, nilai KKM, umur, digit) menjadi model persamaan atau pertidaksamaan;
- menyelesaikan **pertidaksamaan linear**, menggambarinya di garis bilangan, dan menjelaskan mengapa tandanya **dibalik** saat dikali bilangan negatif;
- menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan **nilai mutlak** sederhana sebagai soal jarak.

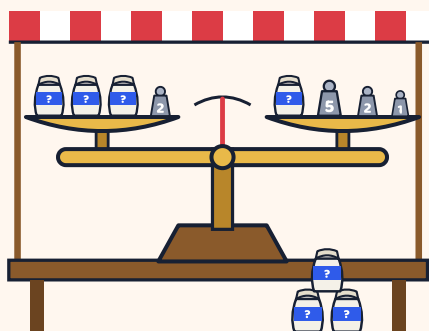
TEKA-TEKI TIMBANGAN BU DARMi

KOMIK • 4 PANEL

Minggu pagi di lapak gula Bu Darmi

DIMAS

Kak, ini teka-teki Bu Darmi! Kiri: 3 kantong gula + 2 kg. Kanan: 1 kantong yang sama + 8 kg. Seimbang!

**DIMAS**

Gampang! $8 - 2 = 6$, dibagi 3 kantong. Jadi tiap kantong 2 kg!

AYU

Cek dulu: kiri $3 \times 2 + 2 = 8$, kanan $2 + 8 = 10$. Tidak seimbang! Kantong di piring kanan kamu lupa.



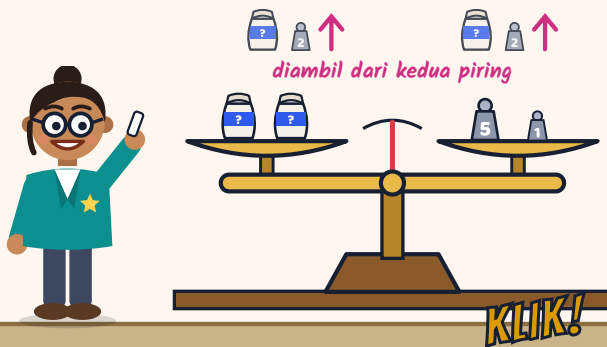
$$(8 - 2) : 3 = 2$$

$$8 \neq 10 \text{ X}$$



KAK LINTANG

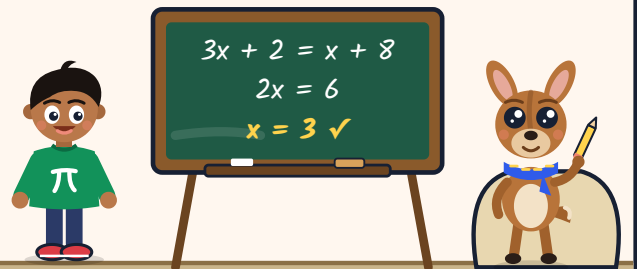
Ambil 1 kantong dan 2 kg dari **kedua** piring.
Tersisa 2 kantong = 6 kg. Jadi satu kantong 3 kg!

**Ancil muncul dari balik karung gula...****ANCIL**

Cek: kiri $3 \times 3 + 2 = 11$, kanan $3 + 8 = 11$. Pas! Aturan emasnya: apa pun yang kamu lakukan pada satu piring, lakukan juga pada piring lainnya.

DIMAS

Jadi persamaan itu timbangan yang harus selalu seimbang!

**Tebak Dulu!**

Timbangan Bu Darmi seimbang: 3 kantong gula + 2 kg di kiri, 1 kantong + 8 kg di kanan.
Tindakan manakah yang membuat timbangan itu tetap seimbang?

Mengambil 1 kantong dari piring kiri dan 2 kg dari piring kanan.

Mengambil 2 kg dari piring kiri, lalu menaruhnya di piring kanan.

Menggandakan isi kedua piring: semua benda di kiri dan di kanan dibuat dua kali lipat.

Menambah 1 kantong gula di piring kiri saja.

Jawabannya: menggandakan isi kedua piring. Kedua piring sama-sama dikali 2: kiri menjadi 6 kantong + 4 kg (22 kg), kanan 2 kantong + 16 kg (juga 22 kg). Pilihan pertama mengambil benda yang *berbeda* (3 kg dari kiri, hanya 2 kg dari kanan), jadi timbangan miring. Rahasiannya: perlakuan pada kedua piring harus **sama persis**, entah menambah, mengurangi, mengali, atau membagi.

8.1 Persamaan adalah timbangan yang seimbang

Di Bab 7 kamu belajar menulis ekspresi seperti $3x + 2$. Begitu ekspresi itu diberi tanda sama dengan, misalnya $3x + 2 = 11$, ia berubah menjadi sebuah **persamaan**: kalimat yang menyatakan bahwa dua ruas bernilai sama,

persis seperti dua piring timbangan yang seimbang.



DEFINISI

Persamaan adalah kalimat matematika yang memuat tanda "=". Bagian di kiri tanda disebut **ruas kiri**, bagian di kanannya **ruas kanan**. **Persamaan linear satu variabel** (PLSV) memuat satu variabel berpangkat satu dan dapat ditulis dalam bentuk

$$ax + b = c, \quad a \neq 0.$$

Nilai variabel yang membuat kedua ruas sama besar disebut **penyelesaian** (atau akar) persamaan itu.

Bahasa sederhana • Bayangkan kantong gula yang beratnya belum kamu ketahui. Huruf x adalah nama untuk berat itu. Menyelesaikan persamaan artinya menemukan isi kantong **tanpa merobeknya**, cukup dengan menambah atau mengambil benda di timbangan.

Bagaimana cara menemukan penyelesaian tanpa menebak-nebak? Timbangan memberi kita aturan yang sangat sederhana.



ATURAN EMAS TIMBANGAN (SIFAT KESETARAAN)

Penyelesaian sebuah persamaan **tidak berubah** jika kedua ruasnya

- ditambah bilangan yang sama, atau dikurangi bilangan yang sama;
- dikali bilangan yang sama yang **bukan nol**, atau dibagi bilangan yang sama yang bukan nol.

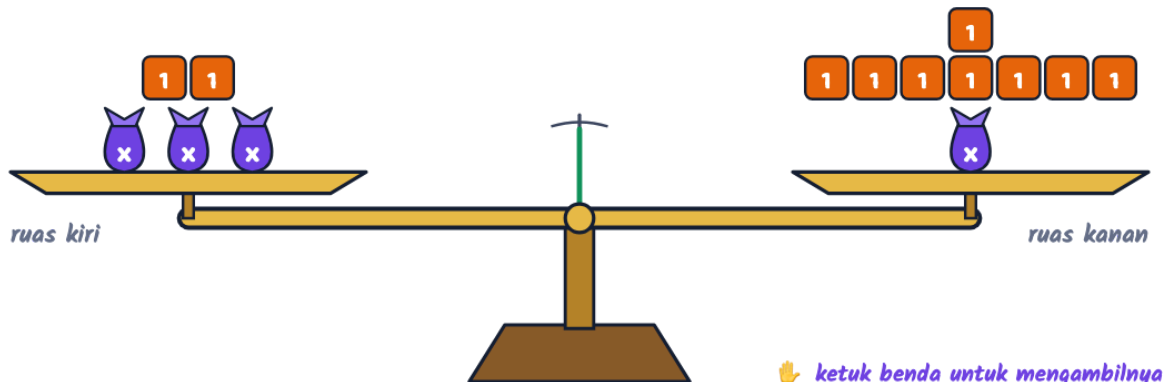
Dua persamaan yang penyelesaiannya sama disebut **persamaan setara** (ekuivalen), ditulis dengan tanda $\Leftrightarrow$. Contoh: $3x + 2 = 11 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$.

▼ Mengapa dikali nol dilarang?

Persamaan $x + 1 = 5$ hanya dipenuhi oleh $x = 4$. Jika kedua ruasnya dikali 0, kamu mendapat $0 = 0$, yang benar untuk *setiap* x . Tiba-tiba $x = 100$ pun "lolos", padahal $100 + 1 \neq 5$. Informasi tentang x lenyap, sehingga persamaan barunya tidak setara lagi. Membagi dengan 0 bahkan tidak terdefinisi sama sekali. Itulah sebabnya aturan emas selalu berbunyi "bukan nol".

$$3x + 2 = x + 8$$

Ketuk benda untuk mengambilnya, atau pakai tombol di bawah.



Tulisan aljabar

$$3x + 2 = x + 8$$

Keadaan

seimbang ✓

Langkah

0

Soal pembukanya adalah teka-teki Bu Darmi, $3x + 2 = x + 8$. Setiap kantong ungu berisi x kotak, dan isinya rahasia. **Ketuk** sebuah benda untuk mengambilnya dari satu piring saja, lalu lihat timbangannya miring (dan tanda "=" berubah menjadi "<" atau ">"). Pakai tombol **dari kedua piring** dan **÷ Bagi** sampai tersisa satu kantong di satu piring. Berapa isi kantongnya? Tekan untuk soal baru.



TAMU DARI MASA LALU

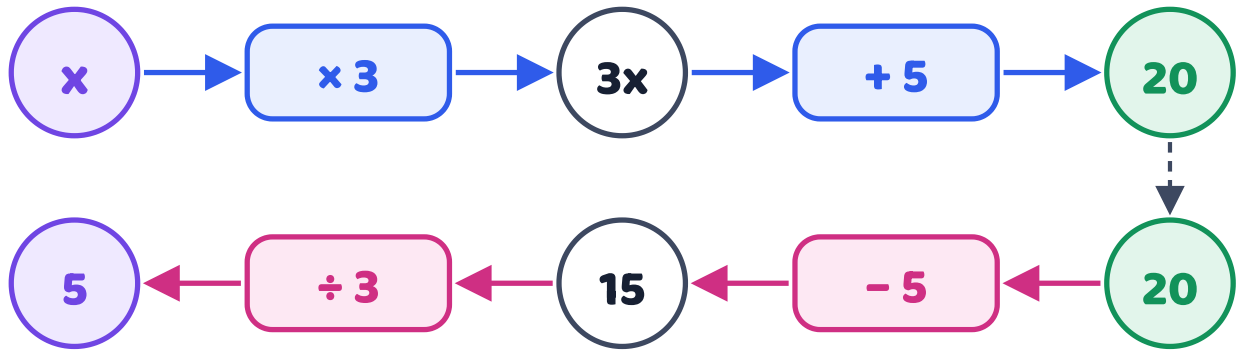
Kata *aljabar* berasal dari judul kitab karya Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (±780–850 M) dari Baghdad, *al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala*. *Al-jabr* berarti "memulihkan": suku yang dikurangkan dipindahkan ke ruas lain dengan menambahkannya pada kedua ruas. *Al-muqabala* berarti "menyeimbangkan": suku yang sama dihapus dari kedua ruas, persis seperti mengambil kantong yang sama dari kedua piring timbangan. Tanda "=" baru muncul berabad-abad kemudian. Robert Recorde dari Wales memperkenalkannya pada tahun 1557 dengan alasan yang manis: tidak ada dua benda yang lebih sama daripada dua garis sejajar yang sama panjang.

8.2

Menyelesaikan persamaan: membuka bungkus kado

Perhatikan persamaan $3x + 5 = 20$. Bayangkan x adalah hadiah yang dibungkus dua lapis: mula-mula dikali 3, lalu ditambah 5. Untuk mengambil hadiahnya, kita membuka bungkus dari **lapisan terluar** dengan **operasi invers** (kebalikan): kebalikan "tambah 5" adalah "kurangi 5", dan kebalikan "kali 3" adalah "bagi 3".

Membungkus: yang dialami x



Membuka: urutannya dibalik, operasinya juga dibalik

Untuk menyelesaikan $3x + 5 = 20$: kurangi 5 dulu ($3x = 15$), baru bagi 3 ($x = 5$). Yang terakhir dibungkus, pertama dibuka.



TRIK KAK LINTANG

Pagi hari kamu memakai kaus kaki dulu, baru sepatu. Pulang sekolah, urutannya dibalik: lepas sepatu dulu, baru kaus kaki. Menyelesaikan persamaan juga begitu. Operasi yang **terakhir** dikenakan pada x harus dibuka **pertama**. Setelah selesai, selalu **cek** dengan memasukkan jawabanmu ke persamaan awal. Dua detik mengecek bisa menyelamatkan nilai ulanganmu!

Kalau langkah ini dilakukan pada bentuk umum $ax + b = c$, hasilnya adalah sebuah rumus. Geser slidernya dan lihat setiap langkah ikut berubah.

$$ax + b = c \implies x = \frac{c - b}{a}$$

Buka bungkusnya dari luar ke dalam: kurangi kedua ruas dengan b , lalu bagi kedua ruas dengan a .



PENYELESAIAN X

3

✨ penyelesaian bulat

Persamaannya $3x + (2) = 11$. Kurangi kedua ruas dengan **2**: $3x = 9$. Bagi kedua ruas dengan **3**: $x = 3$. Cek: $3 \times x + (2) = 11$, sama dengan ruas kanan.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PERSAMAAN-LINEAR

CONTOH Buku tulis dan pulpen

Ayu membeli 3 buku tulis yang harganya sama dan sebuah pulpen seharga Rp4.000. Ia membayar Rp19.000. Berapa harga satu buku tulis?

- 1 Misalkan harga satu buku b rupiah. Modelnya: $3b + 4.000 = 19.000$.
- 2 Kurangi kedua ruas dengan 4.000: $3b = 15.000$.
- 3 Bagi kedua ruas dengan 3: $b = 5.000$. Cek: $3 \times 5.000 + 4.000 = 19.000 \checkmark$.

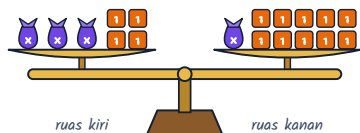
Harga satu buku tulis Rp5.000.

Variabel di kedua ruas

Bagaimana kalau kantong misteri ada di **kedua** piring, seperti $3x + 4 = x + 10$? Strateginya tetap sama: ambil benda yang sama dari kedua piring sampai semua kantong berkumpul di satu sisi dan semua kotak di sisi lain.

Ikuti animasinya.

$$3x + 4 = x + 10$$

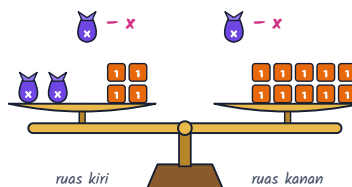


Langkah 1. Persamaan $3x + 4 = x + 10$ sebagai timbangan: kiri 3 kantong misteri dan 4 kotak, kanan 1 kantong dan 10 kotak. Timbangannya seimbang.

$$3x + 4 = x + 10$$

ambil x dari kedua ruas

$$2x + 4 = 10$$



Langkah 2. Ambil 1 kantong dari **kedua** piring. Timbangan tetap seimbang: $2x + 4 = 10$.

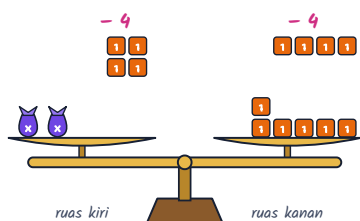
$$3x + 4 = x + 10$$

ambil x dari kedua ruas

$$2x + 4 = 10$$

ambil 4 dari kedua ruas

$$2x = 6$$



Langkah 3. Ambil 4 kotak dari kedua piring. Sekarang semua kantong di kiri dan semua kotak di kanan: $2x = 6$.

$$3x + 4 = x + 10$$

ambil x dari kedua ruas

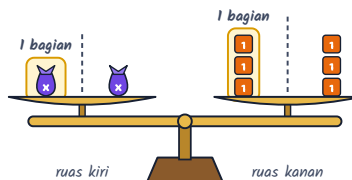
$$2x + 4 = 10$$

ambil 4 dari kedua ruas

$$2x = 6$$

bagi kedua ruas dengan 2

$$x = 3$$



Langkah 4. Bagi isi tiap piring menjadi 2 bagian yang sama. Satu bagian kiri (1 kantong) seimbang dengan satu bagian kanan (3 kotak): $x = 3$.

$$3x + 4 = x + 10$$

ambil x dari kedua ruas

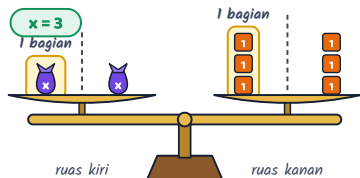
$$2x + 4 = 10$$

ambil 4 dari kedua ruas

$$2x = 6$$

bagi kedua ruas dengan 2

$$x = 3$$



Langkah 5. Cek ke persamaan awal: ruas kiri $3 \cdot 3 + 4 = 13$, ruas kanan $3 + 10 = 13$. Sama! Setiap kantong berisi 3 kotak.

$$\text{Cek: } 3 \cdot 3 + 4 = 13$$

$$3 + 10 = 13 \checkmark \text{ seimbang!}$$

Saat variabel ada di kedua ruas, kumpulkan suku x di ruas yang koefisiennya lebih besar. Dengan begitu koefisien x tetap positif dan kamu terhindar dari kesalahan tanda.

Celengan Dimas berisi Rp5.000 dan setiap hari ia menabung Rp3.000. Celengan Ayu sudah berisi Rp21.000 dan setiap hari ia menabung Rp1.000. Setelah berapa hari isi celengan mereka sama?

- 1 Misalkan banyak hari h . Celengan Dimas: $5.000 + 3.000h$. Celengan Ayu: $21.000 + 1.000h$.
- 2 Samakan: $5.000 + 3.000h = 21.000 + 1.000h$.
- 3 Kurangi kedua ruas dengan $1.000h$ dan dengan 5.000: $2.000h = 16.000$, jadi $h = 8$.
- 4 Cek: Dimas $5.000 + 24.000 = 29.000$, Ayu $21.000 + 8.000 = 29.000$ ✓.

Setelah 8 hari, isi celengan keduanya sama, yaitu Rp29.000. Sesudah itu celengan Dimas lebih banyak.



AWAS JEBAKAN

Urutan membuka bungkus itu penting: pada $3x + 2 = 11$, kurangi 2 dulu, baru bagi 3. Kalau kamu membagi 11 dengan 3 lalu mengurangi 2, hasilnya $\approx 1,67$, dan itu salah. Jika ingin membagi dulu, **semua suku** harus ikut dibagi: $x + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, sehingga $x = 3$. Hasilnya sama, tetapi jalannya lebih repot.



"PINDAH RUAS" ITU JALAN PINTAS, BUKAN SIHIR

Kamu mungkin pernah mendengar "pindah ruas, ganti tanda". Sebenarnya itu singkatan dari aturan emas. Menulis $3x + 2 = 11 \Rightarrow 3x = 11 - 2$ sama dengan mengurangi kedua ruas dengan 2. Namun, faktor pengali tidak "ganti tanda": $3x = 9$ menjadi $x = 9 : 3$, bukan $x = 9 - 3$ dan bukan $x = -9 : 3$. Kalau ragu, kembalilah ke timbangan.



ADU CEPAT

Selesaikan $ax + b = c$

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi b dari kedua ruas dulu, baru bagi dengan a. Contoh: $4x - 3 = 21 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$.

8.3 Persamaan dengan kurung dan pecahan

Persamaan di dunia nyata jarang serapi $ax + b = c$. Ada kurung, ada pecahan, ada desimal. Kabar baiknya: semuanya bisa "dirapikan" dulu menjadi bentuk $ax + b = c$, lalu diselesaikan seperti biasa.

Kurung dibuka dengan sifat distributif yang kamu pelajari di Bab 7. Misalnya $4(x - 3) - 2(x + 1) = 10$ menjadi $4x - 12 - 2x - 2 = 10$, yaitu $2x - 14 = 10$, sehingga $2x = 24$ dan $x = 12$. Perhatikan tanda minus di depan kurung kedua: $-2(x + 1) = -2x - 2$.

Pecahan paling mudah diusir dengan mengalikan kedua ruas dengan **KPK penyebut**. Bentuk desimal pun begitu: $0,2x + 1,5 = 0,5x - 0,3$ dikali 10 menjadi $2x + 15 = 5x - 3$, sehingga $18 = 3x$ dan $x = 6$.

Bahasa sederhana • Pecahan itu seperti potongan kue yang tidak sama besar. Kalau semua suku dikali KPK penyebutnya, semua potongan berubah menjadi kue utuh, dan persamaannya jadi jauh lebih ramah.

COBA SENDIRI Dua pecahan sekaligus

Selesaikan $\frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{4} = 2$.

- 1 KPK dari 3 dan 4 adalah 12. Kalikan **semua** suku dengan 12: $4(x+1) - 3(x-2) = 24$.
- 2 Buka kurung dengan hati-hati: $4x + 4 - 3x + 6 = 24$. Perhatikan $-3 \times (-2) = +6$.
- 3 Sederhanakan: $x + 10 = 24$, jadi $x = 14$.
- 4 Cek: $\frac{15}{3} - \frac{12}{4} = 5 - 3 = 2 \checkmark$.

$x = 14$. **Kunci sukses:** kalikan semua suku dengan KPK, dan beri kurung pada pembilang yang berupa penjumlahan.



AWAS JEBAKAN

Saat mengalikan dengan KPK, kalikan **semua suku di kedua ruas**, termasuk suku yang tidak berpenyebut. Pada $\frac{x}{2} + 3 = 7$, mengalikan dengan 2 menghasilkan $x + 6 = 14$, bukan $x + 3 = 14$. Begitu pula pembilang $x - 2$ harus dikurung: $-3(x - 2)$, bukan $-3x - 2$.

Ada kejutan kecil. Tidak semua persamaan linear punya tepat satu penyelesaian. Setelah dirapikan, sebuah persamaan bisa berakhir dengan tiga "nasib" berbeda:

Bentuk akhir	Contoh	Banyak penyelesaian
$x = \text{suatu bilangan}$	$2x + 1 = 7 \Rightarrow x = 3$	tepat satu
$0 = \text{bilangan bukan nol}$	$x + 3 = x + 5 \Rightarrow 0 = 2$	tidak ada (mustahil)
$0 = 0$	$2(x + 3) = 2x + 6 \Rightarrow 0 = 0$	tak hingga: semua bilangan memenuhi

**PERSAMAAN BERPARAMETER**

Bagaimana nasib $ax = b$ jika a dan b belum diketahui? Jika $a \neq 0$, ada tepat satu penyelesaian $x = \frac{b}{a}$. Jika $a = 0$ dan $b = 0$, persamaannya $0 = 0$: semua x memenuhi. Jika $a = 0$ dan $b \neq 0$, persamaannya $0 = b$: mustahil. Contoh gaya olimpiade: $(m - 2)x = m^2 - 4$. Untuk $m \neq 2$, bagi dengan $m - 2$:

$$x = \frac{(m - 2)(m + 2)}{m - 2} = m + 2.$$

Untuk $m = 2$, persamaannya menjadi $0 = 0$, sehingga setiap bilangan adalah penyelesaian. Sebaliknya, $(m - 2)x = m + 1$ dengan $m = 2$ menjadi $0 = 3$: tidak ada penyelesaian. Selalu periksa kapan pembagimu bernilai nol!

MITOS

"Pindah ruas artinya tandanya selalu dibalik."

MITOS

"Setiap persamaan pasti punya tepat satu jawaban."

FAKTA

Itu hanya berlaku untuk suku yang ditambahkan atau dikurangkan. Faktor pengali berpindah menjadi pembagi:

$$3x = 12$$

menjadi

$$x = 12 : 3 = 4$$

, bukan

$$12 - 3$$

dan bukan

$$12 : (-3)$$

.

FAKTA

$$x + 3 = x + 5$$

tidak punya penyelesaian, sedangkan

$$2(x + 3) = 2x + 6$$

dipenuhi semua bilangan. Persamaan linear bisa punya satu, nol, atau tak hingga banyak penyelesaian.

MITOS

"Kalau jawabanku pecahan, pasti salah hitung."

FAKTA

Banyak persamaan berpenyelesaian pecahan, misalnya

$$3x = 2$$

dengan

$$x = \frac{2}{3}$$

. Pembuat soal memang suka angka bulat, tetapi matematika tidak harus bulat. Periksa dengan substitusi, bukan dengan perasaan!

8.4 Dari soal cerita ke model matematika

Soal cerita sering terasa menakutkan, padahal isinya hanya persamaan yang sedang menyamar. Tugasmu adalah membuka penyamarannya. Kak Lintang punya resep empat langkah.



RESEP 4 LANGKAH

1. **Pahami.** Apa yang ditanyakan? Apa saja yang diketahui? Coret informasi yang tidak dipakai.
2. **Misalkan.** Beri nama pada yang ditanyakan, misalnya "misalkan banyak hari d ". Tulis satuannya.
3. **Susun.** Terjemahkan kalimat menjadi persamaan atau pertidaksamaan: "sama dengan, menjadi, hasilnya" berarti $=$; "paling sedikit" berarti $\geq$; "paling banyak" berarti $\leq$.
4. **Selesaikan dan cek.** Hitung, lalu periksa apakah jawabannya masuk akal di dunia nyata (umur tidak negatif, banyak orang harus bulat).

Bahasa sederhana • Coba bacakan soalnya keras-keras, lalu ganti kata "berapa" dengan huruf x . Sering kali kalimat itu langsung berubah menjadi persamaan.

Paket internet Ayu berisi 30 GB untuk sebulan. Setiap hari ia memakai rata-rata 1,5 GB. Setelah berapa hari kuotanya tersisa 7,5 GB?

- 1 Misalkan banyak hari d . Kuota yang terpakai $1,5d$ GB, jadi sisanya $30 - 1,5d$.
- 2 Model: $30 - 1,5d = 7,5$.
- 3 $1,5d = 22,5$, sehingga $d = 22,5 : 1,5 = 15$.
- 4 Cek: $30 - 1,5 \times 15 = 30 - 22,5 = 7,5 \checkmark$.

Setelah 15 hari, kuota Ayu tersisa 7,5 GB. Kalau polanya tetap, kuotanya habis setelah 20 hari, sebelum bulan berakhir!

Umur Kak Lintang sekarang dua kali umur Dimas. Enam tahun yang lalu, umur Kak Lintang tiga kali umur Dimas. Berapa umur Dimas sekarang?

- 1 Misalkan umur Dimas sekarang d tahun. Umur Kak Lintang $2d$.
- 2 Enam tahun lalu: Dimas $d - 6$, Kak Lintang $2d - 6$. Jadi $2d - 6 = 3(d - 6)$.
- 3 $2d - 6 = 3d - 18$, sehingga $12 = d$.
- 4 Cek: sekarang 12 dan 24. Enam tahun lalu 6 dan 18, dan memang $18 = 3 \times 6 \checkmark$.

Dimas berumur 12 tahun dan Kak Lintang 24 tahun. Trik soal umur: semua orang bertambah tua dengan laju yang sama!

Diophantus dari Aleksandria (±abad ke-3 M) sering dijuluki "bapak aljabar". Konon di makamnya tertulis teka-teki ini: masa kecilnya $\frac{1}{6}$ hidupnya; setelah $\frac{1}{12}$ hidupnya lagi, janggutnya tumbuh; setelah $\frac{1}{7}$ hidupnya lagi, ia menikah; 5 tahun kemudian anaknya lahir; sang anak hanya hidup setengah umur ayahnya; 4 tahun setelah anaknya wafat, Diophantus pun wafat. Berapa umur Diophantus?

- 1 Misalkan umurnya x tahun. Jumlah semua bagian hidupnya sama dengan x : $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$.
- 2 KPK dari 6, 12, 7, dan 2 adalah 84. Kalikan semua suku: $14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$.
- 3 $75x + 756 = 84x$, sehingga $9x = 756$ dan $x = 84$.
- 4 Cek: $14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84 \checkmark$.

Diophantus wafat pada umur 84 tahun (setidaknya menurut teka-tekinya). Persamaan linear sudah dipakai untuk bermain teka-teki sejak lebih dari seribu tahun lalu!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

RAHASIA SOAL DIGIT

Bilangan dua angka dengan angka puluhan a dan angka satuan b bernilai $10a + b$, **bukan** $a \times b$. Inilah kunci soal digit olimpiade. Contohnya, selisih sebuah bilangan dua angka dengan kebalikannya selalu kelipatan 9:

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b).$$

Coba: $72 - 27 = 45 = 9 \times 5$. Teka-teki: sebuah bilangan dua angka sama dengan 4 kali jumlah angka-angkanya, dan angka satuannya 2 lebih besar daripada angka puluhannya. Dari $10a + b = 4(a + b)$ diperoleh $6a = 3b$, jadi $b = 2a$. Bersama $b = a + 2$, didapat $a = 2$ dan $b = 4$. Bilangannya 24, dan memang $4 \times (2 + 4) = 24$.



MATEMATIKA NUSANTARA

Di pasar tradisional, banyak pedagang cabai, bawang, dan gula masih memakai **neraca dua lengan** dengan anak timbangan dari kuningan atau besi: 1 kg, $\frac{1}{2}$ kg, 2 ons, 1 ons. Setiap kali menimbang, mereka sebenarnya menyelesaikan persamaan: berat barang di satu piring = jumlah anak timbangan di piring lain. Di posyandu, bayi ditimbang dengan **dacin**, timbangan batang dengan pemberat yang digeser. Garis-garis skala pada batang dacin berjarak sama rata, karena berat yang terbaca bertambah sama besar untuk setiap geseran yang sama panjang. Itu hubungan linear yang akan kamu jumpai lagi di Bab 9.



Tarif parkir

Rp3.000 untuk jam pertama dan Rp2.000 per jam berikutnya: sebuah pertidaksamaan menentukan berapa jam uang sakumu cukup.



Kuota internet

Sisa kuota = kuota awal – pemakaian per hari $\times$ banyak hari. Kapan kuotamu habis? Selesaikan persamaannya.



Nilai KKM

Berapa nilai minimal ulangan berikutnya agar rata-ratamu tuntas? Jawabannya pertidaksamaan linear.



Suhu dari BMKG

Mengubah $^{\circ}\text{C}$ ke $^{\circ}\text{F}$ memakai $F = 1,8C + 32$. Mengubah balik berarti menyelesaikan persamaan linear.



Ojek online

Tarif = biaya dasar + tarif per km. Dengan uang Rp30.000, sejauh apa kamu bisa pergi?

8.5 Pertidaksamaan dan garis bilangan

Jika KKM ulangan 75, nilai berapa yang tuntas? Bukan hanya 75. Nilai 76, 80, 92,5, bahkan 100 semuanya tuntas. Kalimat "nilai paling sedikit 75" adalah sebuah **pertidaksamaan**: $n \geq 75$. Berbeda dengan persamaan, penyelesaian pertidaksamaan biasanya berupa **daerah** yang berisi tak hingga banyak bilangan. Daerah itu paling jelas digambar di garis bilangan.

Pertidaksamaan	Kata-kata dalam soal	Garis bilangan	Notasi interval
$x < 3$	kurang dari 3		$(-\infty, 3)$
$x \leq 3$	paling banyak 3, maksimal 3, tidak lebih dari 3		$(-\infty, 3]$
$x > 3$	lebih dari 3		$(3, \infty)$
$x \geq 3$	paling sedikit 3, minimal 3, tidak kurang dari 3		$[3, \infty)$
$-1 < x \leq 3$	lebih dari -1 tetapi paling banyak 3		$(-1, 3]$

Bulatan **kosong** berarti bilangan batas tidak ikut (tanda $<$ atau $>$); bulatan **penuh** berarti ikut (tanda $\leq$ atau $\geq$).



TRIK KAK LINTANG

Bayangkan tanda $<$ dan $>$ sebagai mulut buaya yang lapar. Mulutnya selalu terbuka ke arah bilangan yang **lebih besar**, karena buaya ingin makan sebanyak-banyaknya: $3 < 8$, $10 > -2$. Ujung lancipnya menunjuk bilangan yang lebih kecil.

Menyelesaikan pertidaksamaan hampir sama dengan menyelesaikan persamaan: tambah, kurang, kali, atau bagi kedua ruas. Hampir sama, karena ada **satu** perbedaan penting. Tebak dulu!



Tebak Dulu!

Kita tahu $2 < 5$. Jika kedua ruas dikali -1 , manakah yang benar?

$-2 < -5$, karena kedua ruas mendapat perlakuan yang sama.

$-2 > -5$: urutannya terbalik.

$-2 = -5$, karena tanda minusnya menghapus perbedaan.

Bilangan negatif tidak bisa dibandingkan.

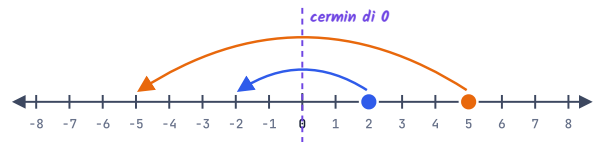
Jawabannya: $-2 > -5$. Di garis bilangan, -2 berada di kanan -5 , jadi -2 lebih besar. Mengalikan dengan -1 seperti bercermin terhadap titik 0 : yang tadinya di kiri pindah ke kanan, dan sebaliknya. Lihat animasinya di bawah.

Mula-mula $2 < 5$: titik 2 ada di kiri titik 5



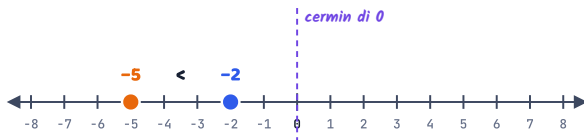
Langkah 1. Titik 2 berada di kiri titik 5, karena $2 < 5$.

Kalikan dengan -1 : cerminkan setiap titik terhadap 0



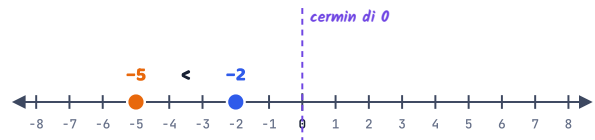
Langkah 2. Mengalikan dengan -1 berarti mencerminkan setiap titik terhadap 0: titik 2 pindah ke -2 , titik 5 pindah ke -5 . Titik yang lebih jauh dari 0 di kanan menjadi lebih jauh dari 0 di kiri.

Sekarang -5 ada di kiri -2



Langkah 3. Setelah dicerminkan, -5 berada di kiri -2 . Jadi sekarang $-5 < -2$.

Urutannya terbalik: $-2 > -5$



jika $a < b$, maka $-a > -b$

Langkah 4. Urutannya terbalik! Itulah sebabnya tanda pertidaksamaan harus **dibalik** setiap kali kedua ruas dikali atau dibagi bilangan negatif.



SIFAT-SIFAT PERTIDAKSAMAAN

Untuk bilangan real a , b , dan c dengan $a < b$:

- $a + c < b + c$ dan $a - c < b - c$: menambah atau mengurangi **tidak** mengubah tanda;
- jika $c > 0$, maka $ac < bc$ dan $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$: mengali atau membagi dengan bilangan **positif** tidak mengubah tanda;
- jika $c < 0$, maka $ac > bc$ dan $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$: mengali atau membagi dengan bilangan **negatif** membalik tanda.

▼ Bukti singkat sifat ketiga

Dari $a < b$ diperoleh $b - a > 0$. Karena $c < 0$, hasil kali bilangan positif $b - a$ dengan bilangan negatif c adalah negatif: $(b - a)c < 0$, yaitu $bc - ac < 0$. Tambahkan ac pada kedua ruas: $bc < ac$, atau $ac > bc$. Pembagian dengan c sama dengan perkalian dengan $\frac{1}{c}$, yang juga negatif, jadi berlaku hal yang sama. ■



AWAS JEBAKAN

Mengalikan atau membagi kedua ruas pertidaksamaan dengan bilangan negatif membalik arah tandanya. Pada $-3x > 12$, membagi dengan -3 menghasilkan $x < -4$, bukan $x > -4$. Cek dengan satu bilangan: $x = -5$ memenuhi $-3(-5) = 15 > 12$ ✓, sedangkan $x = 0$ tidak.

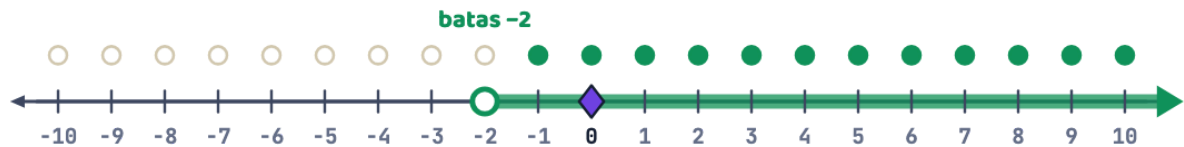
Lab berikut menguji **setiap** bilangan bulat dari -10 sampai 10 sekaligus. Perhatikan bagaimana bilangan yang lolos selalu membentuk satu daerah utuh, dan bagaimana arah daerah itu berbalik ketika a negatif.

👉 seret Ancil

$$-2x + 3 < 7$$

$$-2x < 4 \leftarrow \text{kedua ruas dikurangi } 3$$

$$x > -2 \leftarrow \text{dibagi } -2: \text{tanda DIBALIK!}$$



$$x = 0 \rightarrow -2 \cdot (0) + 3 = 3 < 7 \checkmark$$

Batas

-2

Penyelesaian

 $x > -2$

Bilangan bulat yang lolos (-10 s.d. 10)

12

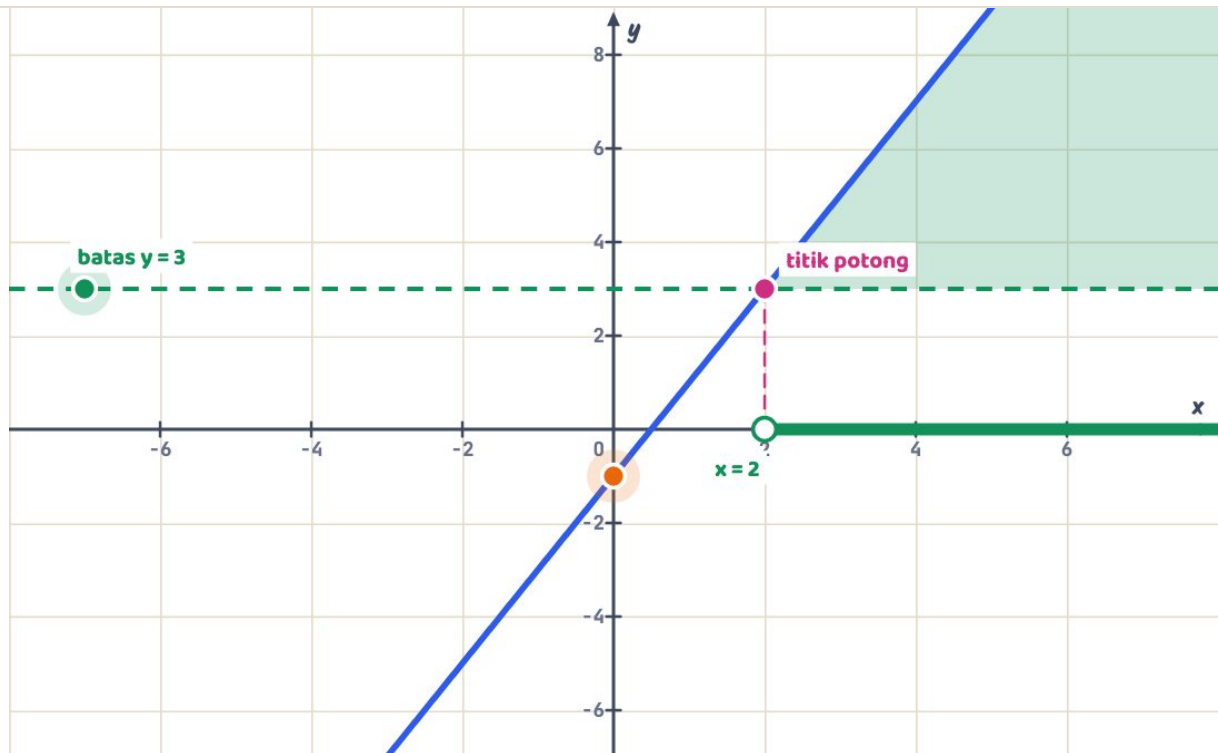
Atur a , b , c , dan tandanya. Bulatan hijau di atas garis adalah bilangan bulat yang **lolos**, dan pita hijau adalah daerah penyelesaiannya. Seret Ancil ke mana saja untuk menguji bilangan pecahan. Buat a negatif: apa yang terjadi pada arah pita?

Mengapa tandanya berbalik? Ada cara pandang lain yang sangat indah. Ruas kiri $ax + b$ dapat digambar sebagai sebuah garis, dan ruas kanan c sebagai garis datar. Menyelesaikan $ax + b > c$ artinya mencari semua x yang membuat garis miring berada **di atas** garis datar.

$$ax + b > c$$

$$2x - 1 > 3 \iff x > 2$$

Garis biru adalah ruas kiri $y = ax + b$, garis hijau putus-putus adalah batas $y = c$. Daerah hijau di sumbu- x berisi semua x yang membuat garis biru berada di atas garis hijau.



a positif: garis naik, daerahnya di KANAN titik potong (tanda tetap >)

Titik potong $x =$
2

Daerah penyelesaian
di kanan titik potong

Geser a dari positif ke negatif. Garis birunya berubah dari naik menjadi turun, sehingga daerah "di atas batas" pindah dari kanan ke kiri titik potong. Itulah alasan geometris mengapa tanda dibalik! Kamu juga bisa menyeret titik jingga (memotong sumbu- y) dan titik hijau (batas).

Nilai tiga ulangan Ayu adalah 78, 85, dan 70. Ia ingin rata-rata keempat ulangannya paling sedikit 80. Berapa nilai minimal ulangan keempat?

- 1 Misalkan nilai ulangan keempat X . "Paling sedikit 80" berarti $\frac{78 + 85 + 70 + X}{4} \geq 80$.
- 2 Kalikan kedua ruas dengan 4 (positif, tanda tetap): $233 + X \geq 320$.
- 3 Kurangi kedua ruas dengan 233: $X \geq 87$.

Ayu memerlukan nilai paling sedikit 87. Nilai 87, 90, atau 100 semuanya cukup; itulah sebabnya jawabannya berupa daerah, bukan satu bilangan.

$$\frac{nR + X}{n + 1} \geq T \implies X \geq (n + 1)T - nR$$

Jumlah semua nilai harus mencapai target dikali banyak ulangan. Ulangan berikutnya bertugas menutup kekurangannya.

n Banyak ulangan sebelumnya kali

R Rata-rata sekarang

T Target rata-rata (KKM)

X Nilai minimal berikutnya

NILAI MINIMAL BERIKUTNYA

92

 masih bisa dikejar!

Jumlah nilaimu sekarang $3 \times 76 = 228$. Agar rata-rata 4 ulangan paling sedikit 80, jumlahnya harus paling sedikit $4 \times 80 = 320$. Kekurangannya 92, jadi nilai ulangan berikutnya paling sedikit 92.

Cek satuan: semua nilai memakai skala 0–100.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-NILAI-MINIMAL-KKM](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-nilai-minimal-kkm)

Tarif parkir motor di sebuah pusat belanja: Rp3.000 untuk jam pertama dan Rp2.000 untuk setiap jam berikutnya (bagian jam dihitung satu jam). Kak Lintang hanya membawa Rp15.000 untuk parkir. Paling lama berapa jam ia boleh parkir?

- 1 Misalkan lama parkir t jam. Tarifnya $3.000 + 2.000(t - 1)$ dan tidak boleh melebihi 15.000.
- 2 $3.000 + 2.000(t - 1) \leq 15.000 \Rightarrow 2.000(t - 1) \leq 12.000 \Rightarrow t - 1 \leq 6$.
- 3 Jadi $t \leq 7$. Cek: 7 jam berarti $3.000 + 6 \times 2.000 = 15.000$ ✓, sedangkan 8 jam berarti Rp17.000.

Paling lama 7 jam. Karena lama parkir dihitung per jam, jawabannya bilangan bulat terbesar yang memenuhi pertidaksamaan.

$$p + q(t - 1) \leq U \implies t \leq 1 + \frac{U - p}{q}$$

Selama total tarif tidak melebihi uangmu, kamu masih boleh parkir. Ambil bilangan bulat terbesar yang memenuhi.

p Tarif jam pertama rupiah

q Tarif tiap jam berikutnya rupiah

U Uang untuk parkir rupiah

t Lama parkir maksimal jam

LAMA PARKIR MAKSIMAL

7

jam

🌟 pas, tanpa kembalian

Setelah jam pertama, sisa uangmu Rp**12.000**. Sisa itu cukup untuk **6** jam tambahan, jadi paling lama **7** jam. Tarif untuk **7** jam adalah Rp**15.000**, dan kembaliannya Rp**0**.

Cek satuan: tarif dan uang dalam rupiah, hasilnya dalam jam.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LAMA-PARKIR](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-LAMA-PARKIR)

Pertidaksamaan ganda seperti $-7 < 2n + 3 \leq 9$ diselesaikan dengan memperlakukan ketiga bagiannya sekaligus: kurangi semuanya dengan 3 ($-10 < 2n \leq 6$), lalu bagi semuanya dengan 2 ($-5 < n \leq 3$). Tanda pertidaksamaan "<" dan ">" sendiri dipopulerkan oleh Thomas Harriot dari Inggris; bukunya terbit pada tahun 1631, sepuluh tahun setelah ia wafat.



ADU CEPAT

Balik tanda kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-8](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-8)

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi b dari kedua ruas, lalu bagi dengan a yang negatif: tanda > berbalik menjadi <. Jawabannya bilangan bulat terbesar yang masih lebih kecil daripada batasnya.

8.6 Nilai mutlak: persamaan tentang jarak

Ancil berdiri di titik 0 garis bilangan. Ayu berdiri 3 langkah di kanannya, Dimas 3 langkah di kirinya. Posisi mereka berbeda (3 dan -3), tetapi **jaraknya** ke Ancil sama, yaitu 3. Jarak inilah yang disebut nilai mutlak.



DEFINISI

Nilai mutlak sebuah bilangan x , ditulis $|x|$, adalah jarak x ke 0 di garis bilangan. Jadi $|x| = x$ jika $x \geq 0$, dan $|x| = -x$ jika $x < 0$. Contoh: $|5| = 5$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$. Lebih umum, $|x - p|$ adalah **jarak antara x dan p** .

Bahasa sederhana • Nilai mutlak itu seperti meteran: ia hanya peduli seberapa jauh, tidak peduli ke kiri atau ke kanan. Karena itu hasilnya tidak pernah negatif.



PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK

Untuk $r > 0$:

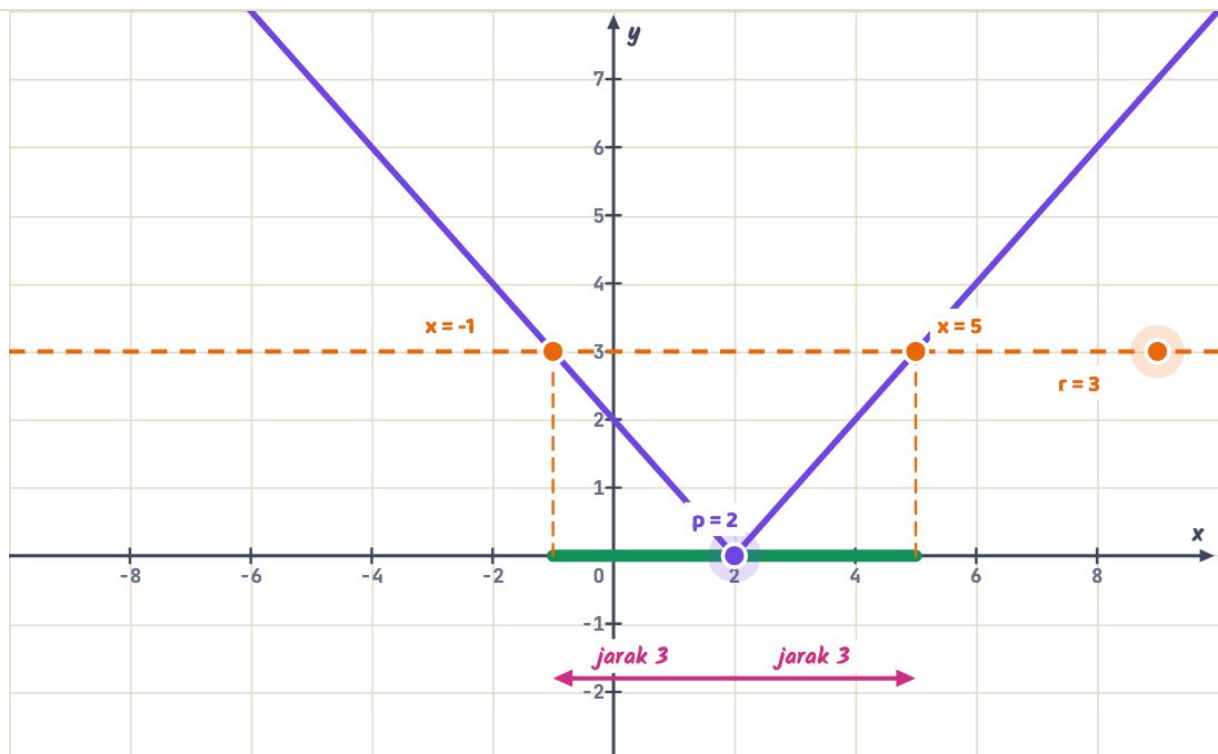
- $|x - p| = r \iff x = p - r$ atau $x = p + r$ (dua titik yang berjarak r dari p);
- $|x - p| < r \iff p - r < x < p + r$ (semua titik **di dalam** jarak r dari p);
- $|x - p| > r \iff x < p - r$ atau $x > p + r$ (semua titik **di luar** jarak r).

Jika $r = 0$, persamaan $|x - p| = 0$ hanya dipenuhi $x = p$. Jika $r < 0$, persamaan $|x - p| = r$ tidak punya penyelesaian, karena jarak tidak pernah negatif.

$$|x - p| = r$$

$$|x - 2| = 3$$

Grafik $y = |x - p|$ berbentuk huruf V dengan ujung di $x = p$. Garis jingga $y = r$ memotong huruf V tepat di titik-titik yang jaraknya r dari p .



dua penyelesaian: $p - r$ dan $p + r$; pita hijau = $|x - p| < r$

$$x_1 = p - r$$

$$-1$$

$$x_2 = p + r$$

$$5$$

Banyak penyelesaian

$$2$$

Seret ujung huruf V (titik ungu) ke kiri dan kanan, dan seret titik jingga di tepi kanan naik-turun untuk mengubah r . Apa yang terjadi saat $r = 0$? Dan saat r negatif?

Selesaikan $|2x - 3| = 7$.

1 Isi tanda mutlak harus bernilai 7 atau -7 : $2x - 3 = 7$ atau $2x - 3 = -7$.

2 Dari $2x - 3 = 7$: $2x = 10$, jadi $x = 5$.

3 Dari $2x - 3 = -7$: $2x = -4$, jadi $x = -2$.

4 Cek: $|10 - 3| = 7 \checkmark$ dan $|-4 - 3| = |-7| = 7 \checkmark$.

$x = 5$ atau $x = -2$. Keduanya berjarak 3,5 dari 1,5, karena $|2x - 3| = 7$ setara dengan $|x - 1,5| = 3,5$.

Nilai mutlak sangat berguna untuk menyatakan **toleransi**. Misalnya, kemasan gula "1 kg" dianggap layak jika massanya m gram meleset paling banyak 10 gram: $|m - 1000| \leq 10$, yaitu $990 \leq m \leq 1010$. Prakiraan suhu BMKG " $27^\circ\text{C} \pm 2^\circ\text{C}$ " juga berarti $|T - 27| \leq 2$.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

JUMLAH DUA JARAK

Berapa nilai terkecil $|x - 1| + |x - 5|$? Bayangkan x adalah rumahmu, sedangkan 1 dan 5 adalah sekolah dan pasar. Jumlah jarak ke keduanya paling sedikit 4, yaitu jarak sekolah ke pasar, dan nilai itu tercapai untuk setiap x di antara keduanya ($1 \leq x \leq 5$). Jika rumahmu di luar, misalnya $x = 7$, kamu menempuh sebagian jalan dua kali: $6 + 2 = 8$. Akibatnya, $|x - 1| + |x - 5| = 4$ dipenuhi semua x dalam $[1, 5]$, sedangkan $|x - 1| + |x - 5| = 3$ tidak punya penyelesaian sama sekali. Cara pandang "jarak" ini mengubah soal yang tampak rumit menjadi gambar sederhana.

Cek Cepat

Penyelesaian $4x - 7 = 13$ adalah...

$$x = 1,5$$

$$x = 5$$

$$x = 20$$

$$x = -5$$

Penyelesaian $-2x > 8$ adalah...

$$x > -4$$

$$x < 4$$

$$x < -4$$

$$x > 4$$

Penyelesaian $|x - 3| = 5$ adalah...

$$x = -2 \text{ atau } x = 8$$

$$x = 8 \text{ saja}$$

$$x = 2 \text{ atau } x = 8$$

$$x = -8 \text{ atau } x = 2$$

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. C • 3. A



Tantangan Rumah: timbangan gantungan baju

Bahan: gantungan baju, benang atau tali, 2 gelas plastik bekas, selotip, beberapa koin yang sama (misalnya Rp500), dan 3 benda kecil yang identik (misalnya tutup botol yang sama).

1. Gantung gantungan baju pada gagang pintu. Ikat satu gelas plastik di setiap ujungnya dengan panjang tali yang sama. Pastikan timbangan seimbang saat kosong.
2. Masukkan 3 tutup botol dan 2 koin ke gelas kiri.
3. Masukkan koin satu per satu ke gelas kanan sampai timbangan paling mendekati seimbang. Catat banyak koinnya, misalnya n .
4. Tulis persamaannya: $3t + 2 = n$, dengan t adalah berat satu tutup botol dalam "satuan koin". Selesaikan untuk t .
5. Uji tebakanmu: taruh 1 tutup botol di kiri dan koin sebanyak t (dibulatkan) di kanan. Seimbangkah?

Pertanyaan: Mengapa ketiga tutup botol harus identik? Jika dengan 9 koin gelas kanan masih terlalu ringan, tetapi dengan 10 koin sudah terlalu berat, tuliskan hasilnya sebagai pertidaksamaan ganda untuk t .



✓ **Kamu sekarang bisa...**

- memandang persamaan sebagai **timbangan seimbang** dan menyelesaikan persamaan linear satu variabel dengan operasi yang sama pada kedua ruas
- menyelesaikan persamaan yang memuat **kurung dan pecahan**, serta mengenali persamaan yang tidak punya penyelesaian atau punya tak hingga banyak penyelesaian
- mengubah **soal cerita** (parkir, kuota internet, nilai KKM, umur, digit) menjadi model persamaan atau pertidaksamaan
- menyelesaikan **pertidaksamaan linear**, menggambarinya di garis bilangan, dan menjelaskan mengapa tandanya **dibalik** saat dikali bilangan negatif
- menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan **nilai mutlak** sederhana sebagai soal jarak

🔑 **Istilah kunci**

persamaan

Persamaan

ruas kiri

ruas kanan

Persamaan linear satu variabel

penyelesaian

persamaan setara

operasi invers

KPK penyebut

pertidaksamaan

Nilai mutlak

📊 **Rumus penting**

$$ax + b = c \implies x = \frac{c - b}{a}$$

Kunci persamaan linear. Buka bungkusnya dari luar ke dalam: kurangi kedua ruas dengan b, lalu bagi kedua ruas dengan a.

$$\frac{nR + X}{n+1} \geq T \implies X \geq (n+1)T - nR$$

Nilai minimal ulangan berikutnya. Jumlah semua nilai harus mencapai target dikali banyak ulangan. Ulangan berikutnya bertugas menutup kekurangannya.

$$p + q(t - 1) \leq U \implies t \leq 1 + \frac{U - p}{q}$$

Lama parkir maksimal. Selama total tarif tidak melebihi uangmu, kamu masih boleh parkir. Ambil bilangan bulat terbesar yang memenuhi.

⚠ **Jangan sampai terjebak**

- Urutan membuka bungkus itu penting: pada $3x + 2 = 11$, kurangi 2 dulu, baru bagi 3.
- Saat mengalikan dengan KPK, kalikan semua suku di kedua ruas, termasuk suku yang tidak berpenyebut.
- Mengalikan atau membagi kedua ruas pertidaksamaan dengan bilangan negatif membalik arah tandanya.



Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=8

Teka-teki untuk Bab 9

Sebuah taksi online memasang tarif Rp10.000 begitu kamu naik, ditambah Rp4.000 untuk setiap kilometer. Buat tabel tarif untuk perjalanan 1, 2, 3, 4, dan 5 km, lalu gambar titik-titik (jarak, tarif) di kertas berpetak. Apa yang kamu lihat? Jika tarif per kilometernya naik menjadi Rp5.000, apa yang berubah pada gambarmu?

▼ Intip petunjuk

Setiap tambahan 1 km selalu menambah Rp4.000. Langkahnya selalu sama, sehingga titik-titiknya tersusun pada sebuah **garis lurus**. Angka 4.000 menentukan kecuraman garis (gradien), sedangkan 10.000 menentukan titik awalnya. Di Bab 9 kamu akan menuliskannya sebagai $y = 4.000x + 10.000$ dan menjelajahi dunia fungsi linear!

09

Garis Lurus: Membaca Kemiringan Dunia

Mengapa tarif taksi online untuk 8 km tidak sampai dua kali tarif 4 km? Mengapa jalan di Kelok 44 harus berkelu-liku? Dua pertanyaan itu punya satu jawaban: garis lurus dan kemiringannya.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menempatkan dan membaca titik di **bidang Kartesius** serta menyebutkan kuadrannya;
- membedakan **relasi** dan **fungsi**, lalu memakai notasi $f(x)$;
- menghitung **gradien** dari dua titik, dari grafik, dan dari persamaan;
- menyusun dan menggambar **persamaan garis** $y = mx + c$;
- mengenali **garis sejajar** dan **garis tegak lurus**, serta membuat **model linear** dari situasi nyata.

ARGO TAKSI YANG BIKIN PENASARAN

KOMIK · 4 PANEL

Pulang les, hujan turun deras

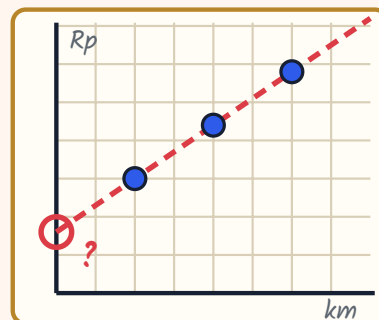
DIMAS

Aplikasi bilang 4 km bayar Rp22.000.
Berarti ke rumah Nenek yang 8 km pasti
Rp44.000, dong!



AYU

Tunggu. Catatanku: 2 km Rp15.000, 4 km
Rp22.000, 6 km Rp29.000. Kalau titik-
titiknya kugambar...



KAK LINTANG

Titiknya segaris, tapi garisnya tidak lewat nol. Ada biaya awal Rp8.000, lalu tiap 1 km hanya menambah Rp3.500.

**Ancil datang berpayung daun pisang****ANCIL**

Jadi 8 km = $8.000 + 8 \times 3.500 = \text{Rp}36.000$. Hemat Rp8.000 dari tebakanmu!

DIMAS

Garis lurus bisa bikin aku hemat?!

**Tebak Dulu!**

Tarif sebuah taksi online: Rp8.000 begitu naik, ditambah Rp3.500 per km. Perjalanan 4 km bertarif Rp22.000. Kalau jaraknya dijadikan dua kali lipat (8 km), tarifnya...

tepat dua kali lipat, yaitu Rp44.000.

kurang dari dua kali lipat.

lebih dari dua kali lipat, karena makin jauh makin mahal.

sama saja, karena aturan tarifnya tetap.

Jawabannya: kurang dari dua kali lipat, yaitu Rp36.000. Biaya awal Rp8.000 hanya dibayar sekali. Yang berlipat dua hanya bagian per km: $4 \times 3.500 = 14.000$ menjadi $8 \times 3.500 = 28.000$. Jadi tarifnya $8.000 + 28.000 = 36.000$. Kalau digambar, titik-titik (jarak, tarif) membentuk **garis lurus yang tidak lewat titik nol**. Masih ingat teka-teki tarif taksi online di akhir Bab 8? Inilah jawabannya: garis lurus itu adalah fungsi linear, bintang bab ini!

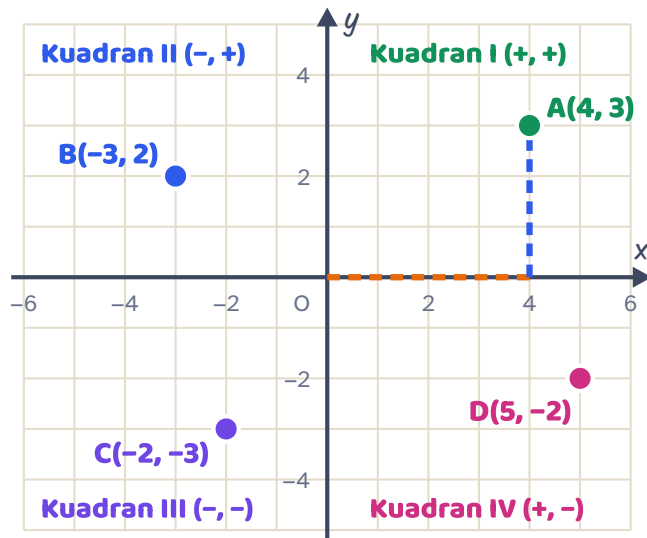
9.1 Bidang Kartesius: alamat setiap titik

Setiap kursi di gedung bioskop punya alamat, misalnya "baris F, kursi 12". Tanpa alamat itu, kamu bisa duduk di kursi orang lain! Matematikawan memberi alamat untuk setiap titik di bidang datar dengan cara yang mirip: dua garis bilangan yang berpotongan tegak lurus.



DEFINISI

Bidang Kartesius dibentuk oleh **sumbu-x** (garis bilangan mendatar) dan **sumbu-y** (garis bilangan tegak) yang berpotongan tegak lurus di **titik asal** $O(0, 0)$. Setiap titik ditulis sebagai **pasangan berurutan** (x, y) : x adalah jarak mendatar dari O (kanan positif, kiri negatif) dan y adalah jarak tegak (atas positif, bawah negatif). Kedua sumbu membagi bidang menjadi empat **kuadran**.



Alamat titik: (x, y)

x = langkah mendatar

kanan (+), kiri (-)

y = langkah tegak

atas (+), bawah (-)

$A(4, 3)$: 4 ke kanan,
lalu 3 ke atas.

$O(0, 0)$ = titik asal

Pola tanda koordinat menunjukkan kuadrannya. Titik yang tepat berada di sumbu tidak termasuk kuadran mana pun.

Bahasa sederhana • Bayangkan kamu berdiri di titik O . Untuk sampai ke titik $A(4, 3)$, berjalanlah **4 langkah ke kanan**, lalu **3 langkah ke atas**. Kalau angkanya negatif, berbaliklah: ke kiri atau ke bawah. Itu saja rahasianya!



TRIK KAK LINTANG

Urutan abjad menyelamatkanmu: x datang sebelum y . Seperti masuk gedung: **jalan mendatar dulu menuju lift, baru naik**. Jadi $(4, 3)$ berarti jalan 4, lalu naik 3.

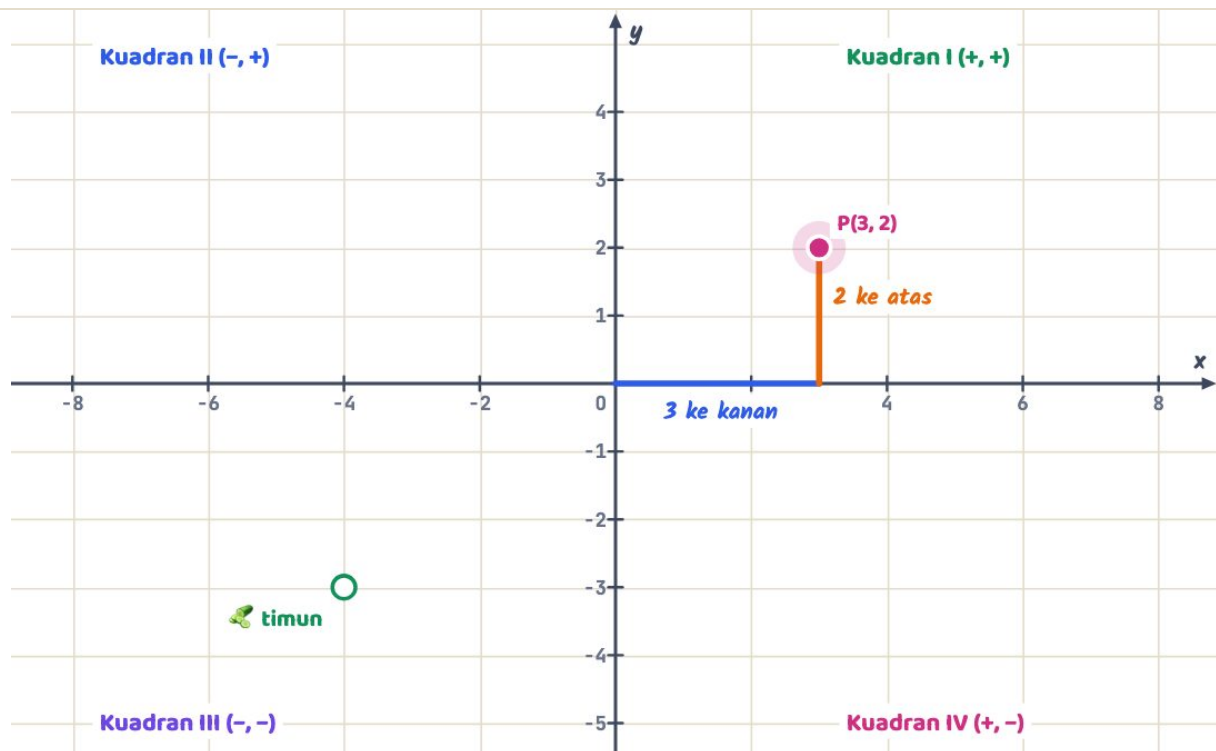


AWAS JEBAKAN

Urutan koordinat tidak boleh ditukar: $(2, 5)$ dan $(5, 2)$ adalah dua titik yang berbeda. Itulah sebabnya disebut **pasangan berurutan**. Titik $(2, 5)$ ada di atas, dekat sumbu- y ; titik $(5, 2)$ ada di kanan, dekat sumbu- x .

$$P(x, y)$$

$$P(3, 2)$$



Kuadran I: x positif, y positif

x
3

y
2

Langkah lagi menuju timun
12

Seret titik P (atau geser slider) sampai tepat di atas timun. Perhatikan tanda x dan y setiap kali P pindah kuadran. Bisakah kamu menebak tandanya sebelum melihat label?



TAMU DARI MASA LALU

Nama "Kartesius" berasal dari **René Descartes** (1596–1650), filsuf dan matematikawan Prancis yang nama Latinnya *Cartesius*. Konon, ide koordinat muncul saat ia berbaring sambil memperhatikan seekor lalat di langit-langit kamar: posisi lalat bisa dinyatakan dengan jaraknya ke dua dinding! Lewat buku *La Géométrie* (1637), Descartes menyatukan aljabar dan geometri: kurva bisa ditulis sebagai persamaan, dan persamaan bisa digambar. Pada masa yang sama, **Pierre de Fermat** menemukan gagasan serupa secara terpisah.

9.2 Relasi dan fungsi: mesin yang taat aturan

Bayangkan sebuah mesin minuman: kamu memasukkan uang dan menekan satu tombol, lalu keluar **tepat satu** minuman. Kalau mesin itu kadang mengeluarkan teh dan kadang kopi untuk tombol yang sama, kamu pasti kesal. Matematikawan menyebut mesin yang taat aturan seperti itu **fungsi**.

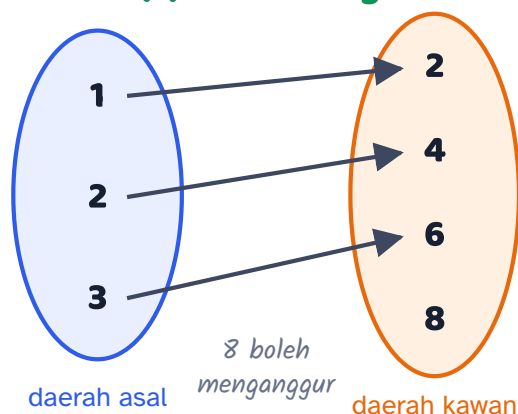


DEFINISI

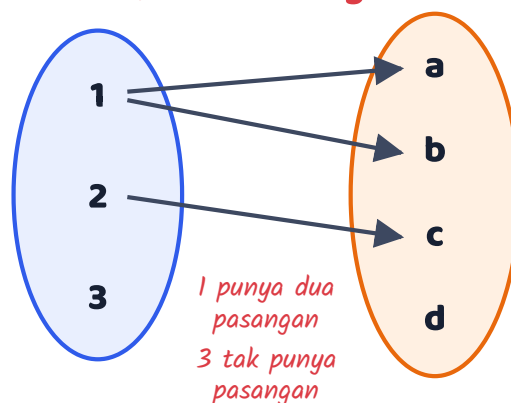
Sebuah **relasi** dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan anggota A dengan anggota B . Relasi itu disebut **fungsi** (atau pemetaan) jika **setiap** anggota A dipasangkan dengan **tepat satu** anggota B .

- A disebut **daerah asal** (domain), B disebut **daerah kawan** (kodomain).
- Himpunan semua keluaran yang benar-benar muncul disebut **daerah hasil** (range).
- Kita menulis $f : x \mapsto 2x + 3$ atau $f(x) = 2x + 3$. Dibaca: " f dari x sama dengan $2x + 3$ ".

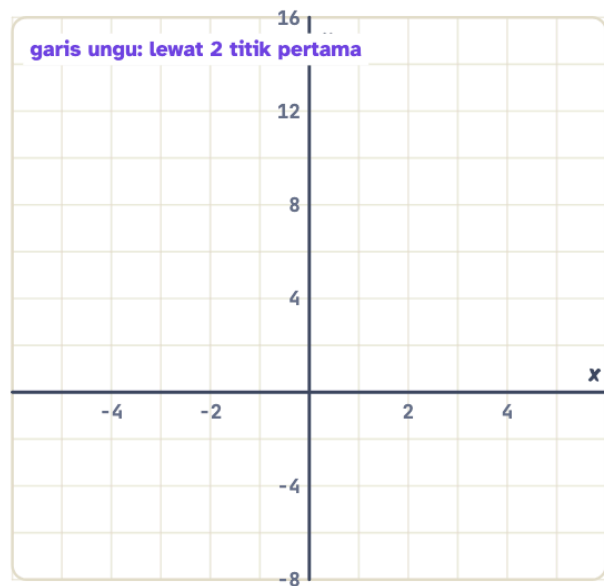
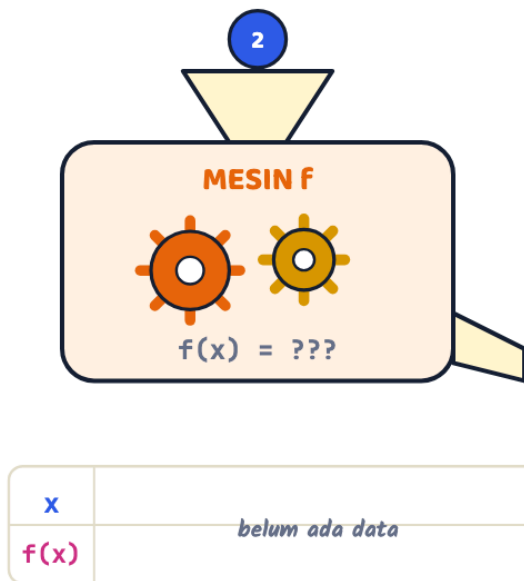
$f(x) = 2x$ ✓ fungsi



✗ bukan fungsi



Pada fungsi, setiap anggota daerah asal mengirim **tepat satu** panah. Anggota daerah kawan boleh menerima banyak panah atau tidak menerima sama sekali.



keluaran terakhir

—

titik terkumpul

0

beda tiap x naik 1

butuh dua x berurutan

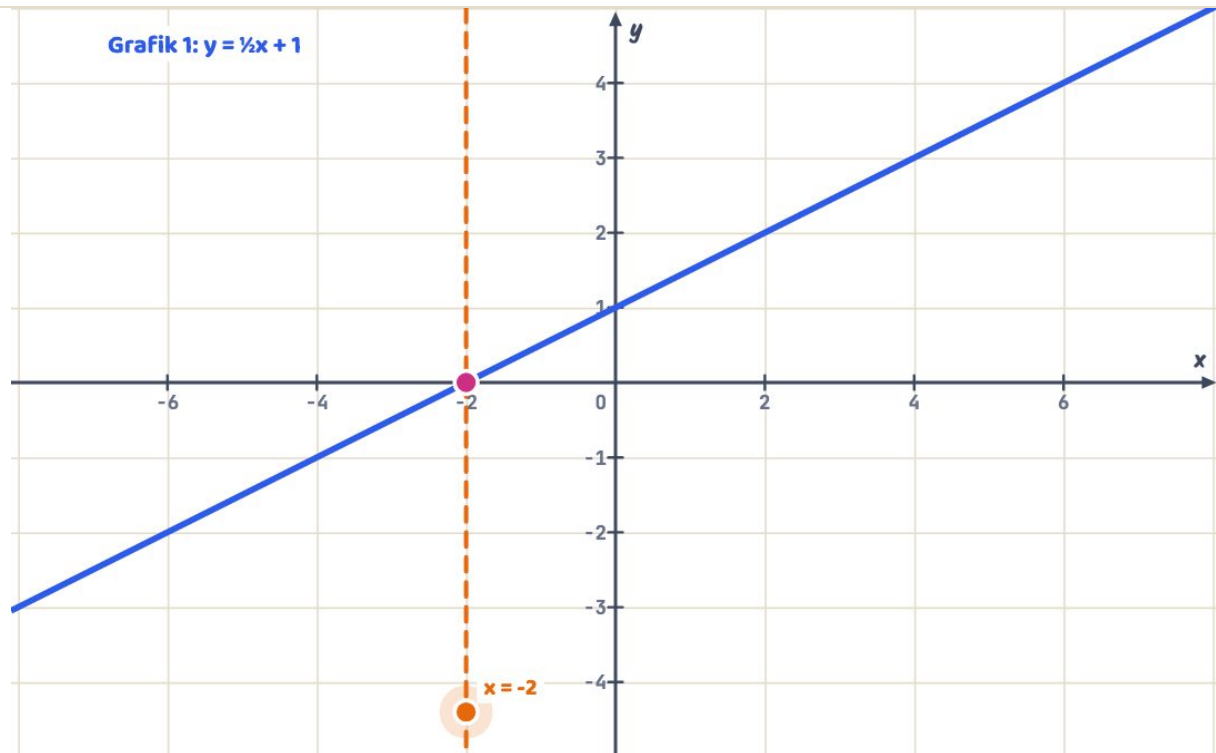
Pola titik

masukkan minimal 2 bilangan

Pilih bilangan x , lalu tekan **Masukkan x**. Mesin mengeluarkan $f(x)$ dan titik $(x, f(x))$ muncul di grafik. Setelah tiga titik, bisakah kamu menebak aturan mesin sebelum mengintipnya? Coba juga **Mesin misteri**: apakah titik-titiknya masih segaris?

Ada cara cepat untuk mengecek apakah sebuah **grafik** menggambarkan fungsi: geser sebuah garis tegak dari kiri ke kanan. Kalau garis itu pernah memotong grafik di **dua titik atau lebih**, berarti ada satu x yang punya dua keluaran. Itu bukan fungsi!

fungsi $\iff$ setiap garis tegak memotong grafik paling ba:



✓ **FUNGSI:** tidak ada garis tegak yang memotong lebih dari sekali

 **grafiknya garis lurus: fungsi linear!**

Banyak titik potong

1

Seret pegangan oranye ke kiri dan ke kanan untuk setiap grafik 1–4. Untuk grafik mana garis tegak bisa memotong **dua** titik sekaligus?

Di antara semua fungsi, ada satu keluarga yang paling sederhana dan paling sering dipakai: fungsi yang grafiknya garis lurus.



DEFINISI

Fungsi linear adalah fungsi berbentuk $f(x) = mx + c$, dengan m dan c bilangan real. Grafiknya selalu garis lurus. Ciri khasnya: setiap kali x bertambah 1, nilai $f(x)$ bertambah m . Lajunya **tetap**. (Jika $m = 0$, fungsi $f(x) = c$ disebut fungsi konstan; grafiknya garis mendatar.)

x

0

1

2

3

4

Selisih berurutan

$f(x) = 3x + 2$	2	5	8	11	14	+3, +3, +3, +3 (tetap: linear)
$g(x) = x^2$	0	1	4	9	16	+1, +3, +5, +7 (berubah: bukan linear)

Perhatikan selisih pada baris $g(x) = x^2$: 1, 3, 5, 7, yaitu bilangan ganjil berurutan! Pola indah itu akan kamu temui lagi di bab parabola. Untuk sekarang, ingat saja: **selisih tetap berarti linear**.

ADU CEPAT Mesin f(x) kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Ganti x dengan bilangan di dalam kurung. Kalikan dulu, baru jumlahkan. Hati-hati dengan tanda negatif!

CONTOH Mesin $f(x) = 3x - 2$

Diketahui $f(x) = 3x - 2$. Hitung $f(4)$ dan $f(-1)$. Lalu tentukan x yang membuat $f(x) = 13$.

- $f(4) = 3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10$.
- $f(-1) = 3 \times (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$.
- Untuk $f(x) = 13$: $3x - 2 = 13 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$. Cek: $f(5) = 15 - 2 = 13$. ✓

$f(4) = 10$, $f(-1) = -5$, dan $f(5) = 13$. Langkah ketiga adalah menjalankan mesin mundur: dari keluaran kembali ke masukan.

9.3 Gradien: seberapa curam sebuah garis?

Naik tangga rumah terasa biasa saja, tetapi naik tangga menara mercusuar membuat napas ngos-ngosan. Bedanya ada pada **kecuraman**. Dalam matematika, kecuraman garis diukur dengan satu angka bernama **gradien** (kemiringan), biasanya dilambangkan m .



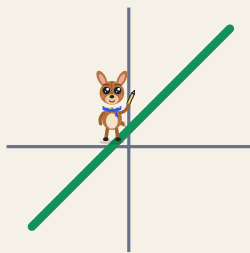
DEFINISI

Jika sebuah garis melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dengan $x_1 \neq x_2$, maka **gradien** garis itu adalah

$$m = \frac{\text{perubahan } y}{\text{perubahan } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

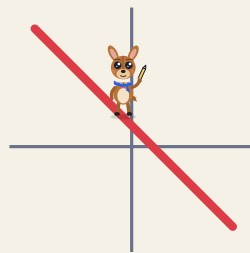
Gradien menyatakan berapa satuan garis itu **naik** (atau turun, jika negatif) untuk setiap **satu langkah ke kanan**.

Bahasa sederhana • Gampangnya, gradien itu seperti anak tangga. Kalau setiap kali maju 1 langkah kamu harus naik 2 anak tangga, gradiennya 2. Kalau setiap maju 1 langkah kamu justru turun, gradiennya negatif. Jalan datar? Gradiennya 0.



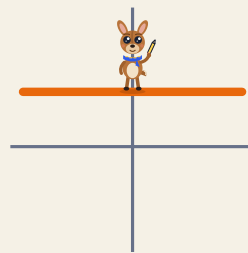
$$m > 0$$

naik ke kanan



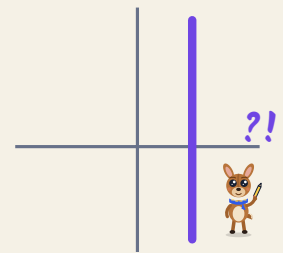
$$m < 0$$

turun ke kanan



$$m = 0$$

mendatar



tak terdefinisi

tegak: $\Delta x = 0$

Bacalah garis dari kiri ke kanan, seperti membaca buku. Ancil yang berjalan ke kanan bisa mendaki, menurun, atau berjalan datar. Di garis tegak ia tidak bisa melangkah ke kanan sama sekali!



TRIK KAK LINTANG

"**Naik per maju.**" Selalu tanyakan: kalau aku maju satu langkah ke kanan, aku naik berapa? Itulah gradiennya. Huruf y (yang tegak) ditulis di atas garis pecahan, huruf x (yang mendatar) di bawahnya, persis seperti tinggi tangga di atas dan lantai di bawah.



SIFAT GRADIEN

Pada sebuah garis lurus, gradien yang dihitung dari pasangan titik **mana pun** selalu sama. Itulah sebabnya kita boleh berbicara tentang "gradien garis", bukan sekadar "gradien dua titik".

▼ **Mengapa selalu sama? (bukti dengan segitiga sebangun)**

Ambil dua "segitiga gradien" pada garis yang sama: satu kecil dengan sisi $\Delta x_1, \Delta y_1$ dan satu besar dengan sisi $\Delta x_2, \Delta y_2$. Sisi mendatar keduanya sejajar sumbu-x, sisi tegak keduanya sejajar sumbu-y, dan sisi miringnya terletak pada garis yang sama. Jadi sudut-sudut kedua segitiga sama besar, sehingga keduanya **sebangun** (Bab 22). Pada segitiga sebangun, perbandingan sisi yang bersesuaian sama:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}.$$

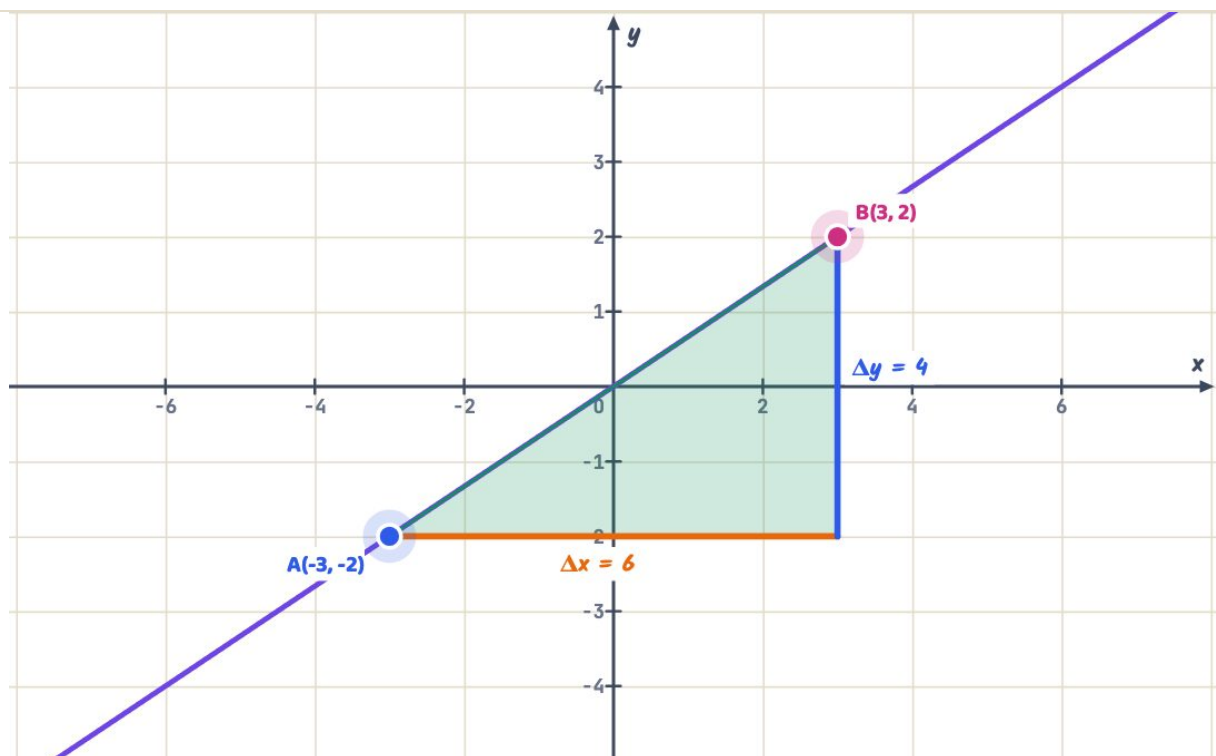


GRAFIK HIDUP **Gradien dari dua titik**

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - (-2)}{3 - (-3)} = \frac{4}{6} \approx 0,67$$



garis naik: gradien positif

Δx

6

Δy

4

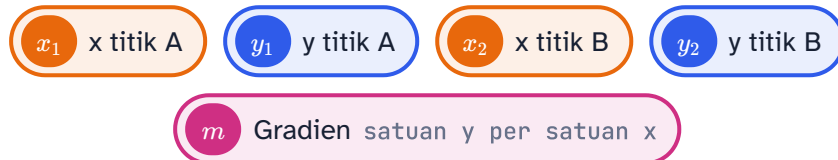
Gradien m

0,667

Seret titik A dan B. Coba tukar peran keduanya (A di kanan, B di kiri): apakah gradiennya berubah? Lalu buat garis tegak dengan menaruh A dan B tepat segaris tegak. Apa yang terjadi pada Δx ?

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien adalah perubahan y dibagi perubahan x : berapa satuan garis naik untuk setiap satu langkah ke kanan.



↗ garis naik

✨ gradien bulat

Dari A(1, 2) ke B(4, 8): naik **6** dan maju **3**, jadi $m = 2$. Jika muncul '-', berarti $x_1 = x_2$: garisnya tegak dan gradiennya tak terdefinisi.

Cek satuan: gradien selalu bersatuan "satuan y per satuan x ": rupiah per km, GB per hari, atau °C per 100 m. Kalau kedua sumbu bersatuan sama (misalnya meter), satuannya saling mencoret.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-GRADIEN-DUA-TITIK](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-gradien-dua-titik)



AWAS JEBAKAN

Pakai urutan titik yang sama di atas dan di bawah garis pecahan. Kalau di atas kamu menulis $y_2 - y_1$, di bawah harus $x_2 - x_1$, bukan $x_1 - x_2$. Tukar urutan di satu tempat saja, tandanya terbalik dan garis naik berubah menjadi "turun".

CONTOH Gradien dari dua titik

Tentukan gradien garis yang melalui $A(-1, 4)$ dan $B(3, -2)$. Apa artinya?

1 $\Delta y = y_2 - y_1 = -2 - 4 = -6.$

2 $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - (-1) = 4.$

3 $m = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$

$m = -\frac{3}{2}$: garis turun 3 satuan setiap maju 2 satuan ke kanan. Cek arah: dari A (kiri, tinggi) ke B (kanan, rendah) memang turun.

ADU CEPAT Gradien kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

$m = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$. Jawaban pecahan boleh ditulis seperti $3/4$ atau $-2/3$.

Di jalan raya, gradien biasanya ditulis dalam **persen**: kemiringan $= m \times 100\%$. Jalan yang naik 8 m untuk setiap 100 m jarak mendatar punya gradien 0,08, atau tanjakan 8%.



Tebak Dulu!

Sebuah rambu di jalan pegunungan bertuliskan "tanjakan 10%". Artinya...

sudut tanjakannya 10° .

jalan naik 10 m untuk setiap 100 m jarak mendatar.

jalan naik 10 m untuk setiap 10 m jarak mendatar.

jalannya 10% lebih panjang daripada jalan datar.

Jawabannya: naik 10 m tiap 100 m mendatar. Gradiennya $\frac{10}{100} = 0,1$. Sudutnya hanya sekitar $5,7^\circ$, bukan 10° . Pilihan ketiga adalah gradien 1 atau tanjakan 100%: sudutnya 45° , curam sekali, hampir seperti dinding tangga!

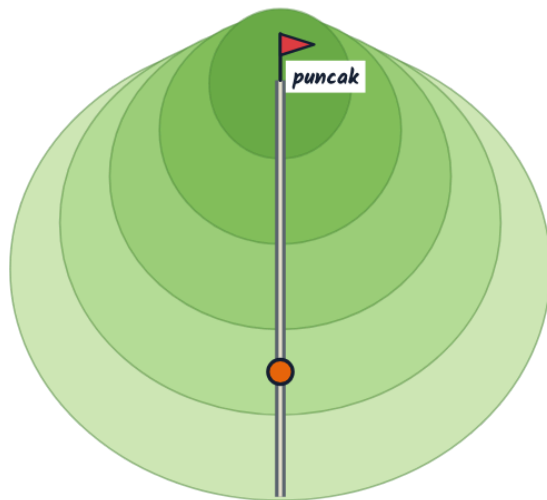
Jalan di pegunungan tidak bisa dibuat lurus menuju puncak, karena gradiennya akan terlalu besar. Di **Kelok 44**, Kabupaten Agam, Sumatera Barat, jalan dari tepi Danau Maninjau mendaki bukit lewat 44 tikungan tajam. Mengapa harus berkelok sebanyak itu? Cobalah sendiri.

LAB MINI Mengapa Kelok 44 berkelok-kelok?

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-9

tampak atas

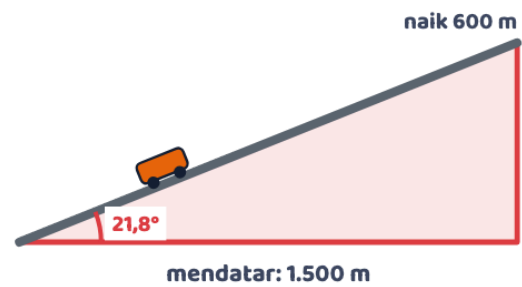
0 kelokan



jalan dibentangkan (tampak samping)

gradien = $600 \div 1.500 = 0,4$

kemiringan 40% → sangat curam 🚧



👉 geser slider, lalu ▶

panjang jalan (mendatar)

1.500 m

gradien = $600 \div \text{panjang}$

0,4

kemiringan

40 %

sudut tanjakan

21,8 °

Kategori (lab ini)

sangat curam 🧑‍🚒

Dalam lab ini, sebuah bukit setinggi 600 m didaki jalan yang setiap kelokannya menambah panjang jalan sekitar 250 m. Tambahkan kelokan dan tekan ▶ **Jalankan**. Berapa kelokan paling sedikit agar kemiringannya tidak lebih dari 10%?



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar 1550 SM, juru tulis Mesir bernama Ahmes menyalin *Papyrus Rhind*, yang memuat soal-soal tentang kemiringan sisi piramida. Orang Mesir mengukurnya dengan **seked**: berapa telapak tangan sisi piramida bergeser *mendatar* untuk setiap kenaikan 1 hasta (7 telapak tangan). Piramida Agung Giza punya seked sekitar $5\frac{1}{2}$ telapak tangan. Jadi gradiennya kira-kira $\frac{7}{5,5} \approx 1,27$, sudutnya sekitar 52°. Perhatikan: seked adalah **kebalikan** gradien kita, yaitu "maju per naik", bukan "naik per maju".

9.4 Persamaan garis $y = mx + c$

Sebuah garis lurus cukup dikenali dengan dua informasi: **di mana ia memotong sumbu-y** dan **seberapa curam ia**. Dua angka itu tertulis jelas dalam persamaannya.



BENTUK GRADIEN-TITIK POTONG

Garis dengan gradien m yang memotong sumbu- y di titik $(0, c)$ mempunyai persamaan

$$y = mx + c.$$

Garis dengan gradien m yang melalui titik (x_1, y_1) mempunyai persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$.

▼ Dari mana bentuk $y - y_1 = m(x - x_1)$?

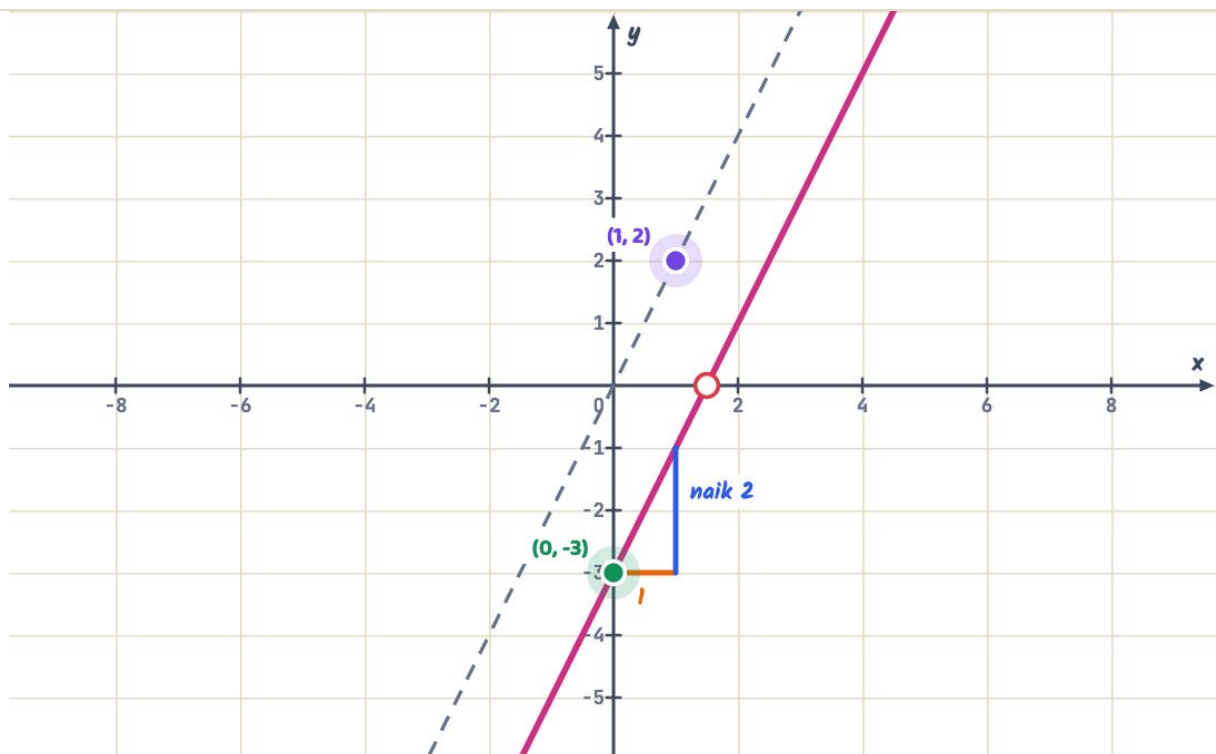
Ambil sembarang titik (x, y) pada garis, selain (x_1, y_1) . Gradien yang dihitung dari kedua titik itu harus sama dengan m (sifat gradien di 9.3), jadi $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$. Kalikan kedua ruas dengan $x - x_1$: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Jika $(x_1, y_1) = (0, c)$, bentuk ini menjadi $y - c = mx$, yaitu $y = mx + c$.



$$y = mx + c$$

$$y = 2x - 3$$

m memutar garis, c menggeser garis naik-turun. Garis putus-putus $y = mx$ selalu lewat titik asal.



$m > 0$: garis naik

Gradien m

2

Potong sumbu- y

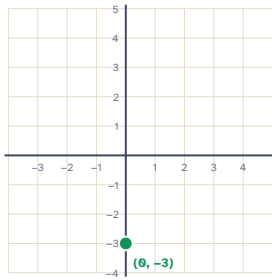
-3

Potong sumbu- x ($x =$)

1,5

Seret titik hijau $(0, c)$ untuk menggeser garis, dan titik ungu $(1, m)$ di garis putus-putus untuk memutarnya. Tekan ► **Jalankan** agar m berubah sendiri. Apa yang *tidak* pernah berubah saat hanya m yang bergerak?

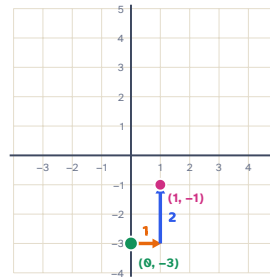
Kalau diberi persamaan, kamu bisa menggambar garisnya tanpa membuat tabel. Mulai dari c , lalu melangkah dengan m :



$$y = 2x - 3$$

Mulai dari $c = -3$.
Tandai titik $(0, -3)$
di sumbu-y.

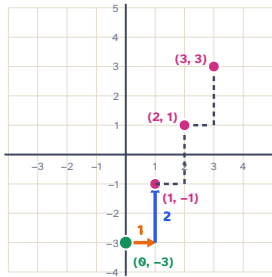
Langkah 1. Angka $c = -3$ adalah titik potong sumbu-y. Tandai $(0, -3)$: di sinilah garis memotong sumbu tegak.



$$y = 2x - 3$$

Gradien $2 = 2/1$:
maju 1 ke kanan,
lalu naik 2.

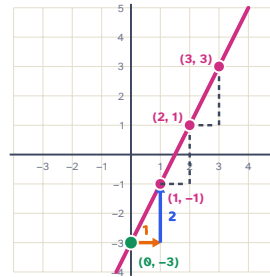
Langkah 2. Gradien $m = 2 = \frac{2}{1}$ berarti "maju 1, naik 2". Dari $(0, -3)$, maju 1 ke kanan dan naik 2: sampai di $(1, -1)$.



$$y = 2x - 3$$

Ulangi langkah yang sama.
Semua titik yang didapat
pasti segaris!

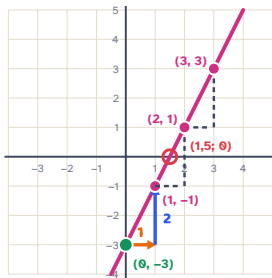
Langkah 3. Ulangi langkah yang sama: $(2, 1)$, lalu $(3, 3)$.
Karena lajunya tetap, semua titik itu segaris.



$$y = 2x - 3$$

Hubungkan dengan penggaris.
Itulah grafik $y = 2x - 3$,
tanpa membuat tabel.

Langkah 4. Tarik garis lurus melalui titik-titik itu. Selesai:
grafik $y = 2x - 3$.



$$y = 2x - 3$$

Bonus: potong sumbu-x saat $y = 0$
 $2x - 3 = 0$
 $x = 1,5$

Langkah 5. Garis memotong sumbu-x ketika $y = 0$: $2x - 3 = 0$, jadi $x = 1,5$. Titik potongnya $(1,5; 0)$.

Bahasa sederhana • Kalau rumusnya terasa ramai, pegang dua hal saja: c **adalah titik mulai** di sumbu-y, dan m **adalah cara melangkah**. Mulai, lalu melangkah. Mulai, lalu melangkah.

Bentuk	Persamaan	Dipakai jika diketahui...	Contoh (garis yang sama)
Gradien-titik potong	$y = mx + c$	gradien dan titik potong sumbu-y	$y = 2x - 3$
Titik-gradien	$y - y_1 = m(x - x_1)$	satu titik dan gradien	$y - 1 = 2(x - 2)$
Dua titik	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	dua titik	$\frac{y - 1}{9 - 1} = \frac{x - 2}{6 - 2}$
Umum	$ax + by + c = 0$, gradien $-\frac{a}{b}$	ingin bentuk rapi tanpa pecahan	$2x - y - 3 = 0$

Tentukan persamaan garis yang melalui $P(2, 1)$ dan $Q(6, 9)$.

- 1 Gradien: $m = \frac{9-1}{6-2} = \frac{8}{4} = 2$. Jadi $y = 2x + c$.
- 2 Masukkan titik $P(2, 1)$: $1 = 2 \times 2 + c$, sehingga $c = 1 - 4 = -3$.
- 3 Persamaannya $y = 2x - 3$. Cek dengan $Q(6, 9)$: $2 \times 6 - 3 = 9$. ✓

$y = 2x - 3$, garis yang sama dengan animasi di atas. Selalu cek dengan titik kedua: itu cara termurah menangkap salah hitung.



AWAS JEBAKAN

Gradien adalah angka di depan x **setelah** persamaan diubah ke bentuk $y = mx + c$. Pada $2y = 6x + 4$, gradiennya bukan 6: bagi dulu dengan 2 sehingga $y = 3x + 2$, jadi $m = 3$. Pada $y = 5 - 3x$, gradiennya -3 , bukan 5.



TRIK KAK LINTANG: METODE "TUTUP SATU"

Untuk menggambar $3x + 2y = 12$ dengan cepat, **tutup** suku $2y$ dengan jarimu (artinya $y = 0$): sisa $3x = 12$, jadi $x = 4$. Lalu tutup suku $3x$ (artinya $x = 0$): sisa $2y = 12$, jadi $y = 6$. Hubungkan $(4, 0)$ dan $(0, 6)$. Selesai dalam sepuluh detik!

Tentukan gradien, titik potong sumbu-y, dan titik potong sumbu-x dari garis $3x + 2y = 12$.

- 1 Ubah ke bentuk $y = mx + c$: $2y = -3x + 12$, lalu $y = -\frac{3}{2}x + 6$.
- 2 Gradien $m = -\frac{3}{2}$, titik potong sumbu-y $(0, 6)$.
- 3 Potong sumbu-x: $y = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$, titiknya $(4, 0)$.

$m = -\frac{3}{2}$, memotong sumbu-y di $(0, 6)$ dan sumbu-x di $(4, 0)$. Cek gradien dari kedua titik potong: $\frac{0-6}{4-0} = -\frac{3}{2}$. ✓

Garis sejajar dan garis tegak lurus

Rel kereta api tidak pernah bertemu: kedua relnya **sejajar**. Pojok buku membentuk sudut siku-siku: kedua sisinya **tegak lurus**. Gradien bisa mendeteksi kedua hubungan itu tanpa busur derajat.



Tebak Dulu!

Garis $y = 2x + 1$ diputar 90° terhadap titik $(0, 1)$. Berapa gradien garis yang baru?

−2

$\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$

tetap 2, karena memutar tidak mengubah kecuraman.

Jawabannya: $-\frac{1}{2}$. Garis lama: maju 1, naik 2. Setelah diputar 90° berlawanan arah jarum jam, "maju 1" menjadi "naik 1" dan "naik 2" menjadi "mundur 2". Gradien baru $= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$. Perhatikan: $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$. Kebetulan? Sama sekali bukan. Lihat animasinya di bawah!

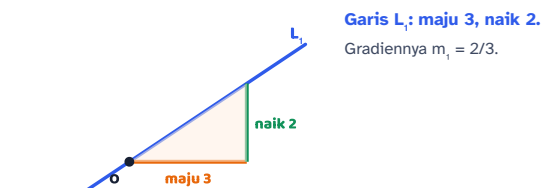


SIFAT GARIS SEJAJAR DAN TEGAK LURUS

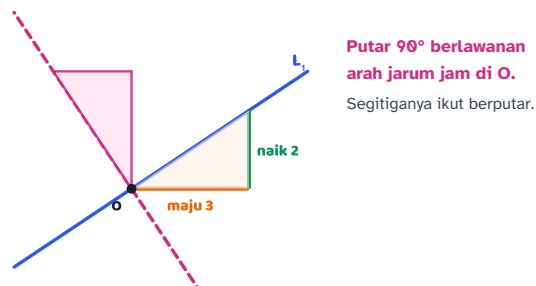
Untuk dua garis yang tidak tegak, dengan gradien m_1 dan m_2 :

- kedua garis **sejajar** jika dan hanya jika $m_1 = m_2$;
- kedua garis **tegak lurus** jika dan hanya jika $m_1 \times m_2 = -1$, atau $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

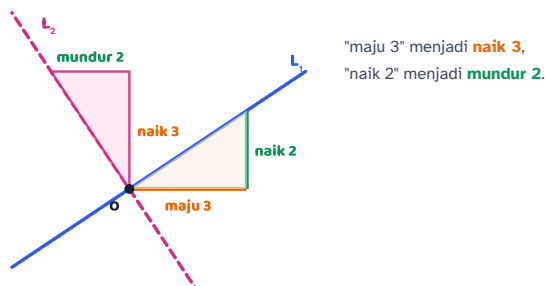
Garis mendatar ($m = 0$) selalu tegak lurus terhadap garis tegak (gradien tak terdefinisi).



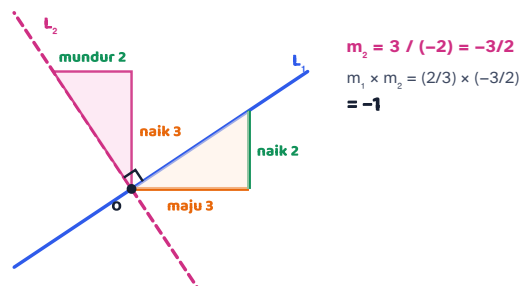
Langkah 1. Garis L_1 punya segitiga gradien "maju 3, naik 2", jadi $m_1 = \frac{2}{3}$.



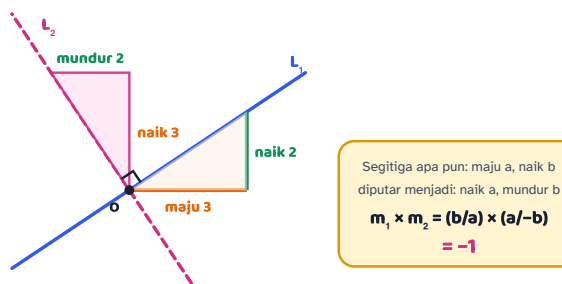
Langkah 2. Putar salinan garis dan segitiganya 90° berlawanan arah jarum jam terhadap titik O. Hasilnya garis L_2 yang tegak lurus L_1 .



Langkah 3. Setelah diputar, sisi mendatar "maju 3" berdiri tegak menjadi "naik 3", dan sisi tegak "naik 2" rebah ke kiri menjadi "mundur 2".



Langkah 4. Gradien L_2 adalah $m_2 = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$. Kalikan:
 $m_1 \times m_2 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$.



Langkah 5. Ini berlaku untuk segitiga gradien apa pun: "maju a, naik b" berubah menjadi "naik a, mundur b", sehingga $m_1 m_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{-b} = -1$. Terbukti tanpa busur derajat!

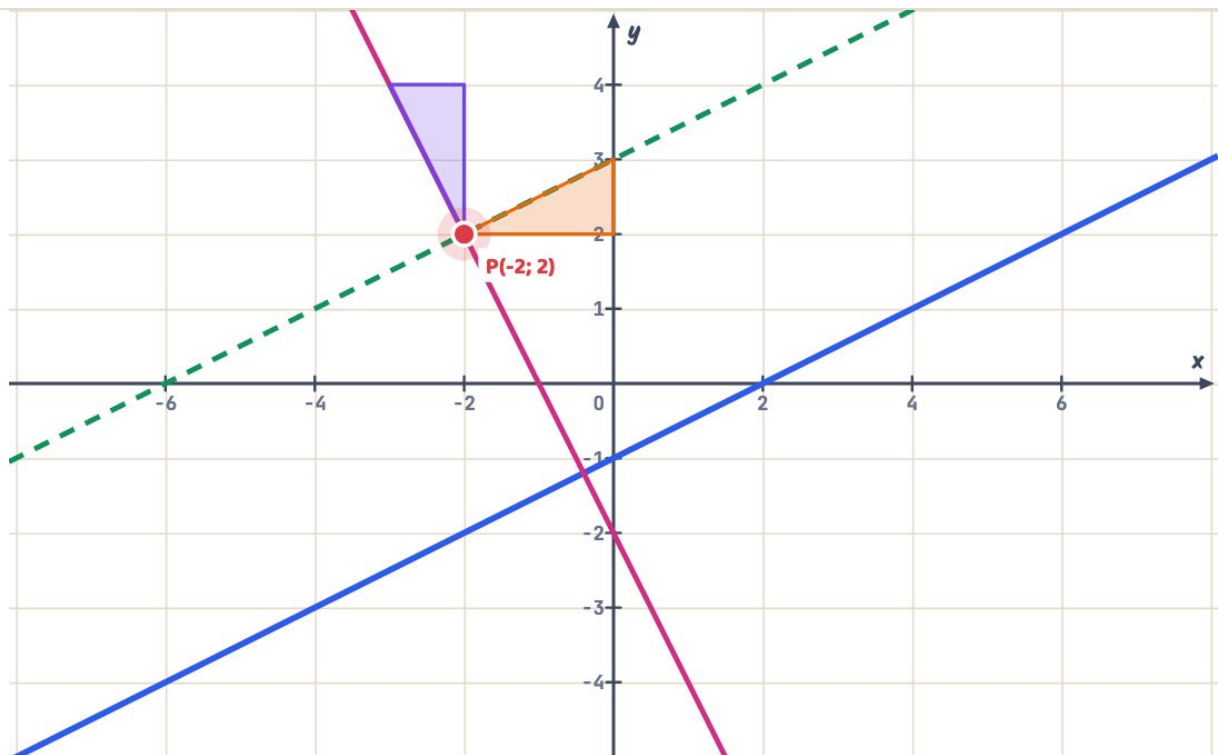
▼ Bukti dengan Teorema Pythagoras (untuk yang suka aljabar)

Geser kedua garis agar melalui titik asal: $y = m_1 x$ dan $y = m_2 x$. Gradien tidak berubah saat digeser. Titik $P(1, m_1)$ ada di garis pertama dan $Q(1, m_2)$ di garis kedua. Garis-garis itu tegak lurus jika dan hanya jika sudut POQ siku-siku, yaitu (Bab 18) jika dan hanya jika $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$:

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2 \iff 2 = -2m_1 m_2 \iff m_1 m_2 = -1.$$

$$m_2 = m_1 \quad (\text{sejajar}) \quad m_1 \times m_3 = -1 \quad (\text{tegak lurus})$$

$$m_1 = 0,5 \Rightarrow m_3 = -2, \quad m_1 \times m_3 = -1$$



✓ $m_1 \times m_3 = -1$: tegak lurus

m_1 (biru)
0,5

m_2 (hijau, sejajar)
0,5

m_3 (merah muda, tegak lurus)
-2

$m_1 \times m_3$
-1

Seret titik P. Garis hijau (sejajar) dan garis merah muda (tegak lurus) selalu ikut lewat P. Segitiga oranye adalah segitiga gradien "maju 2"; segitiga ungu adalah segitiga yang sama setelah diputar 90° . Ubah m_1 dan amati hasil kali gradiennya.



AWAS JEBAKAN

Gradien garis tegak lurus adalah lawan dari kebalikannya, bukan sekadar lawannya. Untuk $m = 2$, gradien tegak lurusanya $-\frac{1}{2}$, bukan -2 . Ingat dua gerakan: **balik** pecahannya ($2 = \frac{2}{1} \rightarrow \frac{1}{2}$), lalu **ganti tandanya** ($\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$).

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $y = \frac{2}{3}x + 1$ dan melalui titik $(4, -1)$.

1 Gradien garis yang diketahui $m_1 = \frac{2}{3}$. Balik dan ganti tanda: $m_2 = -\frac{3}{2}$.

2 Bentuk titik-gradien: $y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 4)$, jadi $y + 1 = -\frac{3}{2}x + 6$.

3 $y = -\frac{3}{2}x + 5$. Cek titik $(4, -1)$: $-\frac{3}{2} \times 4 + 5 = -6 + 5 = -1$. ✓

$y = -\frac{3}{2}x + 5$, atau dalam bentuk umum $3x + 2y = 10$. Cek gradien: $\frac{2}{3} \times (-\frac{3}{2}) = -1$. ✓

MITOS

"Garis tegak punya gradien 0, karena ia tidak miring."

MITOS

"Kalau jarak dua kali lipat, tarif ojek pasti dua kali lipat."

FAKTA

Yang gradiennya 0 adalah garis

mendatar

. Pada garis tegak

$$\Delta x = 0$$

, sehingga

$$\frac{\Delta y}{0}$$

tidak terdefinisi. Garis tegak justru "paling curam" dari semuanya.

FAKTA

Itu hanya benar jika garisnya lewat titik

$$O(0, 0)$$

, artinya tanpa biaya awal. Dengan biaya awal

$$c > 0$$

, tarif naik kurang dari dua kali lipat.

MITOS

"Huruf m untuk gradien berasal dari kata Prancis *monter* (mendaki)."

FAKTA

Cerita ini populer, tetapi tidak ada bukti sejarah yang kuat. Asal-usulnya tidak diketahui pasti. Di beberapa negara, gradien malah ditulis

k

atau

a

, misalnya

$$y = kx + b$$

.

9.6 Model linear di dunia nyata

Banyak hal di sekitarmu berubah dengan **laju tetap**: tarif per km, kuota yang terpakai per hari, suhu yang turun setiap kali kita mendaki. Setiap kali ada laju tetap, ada garis lurus yang menunggu digambar. Dalam **model linear** $y = mx + c$:

- c adalah **nilai awal**, yaitu nilai y ketika $x = 0$ (biaya awal, kuota awal bulan, suhu di tepi pantai);
- m adalah **laju perubahan**: berapa y berubah setiap kali x bertambah 1 (rupiah per km, GB per hari, °C per meter).

$$T = c + mx$$

Tarif = biaya awal + tarif per km × jarak. Biaya awal adalah titik potong sumbu-y, tarif per km adalah gradiennya.

c

Biaya awal rupiah

m

Tarif per km rupiah/km

x

Jarak km

T

Tarif total rupiah

TARIF TOTAL

22.000

rupiah

Rp**8.000** + Rp**3.500** × **4** km = Rp**22.000**. Jika jaraknya dilipatduakan menjadi **8** km, tarifnya Rp**36.000**: **kurang dari dua kali lipat, karena biaya awal hanya dibayar sekali.**

Cek satuan: rupiah + (rupiah/km) × km = rupiah + rupiah. Satuan km saling mencoret, jadi hasilnya rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TARIF-OJOL

Dimas naik ojek online dua kali dengan aturan tarif yang sama: 3 km bertarif Rp17.500 dan 8 km bertarif Rp35.000. (a) Susun model tarifnya. (b) Berapa tarif untuk 12 km? (c) Dengan uang Rp50.000, berapa km paling jauh yang bisa ditempuh?

1 Dua perjalanan = dua titik: (3; 17.500) dan (8; 35.000). Gradien $m = \frac{35.000 - 17.500}{8 - 3} = \frac{17.500}{5} = 3.500$ rupiah per km.

2 $T = 3.500x + c$. Masukkan (3; 17.500): $17.500 = 10.500 + c$, jadi $c = 7.000$. Model: $T = 3.500x + 7.000$.

3 (b) $T(12) = 3.500 \times 12 + 7.000 = 42.000 + 7.000 = 49.000$.

4 (c) $3.500x + 7.000 \leq 50.000 \Rightarrow 3.500x \leq 43.000 \Rightarrow x \leq 12,28 \dots$

Model $T = 3.500x + 7.000$. **Tarif 12 km Rp49.000**, dan **Rp50.000** cukup untuk sekitar 12,3 km. **Maknanya:** biaya awal **Rp7.000**, dan setiap km menambah **Rp3.500**.



MATEMATIKA NUSANTARA: RUMUS BRAAK

Mengapa udara di Dieng atau Puncak terasa dingin, padahal masih di Indonesia yang tropis? Ahli meteorologi Belanda **C. Braak**, yang meneliti iklim Hindia Belanda pada awal abad ke-20, merumuskan model linear yang hingga kini diajarkan di pelajaran geografi: suhu rata-rata di permukaan laut Indonesia sekitar 26,3 °C, dan **setiap naik 100 m, suhu turun sekitar 0,6 °C**. Dengan model ini, puncak Jaya di Papua (± 4.884 m) diperkirakan bersuhu sekitar -3 °C. Itulah sebabnya di sana pernah ada salju abadi, tepat di dekat garis khatulistiwa!

$$T = 26,3 - 0,6 \times \frac{h}{100}$$

Setiap naik 100 meter, suhu udara rata-rata turun sekitar 0,6 °C. Gradiennya -0,6 °C per 100 m, atau -0,006 °C per meter.

h

Ketinggian m

T

Perkiraan suhu rata-rata °C

PERKIRAAN SUHU RATA-RATA

21,7

°C



kira-kira setinggi kota Bandung

Di ketinggian **770** m, suhu rata-rata diperkirakan **21,7** °C, yaitu **4,62** °C lebih dingin daripada di tepi pantai (26,3 °C).

Cek satuan: 0,6 °C per 100 m dikali ketinggian dalam ratusan meter ($h \div 100$) menghasilkan °C, jadi *T* bersatuan °C.

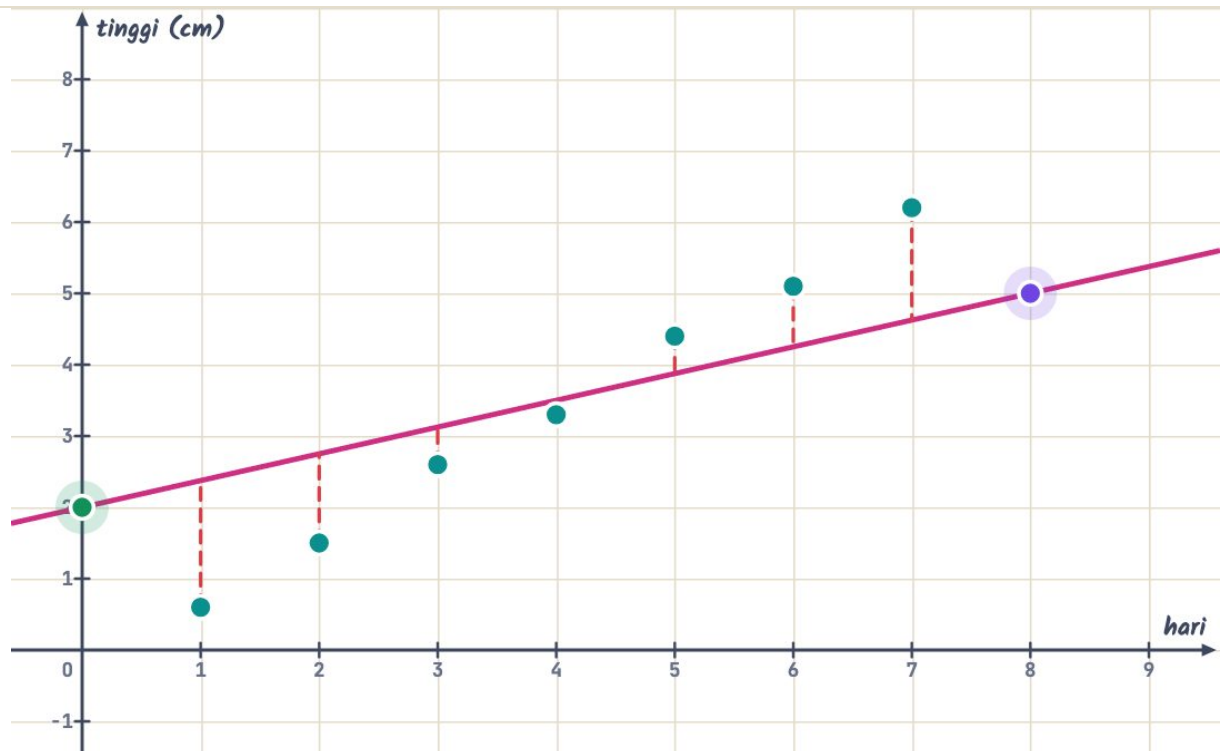
RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUHU-BRAAK](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-suhu-braak)

Data nyata jarang tepat segaris. Ayu mengukur tinggi kecambah kacang hijau setiap hari selama seminggu. Titik-titiknya *hampir* segaris. Garis mana yang paling mewakili data itu?

$$y = mx + c$$

$$y = 0,38x + 2$$

Seret kedua ujung penggaris. Garis merah putus-putus adalah galat: jarak tegak setiap titik data ke garismu.

Gradien m (cm/hari)**0,375**

Jumlah kuadrat galat

8,508

Prediksi hari ke-10

5,8 cm

Seret titik hijau (hari ke-0) dan titik ungu (hari ke-8) sampai garis merah putus-putus sependek mungkin. Tantangan: buat **jumlah kuadrat galat** lebih kecil dari 0,06. Berapa gradien yang kamu dapat, dan apa artinya bagi kecambah?

**AWAS JEBAKAN**

Model linear hanya berlaku di rentang yang masuk akal. Garis kecambah terbaik memotong sumbu y di sekitar $-0,3$ cm, padahal tinggi tidak mungkin negatif: sebelum hari pertama, biji baru mulai berkecambah. Kecambah juga tidak akan tumbuh $0,9$ cm per hari selamanya. Memakai model jauh di luar rentang data (**ekstrapolasi**) harus disertai akal sehat.

**GARIS REGRESI: KUADRAT TERKECIL**

Kalkulator, spreadsheet, dan aplikasi statistik bisa mencari garis kecocokan terbaik secara otomatis dengan **metode kuadrat terkecil**: garis yang membuat jumlah kuadrat galat sekecil mungkin.

Untuk data (x_i, y_i) dengan rata-rata $\bar{x}$ dan $\bar{y}$,

$$m = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad c = \bar{y} - m\bar{x}.$$

Jadi garis regresi selalu melewati titik rata-rata $(\bar{x}, \bar{y})$. Untuk data kecambah: $\bar{x} = 4$, $\bar{y} \approx 3,386$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 28$, dan $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 25,8$. Hasilnya $m = \frac{25,8}{28} \approx 0,921$ cm per hari dan $c \approx -0,30$ cm. Di IB Applications & Interpretation, kamu juga akan mengukur seberapa "lurus" data dengan koefisien korelasi r .

**Tarif ojek & taksi online**

Biaya awal adalah titik potong sumbu-y, tarif per km adalah gradien. Dua perjalanan sudah cukup untuk menebak aturannya.

**Kuota internet**

Kuota yang terpakai dengan laju tetap membentuk garis menurun. Titik potong sumbu-x adalah hari ketika kuota habis.

**Celsius ke Fahrenheit**

$F = 1,8C + 32$ adalah fungsi linear dengan gradien 1,8 dan titik potong 32.

**Grafik jarak-waktu
Whoosh**

Saat kereta cepat Jakarta-Bandung melaju dengan kecepatan tetap, grafik jarak terhadap waktunya lurus. Gradiennya adalah kecepatan, hingga 350 km/jam.

**Ram kursi roda**

Pedoman aksesibilitas di banyak negara menganjurkan ram selandai sekitar 1 : 12 (naik 1 cm tiap 12 cm mendatar) agar aman didorong.

**Sawah terasering**

Petani di Bali dan Jawa memotong lereng curam menjadi anak tangga datar. Lereng tetap punya gradien, tetapi air irigasi bisa tertahan di setiap petak.



LANJUT • OLIMPIADE

TITIK KISI PADA GARIS

Titik yang kedua koordinatnya bilangan bulat disebut **titik kisi**. Berapa banyak titik kisi pada ruas garis dari $(0, 0)$ ke (a, b) , dengan a, b bilangan asli? Jawabannya cantik: $\gcd(a, b) + 1$. Misalnya dari $(0, 0)$ ke $(6, 4)$: $\gcd(6, 4) = 2$, jadi ada 3 titik kisi, yaitu $(0, 0)$, $(3, 2)$, dan $(6, 4)$. Langkah terkecil di sepanjang garis adalah $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ dengan $d = \gcd(a, b)$.

Lebih mengejutkan lagi: garis $y = \sqrt{2}x$ **tidak pernah** melewati titik kisi mana pun selain O . Kalau ia melewati (p, q) dengan $p \neq 0$, maka $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ adalah pecahan, padahal $\sqrt{2}$ irasional. Garis itu menyelinap di antara jutaan titik kisi tanpa menyentuh satu pun!



Cek Cepat

Gradien garis yang melalui $(-2, 3)$ dan $(2, -5)$ adalah...

2

-2

$-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

Garis manakah yang tegak lurus terhadap $y = 3x + 1$?

$y = 3x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = \frac{1}{3}x$

$y = -\frac{1}{3}x + 5$

Kuota internet 24 GB dipakai 1,5 GB setiap hari. Model sisa kuota K setelah t hari dan hari habisnya adalah...

$$K = 24 - 1,5t, \text{ habis pada hari ke-16}$$

$$K = 1,5t - 24, \text{ habis pada hari ke-16}$$

$$K = 24 - 1,5t, \text{ habis pada hari ke-36}$$

$$K = 24t - 1,5, \text{ habis pada hari ke-24}$$

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A

Tantangan Rumah: menara gelas plastik

Bahan: 8–10 gelas plastik yang sama ukurannya (misalnya gelas air mineral), penggaris atau meteran, kertas berpetak, pensil.

1. Ukur tinggi satu gelas. Catat.
2. Tumpuk 2 gelas (gelas kedua masuk ke dalam gelas pertama), lalu ukur tinggi tumpukannya. Lanjutkan sampai 6 gelas.
3. Buat tabel (banyak gelas, tinggi tumpukan) dan gambar titik-titiknya di kertas berpetak.
4. Apakah titik-titiknya hampir segaris? Tarik garis yang paling mewakili, lalu hitung gradiennya: berapa cm tambahan tinggi untuk setiap gelas baru?
5. Susun model $T = mn + c$. Apa arti m dan c pada gelasmu? (Petunjuk: lihat bibir gelas.)

Pertanyaan: Menurut modelmu, berapa gelas yang harus ditumpuk agar menara setinggi badanmu? Ujilah untuk 8 atau 10 gelas: apakah ramalan modelmu tepat?

RINGKASAN KILAT Bab 9 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- menempatkan dan membaca titik di **bidang Kartesius** serta menyebutkan kuadrannya
- membedakan **relasi** dan **fungsi**, lalu memakai notasi $f(x)$
- menghitung **gradien** dari dua titik, dari grafik, dan dari persamaan
- menyusun dan menggambar **persamaan garis** $y = mx + c$
- mengenali **garis sejajar** dan **garis tegak lurus**, serta membuat **model linear** dari situasi nyata

Istilah kunci

Bidang Kartesius

sumbu- x

sumbu- y

titik asal

pasangan berurutan

kuadran

Rumus penting

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien dari dua titik. Gradien adalah perubahan y dibagi perubahan x : berapa satuan garis naik untuk setiap satu langkah ke kanan.

$$T = c + mx$$

Tarif ojek online sebagai fungsi linear. Tarif = biaya awal + tarif per km $\times$ jarak. Biaya awal adalah titik potong sumbu- y , tarif per km adalah gradiennya.

$$T = 26,3 - 0,6 \times \frac{h}{100}$$

Rumus Braak: suhu dan ketinggian. Setiap naik 100 meter, suhu udara rata-rata turun sekitar 0,6 °C. Gradiennya -0,6 °C per 100 m, atau -0,006 °C per meter.

Jangan sampai terjebak

- Urutan koordinat tidak boleh ditukar: (2, 5) dan (5, 2) adalah dua titik yang berbeda.
- Pakai urutan titik yang sama di atas dan di bawah garis pecahan.
- Gradien adalah angka di depan x setelah persamaan diubah ke bentuk $y = mx + c$.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=9

Teka-teki untuk Bab 10

Ojek "Kilat" memasang tarif Rp8.000 ditambah Rp2.500 per km. Ojek "Hemat" memasang tarif Rp5.000 ditambah Rp3.000 per km. Untuk perjalanan dekat, Hemat lebih murah. Untuk perjalanan jauh, Kilat yang menang. Pada jarak berapa km keduanya **sama mahal**nya, dan berapa tarifnya saat itu?

▼ Intip petunjuk

Gambar kedua garis $T = 8.000 + 2.500x$ dan $T = 5.000 + 3.000x$ pada bidang Kartesius yang sama. Kedua garis punya gradien berbeda, jadi pasti berpotongan di satu titik. Titik potong itulah jawabannya! Di Bab 10 kamu akan belajar menemukan titik potong dua garis dengan cepat, bahkan tanpa menggambar: **sistem persamaan linear**.

10

Sistem Persamaan Linear: Detektif Dua Misteri

Struk belanjamu terbang ditiup angin, tetapi kamu masih ingat dua pesanan. Bisakah harga setiap menu ditebak dengan pasti? Dengan dua petunjuk yang tepat, dua misteri bisa dibongkar sekaligus.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menjelaskan arti **penyelesaian** sistem persamaan: pasangan nilai yang memenuhi semua persamaan sekaligus, yaitu **titik potong** garis-garisnya;
- menyelesaikan SPLDV dengan metode **grafik**, **substitusi**, **eliminasi**, dan **aturan Cramer**;
- menentukan apakah sebuah sistem punya **satu**, **tak hingga**, atau **tidak punya** penyelesaian;
- menyelesaikan **SPLTV** (tiga variabel) dengan eliminasi bertahap;
- mengubah soal cerita (harga, tiket, campuran, ayam dan kambing, untung bazar) menjadi sistem persamaan dan menafsirkan jawabannya.

STRUK YANG TERBANG

KOMIK • 4 PANEL

Malam Minggu di warung tenda dekat alun-alun

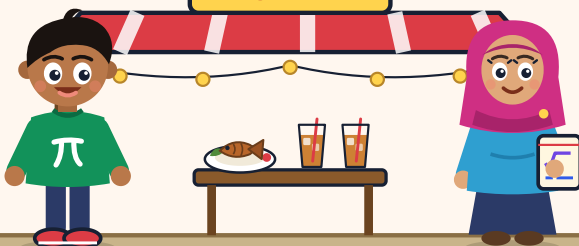
DIMAS

Aku tadi pesan 2 pecel lele dan 3 es teh.
Bayarnya Rp42.000.

AYU

Aku 3 pecel lele dan 2 es teh:
Rp53.000.

PECEL LELE



DIMAS

Yah, struknya terbang! Jadi harga satu pecel lele berapa, dong?

AYU

Kalau cuma pakai pesananmu, banyak pasangan harga yang cocok. Tapi kita punya **dua** pesanan!



KAK LINTANG

Dua misteri, dua petunjuk. Seperti detektif: petunjuk kedua mengunci jawabannya!



$$\begin{aligned}2x + 3y &= 42 \\3x + 2y &= 53 \\x &= \text{lele}, y = \text{es teh}\end{aligned}$$

Ancil muncul dari balik gerobak...**ANCIL**

Gabungkan saja dua pesanan! 5 lele + 5 es teh = Rp95.000. Jadi sepaket lele + teh Rp19.000.

DIMAS

Lho... terus es tehnya berapa?

**Tebak Dulu!**

Harga 1 pecel lele ditambah 1 es teh adalah Rp19.000. Dari informasi ini saja, bisakah kamu tahu harga es teh?

Bisa: pasti Rp9.500, karena 19.000 dibagi dua.

Bisa: pasti Rp4.000, karena es teh biasanya murah.

Belum bisa: banyak pasangan harga yang cocok, jadi butuh petunjuk lain.

Tidak akan pernah bisa, berapa pun petunjuk yang kita punya.

Jawabannya: belum bisa. Pasangan 15 + 4, 14 + 5, 10 + 9, bahkan 18,5 + 0,5 semuanya berjumlah 19 (ribu rupiah). Satu persamaan dengan dua variabel punya *tak hingga* banyak penyelesaian. Kita butuh satu petunjuk lagi yang "berbeda arah". Itulah inti bab ini!

10.1 Dua persamaan, dua misteri

Kembali ke warung tenda. Misalkan x = harga satu porsi pecel lele dan y = harga satu gelas es teh, keduanya dalam **ribu rupiah**. Pesanan Dimas menjadi persamaan

$$2x + 3y = 42.$$

Persamaan ini punya banyak penyelesaian. Kalau pecel lele 18 ribu dan es teh 2 ribu: $2 \cdot 18 + 3 \cdot 2 = 42$. Cocok! Kalau pecel lele 9 ribu dan es teh 8 ribu: $18 + 24 = 42$. Cocok juga! Satu persamaan seperti saksi yang hanya ingat sebagian cerita.

Petunjuk kedua datang dari Ayu: $3x + 2y = 53$. Mari kita uji beberapa harga pecel lele dan lihat harga es teh yang cocok untuk masing-masing pesanan.

Harga pecel lele x	y yang cocok dengan pesanan Dimas $y = \frac{42-2x}{3}$	y yang cocok dengan pesanan Ayu $y = \frac{53-3x}{2}$	Sama?
3	12	22	× selisih 10
6	10	17,5	× selisih 7,5
9	8	13	× selisih 5
12	6	8,5	× selisih 2,5
15	4	4	✓ cocok!
18	2	-0,5	× harga negatif?!

Perhatikan selisihnya mengecil 2,5 setiap baris, lalu tepat nol di $x = 15$. Hanya satu pasangan yang lolos kedua tes: **pecel lele Rp15.000 dan es teh Rp4.000**. Dua persamaan yang harus dipenuhi bersama seperti ini disebut **sistem persamaan**.



DEFINISI

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah dua persamaan linear yang memuat dua variabel yang sama, misalnya

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

dengan a, b, c, d, e, f bilangan real (a dan b tidak keduanya nol, begitu pula d dan e). **Penyelesaian** SPLDV adalah pasangan berurutan (x, y) yang membuat **kedua** persamaan benar sekaligus. Kumpulan semua penyelesaiannya disebut **himpunan penyelesaian** (HP).

Bahasa sederhana • Gampangnya: satu persamaan = satu petunjuk. Dua misteri butuh dua petunjuk. Jawabannya harus cocok dengan kedua petunjuk sekaligus, seperti satu kunci yang harus pas di dua gembok.



MENGAPA DISEBUT "LINEAR"?

Grafik setiap persamaannya berupa garis lurus (Bab 9). Ciri aljabarnya: variabel hanya berpangkat satu dan tidak saling dikalikan. Jadi $2x + 3y = 42$ linear, sedangkan $x^2 + y = 5$, $xy = 6$, atau $\frac{1}{x} + y = 2$ tidak linear.



AWAS JEBAKAN

Penyelesaian harus memenuhi **semua** persamaan sekaligus. Pasangan $(18, 2)$ memang cocok dengan pesanan Dimas, tetapi untuk pesanan Ayu $3 \cdot 18 + 2 \cdot 2 = 58 \neq 53$. Biasakan mengecek jawaban ke setiap persamaan, bukan hanya ke salah satunya.

10.2

Metode grafik: cari titik potongnya

Di Bab 9 kamu belajar bahwa persamaan seperti $y = 2x + 8$ atau $2x + 3y = 42$ bergambar garis lurus. **Setiap titik pada garis adalah satu penyelesaian** persamaan itu. Jadi penyelesaian sebuah sistem adalah titik yang berada di kedua garis sekaligus, yaitu **titik potong** keduanya.

Bahasa sederhana • Gampangnya: gambar dua garis di kertas berpetak. Titik tempat keduanya bertemu adalah jawabannya.

Ingat teka-teki penutup Bab 9 tentang dua tarif ojek? Misalkan aplikasi A memasang biaya buka Rp8.000 ditambah Rp2.000 per km, sedangkan aplikasi B Rp4.000 ditambah Rp3.000 per km. Dengan $x = \text{jarak (km)}$ dan $y = \text{tarif (ribu rupiah)}$:

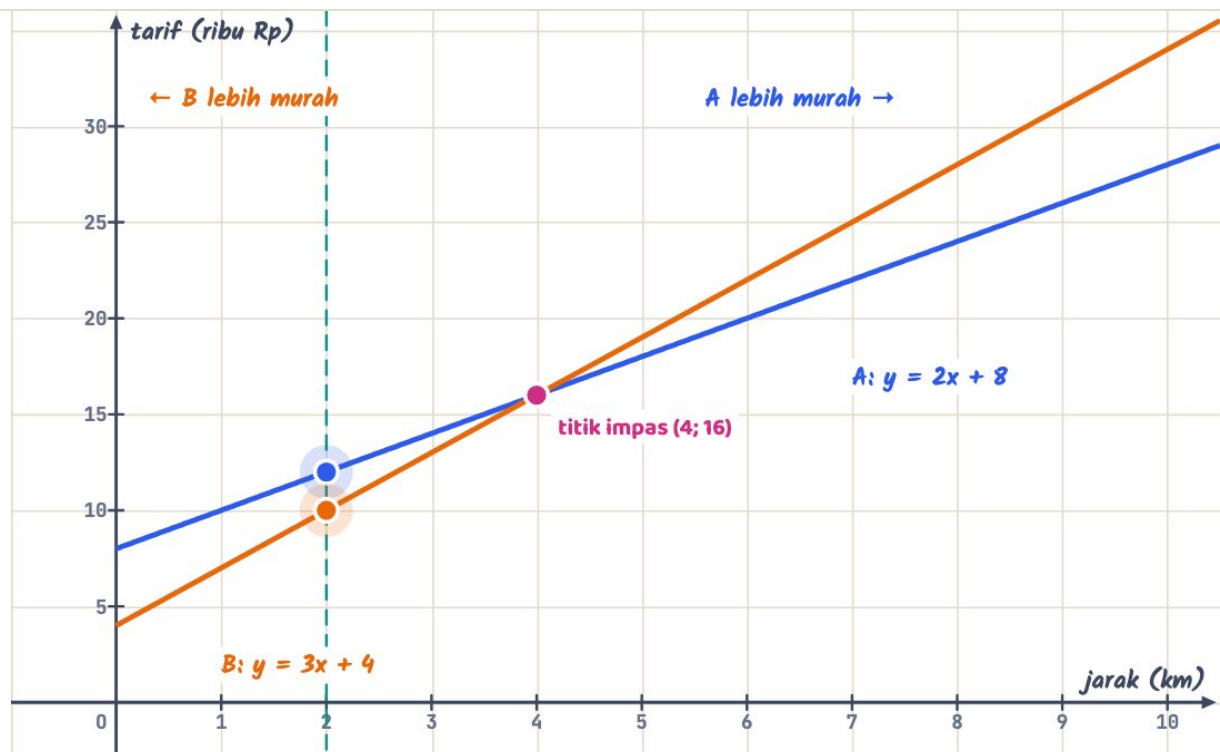
$$A : y = 2x + 8$$

$$B : y = 3x + 4$$

$$y_A = 2x + 8 \quad y_B = 3x + 4$$

$$x = 2 : \quad y_A = 12, \quad y_B = 10$$

x = jarak (km), y = tarif (ribu rupiah). A: buka Rp8.000 + Rp2.000/km. B: buka Rp4.000 + Rp3.000/km.



B lebih murah untuk perjalanan sependek ini

Tarif A

12 ribu Rp

Tarif B

10 ribu Rp

Selisih B – A

-2 ribu Rp

Seret titik biru atau oranye (atau geser slider jarak). Pada jarak berapa kedua tarif persis sama? Mengapa aplikasi dengan biaya buka lebih mahal justru menang untuk perjalanan jauh?

Kedua garis berpotongan di (4, 16). Artinya, untuk perjalanan 4 km kedua aplikasi sama-sama memasang tarif Rp16.000. Titik seperti ini disebut **titik impas**. Di kiri titik impas garis B lebih rendah (B lebih murah); di kanannya garis A lebih rendah. Jadi kunci teka-teki Bab 9 adalah **titik potong kedua garis**. Untuk ojek Kilat ($T = 8.000 + 2.500x$) dan Hemat ($T = 5.000 + 3.000x$), titik potongnya (6, 23.000): keduanya sama mahal, Rp23.000, untuk perjalanan 6 km.

$$x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Dua tarif sama mahal pada jarak = selisih biaya buka dibagi selisih tarif per km.

a_1 Biaya buka A ribu Rp

m_1 Tarif per km A ribu Rp/km

a_2 Biaya buka B ribu Rp

m_2 Tarif per km B ribu Rp/km

x Jarak impas km

JARAK IMPAS

4

km

✨ ada titik impas di jalan sungguhan

Tarif A = $8 + 2x$ dan tarif B = $4 + 3x$ (ribu rupiah). Keduanya sama pada $x = 4$ km, dengan tarif **16** ribu. Jika muncul '-', tarif per km keduanya sama: garisnya sejajar dan tidak pernah bertemu (kecuali biaya bukanya juga sama). Jarak negatif berarti satu aplikasi selalu lebih murah untuk perjalanan sungguhan.

Cek satuan: selisih ribu rupiah dibagi selisih (ribu rupiah per km) menghasilkan km.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SPL-IMPAS



TRIK KAK LINTANG

Menggambar garis $ax + by = c$ secepat kilat: **tutup x, tutup y**. Tutup suku x dengan jari (anggap $x = 0$); sisanya memberi titik potong sumbu- y . Lalu tutup suku y (anggap $y = 0$); sisanya memberi titik potong sumbu- x . Contoh $3x + 2y = 12$: tutup $x \rightarrow 2y = 12$, titik $(0, 6)$; tutup $y \rightarrow 3x = 12$, titik $(4, 0)$. Hubungkan dengan penggaris, selesai!

CONTOH Titik potong di kertas berpetak

Selesaikan dengan metode grafik: $x + y = 6$ dan $x - y = 2$.

1. Garis $x + y = 6$: tutup $x \rightarrow (0, 6)$; tutup $y \rightarrow (6, 0)$.
2. Garis $x - y = 2$: tutup $x \rightarrow -y = 2$, titik $(0, -2)$; tutup $y \rightarrow (2, 0)$.
3. Gambar kedua garis. Keduanya bertemu di $(4, 2)$.
4. Cek: $4 + 2 = 6 \checkmark$ dan $4 - 2 = 2 \checkmark$.

Penyelesaiannya $x = 4$ dan $y = 2$, ditulis HP = $\{(4, 2)\}$.



AWAS JEBAKAN

Titik potong yang dibaca dari grafik bisa meleset. Jika titik potongnya tidak jatuh di titik kisi, misalnya $(\frac{7}{3}, \frac{5}{2})$, mata kita sulit membacanya dengan tepat. Pakai grafik untuk melihat gambaran besar, lalu pastikan dengan substitusi atau eliminasi.

10.3 Metode substitusi: jurus barter

Grafik memberi gambaran, aljabar memberi jawaban persis. Cara aljabar pertama adalah **substitusi**, artinya *mengganti*. Kak Lintang menyebutnya jurus barter: kalau satu variabel bisa "dihargai" memakai variabel lain, tukarkan saja!

1. Dari salah satu persamaan, nyatakan satu variabel dalam variabel lain. Pilih variabel yang koefisiennya 1 agar tidak muncul pecahan.
2. Substitusikan (ganti) ke persamaan yang **lain**, sehingga tinggal satu variabel.
3. Selesaikan persamaan satu variabel itu.
4. Masukkan hasilnya ke persamaan langkah 1 untuk mendapat variabel kedua.
5. Cek jawaban ke kedua persamaan.

CONTOH Tiket museum dewasa dan anak

Keluarga Dimas (2 dewasa dan 3 anak) membayar tiket museum Rp40.000. Tiket dewasa Rp5.000 lebih mahal daripada tiket anak. Berapa harga masing-masing tiket?

- 1 Misalkan d = tiket dewasa dan a = tiket anak (rupiah): $2d + 3a = 40.000$ dan $d = a + 5.000$.
- 2 Persamaan kedua sudah "siap ditukar". Substitusi: $2(a + 5.000) + 3a = 40.000$.
- 3 $5a + 10.000 = 40.000 \Rightarrow 5a = 30.000 \Rightarrow a = 6.000$.
- 4 $d = 6.000 + 5.000 = 11.000$. Cek: $2 \cdot 11.000 + 3 \cdot 6.000 = 22.000 + 18.000 = 40.000 \checkmark$.

Tiket anak Rp6.000 dan tiket dewasa Rp11.000.

Teka-teki sistem persamaan yang paling terkenal di dunia berumur lebih dari seribu tahun: hewan berkaki dua dan berkaki empat di dalam satu kandang.

Tebak Dulu!

Di kandang Mbah Sastro ada ayam dan kambing. Banyak kepalanya 10, banyak kakinya 28. Tebakkan cepatmu: berapa ekor kambingnya?

7 ekor, karena $28 : 4 = 7$.

5 ekor, karena dibagi rata.

4 ekor.

14 ekor, karena $28 : 2 = 14$.

Jawabannya: 4 kambing (dan 6 ayam). Kalau ada 7 kambing, kepalanya baru 7, padahal harus 10. Cek: 4 kambing punya 16 kaki, 6 ayam punya 12 kaki, totalnya 28 $\checkmark$ dan kepalanya 10 $\checkmark$. Jebakannya: setiap tebakan harus memenuhi *kedua* petunjuk, kepala dan kaki.

Dengan substitusi: misalkan a = banyak ayam dan k = banyak kambing. Kepala: $a + k = 10$, jadi $a = 10 - k$. Kaki: $2a + 4k = 28$. Substitusi: $2(10 - k) + 4k = 28 \Rightarrow 20 + 2k = 28 \Rightarrow k = 4$, lalu $a = 6$.

Ancil punya cara yang jauh lebih jenaka. Ia meniup peluit ajaib: "**Semua hewan, angkat dua kaki!**" Ayam langsung duduk (kedua kakinya terangkat), sedangkan kambing berdiri dengan dua kaki belakang. Kaki yang

masih menapak tanah tinggal $28 - 2 \times 10 = 8$, dan semuanya milik kambing, masing-masing dua. Jadi kambingnya $8 : 2 = 4$ ekor.

LAB MINI Kandang Ancil: peluit ajaib

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10

10 kepala • 28 kaki

kaki di tanah: 24



PRRIIT!

Prriit! Semua hewan mengangkat 2 kaki: $10 \times 2 = 20$ kaki terangkat.

Kaki yang masih menapak tanah (titik kuning): $28 - 20 = 8$.

kaki di tanah setelah peluit
8

kambing
?

ayam
?

Atur banyak kepala dan kaki, lalu tekan ► **Jalankan**. Hitung titik kuning (kaki yang menapak tanah) setelah peluit berbunyi. Coba juga buat kandang yang *mustahil*: apa syarat banyak kaki agar kandangnya masuk akal?

$$\text{kambing} = \frac{\text{kaki} - 2 \times \text{kepala}}{2}$$

Anggap dulu semua hewan ayam. Kaki yang tersisa, dibagi dua, adalah banyak kambing.

kepala Banyak kepala buah

kaki Banyak kaki buah

kambing Banyak kambing ekor

BANYAK KAMBING

4

ekor

Kalau semua **10** hewan ayam, kakinya **20**. Kelebihannya **8** kaki, dan setiap kambing menyumbang 2 kaki ekstra. Jadi kambing = **4** ekor dan ayam = **6** ekor. Jika muncul '-', kandang itu mustahil: banyak kaki harus berada di antara **20** dan **40**.

Cek satuan: kepala dan kaki dihitung dalam buah, hasilnya dalam ekor.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SPL-AYAM-KAMBING



TAMU DARI MASA LALU

Teka-teki "burung dan kelinci dalam satu kandang" tercatat dalam kitab Tiongkok *Sunzi Suanjing* (sekitar abad ke-3 sampai ke-5 M): ada 35 kepala dan 94 kaki. Cara yang tercatat di sana kira-kira begini: **bagi dua banyak kaki, lalu kurangi dengan banyak kepala**. Hasilnya $94 : 2 - 35 = 12$ kelinci, sehingga burungnya 23. Itu persis trik peluit Ancil, hanya urutan hitungnya berbeda! Hingga kini teka-teki ini masih populer di sekolah-sekolah di Asia Timur.



MATEMATIKA NUSANTARA

Di pesisir selatan Pulau Lembata, Nusa Tenggara Timur, ada pasar tradisional Wulandoni tempat sebagian warga masih **berbarter**: nelayan membawa ikan, petani dari pegunungan membawa jagung, pisang, dan hasil kebun lain. Barter adalah substitusi dalam kehidupan nyata! Misalkan (angka ini hanya ilustrasi) 2 ekor ikan setara 3 ikat jagung, dan 1 ikan bersama 1 ikat jagung setara 10 buah pisang. Dengan pisang sebagai "uang": $2i = 3j$ dan $i + j = 10$. Substitusi $i = 1,5j$: $2,5j = 10$, jadi $j = 4$ dan $i = 6$. Satu ikan senilai 6 pisang, satu ikat jagung senilai 4 pisang, tanpa selebar uang pun.

Kedai kopi mencampur kopi arabika Gayo seharga Rp180.000/kg dengan kopi robusta seharga Rp90.000/kg. Campurannya 15 kg dengan nilai total Rp2.070.000. Berapa kg masing-masing kopi?

1 Misalkan g kg Gayo dan r kg robusta. Berat: $g + r = 15$. Nilai (ribu rupiah): $180g + 90r = 2.070$.

2 Dari persamaan berat: $r = 15 - g$. Substitusi: $180g + 90(15 - g) = 2.070$.

3 $90g + 1.350 = 2.070 \Rightarrow 90g = 720 \Rightarrow g = 8$, lalu $r = 7$.

4 Cek: $180 \cdot 8 + 90 \cdot 7 = 1.440 + 630 = 2.070 \checkmark$.

Campurannya 8 kg Gayo dan 7 kg robusta, dengan harga rata-rata Rp138.000/kg.

10.4 Metode eliminasi: buat satu misteri lenyap

Substitusi cocok jika ada variabel berkoefisien 1. Bagaimana kalau semua koefisiennya "repot", seperti $2x + 3y = 42$ dan $3x + 2y = 53$? Gunakan **eliminasi**: jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan sehingga satu variabel **lenyap**.

Mengapa boleh? Bayangkan dua timbangan yang sama-sama seimbang. Kalau isi piring kiri keduanya digabung dan isi piring kanan keduanya juga digabung, hasilnya tetap seimbang. Persamaan pun begitu: ruas kiri + ruas kiri = ruas kanan + ruas kanan.

Bahasa sederhana • Gampangnya: eliminasi artinya "menghilangkan". Kita menggabungkan dua petunjuk dengan cerdas sampai satu misteri hilang, sehingga misteri yang tersisa mudah ditemukan.

Ancil menunjukkan trik yang sangat cantik untuk pesanan pecel lele. Ikuti langkahnya:

Dimas  = 42 $2x + 3y = 42$

Ayu  = 53 $3x + 2y = 53$

x = harga 1 porsi pecel lele, y = harga 1 gelas es teh (ribu rupiah)

Bagaimana memisahkan keduanya? Ancil punya ide...

Langkah 1. Pesanan Dimas: 2 pecel lele + 3 es teh = 42 ribu.
Pesanan Ayu: 3 pecel lele + 2 es teh = 53 ribu. Dalam aljabar:
 $2x + 3y = 42$ dan $3x + 2y = 53$.

Dimas  = 42 $2x + 3y = 42$

Ayu  = 53 $3x + 2y = 53$

Berdua  = 95 $5x + 5y = 95$

Langkah 2. Gabungkan kedua pesanan dalam satu nampan: 5 pecel lele + 5 es teh = $42 + 53 = 95$ ribu. Kedua persamaan dijumlahkan: $5x + 5y = 95$.

Dimas  = 42 $2x + 3y = 42$

Ayu  = 53 $3x + 2y = 53$

1 paket  = 19 $\leftarrow 95 : 5 \text{ (lima paket)}$ $x + y = 19$

Langkah 3. Lima pecel lele dan lima es teh sama dengan 5 paket "lele + teh". Jadi satu paket harganya $95 : 5 = 19$ ribu: $x + y = 19$.

Dimas  = 42 $2x + 3y = 42$

Ayu  = 53 $3x + 2y = 53$

1 paket  = 19 $\leftarrow 95 : 5 \text{ (lima paket)}$ $x + y = 19$

Dimas  = 42 $19 + 19 + y = 42$
 $y = 4$

Langkah 4. Susun ulang pesanan Dimas menjadi 2 paket + 1 es teh = 42. Dua paket harganya 38, jadi es teh yang tersisa $42 - 38 = 4$ ribu: $y = 4$.

Dimas  = 42 $2x + 3y = 42$

Ayu  = 53 $3x + 2y = 53$

1 paket  = 19 $\leftarrow 95 : 5 \text{ (lima paket)}$ $x + y = 19$

Dimas  = 42 $19 + 19 + y = 42$
 $y = 4$

es teh = 4 ribu · pecel lele = $19 - 4 = 15$ ribu

Cek pesanan Ayu: $3 \times 15 + 2 \times 4 = 45 + 8 = 53$ ✓

Langkah 5. Pecel lele = $19 - 4 = 15$ ribu. Cek ke pesanan Ayu: $3 \cdot 15 + 2 \cdot 4 = 53$ ✓. Trik ini jalan karena koefisiennya bertukar tempat (2, 3 dan 3, 2).

Trik Ancil hanya bekerja untuk koefisien yang "bertukar tempat". Cara umumnya: **kalikan** setiap persamaan dengan bilangan yang tepat sehingga koefisien salah satu variabel sama besar, lalu **kurangkan** (jika tandanya sama) atau **jumlahkan** (jika tandanya berlawanan).

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 3y = 42 & | \times 3 & \Rightarrow & 6x + 9y = 126 \\ 3x + 2y = 53 & | \times 2 & \Rightarrow & 6x + 4y = 106 \\ \text{kurangkan:} & & \Rightarrow & 5y = 20 \Rightarrow y = 4 \end{array}$$

Lalu masukkan $y = 4$ ke $2x + 3y = 42$: $2x = 30$, jadi $x = 15$. Sama dengan hasil trik Ancil, tentu saja!

(1) $2x + 3y = 42$

(2) $3x + 2y = 53$

■ $x = \text{pecel lele}$ ■ $y = \text{es teh}$

(dalam ribu rupiah)

(1) $\times 1$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2x & 3y \\ \hline \end{array} = 42$$

$2x + 3y = 42$

-

(2) $\times 1$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3x & 2y \\ \hline \end{array} = 53$$

$3x + 2y = 53$

hasil

koefisien x hasil

-1

koefisien y hasil

1

Keadaan

belum ada yang lenyap

Setiap persamaan digambar sebagai batang: **biru** untuk suku x , **orange** untuk suku y . Atur pengali kedua baris sampai salah satu warna lenyap pada baris hasil, lalu tekan ► **Jalankan** untuk melihat kedua batang ditumpuk. Coba juga soal "Garis sejajar?" dan "Garis berimpit?": apa yang tersisa?

**AWAS JEBAKAN**

Saat mengurangkan dua persamaan, kurangkan **setiap** suku, termasuk ruas kanan dan tanda negatifnya. Contoh: $(3x + 2y) - (3x - 4y) = 2y - (-4y) = 6y$, bukan $-2y$. Kalau ragu, kalikan dulu persamaan kedua dengan -1 , lalu *jumlahkan*.

Ayu membeli 4 buku tulis dan 3 pulpen seharga Rp30.500. Dimas membeli 2 buku tulis dan 5 pulpen seharga Rp27.500. Berapa harga satu buku tulis dan satu pulpen?

- 1 Misalkan b dan p dalam ribu rupiah: $4b + 3p = 30,5$ dan $2b + 5p = 27,5$.
- 2 Samakan koefisien b : kalikan persamaan kedua dengan 2, menjadi $4b + 10p = 55$.
- 3 Kurangkan persamaan pertama: $(4b + 10p) - (4b + 3p) = 55 - 30,5 \Rightarrow 7p = 24,5 \Rightarrow p = 3,5$.
- 4 Substitusi: $4b + 10,5 = 30,5 \Rightarrow b = 5$. Cek ke belanjaan Dimas: $10 + 17,5 = 27,5 \checkmark$.

Satu buku tulis Rp5.000 dan satu pulpen Rp3.500.

Kalau eliminasi dikerjakan sekali untuk koefisien huruf (bukan angka), kita mendapat rumus siap pakai untuk semua SPLDV.



ATURAN CRAMER UNTUK SPLDV

Untuk sistem $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$, misalkan $D = ae - bd$. Jika $D \neq 0$, sistem itu mempunyai tepat satu penyelesaian:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Bilangan D disebut **determinan** sistem. Dengan notasi determinan, $D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$, dan $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, sehingga $x = \frac{D_x}{D}$ dan $y = \frac{D_y}{D}$.

▼ Bukti dengan eliminasi (untuk yang suka hitungan)

Kalikan persamaan pertama dengan e dan persamaan kedua dengan b : $ae x + bey = ce$ dan $bdx + bey = bf$. Kurangkan, suku y lenyap:

$$(ae - bd)x = ce - bf \implies x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Dengan cara yang sama, kalikan persamaan pertama dengan d dan persamaan kedua dengan a : $adx + bdy = cd$ dan $adx + aey = af$. Kurangkan yang pertama dari yang kedua: $(ae - bd)y = af - cd$. Pembagian ini hanya sah jika $D = ae - bd \neq 0$. ■

Contoh pecel lele: $D = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5$, $D_x = 42 \cdot 2 - 3 \cdot 53 = -75$, $D_y = 2 \cdot 53 - 42 \cdot 3 = -20$. Jadi $x = 15$ dan $y = 4$.

RUMUS HIDUP Aturan Cramer 2 x 2

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Untuk $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$: x adalah selisih perkalian silang dibagi determinan $D = ae - bd$.



✨ penyelesaiannya bilangan bulat

Sistemnya $2x + (3)y = 42$ dan $3x + (2)y = 53$. Determinan $D = ae - bd = -5$. Hasilnya $x = 15$ dan $y = (af - cd)/D = 4$. Jika muncul '-', $D = 0$: kedua garis sejajar atau berimpit, jadi tidak ada penyelesaian tunggal.

Cek satuan: semua koefisien tak bersatuan di sini; dalam soal cerita, x bersatuan sama dengan c dibagi satuan a .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SPL-CRAMER

ADU CEPAT Eliminasi kilat: jumlahkan saja!

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-10

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Jumlahkan kedua persamaan: y langsung lenyap, sisanya $(a + d)x = c + f$. Contoh: $3x + y = 11$ dan $2x - y = 4$ memberi $5x = 15$, jadi $x = 3$.



TRIK KAK LINTANG

Pilih senjata yang tepat. **Substitusi** paling enak jika ada variabel berkoefisien 1 atau -1 (misalnya $y = 2x - 1$). **Eliminasi** paling enak jika koefisiennya sama, berlawanan, atau mudah disamakan. **Aturan Cramer** paling cepat untuk soal pilihan ganda dengan angka "jelek". Dan **grafik** paling cocok untuk melihat makna, misalnya titik impas. Apa pun senjatanya, akhiri dengan cek!



TAMU DARI MASA LALU

Bab kedelapan kitab Tiongkok *Jiuzhang Suanshu* (Sembilan Bab tentang Seni Matematika), yang disusun sekitar 2.000 tahun lalu, bernama *fangcheng*. Isinya cara menyelesaikan sistem persamaan dengan batang hitung yang disusun di papan seperti tabel, lalu baris-barisnya dikurangkan satu sama lain. Itu sangat mirip dengan metode yang kini disebut **eliminasi Gauss**, sesuai nama Carl Friedrich Gauss (1777-1855) yang memakainya secara sistematis. Rumus determinan untuk SPL diterbitkan Gabriel Cramer pada 1750.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

BAHASA MATRIKS DAN MAKNA DETERMINAN

SPLDV dapat ditulis sebagai satu persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}.$$

Determinan $D = ae - bd$ bernilai nol tepat ketika baris (a, b) dan (d, e) sebanding. Secara geometris, $|D|$ adalah luas jajargenjang yang dibentuk vektor kolom (a, d) dan (b, e) ; jika luasnya nol, kedua vektor segaris dan sistem kehilangan "satu arah informasi". Untuk sistem besar (misalnya 10 variabel), aturan Cramer menjadi sangat lambat, sehingga komputer memakai eliminasi Gauss. Kamu akan bertemu lagi dengan matriks dan determinan di Bab 36.

**Tebak Dulu!**

Berapa banyak penyelesaian sistem $x + 2y = 4$ dan $2x + 4y = 10$?

Tepat satu, seperti biasanya.

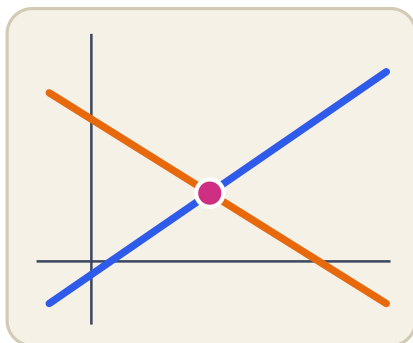
Tepat dua.

Tak hingga banyak.

Tidak ada sama sekali.

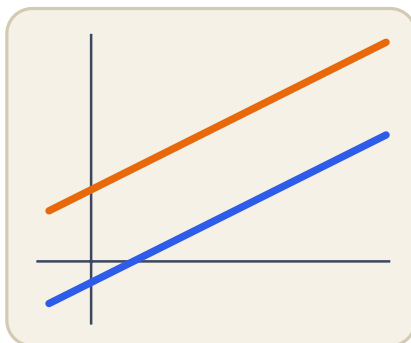
Jawabannya: tidak ada. Kalikan persamaan pertama dengan 2: $2x + 4y = 8$. Padahal persamaan kedua mengatakan $2x + 4y = 10$. Bilangan yang sama tidak mungkin sekaligus bernilai 8 dan 10! Grafiknya dua garis sejajar yang tidak pernah bertemu.

Dua garis lurus di bidang hanya punya tiga kemungkinan nasib: berpotongan, sejajar, atau berimpit (menumpuk menjadi satu garis).

**Berpotongan**

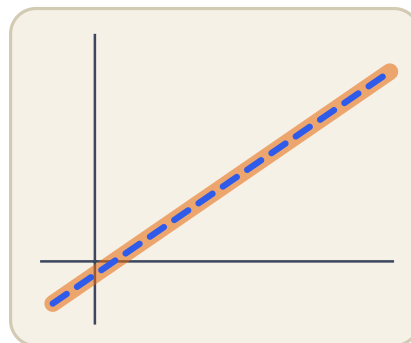
tepat satu penyelesaian

eliminasi $\rightarrow x = 3, y = 2$

**Sejajar**

tidak ada penyelesaian

eliminasi $\rightarrow 0 = -2$ ✗

**Berimpit**

tak hingga penyelesaian

eliminasi $\rightarrow 0 = 0$ ✓

Contoh: $x + y = 5$, $x - y = 1$ (berpotongan); $x + 2y = 4$, $2x + 4y = 10$ (sejajar); $x + 2y = 4$, $2x + 4y = 8$ (berimpit).



TIGA KEMUNGKINAN BANYAK PENYELESAIAN

Untuk SPLDV $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$:

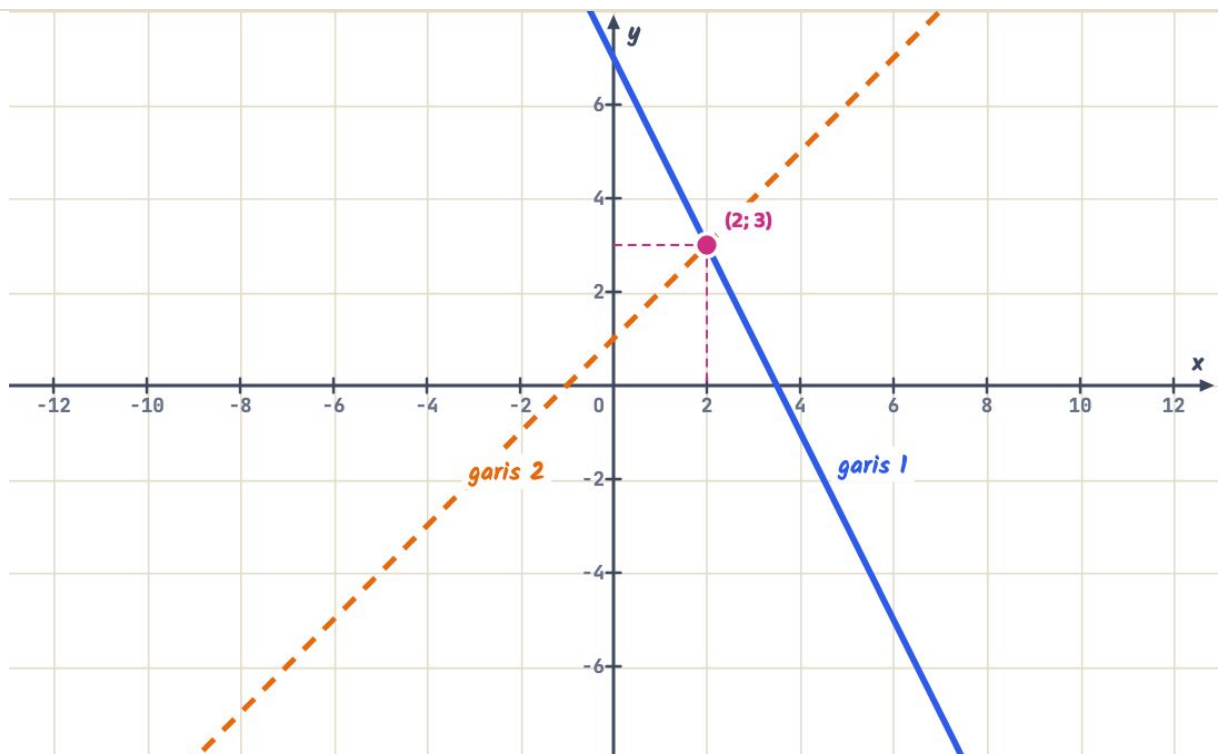
- Jika $ae - bd \neq 0$, ada **tepat satu** penyelesaian: kedua garis **berpotongan**.
- Jika $ae - bd = 0$ dan persamaan kedua **bukan** kelipatan persamaan pertama, **tidak ada** penyelesaian: kedua garis **sejajar**.
- Jika persamaan kedua kelipatan persamaan pertama (termasuk ruas kanannya), ada **tak hingga** banyak penyelesaian: kedua garis **berimpit**.

Jika tidak ada koefisien nol, cukup bandingkan: $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \rightarrow$ tepat satu; $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f} \rightarrow$ tidak ada; $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \rightarrow$ tak hingga.

Sistem	Perbandingan koefisien	Hasil eliminasi	Grafik	Banyak penyelesaian
$x + y = 5$ $x - y = 1$	$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$	$x = 3, y = 2$	berpotongan	tepat satu
$x + 2y = 4$ $2x + 4y = 10$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{4}{10}$	$0 = -2$ (mustahil)	sejajar	tidak ada
$x + 2y = 4$ $2x + 4y = 8$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$	$0 = 0$ (selalu benar)	berimpit	tak hingga

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$2x + 1y = 7 \quad 1x - 1y = -1$$



✓ berpotongan: tepat satu penyelesaian

$$D = a_1b_2 - a_2b_1$$

-3

x

2

y

3

Mulai dari $2x + y = 7$ dan $x - y = -1$. Tantangan: (1) buat kedua garis **sejajar** tanpa mengubah garis 1; (2) buat keduanya **berimpit** (petunjuk: kalikan semua angka garis 1 dengan bilangan yang sama); (3) cari sistem yang titik potongnya $(-3, 2)$. Perhatikan nilai D setiap kali garisnya sejajar.

Tentukan nilai k agar sistem $3x - 2y = 5$ dan $6x + ky = 7$ tidak mempunyai penyelesaian.

- 1 Tidak ada penyelesaian berarti garisnya sejajar: $D = 3k - (-2)(6) = 3k + 12 = 0$, jadi $k = -4$.
- 2 Pastikan tidak berimpit: dengan $k = -4$, dua kali persamaan pertama adalah $6x - 4y = 10$, sedangkan persamaan kedua $6x - 4y = 7$. Ruas kanannya berbeda.
- 3 Eliminasi menghasilkan $0 = 3$: mustahil.

$k = -4$. Untuk nilai k lain, $D \neq 0$ dan sistemnya punya tepat satu penyelesaian.

MITOS

"Dua persamaan dengan dua variabel pasti punya tepat satu penyelesaian."

MITOS

"Substitusi dan eliminasi bisa memberi jawaban yang berbeda."

FAKTA

Tidak selalu. Jika garisnya sejajar, penyelesaiannya tidak ada; jika berimpit, penyelesaiannya tak hingga. Periksa dulu $D = ae - bd$
: hanya jika $D \neq 0$ penyelesaiannya tunggal.

FAKTA

Penyelesaian sistem tidak bergantung pada cara. Metode hanyalah jalan menuju jawaban yang sama. Jika hasilnya berbeda, pasti ada salah hitung; cek dengan memasukkan jawaban ke kedua persamaan.

MITOS

"Sistem linear bisa saja punya tepat dua penyelesaian."

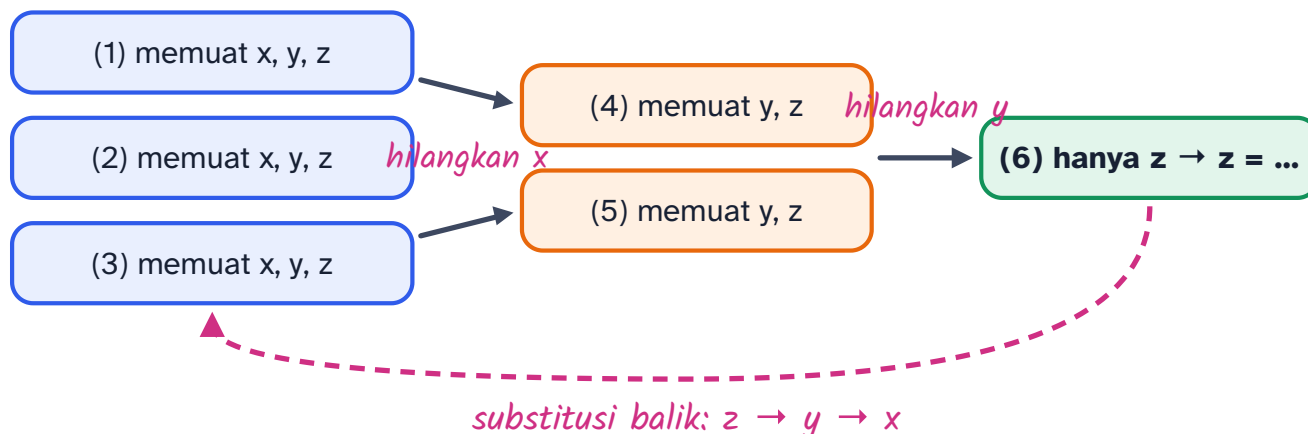
FAKTA

Mustahil! Dua garis lurus yang berbagi dua titik pasti berimpit, karena melalui dua titik hanya ada satu garis. Jadi banyak penyelesaiannya selalu 0, 1, atau tak hingga. Buktinya ada di soal olimpiade bab ini.

10.6 SPLTV: tiga misteri sekaligus

Bagaimana kalau misterinya tiga, misalnya harga bakso, mie ayam, dan es jeruk? Kita butuh **tiga** petunjuk, yaitu **sistem persamaan linear tiga variabel** (SPLTV). Strateginya seperti corong: kurangi banyak variabel satu per satu.

Bahasa sederhana • Gampangnya: tiga misteri butuh tiga petunjuk. Hilangkan satu misteri dulu sampai tinggal dua, lalu kerjakan seperti SPLDV yang sudah kamu kuasai.



Pasangkan (1) dengan (2) dan (1) dengan (3) untuk menghilangkan variabel yang **sama**, lalu selesaikan SPLDV yang tersisa.

COBA SENDIRI Bakso, mie ayam, dan es jeruk

Di kantin sekolah: 1 bakso + 1 mie ayam + 1 es jeruk = Rp32.000; 2 bakso + 1 mie ayam = Rp42.000; 1 mie ayam + 3 es jeruk = Rp27.000. Berapa harga masing-masing?

- 1 Misalkan b, m, j dalam ribu rupiah: (1) $b + m + j = 32$, (2) $2b + m = 42$, (3) $m + 3j = 27$.
- 2 Hilangkan m . (2) - (1): $b - j = 10$... (4). (3) - (1): $-b + 2j = -5$... (5).
- 3 Jumlahkan (4) dan (5): $j = 5$. Dari (4): $b = 15$. Dari (2): $m = 42 - 30 = 12$.
- 4 Cek (1): $15 + 12 + 5 = 32$ ✓. Cek (3): $12 + 15 = 27$ ✓.

Bakso Rp15.000, mie ayam Rp12.000, es jeruk Rp5.000.



AWAS JEBAKAN

Pada SPLTV, variabel yang dihilangkan di kedua langkah harus **sama**. Jika langkah pertama menghilangkan m tetapi langkah kedua menghilangkan b , kamu mendapat dua persamaan yang masih memuat tiga variabel berbeda, dan corongnya macet.

**TRIK SIMETRI: JUMLAHKAN SEMUANYA**

Sistem $x + y = 13$, $y + z = 17$, $z + x = 20$ tampak butuh eliminasi panjang. Padahal setiap variabel muncul tepat dua kali! Jumlahkan ketiganya: $2(x + y + z) = 50$, jadi $x + y + z = 25$. Kurangkan setiap persamaan dari 25: $z = 25 - 13 = 12$, $x = 25 - 17 = 8$, $y = 25 - 20 = 5$. Secara geometris, setiap persamaan linear tiga variabel adalah sebuah *bidang datar* di ruang, dan penyelesaian SPLTV adalah titik yang dilalui ketiga bidang. Tiga bidang juga bisa bertemu di sebuah garis (tak hingga penyelesaian) atau tidak bertemu sama sekali.

10.7**Program linear: mencari yang terbaik**

Di dunia nyata, sering kali yang kita cari bukan "sama dengan", melainkan "paling banyak" atau "paling hemat". Kelas Ayu membuka stan bazar. Mereka menjual x porsi nasi kuning (modal Rp10.000, untung Rp4.000 per porsi) dan y gelas es buah (modal Rp5.000, untung Rp3.000 per gelas). Modal yang tersedia Rp600.000, dan meja hanya muat 80 wadah.

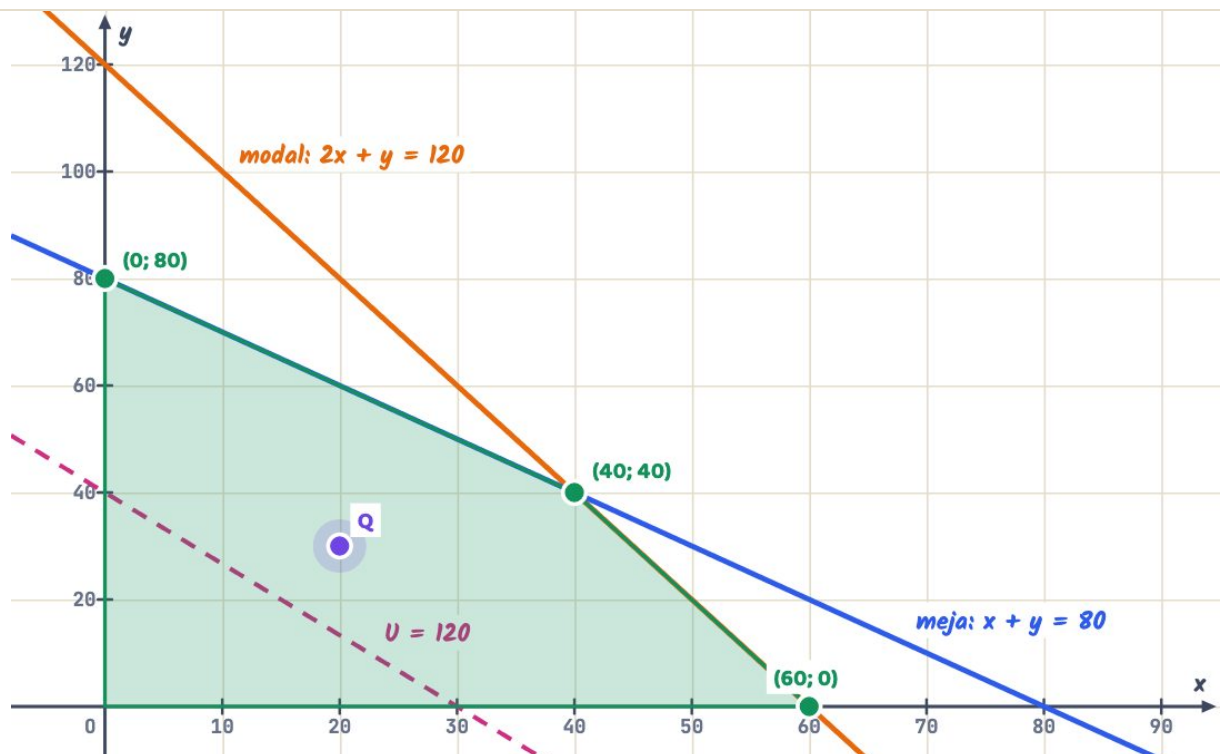
- Syarat modal (ribu rupiah): $10x + 5y \leq 600$, atau $2x + y \leq 120$.
- Syarat meja: $x + y \leq 80$. Tentu juga $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
- Yang ingin dibuat sebesar mungkin: untung $U = 4x + 3y$ (ribu rupiah), disebut **fungsi tujuan**.

Semua titik yang memenuhi syarat membentuk **daerah layak**. Pojok-pojoknya adalah titik potong garis batas, dan untuk menemukannya kita menyelesaikan SPLDV!

$$U = 4x + 3y \quad (\text{ribu rupiah})$$

$$U(Q) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = 170$$

x = porsi nasi kuning, y = gelas es buah. Syarat modal $2x + y \leq 120$, syarat meja $x + y \leq 80$. Daerah hijau = semua rencana yang mungkin.



✓ Q layak: modal dan meja cukup

Untung di Q

170 ribu Rp

Modal di Q

350 ribu Rp

Wadah di Q

50

Seret titik Q ke mana pun di daerah hijau dan catat untungnya. Lalu tekan ► **Jalankan**: garis untung (putus-putus) bergeser naik. Titik terakhir yang masih disentuhnya sebelum lepas dari daerah hijau adalah rencana terbaik!

Tentukan rencana bazar dengan untung terbesar.

- 1 Pojok di sumbu: $(0, 0)$; garis modal memotong sumbu- x di $(60, 0)$; garis meja memotong sumbu- y di $(0, 80)$.
- 2 Pojok tengah = titik potong $2x + y = 120$ dan $x + y = 80$. Kurangkan: $x = 40$, lalu $y = 40$.
- 3 Hitung $U = 4x + 3y$ di setiap pojok: $U(0, 0) = 0$, $U(60, 0) = 240$, $U(40, 40) = 280$, $U(0, 80) = 240$.

**Untung terbesar Rp280.000, dengan menjual 40 porsi nasi kuning dan 40 gelas es buah.
Modalnya pas Rp600.000 dan mejanya pas penuh.**



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA JAWABAN TERBAIK ADA DI TITIK POJOK?

Semua titik dengan untung sama, misalnya $4x + 3y = U$, membentuk garis lurus. Jika U dinaikkan, garis itu bergeser sejajar. Karena daerah layak berbentuk segi banyak *cembung* (tidak penyok), titik terakhir yang disentuh garis yang terus bergeser pasti sebuah titik pojok, atau seluruh sisi jika garis untung kebetulan sejajar dengan sisi itu. Inilah dasar **metode titik pojok** dalam program linear, yang dipakai pabrik, maskapai, dan perusahaan logistik untuk menghemat biaya.



Tarif ojek dan taksi daring

Membandingkan dua tarif "biaya buka + biaya per km" sama dengan mencari titik potong dua garis: titik impas.



Loket museum

Dari banyak tiket terjual dan total pemasukan, petugas dapat menghitung berapa pengunjung dewasa dan anak-anak.



Racikan kopi dan beras

Pedagang mencampur dua jenis kopi atau beras berbeda harga agar mendapat campuran dengan berat dan harga yang diinginkan.



Rangkaian listrik

Teknisi menghitung arus di setiap cabang rangkaian dengan menyusun sistem persamaan dari hukum Kirchhoff.



Menu gizi seimbang

Ahli gizi memadukan beberapa bahan makanan agar protein, karbohidrat, dan kalornya pas dengan kebutuhan.



Produksi UMKM

Program linear membantu menentukan banyak tiap produk agar untung terbesar dengan bahan dan waktu yang terbatas.

Cek Cepat

Penyelesaian sistem $x + y = 10$ dan $x - y = 4$ adalah...

(3, 7)

(6, 4)

(7, 3)

(5, 5)

Dua garis punya gradien sama, tetapi memotong sumbu- y di titik berbeda. Sistem persamaannya mempunyai...

tidak ada penyelesaian

tepat satu penyelesaian

tepat dua penyelesaian

tak hingga banyak penyelesaian

Di kandang ada ayam dan kambing dengan 12 kepala dan 30 kaki. Banyak kambingnya...

6

9

7

3

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D



Tantangan Rumah: detektif paket hemat

Bahan: dua penawaran dengan biaya tetap + biaya per satuan (misalnya dua paket internet, dua laundry kiloan, dua tarif ojek, atau tiket harian vs kartu anggota kolam renang), kertas berpetak, penggaris, pensil warna.

1. Catat biaya tetap dan biaya per satuan setiap penawaran. Tulis masing-masing sebagai $y = a + mx$.
2. Buat tabel nilai y untuk $x = 0, 2, 4, \dots, 10$.
3. Gambar kedua garis di kertas berpetak dengan warna berbeda (pakai trik tutup x , tutup y bila perlu).
4. Perkirakan titik potongnya dari gambar, lalu hitung tepat dengan substitusi.
5. Tanyakan pemakaian keluargamu (berapa x sebulan), lalu tentukan penawaran yang lebih hemat.

Pertanyaan: Apa arti titik potong itu dalam cerita? Berapa rupiah yang bisa dihemat keluargamu dalam sebulan? Adakah keadaan yang membuat pilihanmu berubah?



RINGKASAN KILAT

Bab 10 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- menjelaskan arti **penyelesaian** sistem persamaan: pasangan nilai yang memenuhi semua persamaan sekaligus, yaitu **titik potong** garis-garisnya
- menyelesaikan SPLDV dengan metode **grafik, substitusi, eliminasi**, dan **aturan Cramer**
- menentukan apakah sebuah sistem punya **satu, tak hingga**, atau **tidak punya** penyelesaian
- menyelesaikan **SPLTV** (tiga variabel) dengan eliminasi bertahap
- mengubah soal cerita (harga, tiket, campuran, ayam dan kambing, untung bazar) menjadi sistem persamaan dan menafsirkan jawabannya



Istilah kunci

 Rumus penting

$$x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Titik impas dua tarif. Dua tarif sama mahal pada jarak = selisih biaya buka dibagi selisih tarif per km.

$$\text{kambing} = \frac{\text{kaki} - 2 \times \text{kepala}}{2}$$

Ayam dan kambing: rumus peluit Ancil. Anggap dulu semua hewan ayam. Kaki yang tersisa, dibagi dua, adalah banyak kambing.

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Aturan Cramer 2 × 2. Untuk $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$: x adalah selisih perkalian silang dibagi determinan $D = ae - bd$.

 Jangan sampai terjebak

- Penyelesaian harus memenuhi semua persamaan sekaligus.
- Titik potong yang dibaca dari grafik bisa meleset.
- Saat mengurangi dua persamaan, kurangkan setiap suku, termasuk ruas kanan dan tanda negatifnya.

 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=10

 Teka-teki untuk Bab 11

Dimas menendang bola lurus ke atas. Tinggi bola (dalam meter) setelah t detik adalah $h = 20t - 5t^2$. Kapan bola menyentuh tanah lagi? Di bab ini kita mencari kapan dua *garis* bertemu. Kali ini lintasannya *melengkung*, dan persamaannya memuat t^2 . Bisakah kamu menemukan waktunya?

▼ Intip petunjuk

Menyentuh tanah berarti $h = 0$, jadi $20t - 5t^2 = 0$. Coba faktorkan: $5t(4 - t) = 0$. Kapan hasil kali dua bilangan sama dengan nol? Kamu akan menemukan **dua** jawaban, dan salah satunya terjadi tepat saat bola ditendang. Bab 11 membahas persamaan kuadrat selengkapny!

11 Persamaan Kuadrat: Satu Soal, Dua Jawaban

Bola yang ditendang ke atas melewati ketinggian yang sama dua kali: sekali saat naik, sekali saat turun. Itulah rahasia persamaan kuadrat. Di bab ini kamu akan menemukan kedua jawabannya, bahkan hanya dengan menyusun ubin!

Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **persamaan kuadrat** $ax^2 + bx + c = 0$ dan menyusunnya dari masalah luas atau gerak;
- menyelesaikan persamaan kuadrat dengan **pemfaktoran** memakai sifat perkalian nol;
- **melengkapi kuadrat** dengan model ubin aljabar dan menurunkan **rumus abc**;
- memakai **diskriminan** untuk meramal jenis akar tanpa menghitungnya;
- memakai **jumlah dan hasil kali akar** untuk menyusun persamaan baru dan menghitung ekspresi simetris.

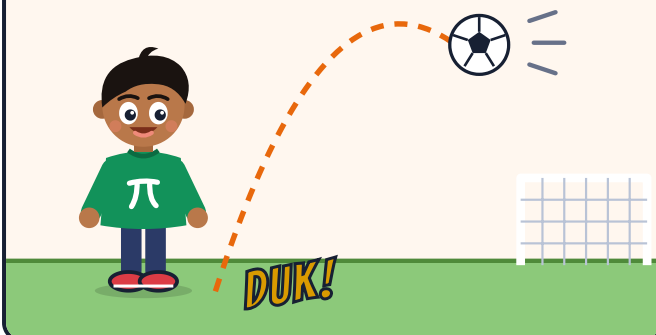
TENDANGAN ROKET DIMAS

KOMIK · 4 PANEL

Sore hari di lapangan kampung

DIMAS

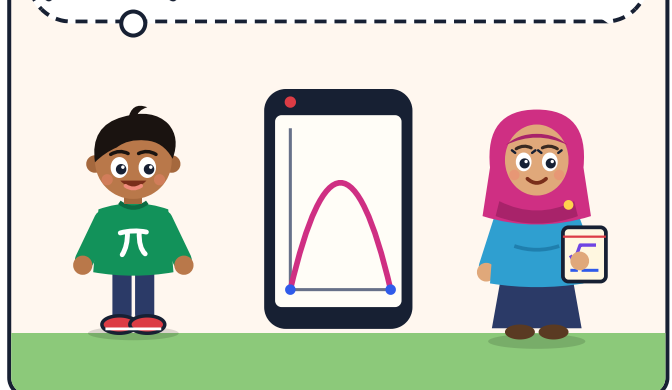
Lihat tendangan roketku! Bolanya pasti melayang sepuluh detik!

**AYU**

Aku merekamnya pakai HP. Tinggi bolamu ternyata $h = 15t - 5t^2$ meter, dengan t dalam detik.

DIMAS

Bola mendarat kalau $h = 0$. Hmm... berarti jawabannya cuma $t = 0$?



KAK LINTANG

Faktorkan dulu! Kalau hasil kali dua bilangan sama dengan nol, salah satunya pasti nol.



$$h = 15t - 5t^2$$

$$5t(3 - t) = 0$$

Ancil melompat dari balik gawang...**ANCIL**

Jadi $5t = 0$ atau $3 - t = 0$. Bola di tanah saat $t = 0$ dan saat $t = 3$. Satu persamaan, dua jawaban!

DIMAS

Cuma tiga detik?! Roketku ternyata roket mini...



GLEK!

**Tebak Dulu!**

Tinggi bola Dimas adalah $h = 15t - 5t^2$ meter, dengan t dalam detik. Kapan bola berada tepat setinggi 10 meter?

Tidak pernah, karena bola tidak bisa setinggi itu.

Sekali saja, yaitu saat $t = \frac{2}{3}$, karena $15 \times \frac{2}{3} = 10$.

Dua kali, yaitu saat $t = 1$ dan saat $t = 2$.

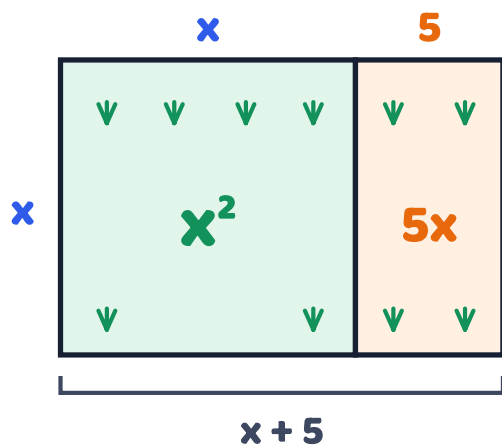
Sekali saja, yaitu saat $t = 1$.

Jawabannya: dua kali. Coba hitung: $h(1) = 15 - 5 = 10$ dan $h(2) = 30 - 20 = 10$. Bola melewati ketinggian 10 m saat **naik** (detik ke-1) dan sekali lagi saat **turun** (detik ke-2). Karena ada t^2 , persamaan $15t - 5t^2 = 10$ bisa punya dua jawaban. Pilihan $t = \frac{2}{3}$ lupa bahwa suku $-5t^2$ juga ikut menarik bola ke bawah.

11.1 Dari luas sawah ke persegi x^2

Pak Darto punya sawah berbentuk persegi panjang. Panjangnya 5 m lebih panjang daripada lebarnya, dan luasnya 150 m^2 . Berapa lebar sawah itu?

Misalkan lebarnya x meter. Panjangnya $x + 5$, sehingga luasnya $x(x + 5) = 150$. Kalau dijabarkan: $x^2 + 5x = 150$, atau $x^2 + 5x - 150 = 0$. Ada suku x^2 di situ. Inilah sebuah **persamaan kuadrat**.



Luas sawah = $x(x + 5)$
 $= x^2 + 5x$
 $= 150 \text{ m}^2$

$x^2 + 5x - 150 = 0$

Sawah selebar x dan sepanjang $x + 5$ terdiri atas persegi x^2 dan petak $5x$. Kata *kuadrat* berasal dari bahasa Latin *quadratus*, artinya persegi.



DEFINISI

Persamaan kuadrat dalam variabel x adalah persamaan yang dapat ditulis dalam **bentuk baku**

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

dengan a, b, c bilangan real. Bilangan a adalah koefisien x^2 , b koefisien x , dan c **konstanta**. Nilai x yang membuat persamaan itu benar disebut **akar** atau penyelesaian persamaan.

Bahasa sederhana • Gampangnya: persamaan kuadrat adalah persamaan yang pangkat tertinggi variabelnya **dua**. Contoh paling sederhana $x^2 = 25$: cari bilangan yang kalau dikuadratkan hasilnya 25. Jawabannya 5, tetapi -5 juga, karena $(-5) \times (-5) = 25$. Itulah sebabnya persamaan kuadrat sering punya dua jawaban.

Sebelum membaca a, b , dan c , pindahkan dulu semua suku ke ruas kiri sehingga ruas kanan bernilai nol.

Persamaan	Bentuk baku	a	b	c
$3x^2 + 5x - 2 = 0$	sudah baku	3	5	-2
$x^2 = 49$	$x^2 - 49 = 0$	1	0	-49
$x^2 = 3x$	$x^2 - 3x = 0$	1	-3	0
$(x + 1)(x - 4) = 6$	$x^2 - 3x - 10 = 0$	1	-3	-10

$$5x + 2 = 0$$

bukan persamaan kuadrat, karena tidak ada suku x^2 ($a = 0$)



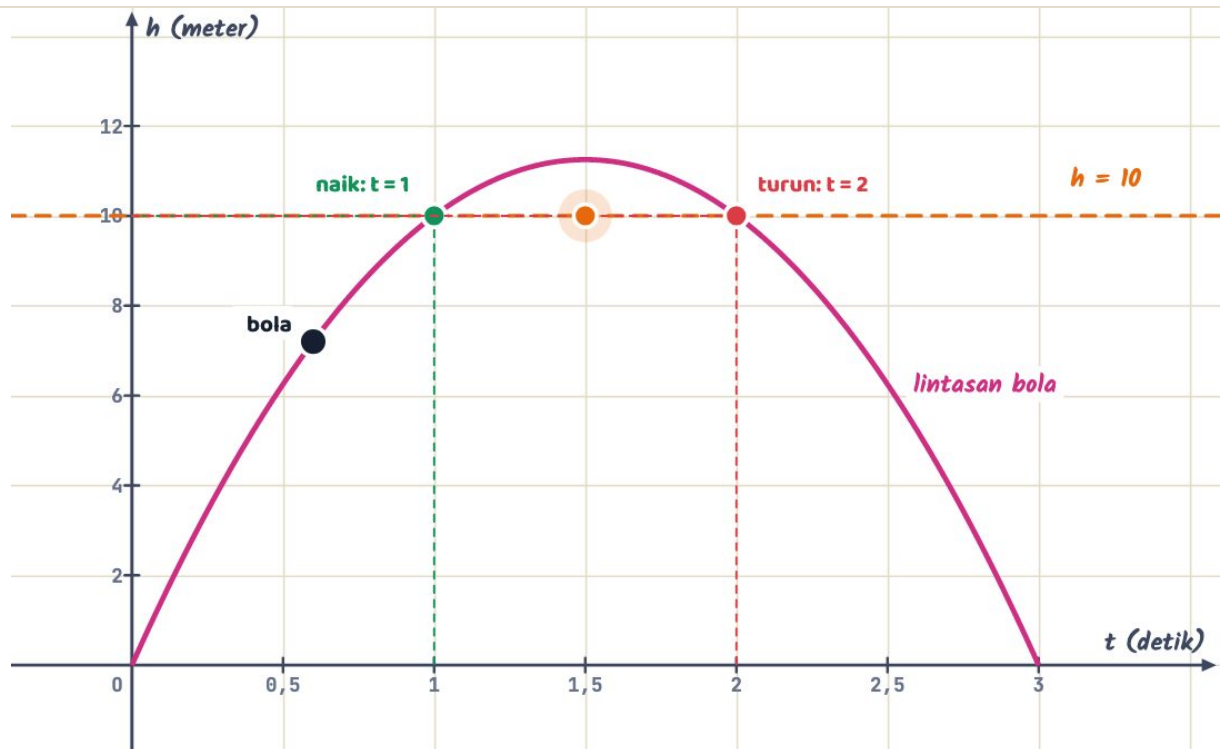
AWAS JEBAKAN

Baca a , b , dan c hanya setelah ruas kanan bernilai nol. Pada $x^2 = 3x$, nilai b adalah -3 , bukan 3 , karena $3x$ harus dipindah ke kiri menjadi $-3x$. Ingat juga syarat $a \neq 0$: tanpa suku x^2 , persamaannya hanyalah persamaan linear seperti di Bab 8.

Kembali ke bola Dimas. Ketinggian $h = vt - 5t^2$ adalah ekspresi kuadrat dalam t . Pertanyaan "kapan bola setinggi H ?" menjadi persamaan kuadrat $5t^2 - vt + H = 0$. Mainkan grafik di bawah dan perhatikan: garis mendatar setinggi H memotong lintasan bola di **dua** titik, **satu** titik, atau **tidak sama sekali**.

$$h = vt - 5t^2$$

$$15t - 5t^2 = 10 \iff 5t^2 - 15t + 10 = 0$$



dua kali: sekali naik, sekali turun

t naik
1 s

t turun
2 s

Tinggi maksimum
11,25 m

Mendarat saat t =
3 s

Seret titik oranye naik-turun (atau geser slider H) dan tekan ► **Jalankan** untuk menerbangkan bola. Jika muncul "—", bola tidak pernah mencapai ketinggian itu. Bisakah kamu mengatur H supaya garis oranye hanya *menyentuh* puncak lintasan?

11.2 Pemfaktoran: kalau hasil kali sama dengan nol...

Kak Lintang memberi petunjuk di komik: kalau dua bilangan dikalikan hasilnya nol, salah satunya **pasti** nol. Tidak ada cara lain! Sifat sederhana ini adalah kunci menyelesaikan banyak persamaan kuadrat.



SIFAT PERKALIAN NOL

Untuk bilangan real p dan q :

$$p \cdot q = 0 \implies p = 0 \text{ atau } q = 0.$$

Jadi, jika $(x - m)(x - n) = 0$, maka $x = m$ atau $x = n$.

▼ Mengapa sifat ini pasti benar?

Misalkan $p \cdot q = 0$ dan $p \neq 0$. Karena p bukan nol, kita boleh membagi kedua ruas dengan p : $q = \frac{0}{p} = 0$.
Jadi, kalau p tidak nol, q pasti nol. Tidak mungkin keduanya sekaligus bukan nol.



Strateginya: tulis $x^2 + bx + c$ sebagai perkalian $(x + m)(x + n)$. Kalau dijabarkan, $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$. Jadi kita mencari **dua bilangan yang jumlahnya b dan hasil kalinya c** .

Bahasa sederhana • Bayangkan bermain tebak-tebakan: "Aku memikirkan dua bilangan. Kalau dikali hasilnya 12, kalau dijumlah hasilnya 7. Bilangan apa?" Jawabannya 3 dan 4. Itulah seluruh rahasia pemfaktoran!



TRIK KAK LINTANG: CARI JODOH BILANGAN

Untuk $x^2 + bx + c$, daftar dulu pasangan faktor c , lalu pilih yang jumlahnya b . Lihat tandanya:

- c positif $\implies$ kedua bilangan **bertanda sama**, mengikuti tanda b ;
- c negatif $\implies$ kedua bilangan **berlawanan tanda**; yang nilai mutlaknya lebih besar mengikuti tanda b .

CONTOH Lebar sawah Pak Darto

Selesaikan $x^2 + 5x - 150 = 0$ untuk menemukan lebar sawah Pak Darto.

- 1 Cari dua bilangan yang hasil kalinya -150 dan jumlahnya 5 . Karena c negatif, tandanya berlawanan. Pasangan 15 dan -10 cocok: $15 \times (-10) = -150$ dan $15 + (-10) = 5$.
- 2 Faktorkan: $(x + 15)(x - 10) = 0$.
- 3 Sifat perkalian nol: $x + 15 = 0$ atau $x - 10 = 0$, jadi $x = -15$ atau $x = 10$.
- 4 Lebar sawah tidak mungkin negatif, jadi $x = 10$. Cek: $10 \times 15 = 150$. ✓

Sawah Pak Darto berukuran $10 \text{ m} \times 15 \text{ m}$. Akar -15 benar secara aljabar, tetapi ditolak karena tidak masuk akal sebagai panjang.

LAB MINI Pabrik persegi panjang: cari jodoh bilangan

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

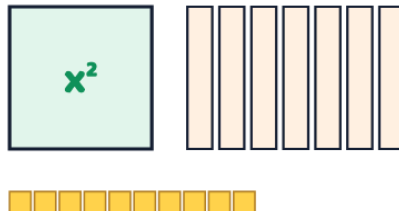
Susun 1 ubin x^2 , 7 batang x , dan 10 ubin satuan menjadi persegi panjang

Pasangan faktor 10:

1×10

2×5

👉 tekan salah satu



1 ubin x^2 • 7 batang x • 10 ubin satuan

Soal

$$x^2 + 7x + 10$$

Pasangan

—

Jumlahnya

—

Status

pilih pasangan faktor

Tekan pasangan faktor di kiri (atau tombol ). Ubin x^2 , batang x , dan ubin satuan langsung disusun menjadi persegi panjang $(x + m)(x + n)$. Pasangan yang benar memakai **tepat** b batang x . Tekan  untuk soal baru.



Tebak Dulu!

Dimas menyelesaikan $x^2 = 5x$ begini: "Bagi kedua ruas dengan x , hasilnya $x = 5$. Selesai!"
Apakah jawabannya lengkap?

Lengkap, karena $5^2 = 5 \times 5$.

Belum, ada akar lain yang hilang, yaitu $x = 0$.

Salah, akarnya hanya $x = 0$.

Belum, ada akar lain, yaitu $x = -5$.

Jawabannya: belum lengkap. Membagi dengan x hanya boleh kalau $x \neq 0$, padahal $x = 0$ juga memenuhi: $0^2 = 5 \cdot 0$. Cara aman: pindahkan ke satu ruas dan faktorkan. $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ atau $x = 5$. Bagaimana dengan -5 ? $(-5)^2 = 25$, sedangkan $5 \cdot (-5) = -25$. Tidak sama!



AWAS JEBAKAN

Sifat perkalian nol hanya berlaku untuk **nol**. Dari $(x - 2)(x - 3) = 6$, kamu **tidak boleh** menyimpulkan $x - 2 = 6$ atau $x - 3 = 6$. Cek saja: $x = 8$ memberi $6 \times 5 = 30$, bukan 6. Jabarkan dulu: $x^2 - 5x + 6 = 6 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$, jadi $x = 0$ atau $x = 5$.

Bagaimana kalau $a \neq 1$, misalnya $2x^2 + 7x + 3 = 0$? Gunakan trik **pecah suku tengah**: cari dua bilangan yang jumlahnya b dan hasil kalinya $a \times c$.

KERJAKAN BERSAMA

Pecah suku tengah

Selesaikan $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

1 $a \times c = 2 \times 3 = 6$. Dua bilangan dengan hasil kali 6 dan jumlah 7: yaitu 1 dan 6.

2 Pecah suku tengah: $2x^2 + x + 6x + 3 = 0$.

3 Kelompokkan: $x(2x + 1) + 3(2x + 1) = 0$, jadi $(2x + 1)(x + 3) = 0$.

4 $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, atau $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$.

Akar-akarnya $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = -3$. Cek $x = -3$: $2 \cdot 9 - 21 + 3 = 0$. ✓



JALAN PINTAS ANCIL

Lihat $3x^2 - 5x + 2 = 0$. Jumlah koefisiennya $3 - 5 + 2 = 0$. Kalau $a + b + c = 0$, maka $x = 1$ **pasti** akar, karena memasukkan $x = 1$ menghasilkan tepat $a + b + c$. Akar yang lain selalu $\frac{c}{a}$, di sini $\frac{2}{3}$ (alasannya ada di 11.6). Coba juga: $5x^2 + 2x - 7 = 0$ punya akar 1 dan $-\frac{7}{5}$.



ADU CEPAT

Akar terbesar, secepat kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Cari dua bilangan yang hasil kalinya c dan jumlahnya b , lalu balik tandanya. Contoh: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, akar terbesarnya 3.

11.3

Melengkapkan kuadrat: menambal ubin yang hilang

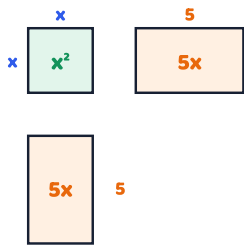
Tidak semua persamaan kuadrat mudah difaktorkan. Coba $x^2 + 6x - 2 = 0$: tidak ada dua bilangan bulat yang hasil kalinya -2 dan jumlahnya 6. Untuk kasus seperti ini ada trik berumur lebih dari seribu tahun: **ubah ruas kiri menjadi persegi sempurna**.



TAMU DARI MASA LALU

Sekitar tahun 820 M, Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi** menulis buku di Baghdad yang judulnya memuat kata *al-jabr*, artinya "memulihkan" atau "melengkapkan". Dari kata itulah lahir istilah **aljabar**, dan dari namanya lahir istilah **algoritma**. Al-Khwarizmi belum memakai huruf x : soalnya ditulis dengan kalimat, dan penyelesaiannya dibuktikan dengan **gambar persegi**. Jauh sebelumnya, juru tulis Babilonia (± 1800 SM) sudah menyelesaikan soal sejenis di lempeng tanah liat, misalnya mencari sisi persegi bila luas dan sisinya dijumlahkan.

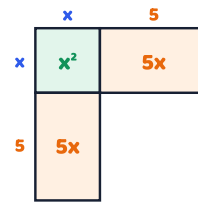
Lihat sendiri cara al-Khwarizmi menyelesaikan soalnya yang terkenal: *persegi ditambah sepuluh akarnya sama dengan 39*, yaitu $x^2 + 10x = 39$.



$$x^2 + 10x = 39$$

Persegi x^2 dan persegi panjang $10x$ yang dibelah dua: $5x$ dan $5x$.

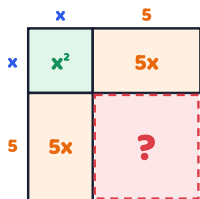
Langkah 1. Gambarlah x^2 sebagai persegi bersisi x , dan $10x$ sebagai persegi panjang $x \times 10$ yang dibelah menjadi dua persegi panjang $x \times 5$. Luas totalnya 39.



Tempel kedua 5x:

satu di kanan, satu di bawah x^2 . Hanya digeser, jadi luasnya tetap 39.

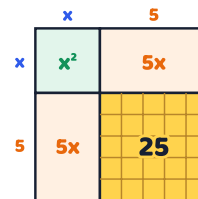
Langkah 2. Tempelkan satu persegi panjang di sisi kanan dan satu di sisi bawah persegi x^2 . Ubinnya hanya digeser, jadi luas totalnya tetap 39.



Pojoknya bolong!

Kurang satu persegi $5 \times 5 = 25$ agar menjadi persegi yang utuh.

Langkah 3. Bentuknya hampir menjadi persegi besar bersisi $x + 5$, tetapi pojok kanan bawahnya kosong: sebuah persegi 5×5 .

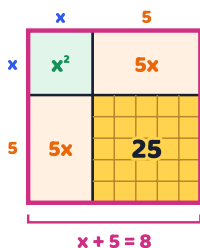


Tambal dengan 25 ubin

di kedua ruas agar tetap seimbang:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$

Langkah 4. Tambal pojok itu dengan 25 ubin satuan. Supaya persamaan tetap seimbang, ruas kanan juga ditambah 25: $x^2 + 10x + 25 = 64$.



Persegi besar seluas 64

pasti bersisi 8, karena $8 \times 8 = 64$.

$$(x + 5)^2 = 64 \Rightarrow x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Langkah 5. Persegi besar seluas 64 bersisi 8, jadi $x + 5 = 8$ dan $x = 3$. Cek: $3^2 + 10 \cdot 3 = 9 + 30 = 39$. ✓ Aljabar modern juga memberi $x + 5 = -8$, yaitu $x = -13$, tetapi al-Khwarizmi hanya mencari sisi persegi yang positif.



MELENGKAPKAN KUADRAT

Ambil **separuh** koefisien x , kuadratkan, lalu tambahkan:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Suku $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ adalah ubin pojok yang hilang pada gambar di atas.

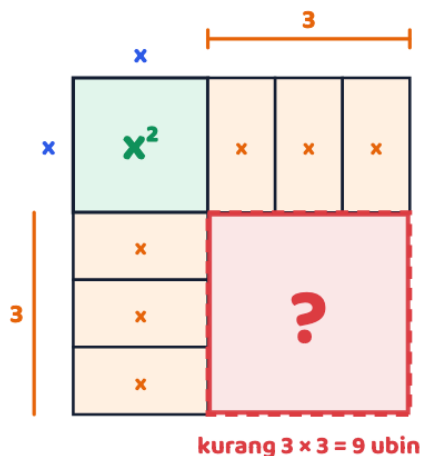
▼ Cek dengan menjabarkan

$(x + \frac{b}{2})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$. Jadi $x^2 + bx$ memang sama dengan $(x + \frac{b}{2})^2$ dikurangi $\frac{b^2}{4}$. Dua batang $\frac{b}{2}x$ di kanan dan di bawah adalah suku tengah bx .



LAB MINI Ubin aljabar: tambal pojok yang hilang

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11



$$x^2 + 6x = 16$$

separuh dari 6 adalah 3

ruas kanan: 16 ubin



tambalan $(b/2)^2$
9

$c + (b/2)^2$
25

sisi persegi besar
5

x positif
2

Tahap
pojoknya boLONG!

Pilih banyak batang x (yaitu b) dan banyak ubin satuan di ruas kanan (yaitu c) untuk persamaan $x^2 + bx = c$. Tekan ► **Jalankan**: batang dibagi dua, ditempel, lalu pojoknya ditambah. Cari pasangan b dan c yang membuat x bilangan bulat. Apa syaratnya?

Selesaikan $x^2 - 6x + 4 = 0$ dengan melengkapkan kuadrat.

- 1 Pindahkan konstanta: $x^2 - 6x = -4$.
- 2 Separuh dari -6 adalah -3 , kuadratnya 9. Tambahkan 9 pada kedua ruas: $x^2 - 6x + 9 = 5$.
- 3 Ruas kiri sekarang persegi sempurna: $(x - 3)^2 = 5$.
- 4 Tarik akar, jangan lupa $\pm$: $x - 3 = \pm\sqrt{5}$, jadi $x = 3 \pm \sqrt{5}$.

$x = 3 + \sqrt{5} \approx 5,236$ atau $x = 3 - \sqrt{5} \approx 0,764$. Akar-akar ini tidak bisa ditemukan dengan menebak pasangan bilangan bulat!



AWAS JEBAKAN

Saat menarik akar dari $(x - 3)^2 = 5$, tulis $x - 3 = \pm\sqrt{5}$, bukan hanya $+\sqrt{5}$. Bilangan negatif yang dikuadratkan juga menghasilkan bilangan positif, jadi kedua tanda harus diperiksa.

11.4 Rumus abc: satu rumus untuk semua

Kalau trik melengkapkan kuadrat diterapkan pada bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$, kita mendapat satu rumus yang selalu berhasil. Di Indonesia rumus ini akrab disebut **rumus abc**.



RUMUS ABC

Akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tanda $\pm$ menghasilkan dua akar: satu dengan $+$ dan satu dengan $-$.

▼ Bukti: melengkapkan kuadrat untuk bentuk umum

Bagi kedua ruas dengan a , lalu pindahkan konstanta:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Sepuluh koefisien x adalah $\frac{b}{2a}$. Tambahkan kuadratnya pada kedua ruas:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tarik akar kedua ruas (ingat $\pm$), lalu kurangi dengan $\frac{b}{2a}$:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



Bahasa sederhana • Rumus abc itu seperti resep masakan: masukkan tiga bahan (a , b , c), ikuti langkahnya, dan dua akar pun matang. Tidak perlu menebak-nebak pasangan bilangan.

CONTOH Memakai rumus abc

Selesaikan $2x^2 - 3x - 2 = 0$ dengan rumus abc.

1 Baca koefisien: $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$.

2 Hitung bagian di bawah akar: $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$.

3
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

4
$$x_1 = \frac{3 + 5}{4} = 2 \text{ dan } x_2 = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Akar-akarnya 2 dan $-\frac{1}{2}$. Cek $x = 2$: $2 \cdot 4 - 6 - 2 = 0$. ✓

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ambil lawan dari b , tambahkan akar diskriminan, lalu bagi dengan dua kali a . Ganti + dengan - untuk mendapat akar yang lain.

a Koefisien a

b Koefisien b

c Konstanta c

x_1 Akar x_1 (tanda +)

AKAR x_1 (TANDA +)

3

dua akar real berbeda

✧ $b^2 - 4ac$ kuadrat sempurna: akarnya rasional

Bagian di bawah akar: $b^2 - 4ac = 25$. Akar pertama $x_1 = 3$, akar kedua $x_2 = -2$. Jumlah kedua akar selalu $-b/a = 1$. Jika muncul '-', bagian di bawah akar negatif: tidak ada bilangan real yang kuadratnya negatif, jadi persamaan ini tidak punya akar real.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-RUMUS-ABC



AWAS JEBAKAN

Pada rumus abc, $-b$ berarti **lawan** dari b : kalau $b = -3$, maka $-b = 3$, bukan -3 . Garis pecahan juga membagi **seluruh** pembilang $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ dengan $2a$, bukan hanya bagian akarnya. Selalu tulis $(-3)^2$ dengan kurung agar tidak tergelincir menjadi -9 .

Bentuk persamaan	Contoh	Jurus tercepat
tanpa suku x ($b = 0$)	$x^2 - 49 = 0$	pindahkan, lalu tarik akar: $x = \pm 7$
tanpa konstanta ($c = 0$)	$x^2 - 5x = 0$	keluarkan x : $x(x - 5) = 0$
ada jodoh bilangan bulat	$x^2 + 5x - 150 = 0$	faktorkan: $(x + 15)(x - 10) = 0$
$a + b + c = 0$	$3x^2 - 5x + 2 = 0$	jalan pintas Ancil: $x = 1$ dan $x = \frac{c}{a}$
selain itu	$x^2 - 6x + 4 = 0$	rumus abc atau melengkapkan kuadrat



BILANGAN PALING CANTIK

Potong sebuah persegi dari persegi panjang. Kalau sisa potongannya **sebangun** dengan persegi panjang semula, perbandingan panjang : lebarnya disebut **rasio emas** φ . Syaratnya ternyata persamaan kuadrat $\varphi^2 = \varphi + 1$, atau $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Rumus abc memberi $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Rasio ini berkaitan dengan pola susunan biji bunga matahari dan sering dipakai dalam seni serta desain.

11.5 Diskriminan: meramal jenis akar

Perhatikan bagian di bawah tanda akar pada rumus abc: $b^2 - 4ac$. Bagian kecil ini menentukan nasib akar-akarnya, sehingga diberi nama khusus.



DEFINISI

Diskriminan persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah

$$D = b^2 - 4ac.$$

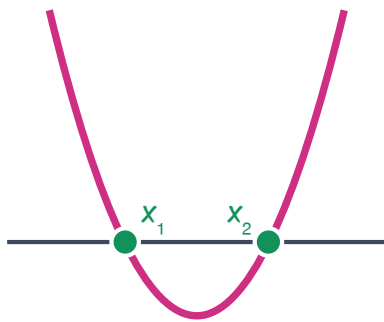
Kata *diskriminan* berasal dari bahasa Latin *discriminare*, "membedakan": bilangan ini membedakan jenis akar tanpa harus menghitung akarnya.



JENIS AKAR MENURUT DISKRIMINAN

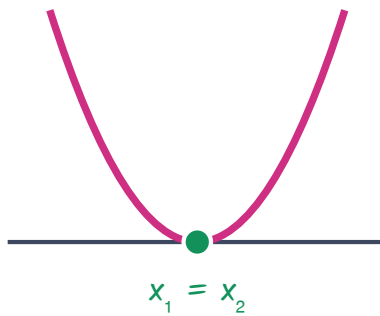
- $D > 0$: **dua akar real berbeda** (karena $\sqrt{D}$ ditambah dan dikurangkan);
- $D = 0$: **akar kembar**, yaitu $x = -\frac{b}{2a}$ (karena $\pm\sqrt{0}$ sama saja);
- $D < 0$: **tidak ada akar real** (tidak ada bilangan real yang kuadratnya negatif).

Bila a, b, c bulat dan D bilangan kuadrat sempurna (0, 1, 4, 9, 16, ...), akar-akarnya rasional sehingga persamaan itu bisa difaktorkan.



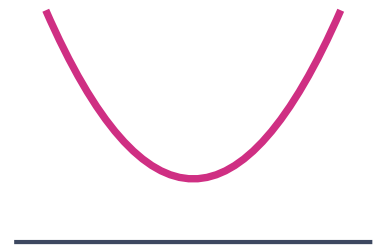
$$D > 0$$

dua akar real berbeda



$$D = 0$$

akar kembar



$$D < 0$$

tidak ada akar real

Akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah titik potong grafik $y = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu- x . Diskriminan memberi tahu ada berapa titik potong.

RUMUS HIDUP Diskriminan

$$D = b^2 - 4ac$$

Kuadrat b dikurangi empat kali a kali c . Tandanya meramal jenis akar sebelum kamu menghitungnya.

a Koefisien a

b Koefisien b

c Konstanta c

D Diskriminan

DISKRIMINAN

0

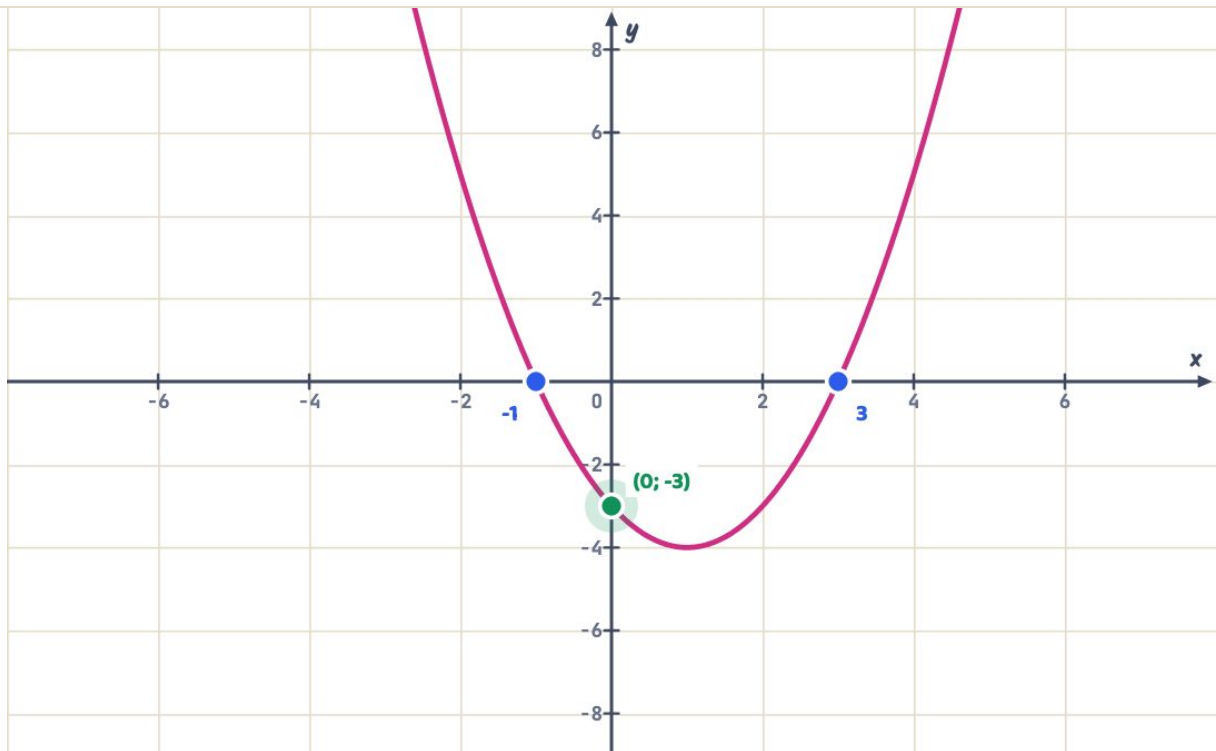
akar kembar

Dengan $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$: $b^2 = 16$ dan $4ac = 16$, jadi $D = 0$. **Nol: grafiknya hanya menyinggung sumbu- x .**

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DISKRIMINAN-KUADRAT

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$D = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$$



$D > 0$: memotong sumbu-x di dua titik

Diskriminan D

16

x_1 (kecil)

-1

x_2 (besar)

3

Seret titik hijau di sumbu-y naik-turun. Parabola ikut bergeser, dan akarnya bisa berkurang dari dua menjadi satu lalu hilang. Perhatikan tanda D setiap kali itu terjadi. Akar ditandai "—" jika tidak ada akar real.

Untuk nilai k berapa persamaan $x^2 + kx + 9 = 0$ memiliki akar kembar? Tentukan juga akarnya.

- 1 Akar kembar berarti $D = 0$: $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, jadi $k^2 = 36$.
- 2 $k = 6$ atau $k = -6$. Ada dua nilai!
- 3 Untuk $k = 6$: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0$, akarnya $x = -3$. Untuk $k = -6$: $(x - 3)^2 = 0$, akarnya $x = 3$.

$k = \pm 6$. Akar kembar selalu $x = -\frac{b}{2a}$: di sini -3 atau 3 .



LANJUT • IB & OLIMPIADE

KALAU $D < 0$: LAHIRNYA BILANGAN IMAJINER

Persamaan $x^2 + 1 = 0$ tidak punya akar real, karena tidak ada bilangan real yang kuadratnya -1 . Pada abad ke-16, matematikawan Italia seperti Cardano dan Bombelli memberanikan diri menghitung dengan "akar dari bilangan negatif" dan ternyata hasilnya konsisten. Kini kita menulis $i = \sqrt{-1}$, sehingga akar $x^2 + 1 = 0$ adalah $\pm i$. Contoh lain: $x^2 - 2x + 5 = 0$ memiliki $D = -16$ dan akar $x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i$. Jadi, $D < 0$ bukan berarti "tidak ada jawaban", melainkan "tidak ada jawaban *real*". Bilangan kompleks dibahas di Bab 37.



TRIK KAK LINTANG: HITUNG D DULU

Sebelum bersusah payah, hitung D . Kalau D negatif, berhenti: tidak ada akar real. Kalau D kuadrat sempurna, coba faktorkan karena pasti bisa. Kalau tidak, langsung pakai rumus abc dan $\sqrt{D}$ sudah kamu pegang.

11.6 Jumlah dan hasil kali akar: rahasia Vieta

Perhatikan $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Akar-akarnya 2 dan 3. Jumlahnya 5, hasil kalinya 6. Bukankah angka 5 dan 6 sudah terlihat di persamaannya? Ini bukan kebetulan.



TEOREMA VIETA UNTUK PERSAMAAN KUADRAT

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar $ax^2 + bx + c = 0$, maka

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

▼ Bukti dengan membandingkan koefisien

Karena x_1 dan x_2 adalah akarnya, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Jabarkan ruas kanan:

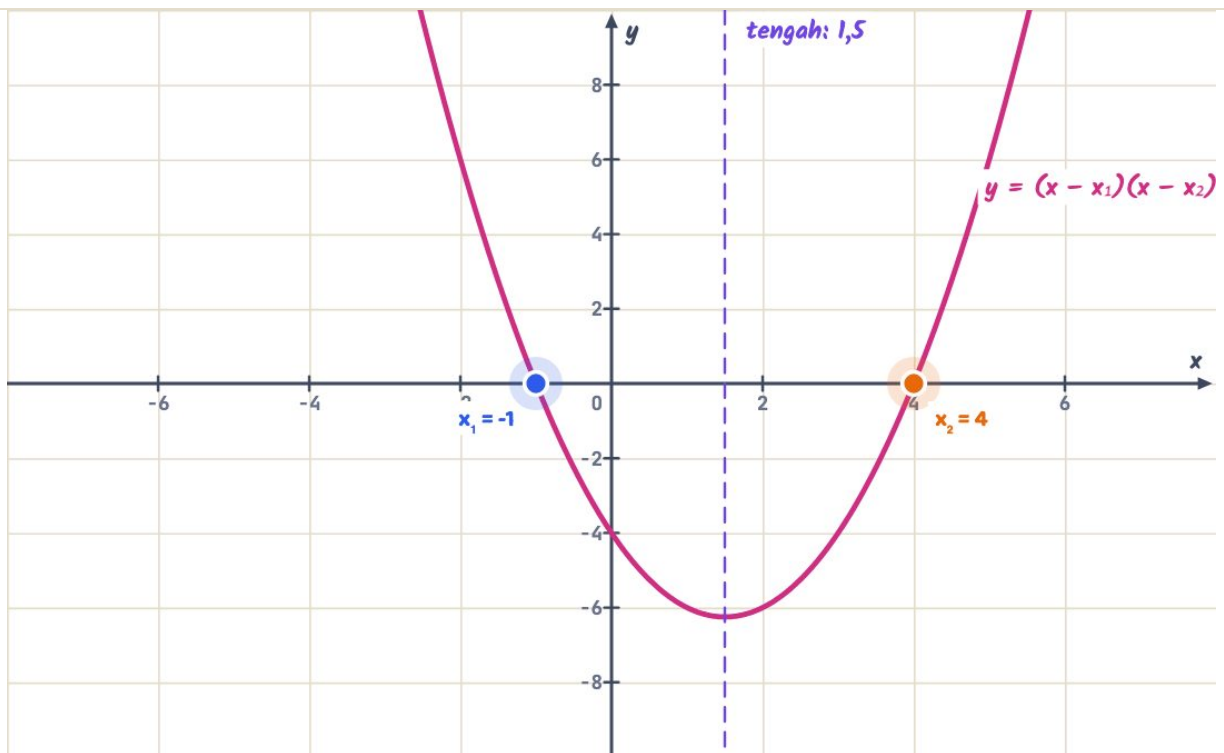
$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Bandungkan koefisien x : $b = -a(x_1 + x_2)$, jadi $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Bandungkan konstanta: $c = ax_1x_2$, jadi $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Kamu juga bisa menjumlahkan dan mengalikan kedua akar dari rumus abc; hasilnya sama.



$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

$$(x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$$



hasil kali negatif $\Rightarrow$ akarnya berlawanan tanda

$$x_1 + x_2 (= -b)$$

3

$$x_1 \cdot x_2 (= c)$$

-4

Seret kedua titik di sumbu- x . Koefisien x selalu **lawan** dari jumlah akar, dan konstanta selalu hasil kali akar. Garis ungu menunjukkan titik tengah kedua akar; ingat-ingat garis ini untuk Bab 12!



AWAS JEBAKAN

Jumlah akar adalah $-\frac{b}{a}$, **bukan** $\frac{b}{a}$. Untuk $x^2 - 8x + 5 = 0$, jumlah akarnya 8, bukan -8 . Pastikan juga persamaannya sudah dalam bentuk baku sebelum membaca a , b , c .

Akar-akar $x^2 - 5x + 3 = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $x_1 + 2$ dan $x_2 + 2$.

- 1 Dari Vieta: $x_1 + x_2 = 5$ dan $x_1x_2 = 3$.
- 2 Jumlah akar baru: $(x_1 + 2) + (x_2 + 2) = 5 + 4 = 9$.
- 3 Hasil kali akar baru: $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 3 + 10 + 4 = 17$.
- 4 Persamaan dengan jumlah akar S dan hasil kali P adalah $x^2 - Sx + P = 0$.

$x^2 - 9x + 17 = 0$. Kita tidak pernah menghitung akarnya ($\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$) sama sekali!

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

Kuadratkan jumlah akar, lalu kurangi dua kali hasil kalinya. Kamu tidak perlu tahu akarnya satu per satu.

a Koefisien a

b Koefisien b

c Konstanta c

$x_1^2 + x_2^2$ Jumlah kuadrat akar

JUMLAH KUADRAT AKAR

7

akar real dan hasilnya bulat

Jumlah akar $-b/a = 3$ dan hasil kali $c/a = 1$. Jadi $x_1^2 + x_2^2 = (3)^2 - 2 \times (1) = 7$. Kedua akarnya real.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VIETA-KUADRAT-AKAR](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-vieta-kuadrat-akar)



TAMU DARI MASA LALU

Rumus jumlah dan hasil kali akar dinamai menurut **François Viète** (1540-1603), ahli hukum Prancis yang juga terkenal memecahkan sandi rahasia musuh untuk rajanya. Viète termasuk orang pertama yang memakai **huruf** untuk koefisien, bukan hanya untuk bilangan yang dicari. Berkat gagasan itu, kita bisa menulis satu rumus untuk *semua* persamaan kuadrat sekaligus.



LANJUT · IB & OLIMPIADE

BARISAN AJAIB DARI AKAR IRASIONAL

Akar-akar $x^2 - 3x + 1 = 0$ adalah $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, dua bilangan irasional. Misalkan $s_n = x_1^n + x_2^n$. Karena setiap akar memenuhi $x^2 = 3x - 1$, kalikan dengan x^{n-2} dan jumlahkan untuk kedua akar:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2}, \quad s_0 = 2, \quad s_1 = x_1 + x_2 = 3.$$

Hasilnya $s_2 = 7, s_3 = 18, s_4 = 47, s_5 = 123, s_6 = 322, \dots$ Semuanya **bilangan bulat**, padahal tiap akarnya irasional! Cek s_2 dengan Vieta: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 - 2 = 7$. ✓ Teknik "jumlah pangkat" ini sering muncul di soal olimpiade, misalnya untuk menghitung $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

11.7 Memodelkan dunia nyata: kolam, bingkai, dan lompat batu

Banyak masalah sehari-hari bermuara pada persamaan kuadrat. Resepnya selalu sama: **(1)** misalkan besaran yang dicari dengan x ; **(2)** susun persamaan dari cerita; **(3)** selesaikan; **(4)** periksa apakah kedua akar masuk akal. Langkah keempat sering dilupakan!

COBA SENDIRI Jalan setapak di sekeliling kolam

Pak Darto membuat kolam ikan berukuran $12 \text{ m} \times 8 \text{ m}$. Di sekelilingnya ia membuat jalan setapak dengan lebar yang sama, x meter. Luas kolam beserta jalan setapaknya 140 m^2 . Berapa lebar jalan setapak itu?

- 1 Ukuran luar menjadi $(12 + 2x) \text{ m} \times (8 + 2x) \text{ m}$, karena jalan ada di kedua sisi.
- 2 $(12 + 2x)(8 + 2x) = 140 \Rightarrow 96 + 40x + 4x^2 = 140 \Rightarrow 4x^2 + 40x - 44 = 0$.
- 3 Bagi dengan 4: $x^2 + 10x - 11 = 0$. Karena $1 + 10 - 11 = 0$, jalan pintas Ancil memberi $x = 1$ dan $x = -11$.
- 4 Lebar tidak mungkin negatif, jadi $x = 1$. Cek: $14 \times 10 = 140$. ✓

Jalan setapaknya selebar 1 m. Akar -11 ditolak karena tidak bermakna sebagai lebar.



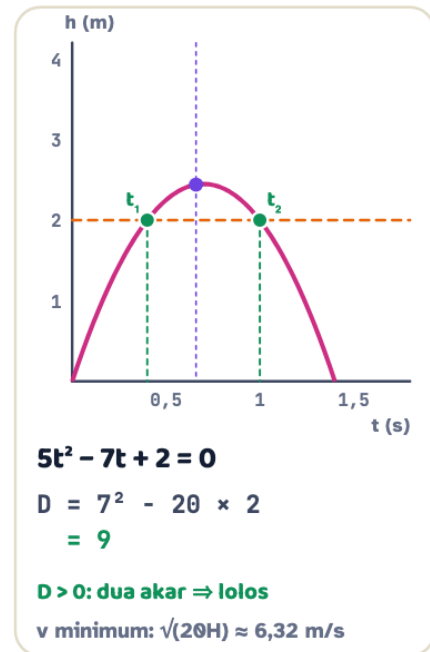
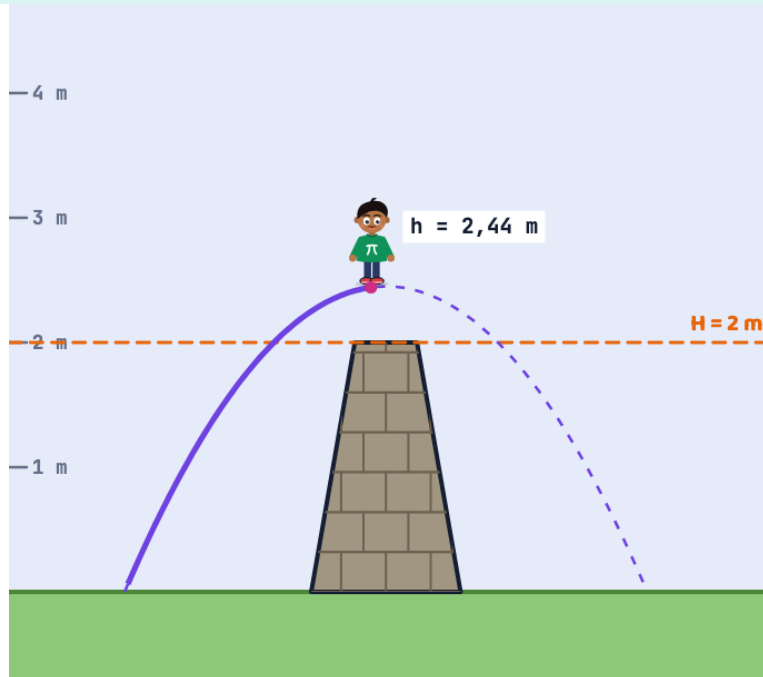
MATEMATIKA NUSANTARA

Di Pulau Nias, Sumatra Utara, ada tradisi **lompat batu** (*fahombo*). Para pemuda berlari, menjejak batu kecil, lalu melompati tumpukan batu setinggi sekitar 2 meter. Dulu, lompatan ini menjadi tanda bahwa seorang pemuda dianggap sudah dewasa. Kita bisa memodelkannya secara sederhana: tinggi kaki pelompat $h = vt - 5t^2$ meter. Agar kaki melewati ketinggian 2 m, persamaan $5t^2 - vt + 2 = 0$ harus punya akar real, yaitu $D = v^2 - 40 \geq 0$. Jadi kecepatan ke atas minimal $\sqrt{40} \approx 6,3$ m/s. Diskriminan menentukan lolos atau tidaknya sebuah lompatan!

LAB MINI

Lompat batu Nias: lolos atau menabrak?

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-11



$$D = v^2 - 20H$$

9

$$t_1 \text{ (naik)}$$

0,4 s

$$t_2 \text{ (turun)}$$

1 s

$$\text{kaki di atas H selama}$$

0,6 s

Hasil

tekan untuk melompat

Atur kecepatan lompat ke atas v dan tinggi batu H , lalu tekan ► **Jalankan**. Model sederhana: batu pijakan dan lipatan kaki diabaikan. Lihat grafik di kanan: lompatan lolos tepat ketika $D = v^2 - 20H$ tidak negatif. Berapa v terkecil yang masih lolos untuk $H = 2$ m?



Petak sawah & kolam

Lebar pematang atau jalan setapak yang seragam di sekeliling petak selalu menghasilkan persamaan kuadrat, seperti kolam Pak Darto.



Bingkai foto & batik

Penjual bingkai menghitung lebar list agar luas bingkai sesuai pesanan: $(p + 2x)(l + 2x)$ adalah ekspresi kuadrat.



Tendangan & lompatan

Lama bola atau atlet di udara didapat dari akar $vt - 5t^2 = 0$, dan kapan mencapai ketinggian tertentu dari akar $vt - 5t^2 = H$.



Jarak pengereman

Jarak henti motor bergantung pada kuadrat kecepatannya. Kecepatan maksimum agar masih bisa berhenti sebelum zebra cross dicari dengan rumus abc.



Harga & pendapatan

Pedagang es kelapa yang menaikkan harga akan kehilangan sebagian pembeli. Pendapatan = harga $\times$ banyak terjual, yaitu ekspresi kuadrat dalam besar kenaikan harga.

MITOS

"Kalau
 $x^2 = 16$
, jawabannya
 $x = 4$
."

MITOS

"Kalau diskriminannya negatif, berarti soalnya salah."

FAKTA

Kurang lengkap.
 $(-4)^2 = 16$
juga, jadi
 $x = 4$
atau
 $x = -4$
. Akar negatif baru boleh dibuang kalau soalnya tentang panjang, waktu, atau besaran lain yang tidak mungkin negatif.

FAKTA

Tidak salah.
 $D < 0$
memberi informasi penting: tidak ada akar real. Misalnya, bola memang tidak pernah mencapai ketinggian itu. Dengan bilangan kompleks (Bab 37), persamaannya tetap punya akar.

MITOS

"Rumus abc ditemukan oleh satu orang jenius sekaligus."

FAKTA

Rumus ini dibangun bertahap selama ribuan tahun: dari juru tulis Babilonia, matematikawan India seperti Brahmagupta, al-Khwarizmi di Baghdad, hingga penulisan dengan huruf ala Viète dan Descartes di Eropa. Nama "abc" hanyalah julukan dari huruf koefisiennya.

Cek Cepat

Akar-akar persamaan $x^2 - 9x + 20 = 0$ adalah...

−4 dan −5

2 dan 10

4 dan 5

1 dan 20

Persamaan $2x^2 + 3x + 5 = 0$ memiliki...

tidak ada akar real

akar kembar

dua akar real berbeda

tepat satu akar positif

Jumlah akar-akar persamaan $3x^2 - 12x + 7 = 0$ adalah...

−4

$\frac{7}{3}$

12

4

Kunci Cek Cepat: 1. C · 2. A · 3. D

Tantangan Rumah: detektif lemparan bola

Bahan: bola kecil (bola tenis atau bola plastik), HP dengan stopwatch atau mode video lambat, teman, buku catatan.

1. Di halaman yang lapang, lempar bola tegak lurus ke atas. Mintalah teman mencatat lamanya bola di udara, T detik, dari lepas tangan sampai kembali ke ketinggian tangan.
2. Ulangi 3 kali dan hitung rata-rata T .
3. Modelkan tinggi bola di atas tangan: $h = vt - 5t^2$. Karena $h = 0$ saat $t = T$, tunjukkan bahwa $v = 5T$.
4. Hitung tinggi maksimum bola (terjadi saat $t = \frac{T}{2}$). Contoh: jika $T = 2$ s, maka $v = 10$ m/s dan tinggi maksimumnya 5 m.
5. Pilih satu ketinggian yang lebih rendah daripada tinggi maksimum, lalu hitung dua waktu saat bola berada di ketinggian itu dengan rumus abc. Untuk contoh tadi, ketinggian 3,2 m dicapai saat $t = 0,4$ s dan $t = 1,6$ s. Bandingkan hasil hitunganmu dengan rekaman video lambat.

Pertanyaan: Mengapa selalu ada dua waktu untuk satu ketinggian (kecuali di puncak)? Mengapa kedua waktu itu selalu berjumlah T ? Petunjuk: gunakan rumus jumlah akar dari 11.6.

RINGKASAN KILAT **Bab 11 dalam 3 menit**

☒ Kamu sekarang bisa...

- mengenali **persamaan kuadrat** $ax^2 + bx + c = 0$ dan menyusunnya dari masalah luas atau gerak
- menyelesaikan persamaan kuadrat dengan **pemfaktoran** memakai sifat perkalian nol
- **melengkapkan kuadrat** dengan model ubin aljabar dan menurunkan **rumus abc**
- memakai **diskriminan** untuk meramal jenis akar tanpa menghitungnya

- memakai **jumlah dan hasil kali akar** untuk menyusun persamaan baru dan menghitung ekspresi simetris

Istilah kunci

persamaan kuadrat

bentuk baku

konstanta

akar

pecah suku tengah

rumus abc

rasio emas

Diskriminan

Rumus penting

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Rumus abc. Ambil lawan dari b , tambahkan akar diskriminan, lalu bagi dengan dua kali a . Ganti $+$ dengan $-$ untuk mendapat akar yang lain.

$$D = b^2 - 4ac$$

Diskriminan. Kuadrat b dikurangi empat kali a kali c . Tandanya meramal jenis akar sebelum kamu menghitungnya.

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

Jumlah kuadrat akar, tanpa mencari akar.

Kuadratkan jumlah akar, lalu kurangi dua kali hasil kalinya. Kamu tidak perlu tahu akarnya satu per satu.

Jangan sampai terjebak

- Baca a , b , dan c hanya setelah ruas kanan bernilai nol.
- Sifat perkalian nol hanya berlaku untuk nol.
- Saat menarik akar dari $(x - 3)^2 = 5$, tulis $x - 3 = \pm\sqrt{5}$, bukan hanya $+\sqrt{5}$.

 **Tangga Latihan:** 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=11

Teka-teki untuk Bab 12

Air mancur di taman kota menyemburkan air yang tingginya $h = 6x - x^2$ meter, dengan x jarak mendatar dari pipa (meter). Lengkung airnya cantik sekali, mirip lengkung jembatan di atas sungai. Tanpa menggambar dan tanpa mencoba-coba, di jarak berapa air mencapai titik tertinggi, dan setinggi apa?

▼ Intip petunjuk

Akar-akarnya $6x - x^2 = 0$ adalah $x = 0$ (air keluar dari pipa) dan $x = 6$ (air jatuh kembali). Lengkung seperti ini **simetris**, jadi puncaknya tepat di tengah kedua akar: $x = 3$, dan tingginya $h = 18 - 9 = 9$ m. Ingat Vieta: titik tengah akar adalah $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Bab 12 membahas parabola, titik puncak, dan lengkung jembatan selengkapny!

12 Fungsi Kuadrat & Parabola: Rahasia Lengkung Air Mancur

Semburan air mancur, lengkung jembatan, lemparan bola, sampai antena TV di atap rumah: semuanya berbentuk lengkung yang sama. Lengkung itu menyimpan satu titik istimewa yang bisa memberitahumu di mana air jatuh, berapa luas kandang terbesar, dan berapa harga jual terbaik.



Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **fungsi kuadrat** dan menggambar grafiknya, yaitu **parabola**;
- membaca **titik puncak**, **sumbu simetri**, dan arah buka parabola dari bentuk puncak $y = a(x - h)^2 + k$ maupun bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$;
- menyusun fungsi kuadrat dari titik puncak, akar-akar, atau tiga titik;
- menyelesaikan soal **optimasi**: luas terbesar, untung terbanyak, lemparan tertinggi;
- menyelesaikan **pertidaksamaan kuadrat** dengan membaca grafik.

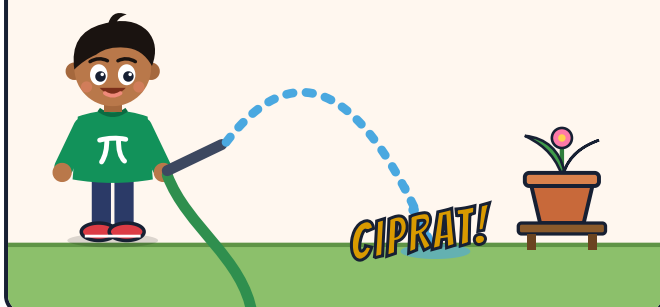
SELANG YANG BANDEL

KOMIK • 4 PANEL

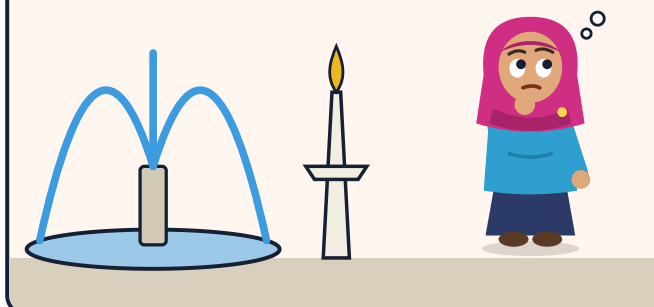
Minggu pagi, menyiram tanaman di halaman

DIMAS

Selangnya sudah kuarahkan ke pot, kok airnya malah jatuh duluan?

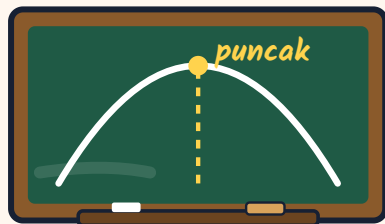
**AYU**

Lengkungnya mirip air mancur di Monas dan lengkung jembatan di buku IPS-ku. Kebetulan, ya?



KAK LINTANG

Bukan kebetulan! Semuanya parabola, grafik fungsi kuadrat. Setiap parabola punya satu titik istimewa: puncak.

**Ancil muncul dari balik pot****ANCIL**

Parabola itu simetris! Kalau bibir pot setinggi ujung selang, taruh puncak lengkungnya tepat di tengah-tengah.

DIMAS

Di tengah... agak tinggi... kena!



BYUR!

**Tebak Dulu!**

Sebuah bola ditendang dari tanah dan mencapai titik tertingginya tepat 2 detik kemudian. Kapan bola itu menyentuh tanah lagi? (Abaikan hambatan udara.)

Kurang dari 4 detik, karena bola turun lebih cepat daripada saat naik.

Tepat 4 detik setelah ditendang.

Lebih dari 4 detik, karena bola melambat di puncak.

Tidak bisa ditentukan tanpa mengetahui kecepatan tendangannya.

Jawabannya: tepat 4 detik. Grafik tinggi bola terhadap waktu berbentuk parabola, dan parabola selalu simetris terhadap garis tegak yang melewati puncaknya. Karena bola berangkat dan mendarat di ketinggian yang sama (tanah), waktu naik (2 detik) sama dengan waktu turun (2 detik). Di bab ini kamu akan melihat mengapa simetri ini selalu berlaku, lalu memakainya sebagai jalan pintas.

12.1 Parabola: lengkung berbentuk U

Di Bab 11 kamu mencari nilai x yang membuat $ax^2 + bx + c$ bernilai nol. Sekarang kita biarkan x bergerak bebas dan melihat **semua** nilai $ax^2 + bx + c$ sekaligus dalam bentuk grafik. Hasilnya adalah lengkung yang muncul di air mancur, lemparan bola, dan jembatan.



DEFINISI

Fungsi kuadrat adalah fungsi berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Grafiknya berupa lengkung yang disebut **parabola**. Titik paling bawah (atau paling atas) parabola disebut **titik puncak**, dan garis tegak yang melalui puncak disebut **sumbu simetri**.

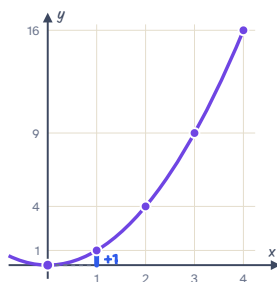
Kita mulai dari fungsi kuadrat yang paling sederhana, $y = x^2$. Buat tabel nilainya, lalu perhatikan dua baris terbawah.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
perubahan y		-5	-3	-1	+1	+3	+5
beda kedua			+2	+2	+2	+2	+2

Ada dua hal menarik. Pertama, tabelnya **simetris**: $x = 2$ dan $x = -2$ sama-sama menghasilkan 4. Kedua, perubahan nilai y membentuk barisan $-5, -3, -1, 1, 3, 5$ yang selalu bertambah 2. Untuk nilai x yang berjarak sama, ciri ini disebut **beda kedua tetap**, dan inilah sidik jari setiap fungsi kuadrat.

Bahasa sederhana • Gampangnya, parabola itu seperti huruf U (atau U terbalik). Sisi kiri dan kanannya kembar, seperti bayangan di cermin. Garis cerminnya disebut **sumbu simetri**, dan titik paling bawah (atau paling atas) disebut **puncak**.

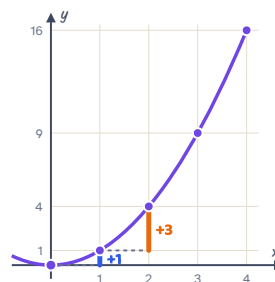
Mengapa naiknya selalu 1, 3, 5, 7, ...? Lihat bukti tanpa kata berikut.



Mulai dari puncak (0, 0).
Melangkah 1 ke kanan, naik 1.
Persegi 1×1 (biru).

$$1 = 1^2$$

Langkah 1. Grafik $y = x^2$ dimulai dari puncak (0, 0). Melangkah 1 satuan ke kanan, grafiknya naik 1 satuan. Di sebelah kanan, kita mulai menyusun persegi dari satu kotak.

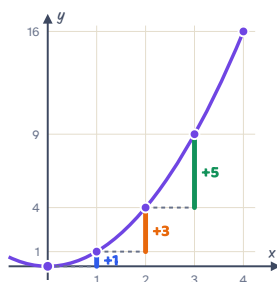


Langkah ke-2: naik 3.
Potongan L oranye = 3 kotak.
Jadilah persegi $2 \times 2 = 4$.

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

Langkah 2. Dari $x = 1$ ke $x = 2$, nilai y naik dari 1 ke 4, yaitu naik 3. Tambahkan potongan berbentuk L berisi 3 kotak: jadilah persegi 2×2 .



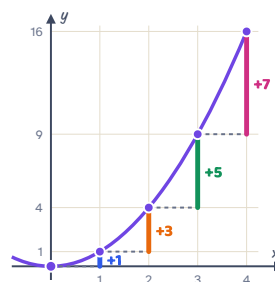
Langkah ke-3: naik 5.
Potongan L hijau = 5 kotak.
Jadilah persegi $3 \times 3 = 9$.

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

Langkah 3. Dari $x = 2$ ke $x = 3$, grafiknya naik 5 (dari 4 ke 9). Potongan L berikutnya berisi 5 kotak dan menghasilkan persegi 3×3 .



Langkah ke-4: naik 7.
Naiknya 1, 3, 5, 7: ganjil berurutan! $4 \times 4 = 16$ kotak.

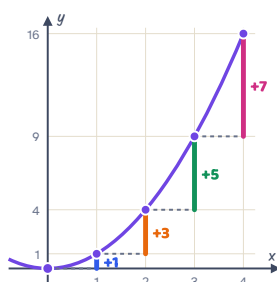
$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Langkah 4. Dari $x = 3$ ke $x = 4$, naik 7. Kenaikannya 1, 3, 5, 7: bilangan ganjil berurutan, dan jumlahnya selalu bilangan kuadrat: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.



Kenaikan ke- n dari puncak:

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

Naiknya selalu bertambah 2:

beda kedua tetap = ciri kuadrat!

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Langkah 5. Mengapa selalu ganjil? Kenaikan ke- n adalah $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$, jadi kenaikannya bertambah 2 setiap langkah. Pola "beda kedua tetap" ini dimiliki setiap fungsi kuadrat.

Bagaimana dengan $y = 2x^2$ atau $y = -\frac{1}{2}x^2$? Koefisien a mengatur arah dan kerampingan parabola:

- $a > 0$: parabola **terbuka ke atas** dan punya titik terendah (**minimum**);
- $a < 0$: parabola **terbuka ke bawah** dan punya titik tertinggi (**maksimum**);
- $|a|$ besar: parabola ramping; $|a|$ kecil (mendekati 0): parabola landai dan lebar.



TRIK KAK LINTANG

Bayangkan parabola sebagai wajah. Kalau a positif, parabola **tersenyum** 😊 (terbuka ke atas). Kalau a negatif, parabola **cemberut** ☹️ (terbuka ke bawah). Tanda a adalah suasana hati parabola!



TAMU DARI MASA LALU

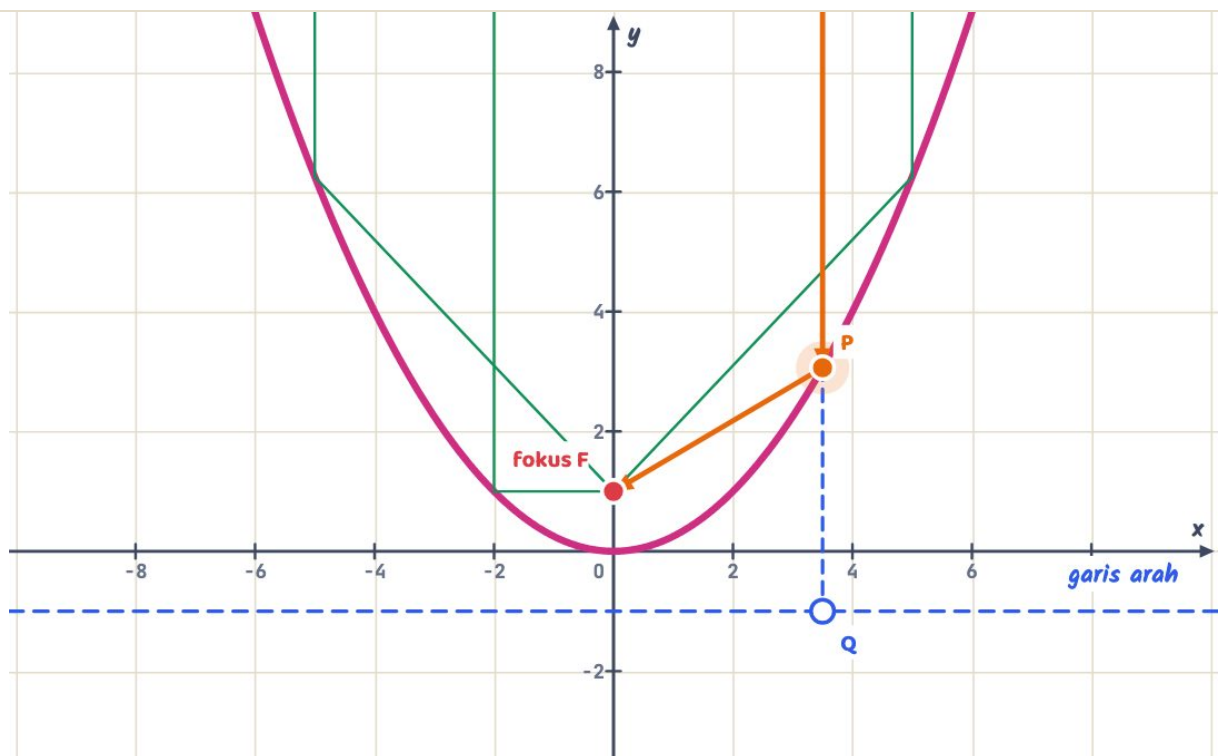
Sekitar 350 SM, matematikawan Yunani Menaechmus menemukan bahwa memotong kerucut dengan bidang datar dapat menghasilkan kurva-kurva istimewa: lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola. Nama *parabola* dipopulerkan oleh Apollonius dari Perga (± 200 SM). Archimedes (± 287 – 212 SM) bahkan menghitung luas daerah di dalam parabola tanpa kalkulus: luasnya tepat $\frac{4}{3}$ kali luas segitiga tertentu di dalamnya. Hampir dua ribu tahun kemudian, Galileo Galilei menunjukkan dalam bukunya (1638) bahwa benda yang dilempar melintas di sepanjang parabola, jika hambatan udara diabaikan.

Di Indonesia, piringan antena TV satelit di atap rumah bahkan disebut **antena parabola**. Namanya bukan kebetulan: penampang piringan itu memang parabola. Parabola punya satu titik istimewa bernama **fokus**. Setiap sinyal yang datang lurus dari satelit, sejajar sumbu simetri, dipantulkan tepat ke fokus. Di situlah alat penerima dipasang.

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad PF = 4,06 = PQ$$

Sinar oranye datang tegak dari satelit, menyentuh antena di P, lalu dipantulkan ke fokus F. Sinar-sinar hijau juga berkumpul di F.



PF = PQ: setiap titik antena sama jauh dari fokus dan dari garis arah

Jarak P ke fokus (PF)

4,063

Jarak P ke garis arah (PQ)

4,063

Seret titik oranye P di sepanjang antena, atau geser p . Perhatikan dua angka di bawah: jarak P ke fokus dan jarak P ke garis arah **selalu sama**. Itulah definisi geometri parabola.

**FOKUS DAN GARIS ARAH**

Parabola adalah kumpulan semua titik yang jaraknya ke sebuah titik F (*fokus*) sama dengan jaraknya ke sebuah garis (*garis arah* atau direktriks). Ambil $F(0, p)$ dan garis arah $y = -p$ dengan $p > 0$. Titik $P(x, y)$ memenuhi

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p \implies x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \implies y = \frac{x^2}{4p}.$$

Jadi $y = ax^2$ (dengan $a > 0$) adalah parabola dengan fokus $(0, \frac{1}{4a})$. Misalnya $y = x^2$ berfokus di $(0; 0,25)$. Sifat pantul "semua sinar sejajar menuju fokus" dipakai pada antena, lampu senter, kompor tenaga surya, dan teleskop.

12.2 Bentuk puncak: menggeser dan meregangkan parabola

Semua parabola sebenarnya "saudara" dari $y = x^2$. Mereka hanya diregangkan, dibalik, lalu digeser. Bentuk yang paling terus terang menceritakan semua itu adalah **bentuk puncak**.

**Tebak Dulu!**

Grafik $y = (x - 3)^2$ adalah grafik $y = x^2$ yang digeser...

3 satuan ke kiri, karena ada tanda minus.

3 satuan ke kanan.

3 satuan ke bawah.

3 satuan ke atas.

Jawabannya: 3 satuan ke kanan. Banyak orang menebak "kiri" karena melihat tanda minus. Coba pikirkan: $(x - 3)^2$ bernilai paling kecil, yaitu 0, saat $x = 3$, bukan saat $x = 0$. Jadi puncaknya pindah ke $x = 3$, di sebelah kanan. Grafiknya harus "berjalan" 3 langkah lebih jauh untuk mencapai nilai yang sama.



SIFAT BENTUK PUNCAK

Grafik fungsi

$$y = a(x - h)^2 + k, \quad a \neq 0$$

adalah parabola dengan **titik puncak** (h, k) dan **sumbu simetri** $x = h$.

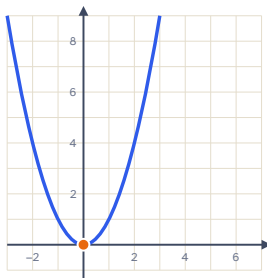
- Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas dan k adalah **nilai minimum**.
- Jika $a < 0$, parabola terbuka ke bawah dan k adalah **nilai maksimum**.

▼ Mengapa puncaknya pasti (h, k) ?

Kuadrat bilangan real tidak pernah negatif: $(x - h)^2 \geq 0$, dan nilainya 0 hanya saat $x = h$. Untuk $a > 0$, $a(x - h)^2 \geq 0$, sehingga $y = a(x - h)^2 + k \geq k$. Nilai y terkecil, yaitu k , tercapai tepat di $x = h$. Untuk $a < 0$ semua tanda berbalik, sehingga k menjadi nilai terbesar.

Simetrinya juga mudah dilihat. Untuk sembarang jarak d , $f(h + d) = ad^2 + k = a(-d)^2 + k = f(h - d)$. Dua titik yang sama jauh dari sumbu $x = h$ selalu sama tinggi.

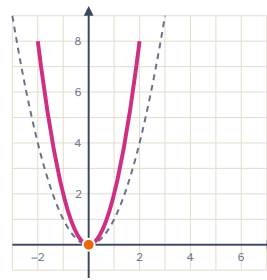




$$y = x^2$$

Parabola induk.
Puncaknya di $(0, 0)$.

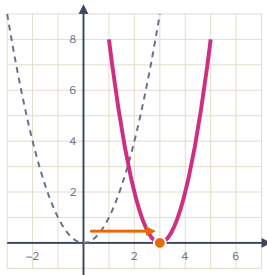
Langkah 1. Mulai dari parabola induk $y = x^2$ dengan puncak di $(0, 0)$.



$$y = 2x^2$$

$a = 2$: semua nilai y dikali 2,
jadi lebih ramping.

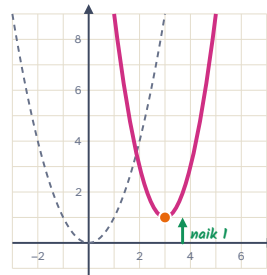
Langkah 2. Kalikan dengan $a = 2$: setiap nilai y menjadi dua kali lipat. Parabola menjadi lebih ramping, sedangkan puncaknya tetap di $(0, 0)$.



$$y = 2(x - 3)^2$$

Geser ke KANAN 3,
walaupun tandanya minus!

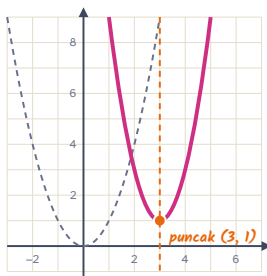
Langkah 3. Ganti x dengan $x - 3$: parabola bergeser 3 satuan ke **kanan**. Puncak pindah ke $(3, 0)$, karena $(x - 3)^2 = 0$ saat $x = 3$.



$$y = 2(x - 3)^2 + 1$$

+1 di luar kurung:
geser NAIK 1.

Langkah 4. Tambahkan +1 di luar kurung: parabola naik 1 satuan. Puncaknya sekarang $(3, 1)$.



$$y = a(x - h)^2 + k$$

$a = 2$ → terbuka ke atas, ramping

$h = 3$ → sumbu simetri $x = 3$

$k = 1$ → nilai minimum 1

puncak $(h, k) = (3, 1)$

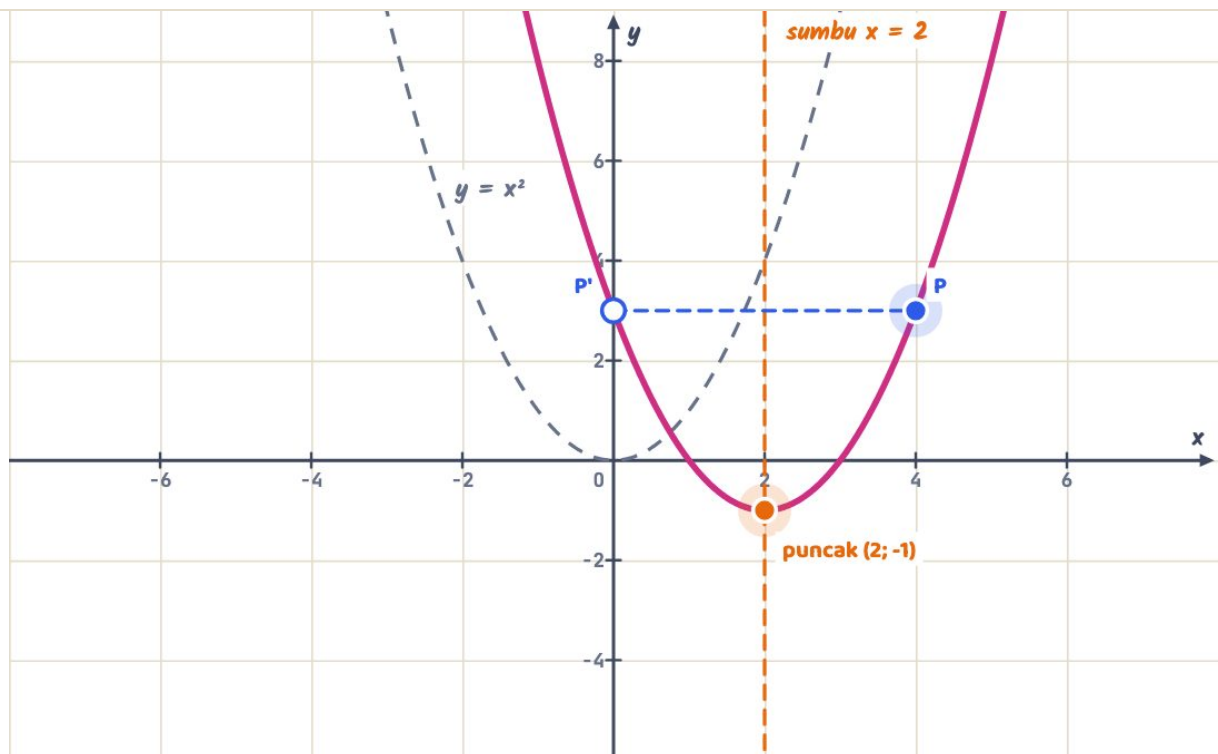
Langkah 5. Hasilnya $y = 2(x - 3)^2 + 1$. Dari bentuk puncak, kita langsung tahu: terbuka ke atas, sumbu simetri $x = 3$, dan nilai minimum 1.

Sekarang giliranmu. Seret titik puncak ke mana saja, dan lihat rumusnya ikut berubah. Seret juga titik biru P: kembarannya, P' , selalu mengikuti di seberang sumbu simetri.

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

Titik oranye adalah puncak (h, k) . Titik P dan kembarannya P' selalu sama tinggi dan sama jauh dari sumbu simetri.



$a > 0$: terbuka ke atas, puncak = titik minimum

$a = 1$: kembar dengan $y = x^2$, hanya bergeser

Sumbu simetri $x =$
2

Nilai ekstrem $y =$
-1

Tinggi P dan P'
3

Tantangan: buat parabola yang puncaknya $(-3, 4)$ dan terbuka ke bawah. Lalu atur agar parabola itu melalui titik asal $(0, 0)$. Berapa nilai a yang kamu temukan?

Bahasa sederhana • Cara membaca bentuk puncak: angka di dalam kurung bersama x mengatur geser kiri-kanan (**tandanya dibalik**), angka di luar kurung mengatur geser atas-bawah (**tandanya apa adanya**), dan angka di depan kurung mengatur arah buka serta kerampingan.



AWAS JEBAKAN

Pada bentuk puncak, tanda h terbalik: $(x + 5)^2$ berarti puncak di $x = -5$, bukan $x = 5$. Tulis ulang $y = 2(x + 5)^2 - 1$ sebagai $y = 2(x - (-5))^2 - 1$, jadi $h = -5$ dan puncaknya $(-5, -1)$. Sebaliknya, k dibaca apa adanya: -1 berarti turun 1.

CONTOH Membaca bentuk puncak

Untuk $y = -2(x + 1)^2 + 8$, tentukan arah buka, titik puncak, nilai ekstrem, serta titik potong grafik dengan sumbu- y dan sumbu- x .

- 1 $a = -2 < 0$: parabola terbuka ke bawah, jadi puncaknya titik maksimum.
- 2 $x + 1 = x - (-1)$, jadi $h = -1$ dan $k = 8$. Puncak $(-1, 8)$, nilai maksimum 8.
- 3 Sumbu- y : untuk $x = 0$, $y = -2(1)^2 + 8 = 6$. Titiknya $(0, 6)$.
- 4 Sumbu- x : $-2(x + 1)^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = \pm 2$, jadi $x = 1$ atau $x = -3$.

Puncak $(-1, 8)$ dengan nilai maksimum 8; grafik memotong sumbu- y di $(0, 6)$ dan sumbu- x di $(-3, 0)$ serta $(1, 0)$. Perhatikan: -3 dan 1 sama-sama berjarak 2 dari sumbu $x = -1$.

12.3 Dari bentuk umum ke titik puncak

Fungsi kuadrat lebih sering muncul dalam **bentuk umum** $y = ax^2 + bx + c$. Puncaknya tidak langsung terlihat. Ada dua cara menemukannya: melengkapkan kuadrat seperti di Bab 11, atau memakai rumus yang lahir dari cara itu.



RUMUS TITIK PUNCAK

Untuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan diskriminan $D = b^2 - 4ac$, titik puncaknya (x_p, y_p) dengan

$$x_p = -\frac{b}{2a}, \quad y_p = -\frac{D}{4a} = f(x_p).$$

Sumbu simetrinya garis $x = x_p$, dan y_p adalah nilai minimum (jika $a > 0$) atau maksimum (jika $a < 0$).

▼ Bukti dengan melengkapkan kuadrat

Keluarkan a dari dua suku pertama, lalu lengkapi kuadrat:

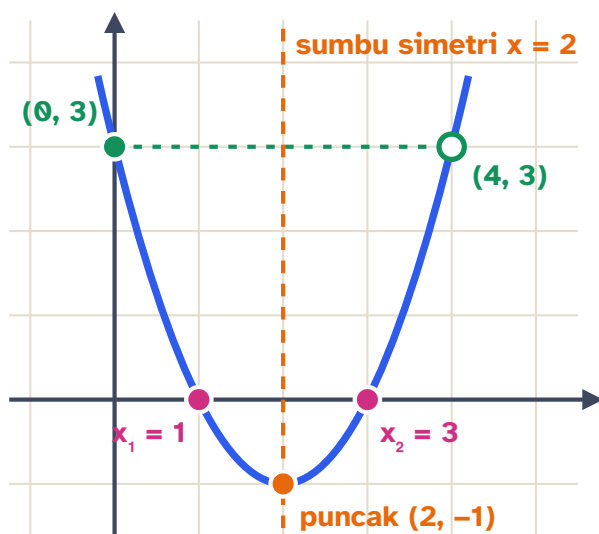
$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Ini bentuk puncak dengan $h = -\frac{b}{2a}$ dan $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$. Terbukti. ■



TRIK KAK LINTANG: TITIK KEMBAR

Grafik selalu memotong sumbu- y di $(0, c)$. Coba hitung $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{a^2} - b \cdot \frac{b}{a} + c = c$. Jadi $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ adalah **kembaran** titik $(0, c)$! Sumbu simetri tepat di tengah-tengah keduanya: $x = -\frac{b}{2a}$. Rumusnya tidak perlu dihafal kalau kamu ingat si kembar ini.



$$y = x^2 - 4x + 3$$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ terbuka ke atas

$c = 3 \rightarrow$ memotong sumbu- y di $(0, 3)$

$D = 4 > 0 \rightarrow$ dua akar: 1 dan 3

$x = -b/(2a) = 2 \rightarrow$ puncak $(2, -1)$

$(0, 3)$ dan $(4, 3)$ kembar terhadap $x = 2$
puncak tepat di tengah akar: $(1 + 3)/2 = 2$

Anatomi parabola $y = x^2 - 4x + 3$. Semua titik pentingnya dapat dibaca dari a , b , dan c .

Satu fungsi kuadrat bisa ditulis dalam tiga bentuk. Setiap bentuk "membocorkan" informasi yang berbeda:

Bentuk	Rumus	Yang langsung terbaca	Contoh: fungsi yang sama
Umum	$y = ax^2 + bx + c$	arah buka (a), titik potong sumbu- y $(0, c)$	$y = x^2 - 4x + 3$
Puncak	$y = a(x - h)^2 + k$	puncak (h, k) , sumbu simetri $x = h$	$y = (x - 2)^2 - 1$
Faktor	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	akar-akar x_1, x_2 (titik potong sumbu- x)	$y = (x - 1)(x - 3)$

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

Sumbu simetri berada di $x = -b/(2a)$: lawan dari b , dibagi dua kali a . Nilai c sama sekali tidak ikut menentukan.

 a

Koefisien a

 b

Koefisien b

 x_p

Sumbu simetri

SUMBU SIMETRI

3

a dan b berlawanan tanda $\Rightarrow$ puncak di kanan sumbu-y

Untuk $y = 1x^2 + (-6)x + c$, sumbu simetrinya $x = -(-6) / (2 \times 1) = 3$. Ubah c sesukamu: parabolanya hanya naik-turun, sumbunya tetap di sini.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PARABOLA-SUMBU

$$y_p = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nilai terkecil (atau terbesar) sebuah fungsi kuadrat sama dengan minus diskriminan dibagi empat kali a .

a Koefisien a

b Koefisien b

c Koefisien c

y_p Nilai ekstrem

NILAI EKSTREM

-4

titik minimum (terbuka ke atas)

$D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16$. Puncaknya **(3; -4)**, dan itu nilai **minimum** karena a **positif**.

Cek satuan: Nilai ekstrem adalah nilai y (tinggi puncak), bukan nilai x .

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PARABOLA-EKSTREM

Ubah $y = 2x^2 + 8x + 3$ ke bentuk puncak, lalu tentukan titik puncaknya.

1 Keluarkan $a = 2$ dari dua suku pertama: $y = 2(x^2 + 4x) + 3$.

2 Lengkapi kuadrat di dalam kurung: $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.

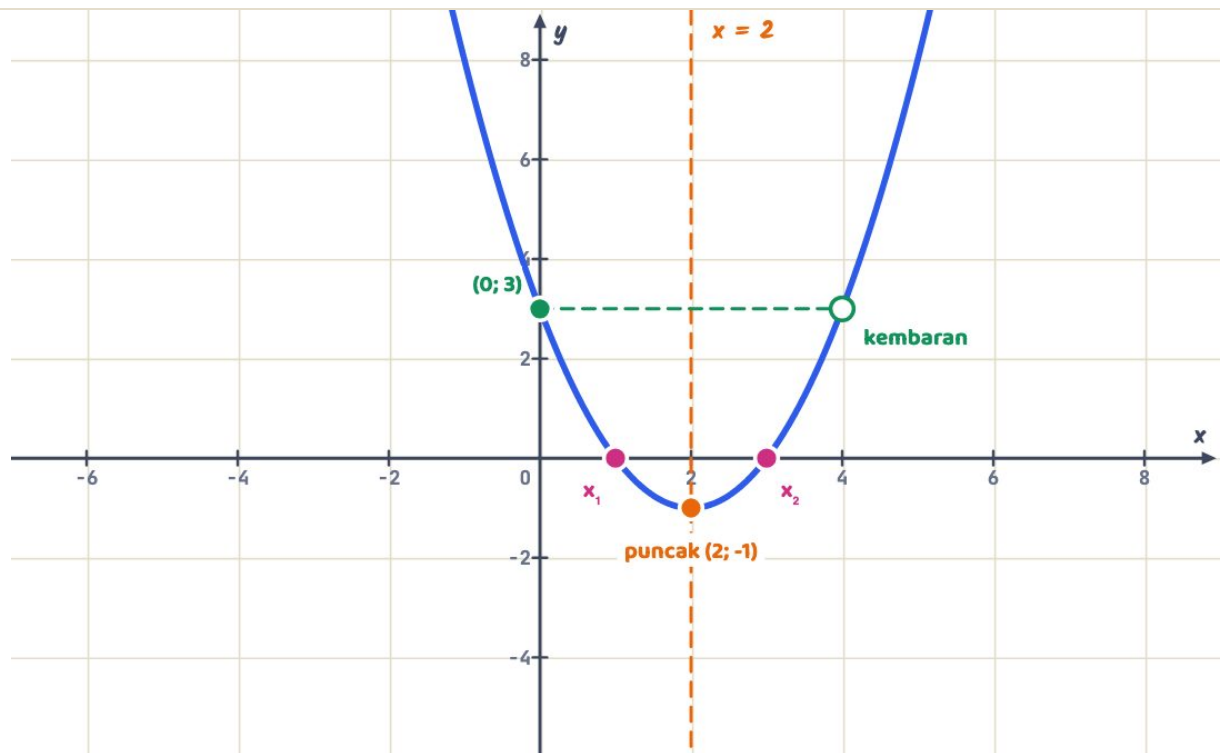
3 $y = 2[(x + 2)^2 - 4] + 3 = 2(x + 2)^2 - 8 + 3 = 2(x + 2)^2 - 5$.

4 Cek dengan rumus: $x_p = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2$ dan $y_p = 2(-2)^2 + 8(-2) + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$. Cocok!

$y = 2(x + 2)^2 - 5$, dengan puncak **(-2, -5)** dan nilai minimum **-5**.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^2 - 4x + 3, \quad D = 4$$



D > 0: memotong sumbu-x di dua titik

Diskriminan D

4

Puncak x

2

Puncak y

-1

Akar x_1

1

Akar x_2

3

Geser a , b , dan c . Lihat titik kembaran hijau dan akar-akar magenta yang selalu simetris terhadap sumbu oranye. Lalu geser **jalur puncak** ke 1 dan tekan ► **Jalankan**: b berubah sendiri. Ke mana saja puncaknya berjalan?



KEJUTAN: PUNCAK BERJALAN DI PARABOLA LAIN!

Saat hanya b yang berubah, puncak $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ bergerak. Misalkan $X = -\frac{b}{2a}$, maka $b = -2aX$ dan tinggi puncaknya $Y = c - \frac{4a^2X^2}{4a} = c - aX^2$. Jadi semua puncak terletak pada parabola $y = c - ax^2$: parabola yang sama lebarnya, tetapi menghadap ke arah berlawanan. Garis ungu putus-putus di Grafik Hidup tadi adalah parabola itu.



TRIK KAK LINTANG: PUNCAK DI TENGAH AKAR

Kalau kamu sudah tahu akar-akarnya, tidak perlu rumus apa pun. Sumbu simetri selalu tepat di tengah dua akar: $x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Contoh: $y = (x - 1)(x - 7)$ punya akar 1 dan 7, jadi $x_p = 4$ dan $y_p = (4 - 1)(4 - 7) = -9$.



AWAS JEBAKAN

Rumus sumbu simetri adalah $x_p = -\frac{b}{2a}$: ada tanda minus dan angka 2 di penyebut. Untuk $y = 3x^2 - 12x + 1$, $x_p = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2$, bukan -2 (lupa tanda minus) dan bukan 4 (lupa angka 2). Ingat juga: nilai minimum atau maksimum adalah y_p , bukan x_p .



ADU CEPAT

Nilai minimum kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Paruh koefisien x , kuadratkan, lalu kurangkan dari c . Contoh: $y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$, jadi minimumnya $10 - 3^2 = 1$.

12.4

Menyusun fungsi kuadrat dari titik-titik

Sekarang kita balik arah. Bukan membaca grafik dari rumus, tetapi mencari rumus dari beberapa titik. Insinyur melakukannya saat merancang lengkung jembatan, dan ilmuwan melakukannya saat mencocokkan data percobaan. Pilih bentuk yang paling cocok dengan informasi yang kamu punya:

Yang diketahui	Mulai dari	Cari a dengan
puncak (h, k) + satu titik lain	$y = a(x - h)^2 + k$	substitusi titik lain itu
dua akar x_1, x_2 + satu titik lain	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	substitusi titik lain itu
tiga titik sembarang	$y = ax^2 + bx + c$	sistem tiga persamaan (SPLTV, Bab 10)

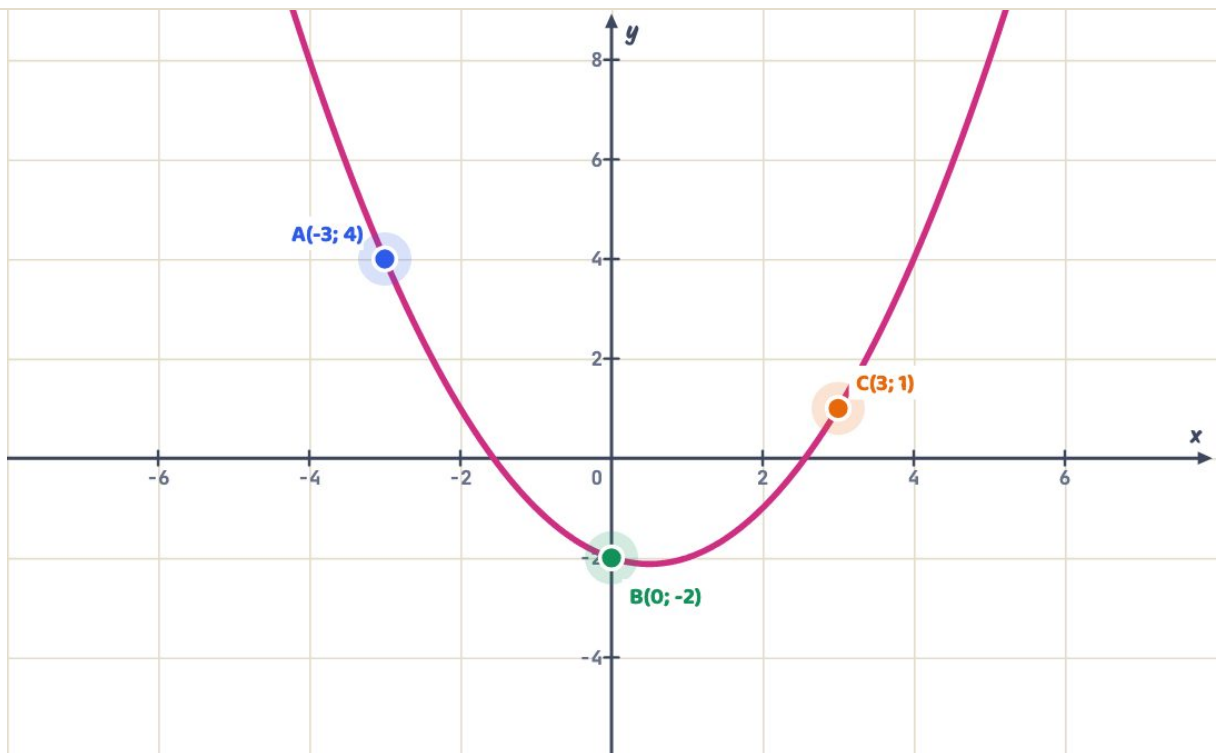


SIFAT TIGA TITIK

Melalui tiga titik yang absisnya berbeda dan tidak segaris, selalu ada **tepat satu** parabola $y = ax^2 + bx + c$. (Jika ketiganya segaris, "parabola" itu menjadi garis lurus dengan $a = 0$.)

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 0,5x^2 - 0,5x - 2$$



$a > 0$: terbuka ke atas

a

0,5

b

-0,5

c

-2

Seret titik A, B, dan C ke mana saja. Selalu ada tepat satu parabola yang melewati ketiganya, dan nilai a , b , c dihitung ulang seketika. Bisakah kamu membuat ketiga titik segaris sehingga $a = 0$?

Lengkung baja sebuah jembatan pelengkung (bentuknya mirip Jembatan Youtefa di Jayapura) bertumpu pada dua kaki yang berjarak 40 m. Titik tertinggi lengkung berada 10 m di atas kedua kakinya. Modelkan lengkung itu dengan fungsi kuadrat, lalu hitung tinggi lengkung pada jarak mendatar 5 m dari salah satu kaki.

- 1 Taruh kaki kiri di $(0, 0)$ dan kaki kanan di $(40, 0)$. Keduanya akar, jadi $y = a x(x - 40)$.
- 2 Puncak berada di tengah akar, $x = 20$, dengan tinggi 10: $10 = a \cdot 20 \cdot (-20) = -400a$, sehingga $a = -\frac{1}{40}$.
- 3 Model: $y = -\frac{1}{40} x(x - 40)$. Untuk $x = 5$: $y = -\frac{1}{40} \cdot 5 \cdot (-35) = \frac{175}{40} = 4,375$.

Tinggi lengkung 5 m dari kaki adalah 4,375 m (sekitar 4,4 m). Karena simetris, tinggi lengkung di $x = 35$ juga 4,375 m.

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui $(0, 3)$, $(1, 2)$, dan $(2, 5)$.

- 1 Misalkan $y = ax^2 + bx + c$. Titik $(0, 3)$ langsung memberi $c = 3$.
- 2 Titik $(1, 2)$: $a + b + 3 = 2$, jadi $a + b = -1$. Titik $(2, 5)$: $4a + 2b + 3 = 5$, jadi $2a + b = 1$.
- 3 Kurangkan kedua persamaan: $(2a + b) - (a + b) = 1 - (-1)$, sehingga $a = 2$ dan $b = -3$.

$$y = 2x^2 - 3x + 3. \text{ Cek titik ketiga: } 2(2)^2 - 3(2) + 3 = 8 - 6 + 3 = 5. \checkmark$$

12.5 Optimasi: luas terbesar, untung terbanyak

Puncak parabola adalah titik "paling": paling tinggi, paling luas, paling untung. Mencari nilai terbaik seperti ini disebut **optimasi**. Resepnya: tulis besaran yang ingin dibuat terbesar (atau terkecil) sebagai fungsi kuadrat, lalu cari puncaknya.



Tebak Dulu!

Pak RT punya kawat 24 m untuk membuat kandang ayam persegi panjang yang menempel pada tembok, jadi hanya tiga sisi yang perlu dipagari. Ukuran mana yang luasnya terbesar? (Lebar = sisi yang tegak lurus tembok.)

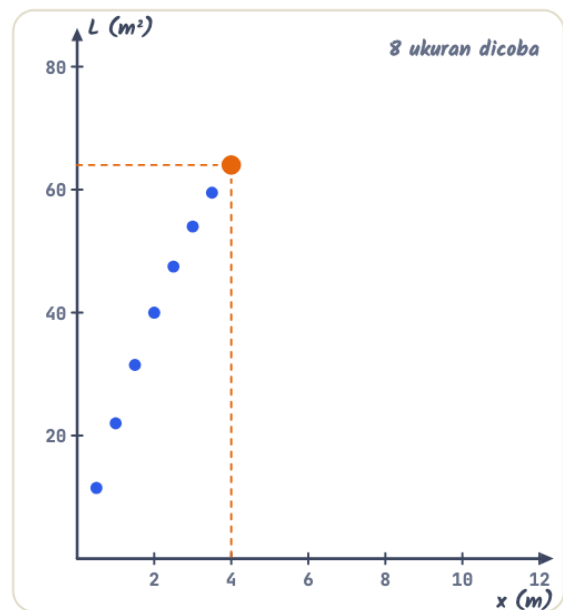
Persegi: lebar 8 m, sisi depan 8 m.

Lebar 4 m, sisi depan 16 m.

Lebar 6 m, sisi depan 12 m.

Lebar 10 m, sisi depan 4 m.

Jawabannya: lebar 6 m dan sisi depan 12 m (luas 72 m²). Persegi 8 × 8 hanya 64 m², sama dengan 4 × 16. Kebanyakan orang mengira persegi selalu juara, tetapi karena tembok "menyumbang" satu sisi gratis, bentuk terbaik justru sisi depannya dua kali lebarnya. Buktikan sendiri di Lab Mini berikut!



sisi depan
16 m

luas kandang
64 m²

luas terbesar yang sudah dicoba
64 m²

Status

Belum maksimum, terus cari!

Seret titik ungu di pojok kandang (atau geser slider lebar). Setiap ukuran yang kamu coba muncul sebagai titik di grafik kanan. Titik-titik itu membentuk lengkung apa? Tekan ► **Jalankan** untuk menyapu semua ukuran, lalu matikan tembok dan bandingkan.

Mengapa jawabannya 6 m? Misalkan lebar kandang x . Sisi depan $24 - 2x$, sehingga luasnya

$$L(x) = x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x.$$



TRIK KAK LINTANG: TITIK TENGAH AKAR

Untuk soal optimasi, kamu sering tidak perlu rumus puncak. Cari dulu kapan hasilnya **nol**: $L(x) = x(24 - 2x) = 0$ saat $x = 0$ atau $x = 12$. Puncaknya pasti tepat di tengah: $x = 6$, sehingga $L(6) = 6 \times 12 = 72 \text{ m}^2$. Cepat, dan tanpa melengkapkan kuadrat!

Bahasa sederhana • Intinya: luas kandang naik ketika lebarnya ditambah sedikit demi sedikit, mencapai puncak, lalu turun lagi karena sisi depannya makin pendek. Ukuran terbaik ada di puncak lengkung.

Resep yang sama bekerja untuk uang. Pedagang tahu bulat yang menaikkan harga mendapat untung lebih besar per biji, tetapi pembelinya berkurang. Ada satu harga yang paling pas.

$$U = (h - m)(1800 - h)$$

Untung = untung per biji × banyak yang terjual. Harga naik, untung per biji naik, tetapi pembeli berkurang. Harga terbaik ada di puncak parabola.

 h

Harga jual per biji rupiah

 m

Modal per biji rupiah

 U

Untung sehari rupiah

UNTUNG SEHARI

390.000

rupiah

Dengan harga Rp**500**, terjual **1.300** biji sehari dan untung per biji Rp**300**, jadi untung total Rp**390.000**. Akar-akarnya $h = 200$ dan $h = 1.800$, sehingga harga terbaik ada di tengahnya: Rp**1.000**.

Cek satuan: (rupiah per biji) × (banyak biji) = rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-PARABOLA-UNTUNG](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-PARABOLA-UNTUNG)

Modal Pak Ujang Rp200 per biji tahu bulat. Dari pengalamannya, kalau ia menjual dengan harga h rupiah per biji, tahu yang terjual sehari kira-kira $1.800 - h$ biji. Berapa harga jual yang memberi untung terbesar, dan berapa untungnya?

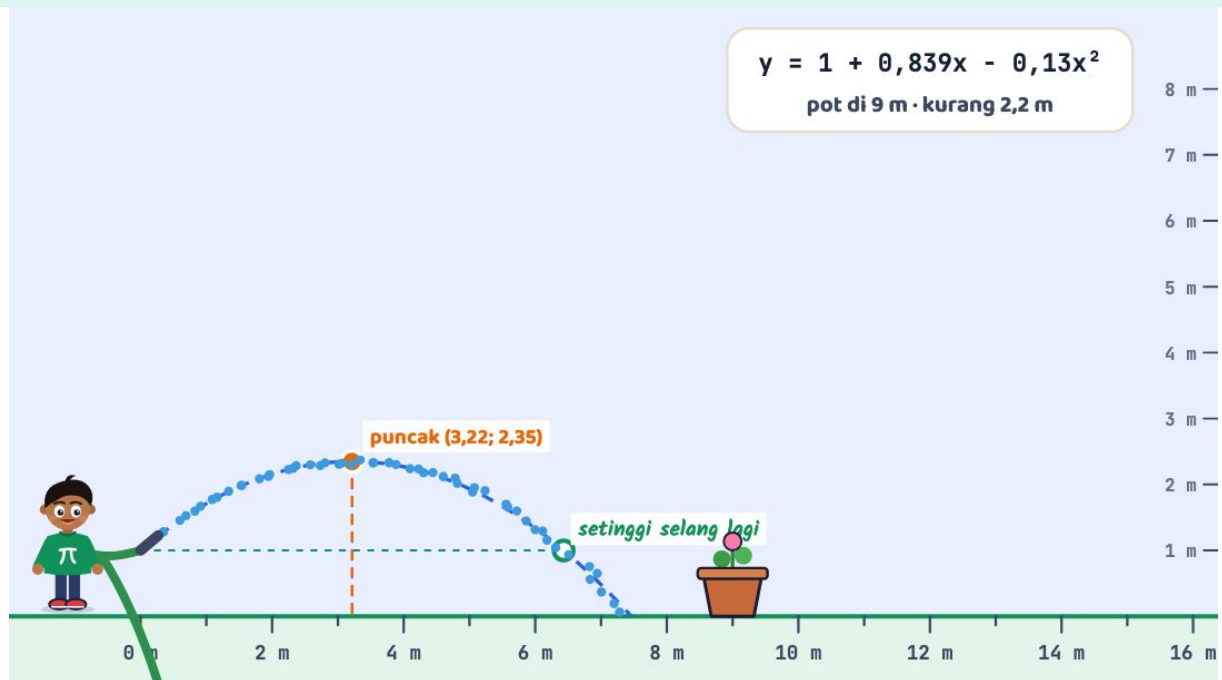
- 1 Untung per biji $h - 200$, banyak yang terjual $1.800 - h$. Untung total $U(h) = (h - 200)(1.800 - h)$.
- 2 Ini fungsi kuadrat dengan $a = -1 < 0$ (terbuka ke bawah) dan akar-akar $h = 200$ serta $h = 1.800$.
- 3 Puncaknya di tengah akar: $h = \frac{200 + 1.800}{2} = 1.000$. Untungnya $U(1.000) = 800 \times 800 = 640.000$.

Harga terbaik Rp1.000 per biji, dengan untung Rp640.000 sehari. Bandingkan dengan harga Rp500: untungnya hanya $300 \times 1.300 = 390.000$ rupiah. Harga terlalu murah maupun terlalu mahal sama-sama mengurangi untung.

Parabola juga muncul di lintasan benda yang dilempar atau disemprotkan. Ingat selang Dimas di komik? Sekarang kamu yang memegang selangnya.

LAB MINI Selang ajaib: siram pot bunganya!

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-12



tinggi maksimum
2,35 m

jarak mendatar ke puncak
3,22 m

jatuh di tanah pada
7,46 m

Pot
kurang 2,2 m

Atur kecepatan dan sudut semprotan, lalu tekan ► **Jalankan**. Bisakah kamu memasukkan air ke dalam pot? Perhatikan titik hijau: di situ air kembali setinggi ujung selang, tepat dua kali jarak ke puncak. Untuk mode tantangan, matikan "Tampilkan lintasan & puncak" lalu tekan 📦 **Pindahkan pot**.

COBA SENDIRI Roket air

Dalam lomba roket air, tinggi roket (meter) setelah t detik dimodelkan dengan $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.
1. Berapa tinggi maksimum roket, dan kapan roket jatuh ke tanah?

1 $t_p = -\frac{20}{2(-5)} = 2$ detik. Tinggi maksimum $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$ m.

2 Roket menyentuh tanah saat $h(t) = 0$, yaitu $5t^2 - 20t - 1 = 0$.

3 Rumus abc: $t = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 20}}{10} = \frac{20 \pm \sqrt{420}}{10}$. Ambil yang positif: $t \approx \frac{20 + 20,49}{10} \approx 4,05$ detik.

Tinggi maksimum 21 m pada detik ke-2, dan roket jatuh sekitar 4,05 detik setelah diluncurkan. Mengapa bukan tepat 4 detik? Karena roket berangkat dari ketinggian 1 m, bukan dari tanah, jadi perjalanan turunnya sedikit lebih panjang daripada perjalanan naiknya.



MATEMATIKA NUSANTARA

Di Pulau Nias, Sumatra Utara, ada tradisi *fahombo* atau lompat batu. Seorang pemuda berlari, menjejak batu pijakan, lalu melayang melewati tugu batu setinggi sekitar 2 meter. Selama melayang, pusat tubuhnya bergerak di sepanjang lintasan yang hampir berbentuk parabola. Agar lolos, puncak lintasan harus cukup tinggi dan berada di sekitar tugu, sama seperti mengatur semprotan selang agar masuk pot. Para pelompat tidak menghitung rumus, tetapi mereka melatih "rasa parabola" itu selama bertahun-tahun.



Air mancur

Setiap semburan air mancur, termasuk di taman kawasan Monas, melengkung seperti parabola. Sudut dan tekanan air menentukan tinggi puncak dan titik jatuhnya.



Antena parabola

Piringan di atap rumah memantulkan sinyal satelit ke satu titik, yaitu fokus, tempat alat penerima dipasang.



Jembatan pelengkung

Lengkung jembatan seperti Jembatan Youtefa di Jayapura dapat didekati dengan parabola, sehingga tinggi lengkung di setiap titik bisa dihitung.



Jarak pengereman

Jarak pengereman kira-kira sebanding dengan kuadrat kecepatan: kecepatan dua kali lipat membuat jarak pengereman kira-kira empat kali lipat. Ngebut itu berbahaya!



Senter & lampu motor

Cermin cekung di belakang bohlam memantulkan cahaya dari fokus menjadi berkas lurus ke depan.



Untung pedagang

Harga terlalu murah atau terlalu mahal sama-sama mengurangi untung. Harga terbaik ada di puncak parabola untung.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MINIMUM DENGAN DUA VARIABEL

Soal olimpiade suka bertanya: berapa nilai terkecil $x^2 + 2xy + 2y^2 - 6y + 14$ untuk semua bilangan real x dan y ? Tidak ada grafik yang bisa digambar dengan mudah, tetapi trik melengkapkan kuadrat tetap bekerja, cukup dipakai dua kali:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 6y + 14 = (x + y)^2 + (y^2 - 6y + 9) + 5 = (x + y)^2 + (y - 3)^2 + 5.$$

Dua kuadrat tidak pernah negatif, jadi nilainya selalu ≥ 5 . Nilai 5 tercapai saat $y = 3$ dan $x = -y = -3$. Trik lain tanpa grafik adalah ketaksamaan AM-GM: untuk kandang tadi, $x(24 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (24 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 24 - 2x}{2} \right)^2 = 72$, dengan kesamaan saat $2x = 24 - 2x$, yaitu $x = 6$.

Pertidaksamaan kuadrat: di atas atau di bawah sumbu- x ?

Pertanyaan seperti "kapan roket berada di atas 16 m?" atau "harga berapa yang membuat untung positif?" adalah **pertidaksamaan kuadrat**. Rahasiannya: jangan buru-buru menghitung, **lihat grafiknya**. Pertanyaan $f(x) > 0$ sama artinya dengan "di mana parabola berada di atas sumbu- x ?"

1. Pindahkan semua suku ke satu ruas sehingga ruas lainnya nol.
2. Cari akar-akarnya (pembuat nol).
3. Sketsa parabola: terbuka ke atas atau ke bawah?
4. Baca bagian yang berada di atas (> 0) atau di bawah (< 0) sumbu- x .



SIFAT TANDA FUNGSI KUADRAT

Misalkan $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a > 0$.

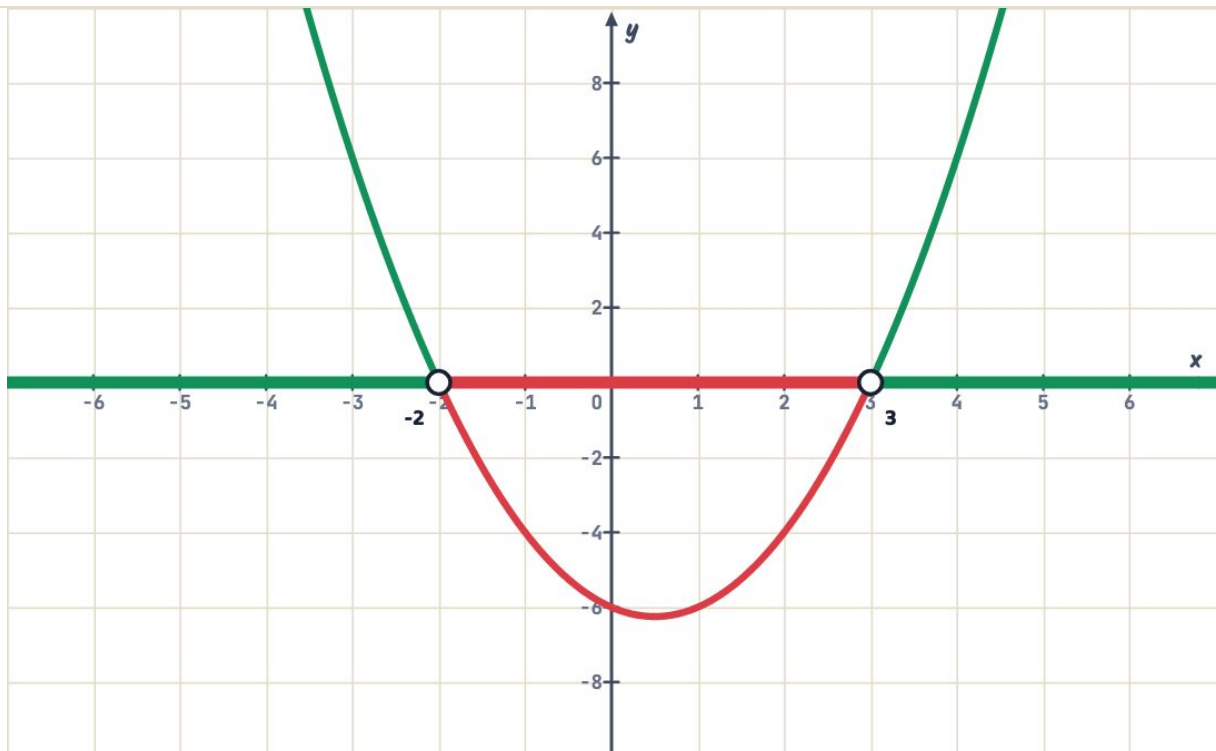
- Jika $D > 0$ dengan akar $x_1 < x_2$: $f(x) < 0$ untuk $x_1 < x < x_2$, dan $f(x) > 0$ untuk $x < x_1$ atau $x > x_2$.
- Jika $D < 0$: $f(x) > 0$ untuk **semua** x . Fungsi seperti ini disebut **definit positif**.

Untuk $a < 0$, semua tanda di atas dibalik.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = x^2 - 1x - 6$$

Bagian hijau: $f(x) > 0$. Bagian merah: $f(x) < 0$. Garis tebal di sumbu- x adalah himpunan penyelesaiannya.



$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ atau } x > 3$$

Diskriminan D

25

Akar x_1

-2

Akar x_2

3

Mulai dari $f(x) = x^2 - x - 6$. Bagian merah (di bawah sumbu- x) berada di antara akar -2 dan 3 . Ubah a menjadi negatif: warnanya bertukar! Lalu cari nilai c yang membuat semuanya hijau.

**AWAS JEBAKAN**

Jangan mengakarkan pertidaksamaan begitu saja: $x^2 > 9$ **tidak** berarti $x > 3$ saja. Bilangan negatif seperti $x = -4$ juga memenuhi, karena $(-4)^2 = 16 > 9$. Jawaban lengkapnya $x < -3$ atau $x > 3$. Ingat juga: saat mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif, balik tanda ketaksamaannya.

CONTOH Pertidaksamaan pertama

Selesaikan $x^2 - x - 6 < 0$.

- 1 Faktorkan: $(x + 2)(x - 3) < 0$. Pembuat nolnya $x = -2$ dan $x = 3$.
- 2 Parabola $y = x^2 - x - 6$ terbuka ke atas, jadi berada di bawah sumbu- x di antara kedua akar.

$-2 < x < 3$. Cek dengan $x = 0$: $0 - 0 - 6 = -6 < 0$. ✓

KERJAKAN BERSAMA Kapan roket di atas 16 m?

Roket air tadi tingginya $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ meter. Selama berapa detik roket berada lebih tinggi dari 16 m?

- 1 $-5t^2 + 20t + 1 > 16 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 15 > 0$.
- 2 Bagi kedua ruas dengan -5 dan **balik tandanya**: $t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 3) < 0$.
- 3 Parabola $y = t^2 - 4t + 3$ terbuka ke atas, negatif di antara akar: $1 < t < 3$.

Roket berada di atas 16 m dari detik ke-1 sampai detik ke-3, yaitu selama 2 detik. Selang waktu itu simetris terhadap $t = 2$, saat roket di puncak.

Tentukan semua nilai m agar $mx^2 + 4x + m > 0$ untuk setiap bilangan real x .

- 1 Jika $m = 0$, fungsinya menjadi $4x$, yang negatif untuk $x < 0$. Jadi $m \neq 0$, dan fungsinya kuadrat.
- 2 Agar selalu positif, parabola harus terbuka ke atas **dan** tidak menyentuh sumbu- x : $a > 0$ dan $D < 0$.
- 3 $a = m > 0$, dan $D = 4^2 - 4 \cdot m \cdot m = 16 - 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow m < -2$ atau $m > 2$.
- 4 Gabungkan kedua syarat: $m > 0$ dan ($m < -2$ atau $m > 2$).

$m > 2$. Untuk nilai-nilai itu, fungsinya definit positif: grafiknya melayang seluruhnya di atas sumbu- x .

MITOS

"Semua lengkung berbentuk U adalah parabola."

MITOS

"Grafik

$$y = (x + 2)^2$$

bergeser 2 satuan ke kanan karena ada +2."

FAKTA

Tidak. Rantai yang tergantung bebas membentuk **kateneri**, dan setengah lingkaran juga bukan parabola. Parabola punya sidik jari: beda kedua tetap, atau persamaannya berbentuk kuadrat.

FAKTA

Bergeser ke

kiri

. Puncaknya di

$$x = -2$$

, karena di situlah

$$x + 2 = 0$$

.

MITOS

"Nilai maksimum fungsi adalah nilai x di puncak."

MITOS

"Kalau diteruskan, kaki parabola akhirnya tegak lurus seperti dinding."

FAKTA

Nilai maksimum adalah nilai y di puncak, yaitu y_p . Nilai x_p hanya memberi tahu **di mana** maksimum itu terjadi.

FAKTA

Parabola makin lama makin curam, tetapi **tidak pernah** tegak. Untuk setiap x selalu ada tepat satu nilai y , sejauh apa pun kamu pergi.

Cek Cepat

Titik puncak grafik $y = (x - 4)^2 + 1$ adalah...

Sumbu simetri grafik $y = 2x^2 - 12x + 7$ adalah...

Himpunan penyelesaian $x^2 - 9 \leq 0$ adalah...

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$x \leq 3$$

$$x \leq -3 \text{ atau } x \geq 3$$

$$-9 \leq x \leq 9$$

Kunci Cek Cepat: 1. B · 2. C · 3. A



Tantangan Rumah: melipat parabola dari selembar kertas

Bahan: selembar kertas (kertas kalkir atau kertas minyak lebih bagus), pensil, spidol, penggaris.

1. Letakkan kertas mendatar. Tandai titik F kira-kira 3 cm di atas tepi bawah, tepat di tengah.
2. Lipat kertas sehingga satu titik di tepi bawah menyentuh F dengan tepat. Tekan lipatannya sampai berbekas, lalu buka lagi.
3. Ulangi dengan titik-titik lain di sepanjang tepi bawah (geser sekitar 1 cm setiap kali). Lakukan 20–30 kali.
4. Perhatikan garis-garis lipatannya. Bersama-sama, mereka "menyelimuti" sebuah lengkung. Tebalkan lengkung itu dengan spidol.
5. Ulangi di kertas lain dengan F lebih jauh dari tepi bawah, misalnya 6 cm, lalu bandingkan kedua lengkung.

Pertanyaan: Lengkung apa yang muncul? Mengapa F yang lebih jauh menghasilkan lengkung yang lebih lebar? Petunjuk: setiap lipatan menyinggung lengkung itu di sebuah titik yang jaraknya ke F sama dengan jaraknya ke tepi bawah kertas. Bandingkan dengan Grafik Hidup antenna parabola di subbab 12.1.



RINGKASAN KILAT

Bab 12 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- mengenali **fungsi kuadrat** dan menggambar grafiknya, yaitu **parabola**
- membaca **titik puncak**, **sumbu simetri**, dan arah buka parabola dari bentuk puncak $y = a(x - h)^2 + k$ maupun bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$
- menyusun fungsi kuadrat dari titik puncak, akar-akar, atau tiga titik
- menyelesaikan soal **optimasi**: luas terbesar, untung terbanyak, lemparan tertinggi
- menyelesaikan **pertidaksamaan kuadrat** dengan membaca grafik



Istilah kunci

Rumus penting

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

Sumbu simetri parabola. Sumbu simetri berada di $x = -b/(2a)$: lawan dari b , dibagi dua kali a . Nilai c sama sekali tidak ikut menentukan.

$$y_p = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nilai ekstrem (tinggi puncak). Nilai terkecil (atau terbesar) sebuah fungsi kuadrat sama dengan minus diskriminan dibagi empat kali a .

$$U = (h - m)(1800 - h)$$

Untung harian penjual tahu bulat. Untung = untung per biji $\times$ banyak yang terjual. Harga naik, untung per biji naik, tetapi pembeli berkurang. Harga terbaik ada di puncak parabola.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Pada bentuk puncak, tanda h terbalik: $(x + 5)^2$ berarti puncak di $x = -5$, bukan $x = 5$.
- Rumus sumbu simetri adalah $x_p = -\frac{b}{2a}$: ada tanda minus dan angka 2 di penyebut.
- Jangan mengakarkan pertidaksamaan begitu saja: $x^2 > 9$ tidak berarti $x > 3$ saja.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=12

🧩 Teka-teki untuk Bab 13

Ancil membuat dua mesin ajaib. Mesin **K** mengkuadratkan angka yang masuk, dan mesin **T** menambahkan 3. Angka 2 dimasukkan ke mesin K lalu ke mesin T: keluar 7. Kalau urutannya dibalik, T dulu lalu K, keluar 25! Ternyata "K lalu T" menghasilkan $y = x^2 + 3$ (parabola naik 3), sedangkan "T lalu K" menghasilkan $y = (x + 3)^2$ (parabola bergeser ke kiri 3). Urutan mesin ternyata penting. Bisakah kamu merancang mesin yang menerima 25 dari "T lalu K" dan mengembalikannya menjadi 2?

▼ Intip petunjuk

Mesin pembalik harus membatalkan setiap langkah dengan urutan terbalik, seperti melepas sepatu dulu sebelum kaus kaki. Dari 25, tarik akarnya (5), lalu kurangi 3 (2). Tetapi hati-hati: $(-5)^2$ juga 25, jadi angka -8 pun keluar sebagai 25 dari mesin "T lalu K"! Di Bab 13 kamu akan belajar **komposisi fungsi** (mesin bersambung) dan **fungsi invers** (mesin pembalik), termasuk kapan mesin pembalik bisa dibuat.

13 Fungsi: Mesin yang Bisa Disambung, Dibalik, dan Digeser

Apa jadinya kalau dua mesin fungsi disambung? Bisakah sebuah mesin dijalankan mundur? Dan mengapa grafik $y = (x - 3)^2$ justru bergeser ke kanan, padahal tandanya minus? Bab ini membongkar rahasia mesin-mesin itu.

Setelah bab ini, kamu bisa

- menentukan **domain**, **kodomain**, dan **range** sebuah fungsi, termasuk membacanya dari grafik;
- menyusun dan menghitung **fungsi komposisi** $f \circ g$, serta menjelaskan mengapa urutannya penting;
- mencari **fungsi invers** dan memahami grafiknya sebagai **cermin** terhadap garis $y = x$;
- menggambar **transformasi grafik** $y = a f(b(x - c)) + d$: geser, regang, mampat, dan cermin;
- mengenali **asimtot** fungsi rasional sederhana, serta membaca fungsi **nilai mutlak** dan fungsi **sepotong-sepotong**.

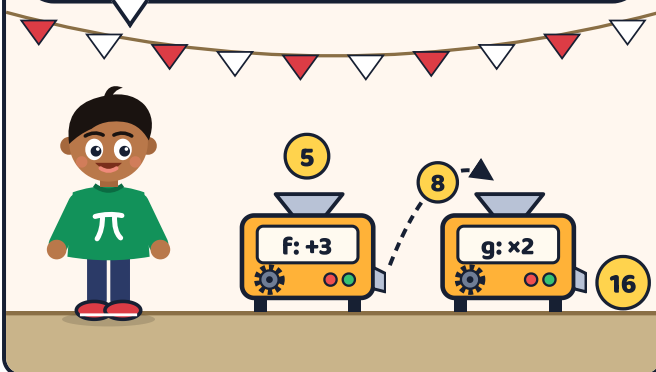
POS MESIN AJAIB KAK LINTANG

KOMIK • 4 PANEL

Lomba 17-an: pos "Mesin Ajaib"

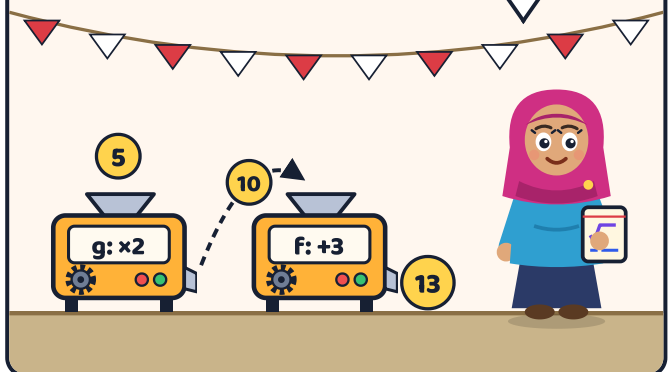
DIMAS

Kak, angka 5 kumasukkan ke mesin f, lalu hasilnya ke mesin g. Keluarnya 16!



AYU

Kalau urutannya ditukar? Mesin g dulu: $5 \times 2 = 10$. Lalu mesin f: $10 + 3 = 13$. Hasilnya beda!



KAK LINTANG

Tantangan terakhir: mesin f lalu g mengeluarkan 30. Angka berapa yang tadi dimasukkan?

DIMAS

Waduh, berarti mesinnya harus dijalankan mundur?!



Ancil melompat dari balik tumpukan hadiah...

ANCIL

Mundur dari belakang: batalkan g dulu (bagi 2), baru f (kurangi 3). Seperti melepas sepatu sebelum kaus kaki!

DIMAS

$30 : 2 = 15$, lalu $15 - 3 = 12$. Cek: $(12 + 3) \times 2 = 30$. Cocok!



$30 \rightarrow \div 2 \rightarrow 15$
 $15 \rightarrow -3 \rightarrow 12$



Tebak Dulu!

Sebuah mesin bertuliskan "kuadratkan". Mesin itu mengeluarkan angka 49. Angka berapa yang tadi dimasukkan?

Pasti 7, karena $7 \times 7 = 49$.

Bisa 7, bisa juga -7 . Mesin mundurnya tidak bisa memastikan.

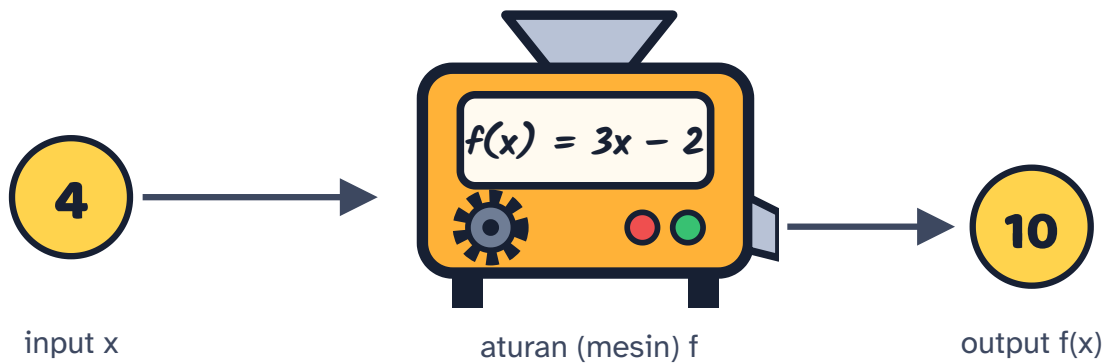
24,5, karena 49 dibagi 2.

49, karena mengkuadratkan tidak mengubah apa-apa.

Jawabannya: bisa 7, bisa -7 . Sebab $7^2 = 49$ dan $(-7)^2 = 49$ juga. Dua input yang berbeda menghasilkan output yang sama, sehingga mesin mundurnya bingung harus memilih yang mana. Di subbab 13.3 kamu akan melihat bahwa hanya mesin yang "satu-satu" yang bisa dibalik dengan sempurna, dan bagaimana cara mengakali mesin kuadrat ini.

13.1 Mesin fungsi: domain, kodomain, dan range

Bayangkan mesin minuman otomatis di stasiun. Kamu menekan sebuah tombol (input), lalu keluar satu minuman (output). Mesin yang baik selalu **tegas**: tombol yang sama selalu memberi minuman yang sama, dan tidak pernah mengeluarkan dua minuman berbeda sekaligus. Dalam matematika, mesin seperti itu disebut **fungsi**.



Mesin $f(x) = 3x - 2$: masukkan 4, mesin mengalikan 3 lalu mengurangi 2, keluarlah $f(4) = 10$.

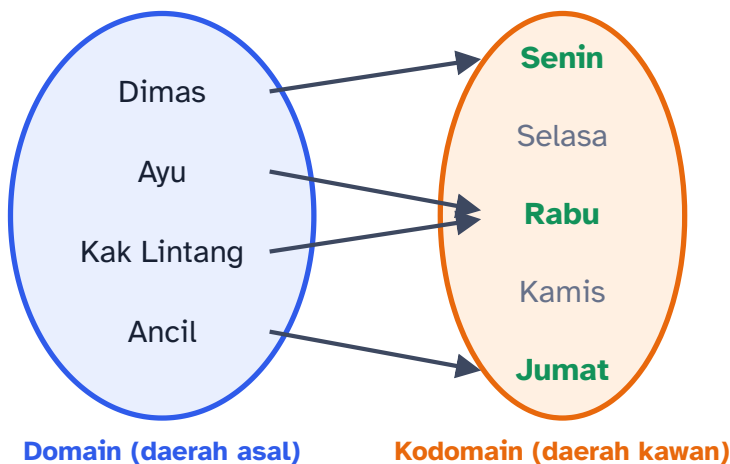


DEFINISI

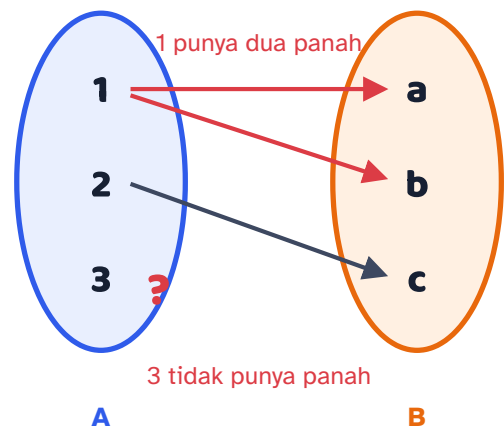
Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B , ditulis $f : A \rightarrow B$, adalah aturan yang memasangkan **setiap** anggota A dengan **tepat satu** anggota B .

- A disebut **domain** (daerah asal): semua input yang boleh masuk.
- B disebut **kodomain** (daerah kawan): tempat output boleh mendarat.
- Himpunan semua output yang **benar-benar muncul** disebut **range** (daerah hasil). Range selalu bagian dari kodomain.

Fungsi ✓



Bukan fungsi ✗



Kiri: setiap anggota domain punya tepat satu panah, jadi ini fungsi. Ayu dan Kak Lintang boleh berbagi hari Rabu. Range-nya hanya Senin, Rabu, dan Jumat (hijau); Selasa dan Kamis ada di kodomain, tetapi tidak pernah dipakai. Kanan: bukan fungsi.

Bahasa sederhana • Gampangnya: fungsi itu seperti daftar piket kelas. **Setiap** murid harus mendapat **tepat satu** hari piket. Dua murid boleh piket di hari yang sama, tetapi satu murid tidak boleh mendapat dua hari, dan tidak boleh ada murid yang terlewat.

Kalau fungsi hanya diberikan sebagai rumus, domainnya adalah semua bilangan real yang **boleh** dimasukkan ke rumus itu. Ada dua "penjahat" yang harus dihindari: **pembagian dengan nol** dan **akar kuadrat dari bilangan negatif**.

Fungsi	Yang harus dihindari	Domain
$f(x) = 2x + 1$	tidak ada	semua bilangan real, $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x - 2}$	penyebut nol	$x \neq 2$
$f(x) = \sqrt{x - 3}$	akar bilangan negatif	$x \geq 3$
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	akar bilangan negatif	$-2 \leq x \leq 2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$	keduanya sekaligus	$x > -1$



TRIK KAK LINTANG

Saat mencari domain, jadilah satpam yang mencari dua penjahat: **penyebut nol** dan **akar genap dari bilangan negatif**. Kalau keduanya tidak ada di rumus, domainnya semua bilangan real. Selesai!

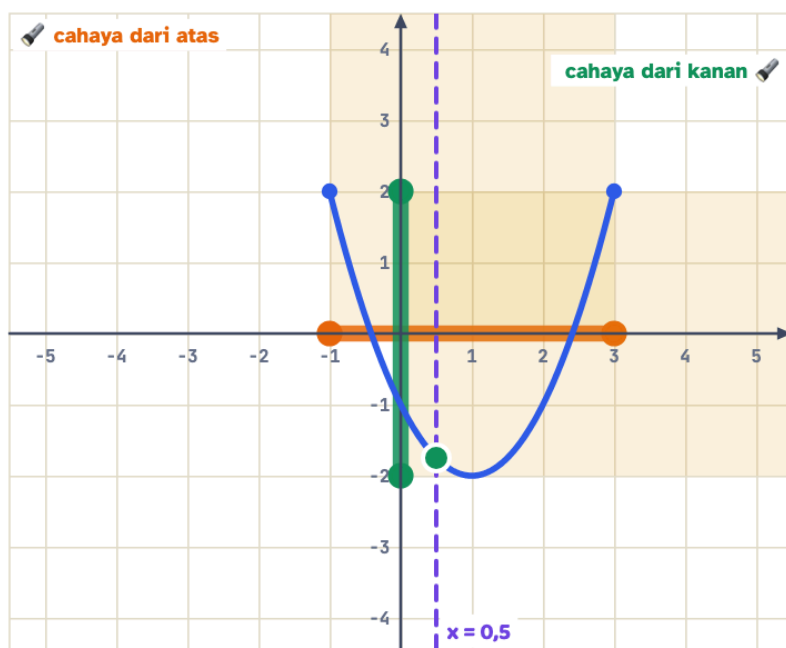


AWAS JEBAKAN

Domain $\sqrt{x - 3}$ adalah $x \geq 3$, bukan $x > 3$. Angka 3 boleh masuk karena $\sqrt{0} = 0$. Tetapi pada $\frac{1}{\sqrt{x - 3}}$, angka 3 terlarang karena penyebutnya menjadi nol.

Range paling mudah dibaca dari grafik. Bayangkan senter menyinari grafik dari atas: bayangannya di sumbu-x adalah domain. Senter dari samping membuat bayangan di sumbu-y: itulah range. Grafik juga bisa diperiksa dengan **uji garis tegak**: sebuah kurva adalah grafik fungsi jika **setiap** garis tegak memotongnya paling banyak satu kali.

LAB MINI
Senter domain & range: siapa yang lolos uji garis?

 LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13


Kurva

$$y = (x - 1)^2 - 2$$

 untuk $-1 \leq x \leq 3$

Domain (bayangan di sumbu-x)

$$-1 \leq x \leq 3$$

Range (bayangan di sumbu-y)

$$-2 \leq y \leq 2$$

Uji garis tegak

memotong 1 titik

✓ tepat 1 titik

🖱️ seret di grafik

Titik potong

1

Kesimpulan

 ✓ **tepat 1 titik**

Pilih kurva, lalu seret garis ungu di grafik. Bayangan oranye adalah domain, bayangan hijau adalah range. Kurva mana yang gagal uji garis tegak? Ganti ke **garis mendatar**: kurva mana yang memotong dua kali, sehingga tidak punya invers?

CONTOH
Domain dan range fungsi akar

Tentukan domain dan range $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$, lalu hitung $f(11)$.

- 1 Isi akar tidak boleh negatif: $x - 2 \geq 0$, jadi $x \geq 2$.
- 2 Nilai $\sqrt{x-2}$ paling kecil 0 (saat $x = 2$) dan bisa sebesar apa pun. Jadi $f(x)$ paling kecil $0 + 1 = 1$: range-nya $y \geq 1$.
- 3 $f(11) = \sqrt{9} + 1 = 3 + 1 = 4$.

Domain $x \geq 2$, range $y \geq 1$, dan $f(11) = 4$. Grafiknya dimulai dari titik (2, 1) lalu naik perlahan ke kanan.



TAMU DARI MASA LALU

Kata *functio* mulai dipakai Gottfried Wilhelm Leibniz sekitar tahun 1673 untuk besaran yang "bekerja" pada sebuah kurva. Sekitar tahun 1734, Leonhard Euler memperkenalkan lambang $f(x)$ yang kita pakai sampai sekarang. Definisi modern, yaitu "setiap input dipasangkan dengan tepat satu output, apa pun aturannya", dirumuskan Peter Gustav Lejeune Dirichlet sekitar tahun 1837. Lambang f^{-1} untuk invers dipopulerkan John Herschel pada 1813. Ia sudah mengingatkan bahwa -1 itu bukan pangkat, tetapi sampai hari ini masih banyak murid yang tertukar!

13.2 Komposisi: mesin bersambung



Tebak Dulu!

Saat Harbolnas, sebuah toko daring memberi diskon 20%, lalu masih ada diskon tambahan 10% dari harga setelah diskon pertama. Berapa persen diskon totalnya?

30%, tinggal dijumlahkan.

28%.

25%.

Tergantung harga barangnya.

Jawabannya: 28%. Diskon 20% artinya harga dikali 0,8; diskon 10% artinya dikali 0,9. Dua mesin bersambung: $0,8 \times 0,9 = 0,72$. Kamu membayar 72% harga awal, jadi diskon totalnya 28%, berapa pun harga barangnya. Diskon kedua dihitung dari harga yang sudah turun, bukan dari harga awal.

Di komik, angka 5 masuk mesin f (tambah 3), lalu hasilnya, 8, masuk mesin g (kali 2). Dua mesin yang disambung seperti ini membentuk satu mesin baru yang disebut **fungsi komposisi**.



DEFINISI: FUNGSI KOMPOSISI

Komposisi f dan g , ditulis $f \circ g$ (dibaca " f bundaran g "), adalah fungsi

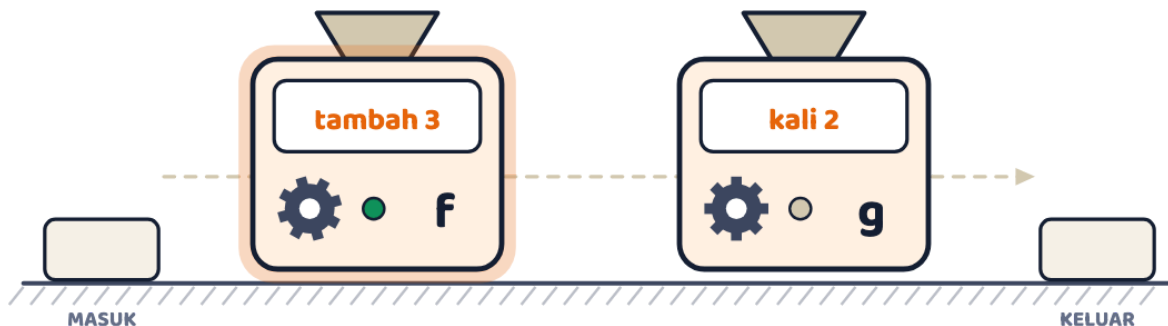
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Mesin g bekerja **lebih dulu**, lalu outputnya menjadi input mesin f . Agar komposisi terdefinisi, output g harus termasuk domain f .

Bahasa sederhana • Cara membacanya: kerjakan dari yang paling dekat dengan x . Pada $f(g(x))$, mesin g menempel pada x , jadi g dulu, baru f . Mirip berpakaian: kaus dalam dulu, baru kemeja.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x + 6$$

Mesin f bekerja dulu. Kalau ditukar: $f(g(x)) = 2x + 3$



$$5 \rightarrow (f: \text{tambah } 3) \rightarrow 8 \rightarrow (g: \text{kali } 2) \rightarrow 16$$

Urutan ditukar memberi 13, bukan 16. Urutan itu penting!

Setelah mesin pertama
8

Hasil akhir
16

Kalau urutan ditukar
13

Tekan ► **Jalankan** dan ikuti bola angka melewati dua mesin. Klik sebuah mesin untuk mengganti tugasnya. Coba **Tukar urutan**: kapan hasilnya berubah? Lalu nyalakan **Jalankan mundur**. Apa yang terjadi kalau salah satu mesin adalah "kuadratkan"?



AWAS JEBAKAN

$(f \circ g)(x)$ dikerjakan dari kanan ke kiri: g dulu, baru f . Untuk $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x$: $(f \circ g)(5) = f(10) = 13$, sedangkan $(g \circ f)(5) = g(8) = 16$. Lambangnya mirip, hasilnya berbeda.



SIFAT-SIFAT KOMPOSISI

- Umumnya **tidak komutatif**: $f \circ g \neq g \circ f$.
- **Asosiatif**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, jadi rantai tiga mesin cukup ditulis $f \circ g \circ h$.
- Fungsi identitas $I(x) = x$ adalah "mesin diam": $f \circ I = I \circ f = f$.

▼ Mengapa komposisi asosiatif?

Hitung kedua ruas untuk sembarang x :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))), \quad (f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))).$$

Keduanya sama: h dulu, lalu g , lalu f . Tanda kurung hanya mengelompokkan mesin, tidak mengubah urutan kerjanya.

Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 3$. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$, lalu bandingkan nilainya di $x = 2$.

1 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 3) + 1 = 2x^2 - 5.$

2 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 3 = 4x^2 + 4x + 1 - 3 = 4x^2 + 4x - 2.$

3 Di $x = 2$: $(f \circ g)(2) = 8 - 5 = 3$ (cek: $g(2) = 1$, $f(1) = 3$) dan $(g \circ f)(2) = 16 + 8 - 2 = 22$ (cek: $f(2) = 5$, $g(5) = 22$).

$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 5$ dan $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x - 2$. Dua mesin yang sama, dua rumus yang sangat berbeda!

Komposisi juga muncul saat belanja. Diskon persen adalah mesin "kali", sedangkan voucher potongan adalah mesin "kurangi". Toko boleh memilih urutannya, dan hasilnya tidak sama.

$$H = (V \circ D)(P) = P \left(1 - \frac{d}{100}\right) - v$$

Mesin D memotong d persen, lalu mesin V memotong v rupiah. Kalau urutannya ditukar, harga akhirnya berubah!

P Harga awal Rp d Diskon % v Voucher potongan Rp

H Harga akhir (diskon dulu) Rp

HARGA AKHIR (DISKON DULU)

160.000

Rp

untuk pembeli: diskon persen dulu lebih hemat

Diskon dulu: **200.000** → **180.000** → **160.000**. Voucher dulu: **200.000** → **180.000** → **162.000**. Selisihnya **2.000** rupiah, tepat **10%** dari nilai voucher, berapa pun harga awalnya!

Cek satuan: semua harga dalam rupiah, d dalam persen.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-KOMPOSISI-DISKON



ADU CEPAT

Mesin bersambung kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kerjakan dari dalam: hitung $g(k)$ dulu, lalu masukkan hasilnya ke f .

Diketahui $f(x) = 2x + 3$ dan $(g \circ f)(x) = 4x + 5$. Tentukan $g(x)$.

1 $(g \circ f)(x) = g(2x + 3) = 4x + 5$. Beri nama baru pada input mesin g : misalkan $u = 2x + 3$, sehingga $x = \frac{u-3}{2}$.

2 Substitusikan: $g(u) = 4 \cdot \frac{u-3}{2} + 5 = 2u - 6 + 5 = 2u - 1$.

3 Ganti nama u kembali menjadi x : $g(x) = 2x - 1$. Cek: $g(f(x)) = 2(2x + 3) - 1 = 4x + 5$. ✓

$g(x) = 2x - 1$. **Triknya:** beri nama baru pada isi kurung, lalu nyatakan x dengan nama baru itu.

13.3 Fungsi invers: mesin mundur

Termometer di Indonesia memakai derajat Celsius, sedangkan ramalan cuaca di Amerika Serikat memakai Fahrenheit. Mesin $F = 1,8C + 32$ mengubah Celsius menjadi Fahrenheit. Mesin yang mengubah Fahrenheit kembali menjadi Celsius disebut **fungsi invers**.



DEFINISI: FUNGSI INVERS

Jika f memasangkan x dengan y , maka fungsi invers f^{-1} memasangkan y kembali dengan x :

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

Akibatnya $f^{-1}(f(x)) = x$ dan $f(f^{-1}(y)) = y$: mesin mundur membatalkan kerja mesin maju.



SYARAT PUNYA INVERS

Fungsi f (dari domainnya ke range-nya) punya invers jika dan hanya jika f **satu-satu** (injektif): input yang berbeda selalu menghasilkan output yang berbeda. Pada grafik, ujiannya adalah **uji garis mendatar**: setiap garis mendatar memotong grafik paling banyak satu kali.

Lanjut • Dalam bahasa yang lebih resmi: fungsi $f : A \rightarrow B$ yang satu-satu sekaligus *pada* (surjektif, yaitu range sama dengan kodomain) disebut **bijektif** atau korespondensi satu-satu. Tepat fungsi bijektif inilah yang punya invers $f^{-1} : B \rightarrow A$.



RESEP MENCARI INVERS

1. Tulis $y = f(x)$.
2. Nyatakan x dengan y (selesaikan persamaannya untuk x).
3. Tukar nama variabel: hasilnya adalah $f^{-1}(x)$.
4. Cek: $f(f^{-1}(x))$ harus kembali menjadi x .

CONTOH Mesin mundur termometer

Mesin $f(C) = 1,8C + 32$ mengubah $^{\circ}\text{C}$ menjadi $^{\circ}\text{F}$. Tentukan mesin mundurnya, lalu ubah 95°F menjadi $^{\circ}\text{C}$.

1 Tulis $F = 1,8C + 32$. Kurangi 32: $F - 32 = 1,8C$. Bagi 1,8: $C = \frac{F - 32}{1,8}$.

2 Jadi $f^{-1}(F) = \frac{F - 32}{1,8}$.

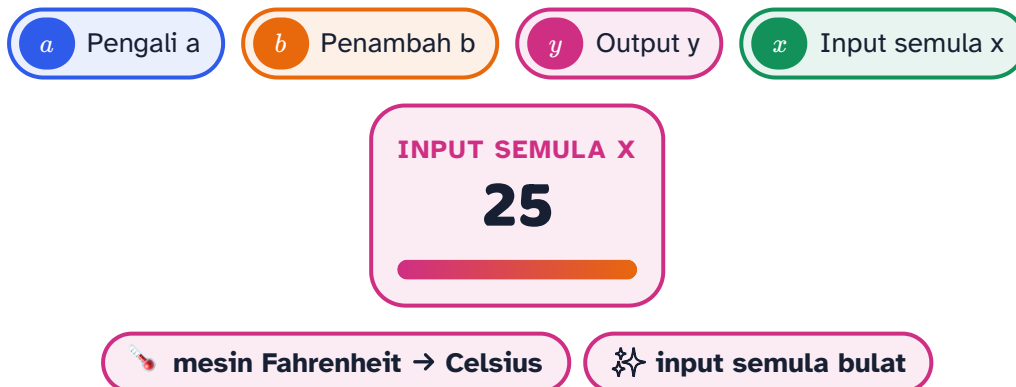
3 $f^{-1}(95) = \frac{95 - 32}{1,8} = \frac{63}{1,8} = 35$.

$95^{\circ}\text{F} = 35^{\circ}\text{C}$, siang yang terik di Surabaya. Perhatikan: mesin maju "kali 1,8 lalu tambah 32", mesin mundur "kurangi 32 lalu bagi 1,8". Urutannya terbalik!

RUMUS HIDUP Mesin mundur fungsi linear

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

Mesin maju: kali a , lalu tambah b . Mesin mundur: kurangi b dulu, baru bagi a . Langkah terakhir dibatalkan paling awal!

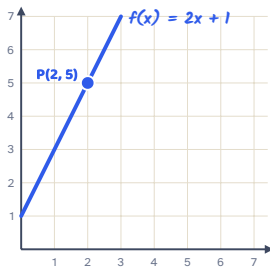


Mesin maju $f(x) = 1,8 \cdot x + 32$. Mundur: $(77 - 32) : 1,8 = 25$. Cek: $f(25) = 77$, kembali ke 77. Dengan $a = 1,8$ dan $b = 32$, ini mesin $^{\circ}\text{F} \rightarrow ^{\circ}\text{C}$.

Cek satuan: x bersatuan sama dengan input mesin maju (mis. $^{\circ}\text{C}$), y bersatuan sama dengan outputnya (mis. $^{\circ}\text{F}$).

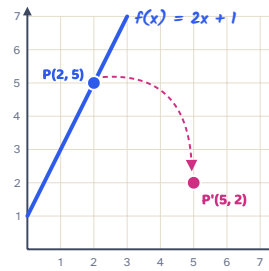
RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-INVERS-LINEAR

Bagaimana dengan grafiknya? Kalau titik (a, b) ada di grafik f , maka $f^{-1}(b) = a$, jadi titik (b, a) ada di grafik f^{-1} . Menukar koordinat ternyata sama dengan **bercermin** pada garis $y = x$. Lihat animasinya:



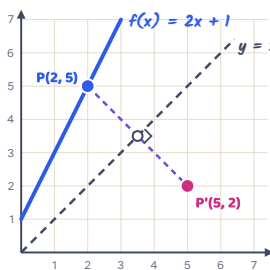
Grafik $f(x) = 2x + 1$.
Titik $P(2, 5)$ ada di grafik f ,
karena $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Langkah 1. Gambar grafik $f(x) = 2x + 1$. Titik $P(2, 5)$ ada di grafik karena $f(2) = 5$.



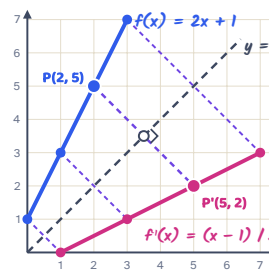
Mesin mundur: $f^{-1}(5) = 2$.
Jadi titik $P'(5, 2)$ ada di grafik f^{-1} . Koordinatnya tinggal ditukar!

Langkah 2. Mesin mundur membalik arah: $f^{-1}(5) = 2$. Jadi $P'(5, 2)$ ada di grafik f^{-1} . Koordinat x dan y cukup ditukar.



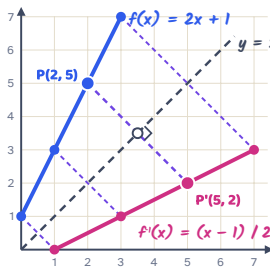
Gambar garis $y = x$.
Ruas PP' tegak lurus garis itu
(gradiennya -1), dan titik
tengahnya $(3, 5; 3, 5)$ di $y = x$.
 P' = bayangan cermin P !

Langkah 3. Ruas PP' bergradien $\frac{2-5}{5-2} = -1$, tegak lurus garis $y = x$ yang bergradien 1 . Titik tengahnya $(3, 5; 3, 5)$ tepat di $y = x$. Itulah ciri bayangan cermin.



Lakukan untuk setiap titik:
 $(0, 1) \rightarrow (1, 0)$
 $(1, 3) \rightarrow (3, 1)$
 $(3, 7) \rightarrow (7, 3)$
Semua bayangan membentuk f^{-1} .

Langkah 4. Ulangi untuk titik lain: $(0, 1) \rightarrow (1, 0)$, $(1, 3) \rightarrow (3, 1)$, $(3, 7) \rightarrow (7, 3)$. Semua bayangan berjejer membentuk grafik f^{-1} .



Kesimpulan:
grafik f^{-1} adalah cermin
grafik f terhadap garis $y = x$.

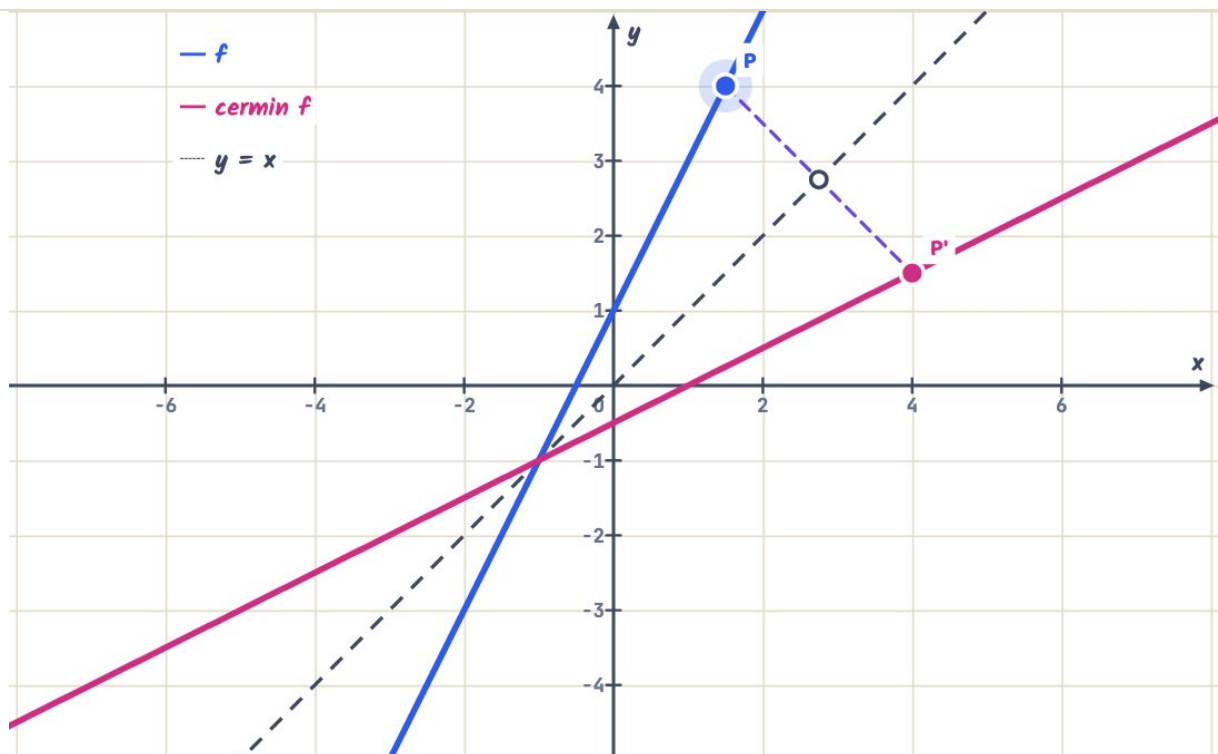
Lipat kertas di garis $y = x$:
grafik f tepat menutupi f^{-1} .
 $f^{-1}(x) = (x - 1) / 2$

Langkah 5. Kesimpulan: grafik f^{-1} adalah cermin grafik f terhadap $y = x$. Di sini $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Lipat kertasmu di garis $y = x$ dan kedua grafik akan saling menutupi!

$$(a, b) \text{ di grafik } f \iff (b, a) \text{ di grafik } f^{-1}$$

$$P(1,5; 4) \longleftrightarrow P'(4; 1,5)$$

Slider pertama memilih f : 1 = garis $f(x) = mx + 1$, 2 = kubik $x^3/4$, 3 = kuadrat $x^2 - 2$ untuk $x \geq 0$, 4 = kuadrat $x^2 - 2$ tanpa batasan.



$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1) : 2$$

Titik P di f

(1,5; 4)

Titik tengah PP'

(2,75; 2,75)

Gradien PP'

-1

Seret titik biru P di sepanjang grafik f . Titik tengah PP' selalu berada di garis $y = x$, dan gradien PP' selalu -1 . Pilih $f = 4$: cerminnya ternyata parabola tidur yang bukan fungsi. Lalu pilih $f = 3$ untuk melihat bagaimana membatasi domain penyelamatkannya.

Ingat mesin kuadrat di awal bab? Grafik $f(x) = x^2$ gagal uji garis mendatar: garis $y = 49$ memotongnya di $x = 7$ dan $x = -7$. Solusinya adalah **membatasi domain**. Jika $f(x) = x^2$ hanya untuk $x \geq 0$, mesinnya menjadi satu-satu dan $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Itulah sebabnya tombol $\sqrt{}$ di kalkulator selalu memberi hasil yang tidak negatif.



AWAS JEBAKAN

$f^{-1}(x)$ bukan $\frac{1}{f(x)}$. Angka -1 di situ hanya lambang "mesin mundur", bukan pangkat. Untuk $f(x) = 2x$: $f^{-1}(8) = 4$, sedangkan $\frac{1}{f(8)} = \frac{1}{16}$. Jauh berbeda!



INVERS DARI KOMPOSISI

Jika f dan g sama-sama punya invers, maka

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Urutan mesinnya terbalik: yang terakhir bekerja, pertama dibatalkan.

▼ Bukti singkat

Pakai sifat asosiatif dan $f^{-1} \circ f = I$:

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ I \circ g = g^{-1} \circ g = I.$$

Mesin $g^{-1} \circ f^{-1}$ membatalkan $f \circ g$ dengan sempurna, jadi dialah inversnya. ■



TRIK KAK LINTANG

Pagi hari kamu memakai **kaus kaki dulu, baru sepatu**. Sore hari, untuk melepasnya, kamu harus membalik urutannya: **sepatu dulu, baru kaus kaki**. Begitulah $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Di komik, mesin "tambah 3 lalu kali 2" dibatalkan dengan "bagi 2 lalu kurangi 3".



ADU CEPAT

Mesin mundur kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-13

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Kurangi b dulu, lalu bagi a. Cek dengan memasukkan jawabanmu ke f.

Tentukan invers $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

- 1 Tulis $y = \frac{2x+1}{x-3}$, lalu kalikan silang: $y(x-3) = 2x+1$, yaitu $yx - 3y = 2x + 1$.
- 2 Kumpulkan suku ber- x di kiri: $yx - 2x = 3y + 1$, jadi $x(y-2) = 3y+1$ dan $x = \frac{3y+1}{y-2}$.
- 3 Tukar nama: $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $x \neq 2$. Cek: $f(4) = \frac{9}{1} = 9$ dan $f^{-1}(9) = \frac{28}{7} = 4$. ✓

$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Perhatikan: domain f^{-1} ($x \neq 2$) adalah range f , karena $f(x)$ tidak pernah sama dengan 2.

Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 1$ dibatasi pada $x \geq 2$. Tentukan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.

- 1 Lengkapi kuadrat: $f(x) = (x-2)^2 - 3$. Puncaknya $(2, -3)$, jadi pada $x \geq 2$ grafiknya selalu naik: satu-satu.
- 2 $y = (x-2)^2 - 3 \Rightarrow (x-2)^2 = y+3 \Rightarrow x-2 = \sqrt{y+3}$. Akar positif dipilih karena $x-2 \geq 0$.
- 3 $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+3}$, dengan domain $x \geq -3$ (range f). Cek: $f(5) = 25 - 20 + 1 = 6$ dan $f^{-1}(6) = 2 + 3 = 5$. ✓

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+3}$, $x \geq -3$. Tanpa batasan $x \geq 2$, mesin mundurnya akan bingung memilih $+\sqrt{}$ atau $-\sqrt{}$.



MATEMATIKA NUSANTARA

Di kalender Jawa, setiap hari punya dua nama: hari biasa (7 nama) dan *pasaran* (Legi, Pahing, Pon, Wage, Kliwon). Pasangan keduanya disebut **weton**, dan polanya berulang setiap 35 hari, karena 35 adalah KPK dari 7 dan 5. Fungsi "hari ke- n dalam siklus $\rightarrow$ weton" ternyata **satu-satu**: tidak ada dua hari dalam satu siklus 35 hari yang wetonnya sama, jadi fungsi ini punya invers. Dari weton, kamu bisa menebak hari ke berapa dalam siklus! Lain halnya dengan *neptu* (nilai hari + nilai pasaran): Minggu Pahing ($5 + 9$) dan Rabu Pon ($7 + 7$) sama-sama bernilai 14. Fungsi "weton $\rightarrow$ neptu" tidak satu-satu, jadi tidak punya invers.



RUMUS KILAT INVERS FUNGSI PECAHAN LINEAR

Untuk $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ dengan $ad-bc \neq 0$, inversnya selalu

$$f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}.$$

Mudah diingat: **tukar posisi a dan d , lalu ubah tanda b dan c .** (Polanya sama persis dengan invers matriks 2×2 di Bab 36!) Cek dengan contoh tadi: $\frac{2x+1}{x-3}$ memberi $\frac{-3x-1}{-x+2} = \frac{3x+1}{x-2}$. ✓
Kejutan kecil: jika $d = -a$, rumus itu menghasilkan fungsi semula, jadi $f^{-1} = f$. Contohnya $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$: coba hitung $f(f(3))$. Fungsi yang menjadi invers dirinya sendiri disebut *involusi*, dan grafiknya simetris terhadap $y = x$.

13.4 Transformasi grafik: geser, regang, dan cermin



Tebak Dulu!

Grafik $y = x^2$ berbentuk parabola dengan puncak di $(0, 0)$. Di manakah puncak grafik $y = (x-3)^2$?

Di $(-3, 0)$, karena minus berarti ke kiri.

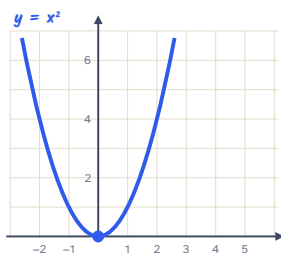
Di $(3, 0)$: grafiknya bergeser ke kanan.

Di $(0, -3)$: grafiknya turun.

Di $(0, 9)$: grafiknya naik 9.

Jawabannya: $(3, 0)$. Nilai terkecil $(x-3)^2$ adalah 0, dan itu terjadi saat $x = 3$. Mesin baru ini butuh input 3 lebih besar untuk menghasilkan output yang sama, sehingga grafiknya bergeser 3 satuan ke **kanan**. Lihat animasi di bawah!

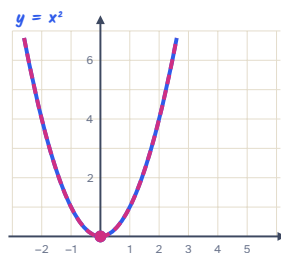
Hampir semua kurva di buku ini dapat dibuat dari beberapa **fungsi induk** sederhana, yaitu x^2 , $|x|$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, dan x^3 , ditambah empat jenis gerakan: **geser**, **regang**, **mampat**, dan **cermin**. Kak Lintang menyebutnya "senam grafik".



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25

Fungsi induk $f(x) = x^2$.
 Nilai terkecilnya 0, saat $x = 0$.
 Puncak grafik di $(0, 0)$.

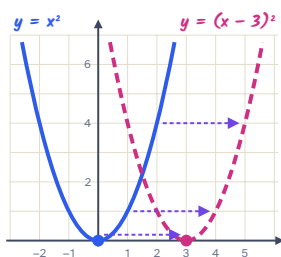
Langkah 1. Fungsi induk $f(x) = x^2$. Nilai terkecilnya 0, dicapai saat $x = 0$, jadi puncaknya di $(0, 0)$.



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
$(x - 3)^2$	9	4	1	0	1	4

Mesin baru $g(x) = (x - 3)^2$.
 Nilai 0 baru muncul saat $x = 3$.
 $g(3) = f(0)$, $g(4) = f(1)$, $g(5) = f(2)$:
 nilainya datang 3 langkah telat.

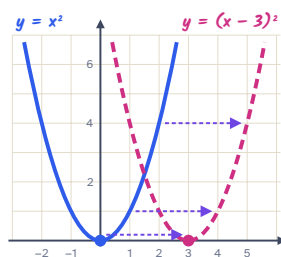
Langkah 2. Mesin baru $g(x) = (x - 3)^2$ baru menghasilkan 0 saat $x = 3$. Tabel menunjukkan $g(3) = f(0)$, $g(4) = f(1)$, $g(5) = f(2)$: setiap nilai muncul 3 langkah lebih lambat.



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
$(x - 3)^2$	9	4	1	0	1	4

Akibatnya seluruh grafik
 bergeser 3 satuan ke KANAN,
 padahal di rumusnya tertulis
 tanda minus!

Langkah 3. Karena setiap nilai terlambat 3 langkah, seluruh grafik bergeser 3 satuan ke **kanan**, padahal rumusnya memakai tanda minus.



x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
$(x - 3)^2$	9	4	1	0	1	4

$f(x - c)$: geser kanan c
 $f(x + c)$: geser kiri c

Isi kurung bekerja terbalik:
 input harus "mengejar" c dulu.

Langkah 4. Aturannya: $f(x - c)$ menggeser grafik c satuan ke kanan, $f(x + c)$ menggeser c satuan ke kiri. Yang di dalam kurung bekerja "terbalik".

Rumus baru

Efek pada grafik $y = f(x)$

Titik (x, y) pindah ke

$$y = f(x) + d$$

geser tegak d satuan (ke atas jika $d > 0$)

$$(x, y + d)$$

$$y = f(x - c)$$

geser mendatar c satuan (ke kanan jika $c > 0$)

$$(x + c, y)$$

$$y = a f(x)$$

regang tegak dengan faktor a

$$(x, ay)$$

$$y = f(bx)$$

mampat mendatar dengan faktor $\frac{1}{b}$

$$\left(\frac{x}{b}, y\right)$$

$$y = -f(x)$$

cermin terhadap sumbu-x

$$(x, -y)$$

$$y = f(-x)$$

cermin terhadap sumbu-y

$$(-x, y)$$

Bahasa sederhana • Versi singkatnya: angka yang ditulis **di luar** kurung mengubah grafik ke atas-bawah, persis seperti yang tertulis. Angka **di dalam** kurung mengubah grafik ke kiri-kanan, tetapi kebalikannya.



BENTUK UMUM TRANSFORMASI

Grafik $y = a f(b(x - c)) + d$ diperoleh dari grafik $y = f(x)$, dan setiap titik (x, y) pada grafik f pindah ke

$$\left(\frac{x}{b} + c, ay + d\right).$$

a dan d bekerja tegak (di luar kurung), b dan c bekerja mendatar (di dalam kurung). Jika $a < 0$ grafik juga dicerminkan atas-bawah; jika $b < 0$ grafik juga dicerminkan kiri-kanan.

▼ Mengapa titiknya pindah ke sana?

Misalkan (x_0, y_0) ada di grafik f , jadi $y_0 = f(x_0)$. Ambil $X = \frac{x_0}{b} + c$. Maka $b(X - c) = x_0$, sehingga

$$a f(b(X - c)) + d = a f(x_0) + d = a y_0 + d.$$

Jadi titik $\left(\frac{x_0}{b} + c, a y_0 + d\right)$ ada di grafik baru. Perhatikan urutannya: x_0 **dibagi** b lalu **ditambah** c , kebalikan dari "kurangi c lalu kali b " yang tertulis di rumus. Itulah sebabnya isi kurung bekerja terbalik!



TRIK KAK LINTANG

Ingat semboyan senam grafik: **"Di luar kurung: jujur dan tegak. Di dalam kurung: terbalik dan mendatar."** Pada $f(x) + 2$ grafik naik 2 (jujur). Pada $f(x + 2)$ grafik ke *kiri* 2 (terbalik). Pada $3f(x)$ grafik meregang 3 kali lebih tinggi (jujur). Pada $f(3x)$ grafik *menyempit* menjadi sepertiga lebarnya (terbalik).

$$y = a f(b(x - c)) + d, \quad f(u) = u^2$$

Ikuti x melewati lima mesin kecil: kurangi c , kali b , kuadratkan, kali a , lalu tambah d .
Yang di dalam kurung bekerja lebih dulu.



$x = 3 \rightarrow$ kurangi c : **2** $\rightarrow$ kali b : **2** $\rightarrow$ kuadratkan: **4** $\rightarrow$ kali a : **8** $\rightarrow$ tambah d : **4**. Puncak parabola ini ada di **(1; -4)**.

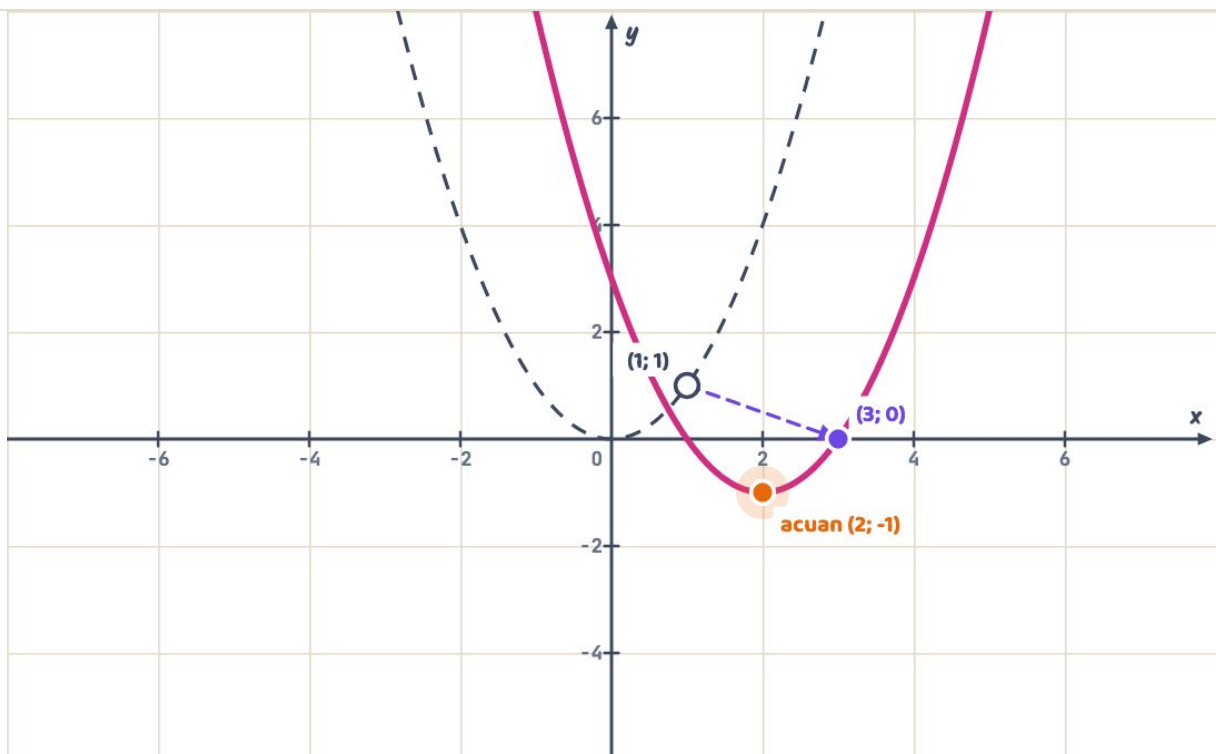
Cek satuan: semua besaran tanpa satuan (bilangan murni).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TRANSFORMASI-FUNGSI](https://aurumgen.my.id/mathpedia#rm-transformasi-fungsi)

$$y = a f(b(x - c)) + d$$

$$y = 1 f(1(x - 2)) - 1$$

Slider pertama memilih fungsi induk: 1 = x^2 , 2 = $|x|$, 3 = $\sqrt{x}$, 4 = $1/x$, 5 = x^3 . Garis putus-putus = fungsi induk, garis tebal = hasil transformasi.



$$y = 1 \cdot [1(x - 2)]^2 - 1$$

→ geser kanan 2

↓ geser bawah 1

Fungsi induk

$$y = x^2$$

Titik (1; 1) pindah ke

(3; 0)

Seret titik oranye "acuan" untuk menggeser grafik. Titik ungu adalah bayangan titik (1, 1), yang dimiliki **semua** fungsi induk di sini. Tantangan: buat parabola terbuka ke bawah dengan puncak $(-2, 5)$ yang melewati titik $(0, 1)$. Berapa a -nya?

**AWAS JEBAKAN**

Tanda di dalam kurung bekerja terbalik: $f(x - 3)$ bergeser ke kanan, $f(x + 3)$ ke kiri. Begitu pula $f(2x)$ memampatkan grafik menjadi setengah lebarnya, bukan meregangkannya dua kali. Dan $f(2x - 6)$ bukan "geser kanan 6": faktorkan dulu menjadi $f(2(x - 3))$, jadi geser kanannya 3.

Jelaskan bagaimana grafik $y = -2(x + 1)^2 + 3$ diperoleh dari $y = x^2$, lalu tentukan puncak dan bayangan titik $(1, 1)$.

- 1 Cocokkan dengan $a f(b(x - c)) + d$: $a = -2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 3$.
- 2 Geser kiri 1, regang tegak 2 kali, cermin atas-bawah (karena $a < 0$), lalu naik 3. Puncak $(0, 0)$ pindah ke $(c, d) = (-1, 3)$.
- 3 Titik $(1, 1)$ pindah ke $(\frac{1}{1} - 1, -2 \cdot 1 + 3) = (0, 1)$. Cek: $-2(0 + 1)^2 + 3 = 1$. ✓

Parabola terbuka ke bawah dengan puncak $(-1, 3)$, yaitu nilai maksimum 3. Grafiknya melewati $(0, 1)$.

Titik $(4, 1)$ ada di grafik $y = f(x)$. Titik mana yang pasti ada di grafik $y = f(2x - 6)$?

- 1 Faktorkan isi kurung: $f(2x - 6) = f(2(x - 3))$, jadi $b = 2$ dan $c = 3$.
- 2 Titik (x, y) pindah ke $(\frac{x}{b} + c, y) = (\frac{4}{2} + 3, 1) = (5, 1)$.
- 3 Cek langsung: di $x = 5$, isi kurungnya $2 \cdot 5 - 6 = 4$, dan $f(4) = 1$. ✓

Titiknya $(5, 1)$. Jawaban populer yang keliru: $(8, 1)$ (mampat dulu lalu geser 6) dan $(3, 5; 1)$ (geser 3 dulu baru mampat). Cara paling aman: cari x yang membuat isi kurung sama dengan 4.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TRANSFORMASI = KOMPOSISI, DAN FUNGSI GENAP-GANJIL

Rumus $y = a f(b(x - c)) + d$ sebenarnya rantai lima mesin: $T_1(x) = x - c$, $T_2(x) = bx$, lalu f , lalu $T_3(y) = ay$, $T_4(y) = y + d$. Jadi $y = (T_4 \circ T_3 \circ f \circ T_2 \circ T_1)(x)$. Mesin di dalam kurung bekerja **sebelum** f , sehingga untuk menemukan titik baru kita harus membatalkannya ($T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$: bagi b , tambah c). Inilah alasan mendalam mengapa isi kurung "terbalik".

Ada pula fungsi yang tidak berubah oleh cermin. Jika $f(-x) = f(x)$, f disebut **fungsi genap** (simetris terhadap sumbu- y , misalnya x^2 , $|x|$). Jika $f(-x) = -f(x)$, f disebut **fungsi ganjil** (simetris terhadap titik asal, misalnya x^3 , $\frac{1}{x}$). Karena itu, di Studio transformasi, $b < 0$ tidak mengubah parabola dan garis V!

13.5 Fungsi rasional dan asimtot

Kelas Dimas akan karyawisata ke Candi Prambanan. Sewa bus Rp6.000.000 dibagi rata. Jika ada n siswa, setiap siswa membayar $B(n) = \frac{6.000.000}{n}$ rupiah.

Banyak siswa n	10	20	40	60	120
Iuran per siswa (Rp)	600.000	300.000	150.000	100.000	50.000

Makin banyak siswa, iuran makin kecil dan makin dekat ke 0, tetapi **tidak pernah tepat 0**. Sebaliknya, makin sedikit siswa, iuran membengkak tanpa batas, dan $n = 0$ mustahil: tidak ada yang membayar! Garis yang makin didekati grafik seperti ini disebut **asimtot**.



DEFINISI: FUNGSI RASIONAL DAN ASIMTOT

Fungsi rasional adalah fungsi berbentuk pecahan dua polinomial, misalnya $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ atau

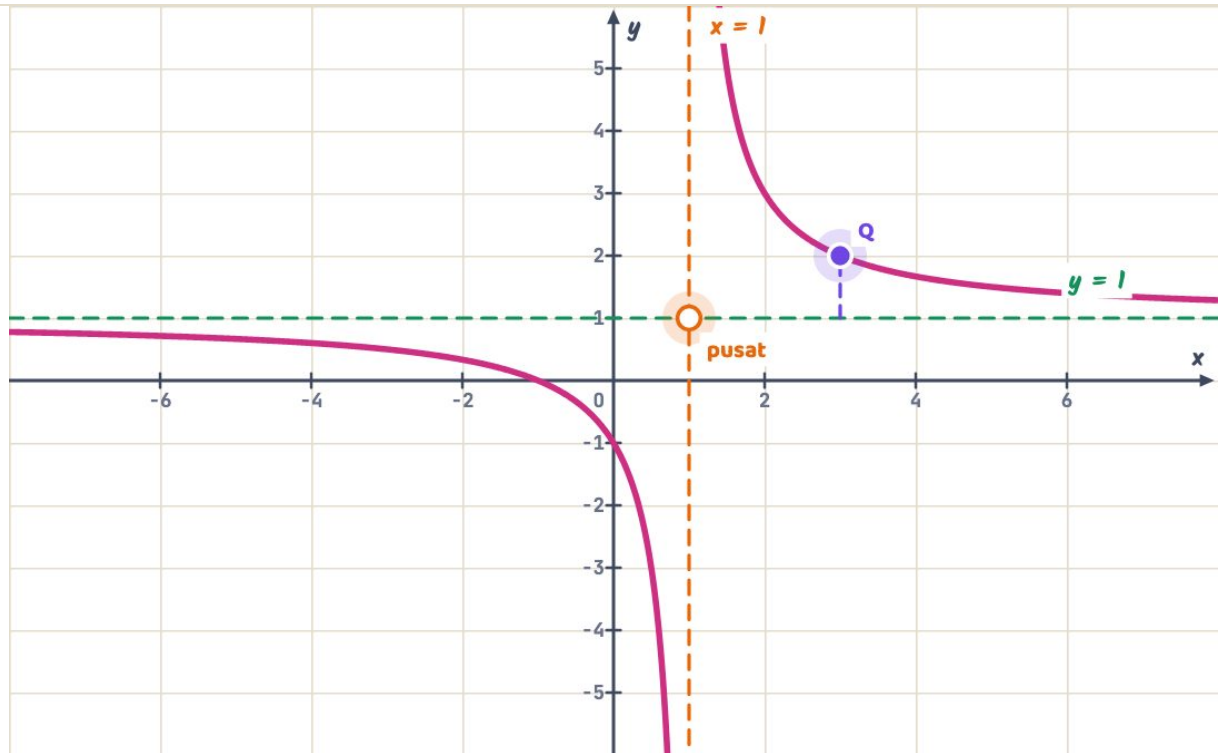
$f(x) = \frac{px+q}{rx+s}$. **Asimtot** adalah garis yang makin didekati grafik ketika grafik menjauh tanpa batas.

Untuk $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$:

- **asimtot tegak** $x = h$, karena di situ penyebutnya nol;
- **asimtot datar** $y = k$, karena $\frac{a}{x-h}$ mendekati 0 saat x sangat besar atau sangat kecil;
- domain $x \neq h$ dan range $y \neq k$.

$$f(x) = \frac{a}{x - h} + k$$

$$f(x) = \frac{2}{x - 1} + 1$$



$a > 0$: cabang kanan-atas dan kiri-bawah pusat

Asimtot tegak
 $x = 1$

Asimtot datar
 $y = 1$

Domain
 $x \neq 1$

Range
 $y \neq 1$

$f(q)$
2

Jarak Q ke $y = k$
1

Tekan ► **Jalankan**: titik Q berlari dari kiri ke kanan. Perhatikan jarak ungu antara Q dan asimtot datar: makin jauh Q berlari, makin kecil jaraknya, tetapi tidak pernah nol. Seret titik "pusat" untuk memindahkan kedua asimtot sekaligus.

Fungsi $\frac{px + q}{rx + s}$ dapat diubah ke bentuk $\frac{a}{x - h} + k$ dengan sedikit aljabar. Hasilnya: asimtot tegak di $x = -\frac{s}{r}$ (penyebut nol) dan asimtot datar di $y = \frac{p}{r}$ (perbandingan koefisien x).

Tentukan asimtot $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. Bandingkan dengan asimtot inversnya, $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

- 1 Tulis ulang pembilangnya: $2x+1 = 2(x-3) + 7$, jadi $f(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$. Ini grafik $\frac{7}{x}$ yang digeser kanan 3 dan naik 2.
- 2 Asimtot f : tegak $x = 3$, datar $y = 2$. Domain $x \neq 3$, range $y \neq 2$.
- 3 Dengan cara yang sama, $f^{-1}(x) = 3 + \frac{7}{x-2}$: asimtot tegak $x = 2$, datar $y = 3$.

Asimtot f : $x = 3$ dan $y = 2$. Asimtot f^{-1} : $x = 2$ dan $y = 3$. Peran keduanya bertukar, karena grafik invers adalah cermin terhadap $y = x$!

MITOS

"
 $f^{-1}(x)$
 sama dengan
 $\frac{1}{f(x)}$
 ."

MITOS

"
 $f \circ g$
 dan
 $g \circ f$
 pasti sama."

FAKTA

Pangkat
 -1
 pada
 f^{-1}
 hanya lambang "mesin mundur". Untuk
 $f(x) = 2x$
 , inversnya
 $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
 , sedangkan
 $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$
 . Jauh berbeda!

FAKTA

Biasanya berbeda. Untuk
 $f(x) = x + 3$
 dan
 $g(x) = 2x$
 :
 $f(g(5)) = 13$
 , tetapi
 $g(f(5)) = 16$
 . Memakai kaus kaki lalu sepatu tidak sama
 dengan sepatu lalu kaus kaki!

MITOS

"Grafik tidak pernah memotong asimtotnya."

FAKTA

Asimtot tegak memang tidak tersentuh, karena fungsinya tidak terdefinisi di sana. Tetapi asimtot datar boleh dipotong! Grafik

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

mendekati

$$y = 0$$

di kejauhan, tetapi memotongnya di

$$x = 0$$

.

MITOS

"Setiap fungsi punya invers."

FAKTA

Hanya fungsi satu-satu. Fungsi

$$x^2$$

memberi 9 untuk

$$x = 3$$

maupun

$$x = -3$$

, jadi mesin mundurnya bingung. Batasi domainnya (

) agar inversnya ada.

$$x \geq 0$$

) agar inversnya ada.

13.6 Fungsi nilai mutlak dan fungsi sepotong-sepotong

Tidak semua mesin memakai satu aturan saja. Ojek daring, tagihan air, dan tarif parkir memakai aturan yang **berganti** sesuai inputnya. Fungsi seperti itu disebut **fungsi sepotong-sepotong**; aturannya berbeda pada bagian-bagian domain yang berbeda. Contoh paling terkenal adalah **nilai mutlak**.

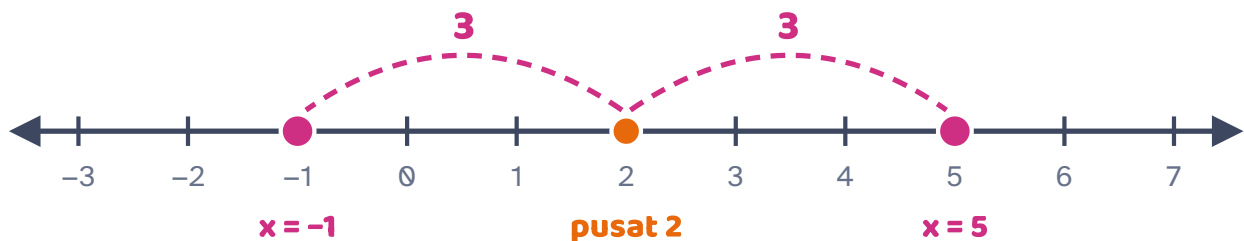


DEFINISI: NILAI MUTLAK

Nilai mutlak $|x|$ adalah jarak bilangan x ke 0 pada garis bilangan. Sebagai fungsi sepotong-sepotong:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Grafik $y = |x|$ berbentuk huruf V dengan pojok di $(0, 0)$. Lebih umum, $|x - a|$ adalah jarak antara x dan a .



$|x - 2| = 3$ artinya "jarak x ke 2 sama dengan 3". Ada dua titik seperti itu: $x = -1$ dan $x = 5$.

Selesaikan $|2x - 5| = 7$.

1 Isi tanda mutlak bisa 7 atau -7 : $2x - 5 = 7$ atau $2x - 5 = -7$.

2 $2x = 12 \Rightarrow x = 6$, atau $2x = -2 \Rightarrow x = -1$.

3 Cek: $|12 - 5| = 7 \checkmark$ dan $|-2 - 5| = |-7| = 7 \checkmark$.

$x = 6$ atau $x = -1$. Secara grafik, garis $y = 7$ memotong grafik V $y = |2x - 5|$ di dua titik.

Fungsi sepotong-sepotong juga muncul di tagihan bulanan. Banyak PDAM memakai **tarif berjenjang**: makin banyak air yang dipakai, makin mahal harga tiap m^3 -nya. Tujuannya mengajak warga berhemat.

$$T(v) = \begin{cases} 10.000 + 2.000v, & 0 \leq v \leq 10 \\ 30.000 + 3.500(v - 10), & 10 < v \leq 20 \\ 65.000 + 5.000(v - 20), & v > 20 \end{cases}$$

Biaya beban Rp10.000, lalu 10 m³ pertama Rp2.000/m³, 10 m³ berikutnya Rp3.500/m³, dan sisanya Rp5.000/m³. Tiga aturan, satu fungsi.

v Pemakaian air m³ T Tagihan Rp



blok 3: Rp5.000/m³, hemat air yuk!

Pemakaian 25 m³: blok 1 = 10 m³, blok 2 = 10 m³, blok 3 = 5 m³. Tagihan 90.000 rupiah, rata-rata 3.600 rupiah per m³.

Cek satuan: v dalam m³, T dalam rupiah. Angka tarif ini rekaan; tarif asli berbeda di setiap daerah.

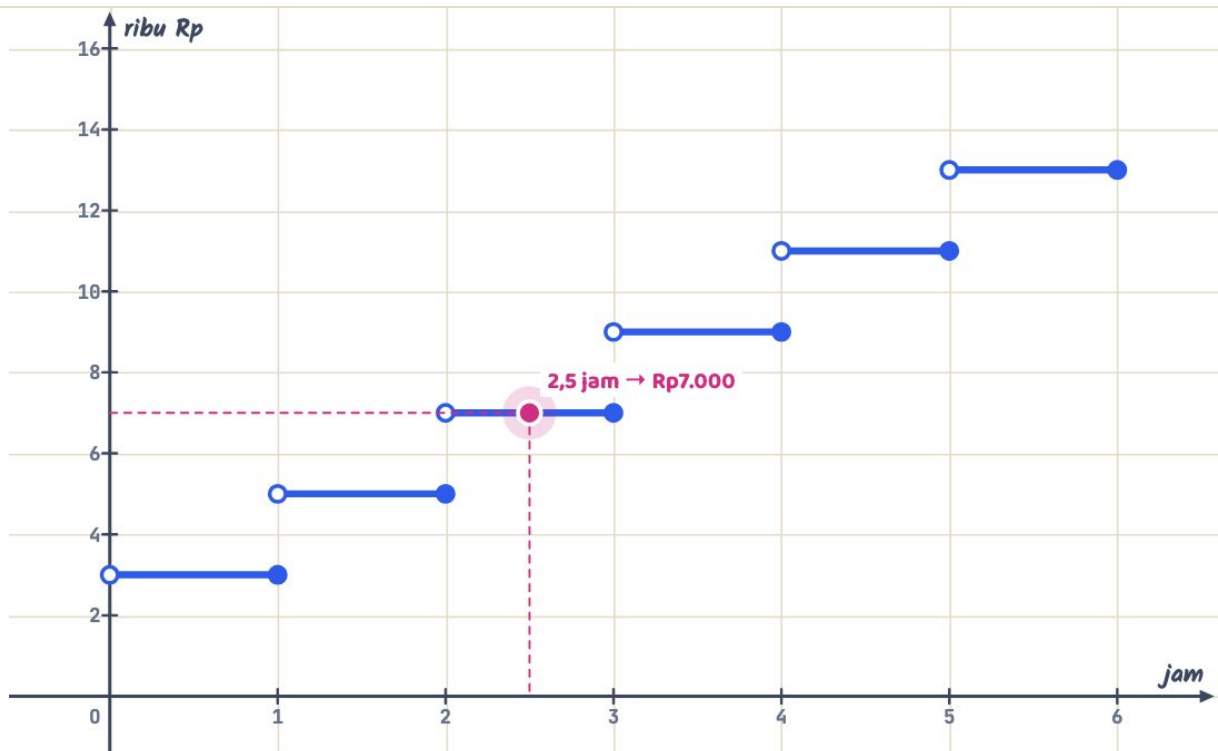
RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TARIF-BERJENJANG](https://aurumgen.my.id/mathpedia#RM-TARIF-BERJENJANG)

Fungsi sepotong-sepotong bahkan bisa **melompat**. Di banyak tempat parkir, lewat satu menit saja sudah dihitung satu jam penuh. Grafiknya berbentuk tangga, dengan bulatan kosong (nilai tidak termasuk) dan bulatan penuh (nilai termasuk) di setiap ujung anak tangga.

$$f(t) = A + B (\lceil t \rceil - 1) \text{ ribu rupiah}$$

$$f(2,5) = 3 + 2 \cdot (3 - 1) = 7 \text{ ribu rupiah}$$

$\lceil t \rceil$ berarti t dibulatkan ke atas: 2,1 jam dihitung 3 jam. A = tarif jam pertama, B = tarif setiap jam berikutnya (dalam ribu rupiah).



Lama parkir

2,5 jam

Jam yang ditagih

3 jam

Tarif

7.000 rupiah

Seret titik merah muda sepanjang waktu. Perhatikan lompatan tepat sesudah 1 jam, 2 jam, dan seterusnya. Pada $t = 2$, apakah tarifnya ikut tangga bawah atau atas? Lihat bulatannya!



Termometer & ramalan cuaca

Aplikasi cuaca mengubah $^{\circ}\text{C}$ ke $^{\circ}\text{F}$ dengan $F = 1,8C + 32$, dan sebaliknya dengan fungsi inversnya.



Penukaran uang

Kurs jual dan kurs beli berbeda. Menukar rupiah ke dolar lalu kembali ke rupiah (komposisi dua mesin) tidak mengembalikan uangmu utuh: selisihnya menjadi keuntungan penukar uang.



Diskon bertumpuk

Diskon persen dan voucher potongan adalah dua mesin. Urutan pemakaiannya mengubah harga akhir yang kamu bayar.



Tagihan air PDAM

Tarif berjenjang adalah fungsi sepotong-sepotong: makin boros, makin mahal tiap m^3 -nya.



Parkir per jam

Lewat satu menit dihitung satu jam penuh: fungsi tangga yang melompat di setiap pergantian jam.



Sandi rahasia

Pesan diacak dengan sebuah fungsi dan hanya bisa dibuka oleh yang tahu fungsi inversnya. Prinsip ini dipakai aplikasi pesan dan perbankan.



LANJUT • OLIMPIADE

PERSAMAAN FUNGSIONAL: MENEBAK MESIN DARI SIFATNYA

Kadang rumus mesinnya disembunyikan, dan yang diketahui hanya sifatnya. Soal seperti ini disebut **persamaan fungsional**.

Contoh 1. $f(x+1) = f(x) + 3$ dan $f(0) = 2$. Setiap langkah ke kanan menambah 3, jadi untuk bilangan bulat $n \geq 0$, $f(n) = 3n + 2$. Mirip barisan aritmetika!

Contoh 2. $f(x) + 2f(1-x) = 3x$ untuk semua x . Trik andalannya: **ganti x dengan $1-x$** , sehingga $f(1-x) + 2f(x) = 3(1-x)$. Sekarang ada dua persamaan dengan dua "misteri", $f(x)$ dan $f(1-x)$. Kalikan persamaan kedua dengan 2 lalu kurangkan persamaan pertama: $3f(x) = 6 - 6x - 3x$, jadi $f(x) = 2 - 3x$. Cek: $(2 - 3x) + 2(2 - 3(1-x)) = 2 - 3x - 2 + 6x = 3x$. ✓



Cek Cepat

Jika $f(x) = x + 4$ dan $g(x) = 3x$, maka $(g \circ f)(2) = \dots$

10

18

14

24

Grafik $y = f(x + 2) - 1$ diperoleh dari grafik $y = f(x)$ dengan...

geser kanan 2, lalu turun 1

geser kiri 2, lalu naik 1

geser kanan 2, lalu naik 1

geser kiri 2, lalu turun 1

Fungsi manakah yang tidak punya invers jika domainnya semua bilangan real?

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = 2x - 7$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3}$$

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. D • 3. A

Tantangan Rumah: mesin rahasia keluarga

Bahan: kertas, pensil, 2-4 anggota keluarga atau teman, kalkulator atau HP (boleh).

1. Satu orang menjadi "mesin". Diam-diam ia menulis aturan berbentuk "kali a lalu tambah b " di kertas terlipat, misalnya "kali 3 lalu kurangi 2".
2. Pemain lain menyebut bilangan input; mesin hanya menjawab outputnya. Catat dalam tabel input-output.
3. Tebak aturannya dengan input sesedikit mungkin. (Petunjuk: coba input 0 dan 1!)
4. Ganti permainan: mesin menyebut **output**, kamu menebak inputnya. Kamu sedang menjadi mesin invers!
5. Sambung dua orang: orang pertama "kali 2", orang kedua "tambah 5". Bandingkan hasilnya bila urutan keduanya ditukar.

Pertanyaan: Mengapa input 0 dan 1 sangat membantu menebak aturan "kali a lalu tambah b "? Berapa input minimal yang diperlukan? Kalau aturan mesinnya "kuadratkan", apakah mesin invers selalu bisa menebak input dengan pasti?

RINGKASAN KILAT Bab 13 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- menentukan **domain**, **kodomain**, dan **range** sebuah fungsi, termasuk membacanya dari grafik
- menyusun dan menghitung **fungsi komposisi** $f \circ g$, serta menjelaskan mengapa urutannya penting
- mencari **fungsi invers** dan memahami grafiknya sebagai **cermin** terhadap garis $y = x$
- menggambar **transformasi grafik** $y = a f(b(x - c)) + d$: geser, regang, mampat, dan cermin
- mengenali **asimtot** fungsi rasional sederhana, serta membaca fungsi **nilai mutlak** dan fungsi **sepotong-sepotong**

Istilah kunci

fungsi domain kodomain range uji garis tegak fungsi komposisi fungsi invers
satu-satu bijektif fungsi induk asimtot Fungsi rasional fungsi sepotong-sepotong
nilai mutlak

Rumus penting

$$H = (V \circ D)(P) = P \left(1 - \frac{d}{100}\right) - v$$

Diskon bertumpuk: dua mesin bersambung.

Mesin D memotong d persen, lalu mesin V memotong v rupiah. Kalau urutannya ditukar, harga akhirnya berubah!

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

Mesin mundur fungsi linear. Mesin maju: kali a , lalu tambah b . Mesin mundur: kurangi b dulu, baru bagi a . Langkah terakhir dibatalkan paling awal!

$$y = a f(b(x - c)) + d, \quad f(u) = u^2$$

Transformasi fungsi: mesin di dalam mesin.

Ikuti x melewati lima mesin kecil: kurangi c , kali b , kuadratkan, kali a , lalu tambah d . Yang di dalam kurung bekerja lebih dulu.

$$T(v) =$$

$$\begin{cases} 10.000 + 2.000v, & 0 \leq v \leq 10 \\ 30.000 + 3.500(v - 10), & 10 < v \leq 20 \\ 65.000 + 5.000(v - 20), & v > 20 \end{cases}$$

Tagihan air berjenjang. Biaya beban Rp10.000, lalu 10 m³ pertama Rp2.000/m³, 10 m³ berikutnya Rp3.500/m³, dan sisanya Rp5.000/m³. Tiga aturan, satu fungsi.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Domain $\sqrt{x-3}$ adalah $x \geq 3$, bukan $x > 3$.
- $(f \circ g)(x)$ dikerjakan dari kanan ke kiri: g dulu, baru f .
- $f^{-1}(x)$ bukan $\frac{1}{f(x)}$.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=13

🧩 Teka-teki untuk Bab 14

Di sebuah laboratorium, satu bakteri membelah menjadi dua setiap 20 menit (dalam kondisi ideal). Pukul 07.00 ada 1 bakteri. Berapa banyak bakteri pada pukul 12.00? Kira-kira pukul berapa jumlahnya pertama kali melewati satu juta? Mesin "kali 2 setiap 20 menit" mudah dijalankan maju. Tetapi bagaimana menjalankannya **mundur**, dari banyaknya bakteri ke lamanya waktu?

▼ Intip petunjuk

Dari 07.00 ke 12.00 ada 300 menit, berarti 15 kali membelah: $2^{15} = 32.768$ bakteri. Karena $2^{19} = 524.288$ dan $2^{20} = 1.048.576$, satu juta terlewat setelah 20 kali membelah (400 menit), yaitu pukul 13.40. Mesin mundur dari "pangkat" disebut **logaritma**, bintang utama Bab 14!

14 Eksponen & Logaritma: Berlipat Ganda dan Cara Menjinakkannya

Satu bakteri yang membelah setiap 20 menit bisa menjadi miliaran triliun dalam sehari. Bagaimana menghitung ledakan seperti itu, dan bagaimana menjawab pertanyaan "kapan"? Kenalan dengan dua sahabat: si pelipat ganda dan si penghitung lipatan.

Setelah bab ini, kamu bisa

- membedakan pertumbuhan **linear** (ditambah) dan **eksponensial** (dikali), lalu memodelkannya dengan $N = N_0 \cdot b^{t/T}$;
- menghitung **waktu paruh** dan waktu lipat dua pada obat, zat radioaktif, dan tabungan;
- menjelaskan asal-usul **bilangan e** lewat bunga majemuk;
- memahami **logaritma** sebagai "pangkat yang dicari" dan memakai sifat-sifatnya;
- menyelesaikan **persamaan eksponen dan logaritma**, serta membaca skala logaritma seperti magnitudo gempa, desibel, dan pH.

TEKA-TEKI CAWAN PETRI

KOMIK • 4 PANEL

Senin pagi, laboratorium IPA sekolah

AYU

Bakteri ini membelah jadi dua setiap 20 menit. Kalau pagi ini ada satu, besok pagi ada berapa?

DIMAS

Sehari ada 72 kali 20 menit. Jadi $72 \times 2 = 144$ bakteri!



KAK LINTANG

Hati-hati, Dimas! Membelah itu **dikali dua**, bukan **ditambah dua**. Setiap 20 menit, jumlahnya berlipat ganda.



AYU

Berarti 2 pangkat 72. Kata kalkulator:
kira-kira $4,7 \times 10^{21}$. Itu sekitar 4,7 miliar
triliun!

DIMAS

Dari SATU bakteri?!

4.722.366.482.869.645.213.696



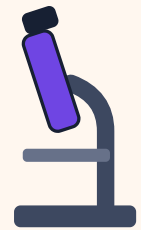
Tiba-tiba, dari balik mikroskop...

ANCIL

Pertanyaan yang lebih seru: KAPAN
jumlahnya tembus sejuta? Untuk
mencari pangkat yang belum diketahui,
kita butuh logaritma!

DIMAS

Loga... apa?



Teka-teki bakteri dari akhir Bab 13 ternyata menyimpan kejutan besar. Dimas **menambahkan** 2 sebanyak 72 kali, padahal setiap pembelahan **mengalikan** jumlahnya dengan 2. Hasil yang benar 2^{72} sangat besar. Untungnya, di dunia nyata makanan dan ruang bakteri habis jauh sebelum itu, sehingga pertumbuhannya melambat. Meski begitu, pada jam-jam awal, ledakan "dikali dua, dikali dua" itu benar-benar terjadi. Inilah alasan makanan basi begitu cepat di udara panas.



Tebak Dulu!

Kamu boleh memilih satu hadiah. A: Rp1.000.000 setiap hari selama 30 hari. B: Rp1 pada hari pertama, Rp2 pada hari kedua, Rp4 pada hari ketiga, dan seterusnya berlipat dua selama 30 hari. Pilih yang mana?

A, jelas jauh lebih banyak.

Kira-kira sama saja.

B, dan selisihnya sangat jauh.

B, tetapi hanya menang sedikit.

Jawabannya: B, dengan selisih yang luar biasa. Hadiah A totalnya Rp30.000.000. Hadiah B terlihat remeh di awal: setelah seminggu kamu baru mengantongi Rp127. Namun pada hari ke-30 saja kamu menerima $2^{29} = \text{Rp}536.870.912$, dan total 30 harinya Rp1.073.741.823, lebih dari satu miliar rupiah! Bilangan yang terus **dikali** selalu menyalip bilangan yang hanya **ditambah**.

14.1

Berlipat ganda: pertumbuhan eksponensial

Bandingkan dua cara bertambah. Celengan Dimas bertambah Rp5.000 setiap minggu: 5.000, 10.000, 15.000, ... Itu **pertumbuhan linear**: setiap langkah **ditambah** bilangan yang sama. Bakteri Ayu berlipat dua setiap 20 menit: 1, 2, 4, 8, ... Itu **pertumbuhan eksponensial**: setiap langkah **dikali** bilangan yang sama.

0 mnt

**Menit ke-0**

ada 1 bakteri

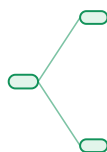
$$1 = 2^0$$

pangkat 0: belum membelah

Langkah 1. Menit ke-0: ada 1 bakteri. Kita tulis $1 = 2^0$, karena belum ada pembelahan.

0 mnt

20 mnt

**Menit ke-20**

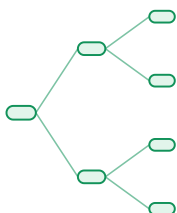
ada 2 bakteri

$$2 = 2^1$$

membelah 1 kali

Langkah 2. Menit ke-20: bakteri itu membelah menjadi dua. Sekarang ada $2 = 2^1$.

0 mnt 20 mnt 40 mnt

**Menit ke-40**

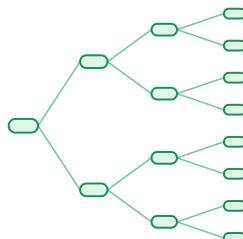
ada 4 bakteri

$$4 = 2^2$$

dikali 2, bukan ditambah 2!

Langkah 3. Menit ke-40: **setiap** bakteri membelah lagi, jadi ada $4 = 2^2$. Jumlahnya dikali 2, bukan ditambah 2.

0 mnt 20 mnt 40 mnt 60 mnt

**Menit ke-60**

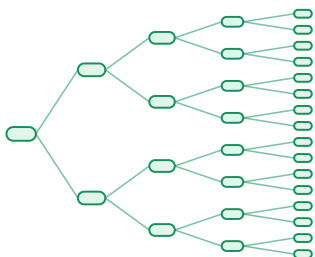
ada 8 bakteri

$$8 = 2^3$$

satu jam = 3 kali membelah

Langkah 4. Menit ke-60: $8 = 2^3$. Satu jam berarti tiga kali membelah.

0 mnt 20 mnt 40 mnt 60 mnt 80 mnt

**Menit ke-80**

ada 16 bakteri

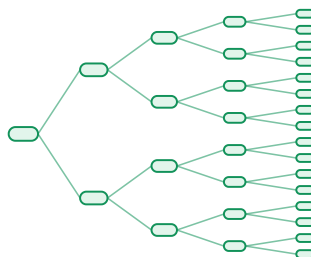
$$16 = 2^4$$

setelah n kali membelah:

$$2^n \text{ bakteri}$$

Langkah 5. Menit ke-80: $16 = 2^4$. Setelah n kali membelah, satu bakteri menjadi 2^n . Variabel n berada di **pangkat**; itulah ciri pertumbuhan eksponensial.

0 mnt 20 mnt 40 mnt 60 mnt 80 mnt

**Sekarang dibalik:**

berapa kali membelah agar menjadi 1.024 bakteri?

$$2^n = 1.024$$

pangkat yang dicari = logaritma

$$\log_2 1.024 = 10$$

Langkah 6. Sekarang pertanyaannya dibalik: berapa kali membelah agar menjadi 1.024? Kita mencari pangkatnya: $2^n = 1024$, dan jawabannya $n = 10$. Mencari pangkat seperti ini disebut **logaritma**: $\log_2 1024 = 10$.

**DEFINISI**

Fungsi berbentuk

$$f(x) = a \cdot b^x, \quad a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

disebut **fungsi eksponen**. Bilangan a adalah nilai awal (nilai saat $x = 0$), sedangkan b adalah **faktor pengali**: setiap kali x naik 1, nilai fungsi dikali b . Jika $b > 1$, fungsinya **tumbuh**; jika $0 < b < 1$, fungsinya **meluruh** (menyusut).

Bahasa sederhana • Cara mengenalinya: kalau setiap langkah kamu **menambah** angka yang sama, itu linear, seperti berjalan kaki. Kalau setiap langkah kamu **mengali** dengan angka yang sama, itu eksponensial, seperti

naik roket yang terus menambah kecepatan!

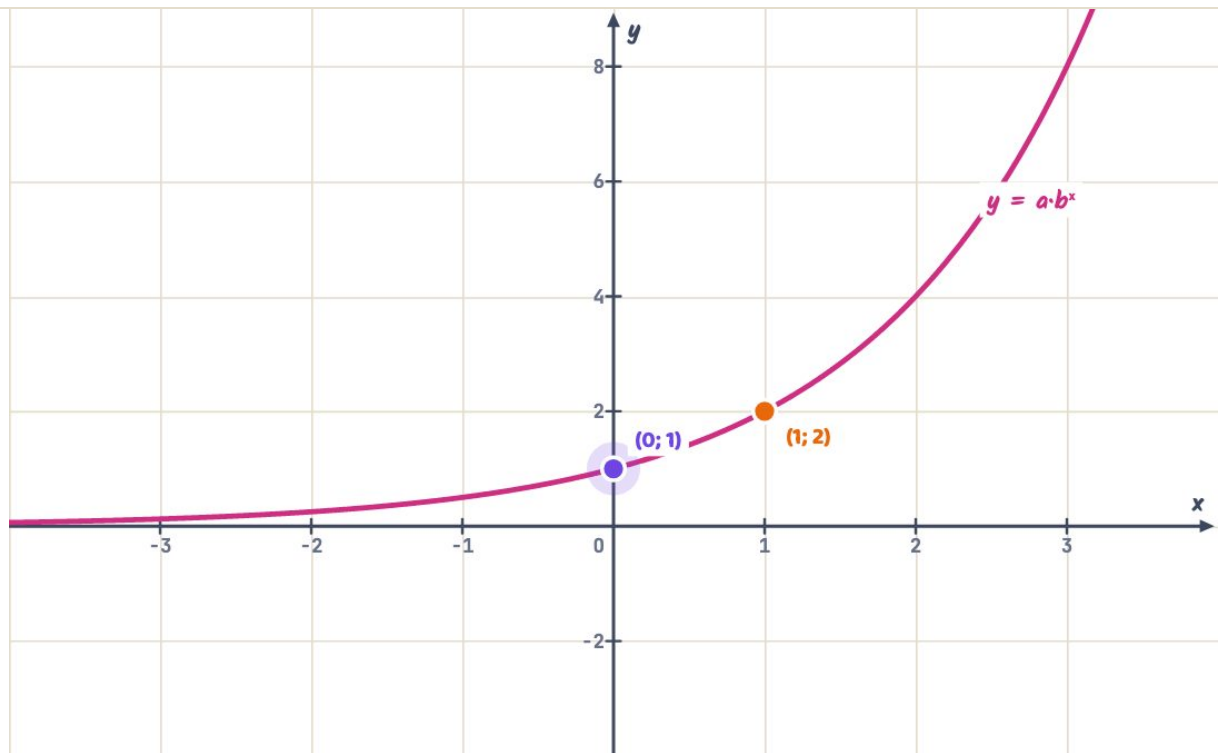
Langkah n	Linear: $2n$	Kuadrat: n^2	Eksponen: 2^n
1	2	1	2
3	6	9	8
5	10	25	32
10	20	100	1.024
20	40	400	1.048.576
30	60	900	1.073.741.824

Pada $n = 3$, n^2 masih unggul ($9 > 8$). Mulai $n = 5$, 2^n memimpin dan tidak pernah tersusul lagi. Dalam jangka panjang, fungsi eksponen dengan $b > 1$ selalu mengalahkan fungsi pangkat seperti n^2 , bahkan n^{100} , walaupun kadang butuh waktu lama untuk menyalipnya.

$$y = a \cdot b^x$$

$$y = 1 \cdot 2^x$$

a = nilai awal (titik potong dengan sumbu y); b = faktor pengali setiap kali x naik 1.



 **$b > 1$: tumbuh, makin ke kanan makin melesat**

Titik potong sumbu y
(0; 1)

Tiap x naik 1, y dikali
2

Asimtot datar
 $y = 0$

Seret titik ungu untuk mengubah a , lalu geser b melewati 1. Kapan grafiknya naik, kapan turun? Perhatikan juga: apakah grafik pernah menyentuh sumbu x ?

$$N = N_0 \cdot b^{t/T}$$

Mulai dari N_0 . Setiap lewat satu periode T , jumlahnya dikali b . Setelah waktu t , sudah lewat t/T periode.

N_0 Jumlah awal

b Faktor per periode kali

t Waktu berlalu menit

T Panjang satu periode menit

N Jumlah setelah waktu t

JUMLAH SETELAH WAKTU T

64

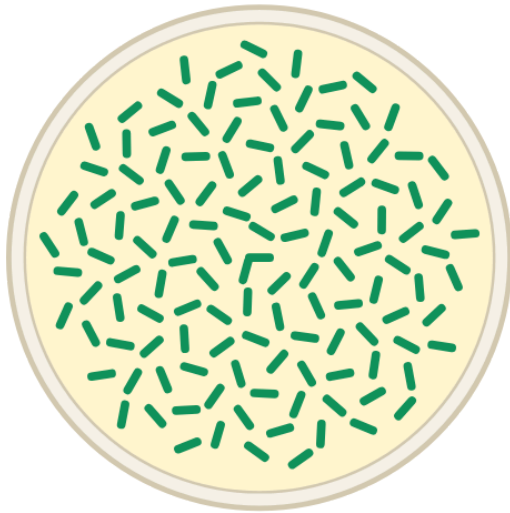
 tumbuh

 6 kali membelah: $2^6 = 64$ bakteri

Waktu **120** menit sama dengan **6** periode. Jadi **1** dikali **2** sebanyak **6** kali, hasilnya $N = 64$.

Cek satuan: t dan T harus memakai satuan yang sama (keduanya menit), sehingga t/T tidak bersatuan dan hanya menyatakan banyaknya periode.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-EKSP-TUMBUH

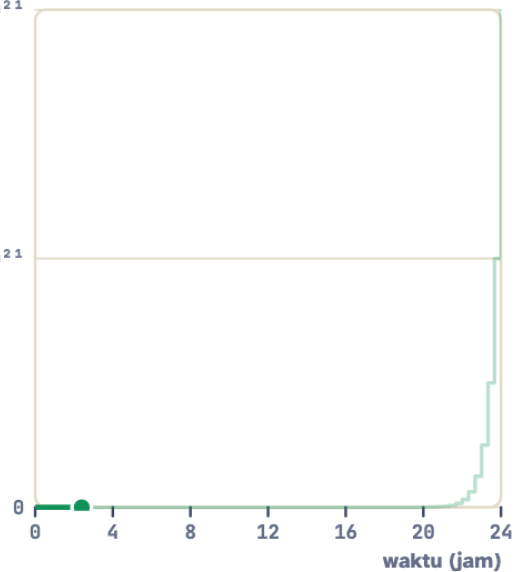
t = 2 jam 24 menit**7 kali membelah • 128 bakteri**

banyak bakteri

$$4,72 \times 10^{21}$$

skala biasa (linear)

$$2,36 \times 10^{21}$$



Waktu

2 jam 24 menit

Sudah membelah

7 kali

Banyak bakteri

128

Tembus sejuta pada

6 jam 40 menit (20 kali membelah)

Tekan ► **Jalankan** dan amati 24 jam berlalu dalam 12 detik. Pada grafik biasa, kurvanya tampak "tidur" lama lalu tiba-tiba melonjak. Ganti ke **skala logaritmik**: kurva yang sama berubah menjadi tangga lurus! Lalu nyalakan **makanan terbatas** untuk melihat apa yang sebenarnya terjadi di laboratorium.



Tebak Dulu!

Eceng gondok tumbuh di sebuah danau. Luas yang ditutupinya berlipat dua setiap hari, dan pada hari ke-30 danau tertutup penuh. Pada hari ke berapa danau tertutup setengahnya?

Hari ke-15, karena setengah dari 30.

Hari ke-20.

Hari ke-25.

Hari ke-29.

Jawabannya: hari ke-29. Karena luasnya berlipat dua setiap hari, sehari sebelum penuh danau baru tertutup setengahnya. Pada hari ke-25, eceng gondok baru menutupi $\frac{1}{32}$ danau, sekitar 3%. Kelihatannya masih aman, padahal lima hari kemudian danau tertutup penuh! Di dunia nyata eceng gondok tumbuh lebih lambat daripada di teka-teki ini, tetapi danau seperti Rawa Pening di Jawa Tengah memang harus terus dibersihkan karena tanaman ini.

CONTOH Bakteri di nasi yang lupa disimpan

Sepiring nasi tertinggal di meja dan mengandung 50 bakteri. Jika bakteri itu membelah setiap 20 menit, berapa banyak bakteri setelah 2 jam?

1 2 jam = 120 menit = $120 : 20 = 6$ periode, jadi bakteri membelah 6 kali.

2 Setiap membelah, jumlahnya dikali 2: $N = 50 \cdot 2^6$.

3 $2^6 = 64$, sehingga $N = 50 \cdot 64 = 3200$.

Ada 3.200 bakteri setelah 2 jam, 64 kali lipat dari semula. Itulah sebabnya makanan matang sebaiknya segera disimpan di kulkas atau dihabiskan.



AWAS JEBAKAN

Kenaikan persen yang berulang tidak boleh dijumlahkan begitu saja. Harga yang naik 10% setiap tahun selama 3 tahun tidak naik 30%, melainkan dikali $1,1^3 = 1,331$, jadi naik 33,1%. Setiap kenaikan dihitung dari harga yang sudah naik sebelumnya.

14.2 Menyusut separuh: peluruhan dan waktu paruh

Kalau faktor pengalinya di antara 0 dan 1, jumlahnya makin lama makin kecil. Ini disebut **peluruhan eksponensial**. Contohnya kadar obat di dalam darah, zat radioaktif, dan selisih suhu teh panas dengan suhu ruangan saat teh mendingin.



DEFINISI

Waktu paruh ($T_{1/2}$) adalah waktu yang dibutuhkan sebuah besaran yang meluruh untuk tinggal **separuhnya**. Jika jumlah awalnya N_0 , maka setelah waktu t :

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

Hebatnya, waktu paruh tidak bergantung pada jumlah awal: dari 400 mg ke 200 mg butuh waktu yang sama dengan dari 2 mg ke 1 mg.

Bahasa sederhana • Bayangkan sebatang coklat. Setiap jam kamu makan separuh dari yang tersisa. Setelah 1 jam tinggal $\frac{1}{2}$, setelah 2 jam tinggal $\frac{1}{4}$, setelah 3 jam tinggal $\frac{1}{8}$. Coklatnya makin kecil, tetapi tidak pernah benar-benar habis jika kamu selalu menyisakan separuh!



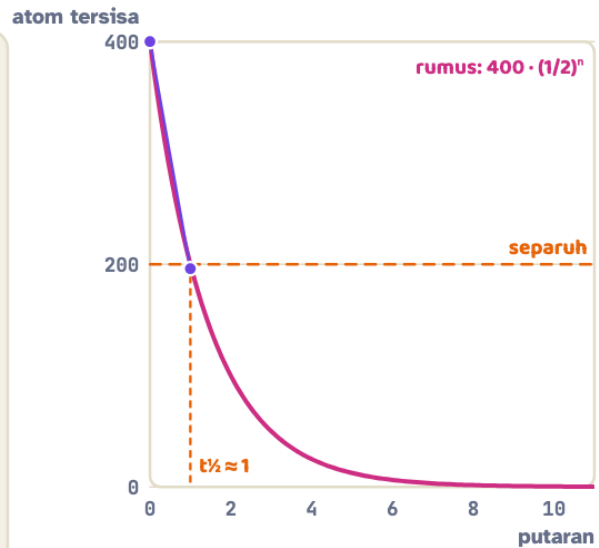
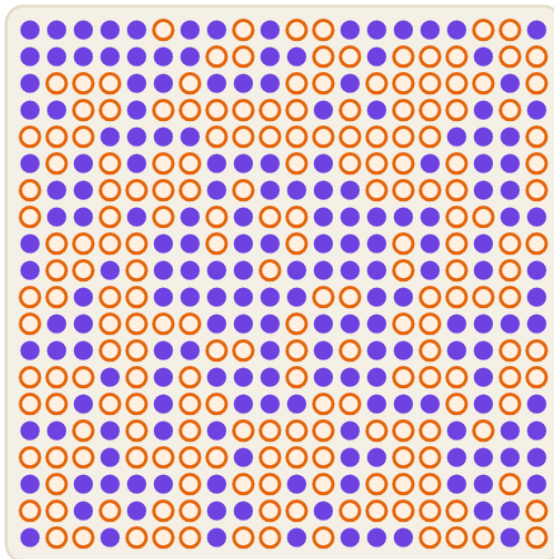
AWAS JEBAKAN

Dua kali waktu paruh tidak membuat zat habis. Setelah satu waktu paruh tersisa $\frac{1}{2}$, dan setelah dua waktu paruh tersisa separuh dari separuh, yaitu $\frac{1}{4}$ atau 25%, bukan 0%.

LAB MINI Atom-atom pelempar koin

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14

Putaran ke-1: tersisa 196 dari 400 atom



Putaran
1

Atom tersisa
196

Ramalan rumus
200

Waktu paruh (teori)
1 putaran

Setiap putaran, **setiap** atom "melempar koin" sendiri; yang mendapat sisi tertentu langsung meluruh (berubah menjadi titik abu-abu). Tak ada yang tahu atom mana yang meluruh berikutnya, tetapi jumlah yang tersisa selalu mendekati kurva rumus. Coba ganti peluang menjadi $1/6$: berapa putaran sampai tinggal separuh?

KERJAKAN BERSAMA Sisa obat di dalam tubuh

Seorang pasien menerima 400 mg obat. Waktu paruh obat itu di dalam tubuh 6 jam. Berapa mg yang tersisa setelah satu hari, jika tidak ada dosis tambahan?

- 1 Satu hari = 24 jam = $24 : 6 = 4$ kali waktu paruh.
- 2 Bagi dua empat kali: $400 \rightarrow 200 \rightarrow 100 \rightarrow 50 \rightarrow 25$.
- 3 Dengan rumus: $N = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{24/6} = 400 \cdot \frac{1}{16} = 25$.

Tersisa 25 mg, yaitu $\frac{1}{16}$ dosis awal. Itulah sebabnya obat tertentu harus diminum berkala, misalnya "tiap 8 jam": agar kadarnya di dalam darah tetap cukup. Ingat, jadwal dan dosis obat selalu mengikuti petunjuk dokter atau apoteker, bukan hitungan sendiri.



JAM RADIOAKTIF

Makhluk hidup terus menyerap karbon, termasuk sedikit **karbon-14** yang radioaktif. Setelah makhluk itu mati, karbon-14 di tubuhnya meluruh dengan waktu paruh sekitar 5.730 tahun. Dengan mengukur sisanya, ilmuwan bisa menaksir umur tulang, kayu, atau kain kuno. Sisa 50% berarti umurnya sekitar 5.730 tahun; sisa 25% berarti sekitar 11.460 tahun.



ADU CEPAT

Sisa setelah beberapa waktu paruh

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Bagi dua sebanyak k kali. Contoh: $80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10$ setelah 3 kali waktu paruh. Jawab dalam mg (angkanya saja).

14.3 Bilangan e dan bunga yang ikut berbunga

Pada **bunga tunggal**, bunga selalu dihitung dari modal awal. Pada **bunga majemuk**, bunga yang sudah didapat ikut dibungakan: bunga berbunga. Misalnya Rp10 juta dengan bunga 6% per tahun. Dengan bunga tunggal, setelah 2 tahun menjadi $10 + 2 \times 0,6 = 11,2$ juta. Dengan bunga majemuk tahunan, menjadi $10 \times 1,06^2 = 11,236$ juta. Selisihnya kecil di awal, tetapi membesar dari tahun ke tahun.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100n} \right)^{nt}$$

Setiap periode, saldo dikali $(1 + r/100n)$. Dalam t tahun ada $n \cdot t$ periode, jadi pengali itu dipakai $n \cdot t$ kali.

P Tabungan awal juta Rp

r Bunga per tahun %

n Dibungakan per tahun kali

t Lama menabung tahun

A Saldo akhir juta Rp

SALDO AKHIR

18,194

juta Rp

Bunga **6%** per tahun, dibungakan **12** kali setahun selama **10** tahun: saldo menjadi **18,194** juta. Dengan bunga tunggal hanya **16** juta. Jika dibungakan terus-menerus (kontinu), hasilnya **18,221** juta. Aturan 72: uang berlipat dua dalam **±12** tahun.

Cek satuan: P dan A memakai satuan yang sama (juta rupiah); r dalam persen per tahun, t dalam tahun.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-BUNGA-BERBUNGA

Sekarang percobaan pikiran dari "Bank Ajaib Ancil". Ancil menawarkan bunga **100% per tahun** untuk tabungan Rp1 juta. Jika dibungakan sekali setahun, saldonya menjadi Rp2 juta. Bagaimana kalau bunganya dibagi dua dan dibayarkan tiap setengah tahun? Atau dibagi 12 dan dibayarkan tiap bulan? Atau tiap hari?

Dibungakan	n kali setahun	Saldo akhir (juta Rp): $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
tahunan	1	2
tiap semester	2	2,25
tiap triwulan	4	2,4414...
bulanan	12	2,6130...

harian	365	2,7146...
tiap jam	8.760	2,7181...
tiap menit	525.600	2,71828...

Saldonya memang naik, tetapi tidak meledak. Ia mendekati sebuah bilangan istimewa yang tidak pernah terlewati.



BILANGAN E

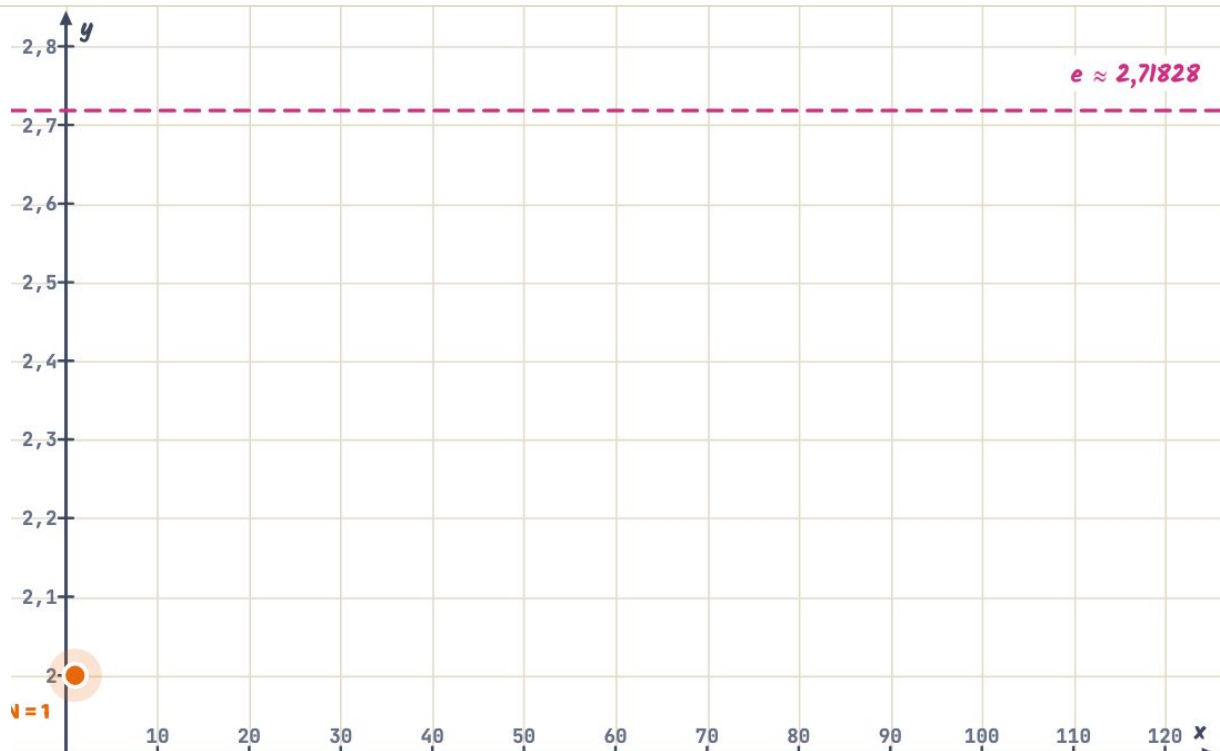
Ketika n makin besar, nilai $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ makin dekat ke sebuah bilangan irasional

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828 \dots$$

Jika modal P dibungakan **terus-menerus** (kontinu) dengan laju r per tahun (sebagai desimal), saldo setelah t tahun adalah $A = Pe^{rt}$. Logaritma berbasis e disebut **logaritma natural** dan ditulis $\ln x$.

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \longrightarrow e = 2,71828 \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$



dibungakan sekali: Rp1 juta menjadi Rp2 juta

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

2

masih kurang dari e sebesar
0,71828

Tekan ► **Jalankan** atau seret titik oranye ke kanan. Titik-titik naik makin pelan dan "menempel" di bawah garis magenta. Bisakah kamu membuat selisihnya kurang dari 0,02?



TAMU DARI MASA LALU

Pada tahun 1683, Jacob Bernoulli dari Swiss memikirkan persis pertanyaan Bank Ajaib Ancil: apa yang terjadi jika bunga dibayarkan makin sering? Ia menemukan bahwa hasilnya tidak tumbuh tanpa batas, tetapi mendekati sebuah bilangan di antara 2 dan 3. Beberapa puluh tahun kemudian, Leonhard Euler memakai huruf e untuk bilangan itu dan menemukan bahwa e muncul di mana-mana, dari peluruhan radioaktif sampai kurva lonceng statistika.



TRIK KAK LINTANG: ATURAN 72

Ingin tahu kapan uang (atau utang!) berlipat dua? Bagi 72 dengan persentase pertumbuhannya per tahun. Bunga 6%: $72 : 6 = 12$ tahun. Harga barang yang naik 3% per tahun kira-kira berlipat dua dalam $72 : 3 = 24$ tahun. Hitungan tepatnya memakai logaritma (lihat 14.6): $\frac{\log 2}{\log 1,06} \approx 11,9$ tahun. Aturan ini paling akurat untuk persentase sekitar 4–12%.



AWAS JEBAKAN

Bunga harian yang kelihatan kecil bisa membengkak menjadi sangat besar. Bayangkan sebuah pinjaman dengan bunga 0,3% per hari yang dibiarkan berbunga. Dalam sebulan utang menjadi $1,003^{30} \approx 1,094$ kali, dan dalam setahun $1,003^{365} \approx 2,98$ kali: utang Rp1 juta menjadi hampir Rp3 juta. Sebelum meminjam, hitung dulu, dan pastikan layanan pinjaman daring terdaftar serta diawasi OJK.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA E BEGITU ISTIMEWA?

Di antara semua grafik $y = b^x$, hanya $y = e^x$ yang kemiringan garis singgungnya di setiap titik **sama dengan nilai fungsinya sendiri**. Di titik $(0, 1)$ kemiringannya 1, di titik $(1, e)$ kemiringannya e , dan seterusnya. Dalam kalkulus (Bab 28) sifat ini ditulis $\frac{d}{dx} e^x = e^x$. Karena itu, setiap besaran yang **laju perubahannya sebanding dengan besarnya sendiri**, seperti populasi, bunga kontinu, atau zat radioaktif, berbentuk $N_0 e^{kt}$. Bentuk $N_0 b^{t/T}$ selalu bisa ditulis ulang sebagai $N_0 e^{kt}$ dengan $k = \frac{\ln b}{T}$.

14.4 Logaritma: pangkat yang dicari

Kembali ke pertanyaan Ancil: kapan bakteri tembus sejuta? Kita perlu $2^n = 1.000.000$. Coba-coba: $2^{19} = 524.288$ masih kurang, $2^{20} = 1.048.576$ sudah lewat. Jadi n berada di antara 19 dan 20, tepatnya sekitar 19,93. Bilangan "pangkat yang dicari" itulah yang disebut logaritma.



DEFINISI

Untuk $b > 0$, $b \neq 1$, dan $x > 0$:

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

$\log_b x$ dibaca "logaritma x dengan basis b ". Bilangan b disebut **basis** (bilangan pokok), x disebut **numerus**, dan y adalah hasil logaritmanya: **pangkat yang membuat b menjadi x** . Di banyak buku Indonesia, $\log_b x$ juga ditulis ${}_b\log x$.

$$2^3 = 8$$

PANGKAT

$$2^3 = ?$$

8

cari hasilnya

AKAR

$$\sqrt[3]{8} = ?$$

2

cari bilangan pokoknya

LOGARITMA

$$\log_2 8 = ?$$

3

cari pangkatnya

Satu kalimat $2^3 = 8$ melahirkan tiga pertanyaan. Akar mencari bilangan pokoknya; logaritma mencari pangkatnya.

Dua basis punya singkatan khusus. $\log x$ tanpa basis berarti $\log_{10} x$ (**logaritma biasa**), dan $\ln x$ berarti $\log_e x$ (logaritma natural). Kalkulator ilmiah dan HP biasanya punya tombol **log** dan **ln**.

Bahasa sederhana • Logaritma itu seperti bertanya, "berapa kali aku harus mengali?" Contohnya $\log_{10} 1000$: berapa kali mengali 10 agar menjadi 1000? $10 \times 10 \times 10 = 1000$, tiga kali. Jadi $\log_{10} 1000 = 3$. Untuk basis 10, cukup hitung banyaknya angka nol!

RUMUS HIDUP Logaritma: pangkat yang dicari

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Logaritma menjawab satu pertanyaan: *b* harus dipangkatkan berapa supaya hasilnya *x*?

b

Basis

x

Numerus

y

Logaritma (pangkatnya)

LOGARITMA (PANGKATNYA)

3

✨ pangkatnya bilangan bulat!

2 harus dipangkatkan 3 supaya menjadi 8. Cek: 2 pangkat 3 hasilnya 8.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-LOG-DEFINISI

Kalimat pangkat	Kalimat logaritma	Dibaca
$2^{10} = 1024$	$\log_2 1024 = 10$	2 dipangkatkan 10 menjadi 1.024
$10^6 = 1.000.000$	$\log 1.000.000 = 6$	sejuta punya 6 angka nol
$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	pangkat negatif menghasilkan pecahan
$5^0 = 1$	$\log_5 1 = 0$	log dari 1 selalu 0
$e^1 = e$	$\ln e = 1$	log dari basisnya sendiri selalu 1
$16^{1/2} = 4$	$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$	pangkat pecahan = akar



AWAS JEBAKAN

Logaritma dari nol atau bilangan negatif tidak terdefinisi (untuk bilangan real). Bilangan positif berapa pun yang dipangkatkan selalu menghasilkan bilangan positif, jadi tidak ada y yang membuat $2^y = 0$ atau $2^y = -8$. Karena itu, syarat **numerus harus positif** wajib dicek setiap kali menyelesaikan soal logaritma.



ADU CEPAT

Logaritma kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI [AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-14](https://aurumgen.my.id/mathpedia#BAB-14)

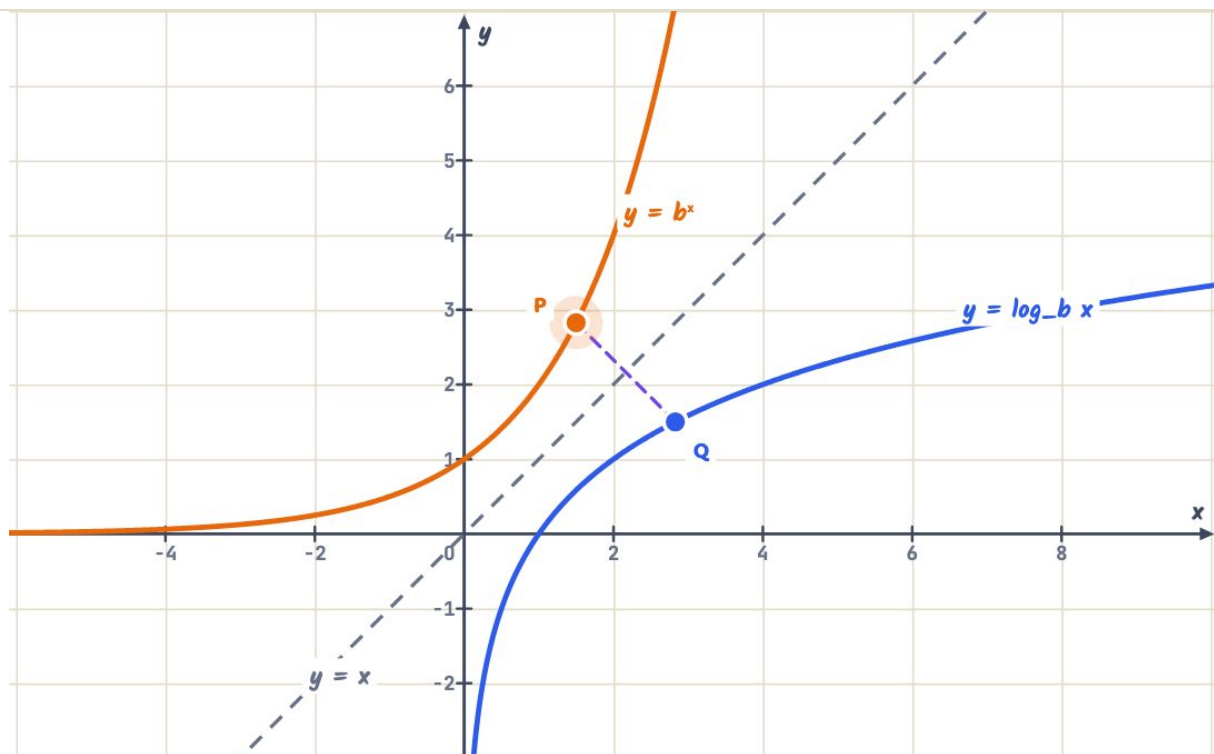
Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Tanyakan: b dipangkatkan berapa agar hasilnya x ? Pangkat negatif menghasilkan pecahan, misalnya 2 pangkat $-2 = 0,25$. Logaritma dari 1 selalu 0.

Karena logaritma "membatalkan" pangkat, fungsi $y = \log_b x$ adalah **invers** dari $y = b^x$. Ingat Bab 13: grafik fungsi dan inversnya saling bercermin terhadap garis $y = x$.

$$y = b^x \quad \text{dan} \quad y = \log_b x$$

$$2^{1,5} \approx 2,828 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2 2,828 \approx 1,5$$



P (pada $y = b^x$)
(1,5; 2,83)

Q (pada $y = \log_b x$)
(2,83; 1,5)

Seret titik P di sepanjang kurva oranye (atau tekan ► **Jalankan**). Titik Q selalu merupakan bayangan cermin P terhadap garis $y = x$: koordinatnya tinggal ditukar. Ubah b : mengapa kedua kurva selalu melewati (0; 1) dan (1; 0)?



TAMU DARI MASA LALU

John Napier, seorang bangsawan Skotlandia, menerbitkan tabel logaritma pertama pada tahun 1614 setelah kira-kira dua puluh tahun berhitung. Henry Briggs lalu menyusun logaritma berbasis 10 yang kita pakai sekarang, dan Jost Bürgi dari Swiss menemukan gagasan serupa secara mandiri. Selama lebih dari 300 tahun, pelaut, astronom, dan insinyur menghitung dengan tabel logaritma dan mistar hitung, sampai kalkulator elektronik menggantikannya pada tahun 1970-an. Konon astronom Pierre-Simon Laplace berkata bahwa logaritma "menggandakan umur para astronom", karena memangkas waktu berhitung mereka.

CONTOH Tiga logaritma, satu jawaban

Hitung $\log_2 32 + \log_3 \frac{1}{9} - \log 0,01$.

1 $\log_2 32$: 2 dipangkatkan berapa menjadi 32? $2^5 = 32$, jadi hasilnya 5.

2 $\log_3 \frac{1}{9}$: $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, jadi hasilnya -2 .

3 $\log 0,01$: $0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$, jadi hasilnya -2 .

4 Jumlahkan: $5 + (-2) - (-2) = 5$.

Hasilnya 5. Kuncinya: ubah setiap numerus menjadi pangkat dari basisnya.

14.5 Sifat-sifat logaritma: perkalian menjadi penjumlahan

Mengapa orang dulu begitu bersemangat dengan logaritma? Karena logaritma mengubah perkalian yang sulit menjadi penjumlahan yang mudah. Sifat ini berasal langsung dari sifat pangkat: $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$. Saat dua pangkat dikalikan, pangkatnya dijumlahkan, dan logaritma adalah pangkat itu sendiri!



SIFAT-SIFAT LOGARITMA

Untuk $b, c > 0$, $b, c \neq 1$, $x, y > 0$, dan bilangan real k :

Sifat pangkat	Sifat logaritma	Nama
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	perkalian
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	pembagian
$(b^m)^k = b^{mk}$	$\log_b x^k = k \log_b x$	pangkat
$b^0 = 1$, $b^1 = b$	$\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$	nilai khusus
$\log_b$ membatalkan $b^{(\cdot)}$	$b^{\log_b x} = x$	invers
$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, misalnya $\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2}$		ganti basis

▼ Bukti sifat-sifat logaritma

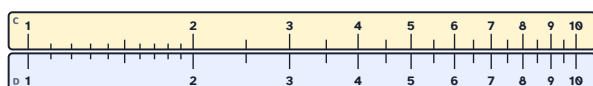
Misalkan $\log_b x = m$ dan $\log_b y = n$. Menurut definisi, $x = b^m$ dan $y = b^n$.

- **Perkalian:** $xy = b^m b^n = b^{m+n}$, jadi $\log_b(xy) = m + n = \log_b x + \log_b y$.
- **Pembagian:** $\frac{x}{y} = b^{m-n}$, jadi $\log_b \frac{x}{y} = m - n$.
- **Pangkat:** $x^k = (b^m)^k = b^{km}$, jadi $\log_b x^k = km = k \log_b x$.
- **Ganti basis:** dari $b^m = x$, ambil $\log_c$ kedua ruas: $m \log_c b = \log_c x$, sehingga $m = \frac{\log_c x}{\log_c b}$.



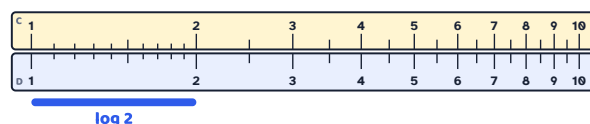
Sebelum ada kalkulator, sifat perkalian ini diwujudkan menjadi alat ajaib bernama **mistar hitung**: dua penggaris berskala logaritma. Menggeser penggaris berarti **menjumlahkan panjang**, dan menjumlahkan log berarti **mengalikan bilangan**. Lihat buktinya tanpa kata:

Dua mistar berskala logaritma (C dan D).
Jarak dari angka 1 ke angka x sebanding dengan $\log x$.



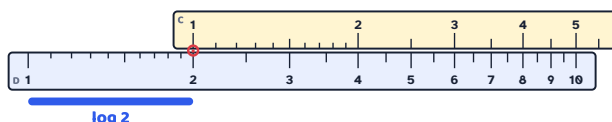
Langkah 1. Dua mistar berskala logaritma, C (atas) dan D (bawah). Jarak dari angka 1 ke angka x sebanding dengan $\log x$, sehingga angka-angkanya makin rapat ke kanan.

Pada mistar D, jarak dari 1 ke 2 adalah $\log 2$.



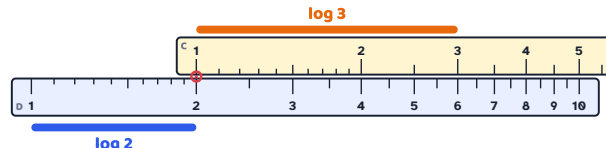
Langkah 2. Pada mistar D, jarak dari 1 ke 2 adalah $\log 2$ (garis biru).

Geser mistar C sejauh $\log 2$:
angka 1 di C kini tepat di atas angka 2 di D.



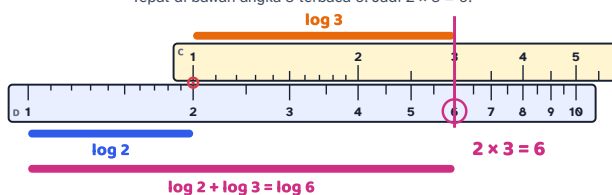
Langkah 3. Geser mistar C ke kanan sejauh $\log 2$, sampai angka 1 pada C tepat di atas angka 2 pada D.

Pada mistar C, jarak dari 1 ke 3 adalah $\log 3$.

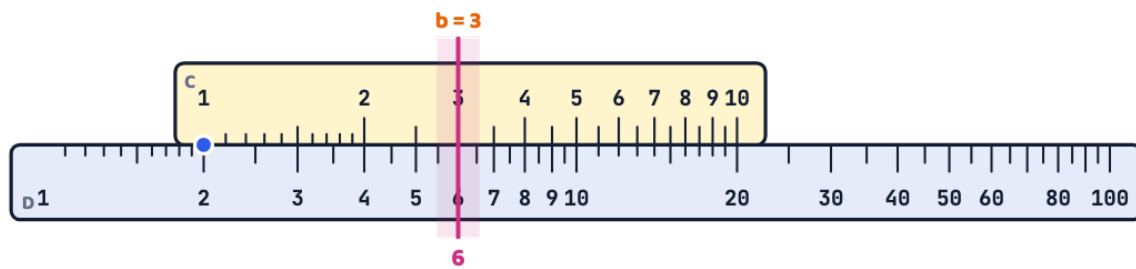


Langkah 4. Pada mistar C, jarak dari 1 ke 3 adalah $\log 3$ (garis oranye).

Total jarak = $\log 2 + \log 3$.
Tepat di bawah angka 3 terbaca 6. Jadi $2 \times 3 = 6$!



Langkah 5. Kedua jarak tersambung: $\log 2 + \log 3 = \log 6$.
Tepat di bawah angka 3 pada C terbaca 6 pada D.
Menjumlahkan panjang sama dengan mengalikan: $2 \times 3 = 6$!



$\log a = 0,301$

$\log b = 0,477$

$\log a + \log b = 0,778$

$$2 \times 3 = 6$$

seret mistar kuning dan garis magenta

$\log a$
0,301

$\log b$
0,4771

$\log a + \log b$
0,7782

bacaan = $a \times b$
6

Seret mistar atas (kuning) agar angka 1-nya berada di atas a , lalu seret garis baca magenta ke angka b pada mistar atas. Hasil $a \times b$ terbaca di mistar bawah. Coba $2,5 \times 4$, lalu 3×3 . Perhatikan tiga batang di bawah: biru + oranye selalu sama panjang dengan magenta.



AWAS JEBAKAN

$\log(a + b)$ tidak sama dengan $\log a + \log b$. Sifat perkalian hanya berlaku untuk perkalian di dalam log: $\log(ab) = \log a + \log b$. Contoh: $\log(1 + 1) = \log 2 \approx 0,301$, sedangkan $\log 1 + \log 1 = 0$.

Begitu juga $\frac{\log a}{\log b}$ tidak sama dengan $\log \frac{a}{b}$.



TRIK KAK LINTANG: TABEL LOG SEUKURAN SAKU

Hafalkan dua angka saja: $\log 2 \approx 0,301$ dan $\log 3 \approx 0,477$. Dengan sifat-sifat log kamu langsung mendapat $\log 4 = 2 \log 2 \approx 0,602$, $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 \approx 0,699$, $\log 6 \approx 0,778$, $\log 8 \approx 0,903$, dan $\log 9 \approx 0,954$. Hampir seluruh tabel log 1 sampai 10 ada di kepalamu!

Diketahui $\log 2 \approx 0,301$ dan $\log 3 \approx 0,477$. Tentukan $\log 12$, $\log 1,5$, dan $\log_2 3$.

1 $12 = 2^2 \cdot 3$, jadi $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3 \approx 0,602 + 0,477 = 1,079$.

2 $1,5 = \frac{3}{2}$, jadi $\log 1,5 = \log 3 - \log 2 \approx 0,477 - 0,301 = 0,176$.

3 Ganti basis: $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0,477}{0,301} \approx 1,585$.

$\log 12 \approx 1,079$, $\log 1,5 \approx 0,176$, dan $\log_2 3 \approx 1,585$. Cek kewajaran: 12 di antara 10 dan 100, jadi log-nya memang di antara 1 dan 2.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGHITUNG DIGIT BILANGAN RAKSASA

Bilangan bulat positif N mempunyai $\lfloor \log N \rfloor + 1$ digit. Contohnya $\log 2026 \approx 3,31$, jadi 2026 punya 4 digit. Berapa digit 2^{100} ? Hitung $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30,103$, jadi $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{31}$ dan 2^{100} punya **31 digit**. Bagian pecahannya juga bercerita: $10^{0,103} \approx 1,27$, sehingga $2^{100} \approx 1,27 \times 10^{30}$ dan digit pertamanya 1. Faktanya, $2^{100} = 1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376$.

14.6

Persamaan eksponen dan logaritma

Persamaan eksponen adalah persamaan yang variabelnya berada di pangkat, misalnya $2^x = 32$ atau $1,06^t = 2$. Persamaan logaritma memuat variabel di dalam log. Ada empat senjata utama untuk menaklukkannya.



STRATEGI MENYELESAIKAN PERSAMAAN EKSPONEN DAN LOGARITMA

1. **Samakan basis.** Untuk $a > 0$, $a \neq 1$: jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, maka $f(x) = g(x)$.
2. **Ambil logaritma kedua ruas** jika basis tidak bisa disamakan: $1,06^t = 2 \Rightarrow t \log 1,06 = \log 2$.
3. **Substitusi** $u = a^x$ jika a^{2x} dan a^x muncul bersama; persamaannya berubah menjadi persamaan kuadrat (Bab 11).
4. **Persamaan log:** jika $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, maka $f(x) = g(x)$. Setelah itu, **wajib** cek syarat numerus: $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

Selesaikan $3^{2x-1} = 27$.

- 1 Tulis 27 sebagai pangkat 3: $27 = 3^3$.
- 2 Basis sudah sama, jadi pangkatnya sama: $2x - 1 = 3$.
- 3 $2x = 4$, sehingga $x = 2$. Cek: $3^{2 \cdot 2 - 1} = 3^3 = 27$. ✓

$$x = 2.$$

Ayu menabung Rp5 juta dengan bunga majemuk 6% per tahun. Setelah berapa tahun tabungannya pertama kali mencapai Rp10 juta?

- 1 Model: $5 \cdot 1,06^t = 10$, jadi $1,06^t = 2$. Basis 1,06 dan 2 tidak bisa disamakan.
- 2 Ambil log kedua ruas: $t \log 1,06 = \log 2$, sehingga $t = \frac{\log 2}{\log 1,06} \approx \frac{0,30103}{0,02531} \approx 11,9$.
- 3 Bunga dibayarkan per tahun, jadi saldo baru melewati Rp10 juta pada akhir tahun ke-12. Cek: $5 \cdot 1,06^{11} \approx 9,49$ dan $5 \cdot 1,06^{12} \approx 10,06$ juta.

Sekitar 12 tahun, cocok dengan Aturan 72 ($72 : 6 = 12$). Perhatikan bahwa jawabannya tidak bergantung pada modal awal: Rp5 juta atau Rp500 juta sama-sama berlipat dua dalam ± 12 tahun.

COBA SENDIRI**Persamaan eksponen yang menyamar jadi kuadrat**

Selesaikan $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

- 1 Perhatikan $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Misalkan $u = 2^x$, dengan $u > 0$.
- 2 Persamaannya menjadi $u^2 - 6u + 8 = 0$, yaitu $(u - 2)(u - 4) = 0$, jadi $u = 2$ atau $u = 4$.
- 3 $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$, dan $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$.

Penyelesaiannya $x = 1$ atau $x = 2$. Kalau substitusi menghasilkan u negatif, nilai itu dibuang karena 2^x selalu positif.

KERJAKAN BERSAMA**Persamaan logaritma dan syarat numerus**

Selesaikan $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

- 1 Gabungkan dengan sifat perkalian: $\log_2[x(x - 2)] = 3$, jadi $x(x - 2) = 2^3 = 8$.
- 2 $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$, jadi $x = 4$ atau $x = -2$.
- 3 Cek syarat numerus: $x > 0$ dan $x - 2 > 0$, jadi $x > 2$. Nilai $x = -2$ gugur.

$x = 4$. Cek: $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$. ✓

**AWAS JEBAKAN**

Penyelesaian persamaan logaritma harus selalu dicek ke soal aslinya. Saat beberapa log digabung, syarat numerus bisa "terlupakan", sehingga muncul jawaban palsu seperti $x = -2$ di atas.

Sekarang kita bisa menjawab pertanyaan Ancil di komik dengan tepat. Bakteri tembus sejuta saat $2^{t/20} = 10^6$. Ambil log kedua ruas: $\frac{t}{20} \log 2 = 6$, jadi $t = \frac{120}{\log 2} \approx 398,6$ menit. Kurang dari **7 jam**, dari satu bakteri menjadi sejuta!

14.7 Skala logaritma: gempa, desibel, dan pH

Beberapa besaran di alam punya rentang yang luar biasa lebar. Bunyi yang membuat telinga terasa sakit intensitasnya sekitar satu triliun kali bunyi paling pelan yang masih bisa kita dengar. Gempa terbesar melepaskan energi triliunan kali gempa terkecil yang masih tercatat alat. Kalau digambar di garis bilangan biasa,

bilangan kecil akan berdesakan di ujung kiri. Solusinya: **skala logaritma**, yaitu skala yang setiap langkah samanya berarti **dikali** bilangan yang sama.

Garis bilangan biasa (0 sampai 1.000)



Garis bilangan logaritma (tiap langkah sama = dikali 10)



Pada garis bilangan biasa, 1, 10, dan 100 berdesakan. Pada garis logaritma, setiap "x10" mendapat jarak yang sama.

Tebak Dulu!

Gempa bermagnitudo 7 dibandingkan gempa bermagnitudo 5. Berapa kali lebih besar amplitudo getaran yang tercatat di seismograf (pada jarak yang sama)?

2 kali, karena $7 - 5 = 2$.

1,4 kali, karena $7 : 5 = 1,4$.

Sekitar 100 kali.

Sekitar 10 kali.

Jawabannya: sekitar 100 kali. Magnitudo adalah skala logaritma (gagasan awal Charles Richter, 1935). Setiap naik 1 angka, amplitudo getaran menjadi sekitar 10 kali. Naik 2 angka berarti $10 \times 10 = 100$ kali. Energi yang dilepaskan bahkan sekitar 1.000 kali lebih besar!

Untuk energi, setiap naik 1 magnitudo energinya dikali $10^{1,5} \approx 31,6$, atau kira-kira 32 kali. Jadi selisih magnitudo ΔM berarti perbandingan energi $10^{1,5 \Delta M}$.

$$\frac{E_B}{E_A} = 10^{1,5 (M_B - M_A)}$$

Naik 1 magnitudo, energinya sekitar 32 kali. Naik 2 magnitudo, sekitar 1.000 kali.

 M_A

Magnitudo gempa A

 M_B

Magnitudo gempa B

 E_B/E_A

Energi gempa B dibanding A kali

ENERGI GEMPA B DIBANDING A

501,2

kali

Selisih magnitudo **1,8**. Amplitudo getaran gempa B sekitar **63,096** kali amplitudo gempa A, dan energinya sekitar **501,2** kali.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ENERGI-GEMPA

Skala	Rumus (disederhanakan)	Naik 1 angka berarti...	Contoh
Magnitudo gempa	$M = \log A - \log A_0$	amplitudo ± 10 kali, energi ± 32 kali	Cianjur 2022: M 5,6 · Palu 2018: M 7,4 · Aceh 2004: $\pm M$ 9,1
Tingkat bunyi (desibel)	$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$	naik 10 dB = intensitas 10 kali	bisikan ± 30 dB · percakapan ± 60 dB · lalu lintas padat ± 80 dB · konser ± 100 –110 dB
Keasaman (pH)	$\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$	pH turun 1 = keasaman 10 kali	cuka ± 3 · kopi ± 5 · air murni 7 · air laut ± 8 · air sabun ± 9 –10



MAGNITUDO BUKAN UKURAN KERUSAKAN

Magnitudo mengukur energi di sumber gempa. Seberapa parah guncangan di suatu tempat (intensitas, misalnya skala MMI yang juga dilaporkan BMKG) bergantung pada kedalaman gempa, jarak, jenis tanah, dan kekuatan bangunan. Gempa Cianjur 2022 "hanya" bermagnitudo 5,6, tetapi sangat dangkal dan dekat permukiman sehingga menimbulkan banyak korban. Bangunan tahan gempa menyelamatkan nyawa.



MATEMATIKA NUSANTARA: GEMELAN DAN TELINGA LOGARITMIK

Telinga kita mendengar **perbandingan** frekuensi, bukan selisihnya. Nada yang frekuensinya dua kali lipat terdengar "sama, tetapi lebih tinggi": itulah satu *gembyang* (oktaf). Laras slendro membagi satu gembyang menjadi lima langkah yang kira-kira sama besar. Agar terdengar sama besar, setiap langkah harus **mengalikan** frekuensi dengan bilangan yang sama, misalnya r , sehingga $r^5 = 2$ dan $r = 2^{1/5} \approx 1,149$. Jadi deretan nada slendro adalah barisan eksponensial, dan "jarak" antarnada diukur dengan logaritma! (Setiap perangkat gamelan punya laras khas buatan pembuatnya, jadi angka ini hanya perkiraan ideal.)

MITOS

" $\log(a + b) = \log a + \log b$."

MITOS

"Gempa M 6 hanya sedikit lebih kuat daripada gempa M 5."

FAKTA

Sifat itu hanya berlaku untuk **perkalian**

:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

. Contoh:

$$\log(5 + 5) = \log 10 = 1$$

, padahal

$$\log 5 + \log 5 \approx 1,398$$

.

FAKTA

Magnitudo adalah skala logaritma. Naik 1 angka berarti amplitudo getaran ± 10 kali dan energi ± 32 kali. Gempa M 7 melepaskan energi ± 1.000 kali gempa M 5.

MITOS

"Bunga 1% per bulan sama saja dengan 12% per tahun."

MITOS

"Pertumbuhan eksponensial selalu kelihatan cepat."

FAKTA

Jika bunganya ikut berbunga setiap bulan, setahun menjadi $1,01^{12} \approx 1,1268$ kali, yaitu $\pm 12,68\%$. Selisih kecil ini membesar bila waktunya panjang atau jumlahnya besar.

FAKTA

Di awal justru tampak lambat. Eceng gondok yang berlipat dua tiap hari baru menutupi $\pm 3\%$ danau lima hari sebelum danau tertutup penuh. Bahayanya: saat terlihat, sering sudah terlambat.



BMKG & gempa

BMKG mengumumkan magnitudo gempa dalam hitungan menit. Selisih 1 magnitudo berarti energi sekitar 32 kali.



Jadwal minum obat

Dokter dan apoteker memakai waktu paruh obat untuk menentukan jarak antardosis, misalnya "tiap 8 jam".



Tabungan & utang

Bunga majemuk membuat tabungan tumbuh eksponensial, tetapi juga membuat utang yang tidak dibayar membengkak.



Umur fosil

Arkeolog menaksir umur tulang atau kayu kuno dari sisa karbon-14 yang waktu paruhnya sekitar 5.730 tahun.



Earphone & desibel

Mendengarkan musik keras (di atas ± 85 dB) terlalu lama bisa merusak telinga. Naik 10 dB berarti intensitas bunyi 10 kali.



Pesan berantai

Jika setiap orang meneruskan pesan ke 5 orang, dalam 12 langkah pesan bisa mencapai $5^{12} \approx 244$ juta orang. Itulah sebabnya hoaks cepat viral, dan skema berantai "rekrut 5 orang" pasti runtuh.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MEMBANDINGKAN RAKSASA DENGAN LOGARITMA

Mana yang lebih besar, 100^{101} atau 101^{100} ? Keduanya punya sekitar 200 digit, jadi mustahil dihitung langsung. Ambil log: $\log 100^{101} = 101 \cdot 2 = 202$, sedangkan $\log 101^{100} = 100 \log 101 \approx 200,43$. Jadi 100^{101} lebih besar, kira-kira $10^{1,57} \approx 37$ kali! Secara umum, untuk $n \geq 3$ berlaku $n^{n+1} > (n+1)^n$. Buktinya memakai bilangan e : $\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3 \leq n$.

Cek Cepat

Nilai $\log_2 64$ adalah...

32

8

6

128

Zat radioaktif 80 gram memiliki waktu paruh 5 hari. Setelah 15 hari, zat yang tersisa...

10 gram

0 gram

26,7 gram

40 gram

Nilai $\log 50 + \log 2$ adalah...

$\log 52$

100

25

2

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. A • 3. D



Tantangan Rumah: peluruhan dengan uang koin

Bahan: 50 uang koin (boleh campuran), wadah atau kotak, buku catatan, pensil.

1. Masukkan semua koin ke wadah, kocok, lalu tuang ke atas meja.
2. Singkirkan semua koin yang menunjukkan sisi **gambar**. Koin-koin itu "meluruh".
3. Hitung dan catat koin yang tersisa (sisi angka). Itulah hasil putaran 1.
4. Masukkan lagi koin yang tersisa ke wadah, kocok, tuang, dan ulangi sampai semua koin habis.
5. Buat grafik: putaran (sumbu mendatar) dan sisa koin (sumbu tegak). Gambar juga kurva $50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ untuk dibandingkan.

Pertanyaan: Berapa "waktu paruh" koinmu, dalam putaran? Mengapa hasil percobaanmu tidak persis sama dengan rumus? Jika koin diganti dadu dan yang disingkirkan hanya dadu yang muncul angka 6, apakah peluruhannya lebih cepat atau lebih lambat?



RINGKASAN KILAT

Bab 14 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- membedakan pertumbuhan **linear** (ditambah) dan **eksponensial** (dikali), lalu memodelkannya dengan $N = N_0 \cdot b^{t/T}$
- menghitung **waktu paruh** dan waktu lipat dua pada obat, zat radioaktif, dan tabungan
- menjelaskan asal-usul **bilangan e** lewat bunga majemuk
- memahami **logaritma** sebagai "pangkat yang dicari" dan memakai sifat-sifatnya
- menyelesaikan **persamaan eksponen dan logaritma**, serta membaca skala logaritma seperti magnitudo gempa, desibel, dan pH



Istilah kunci

pertumbuhan linear

pertumbuhan eksponensial

fungsi eksponen

peluruhan eksponensial

Waktu paruh

bunga tunggal

bunga majemuk

logaritma natural

basis

numerus

mistar hitung

skala logaritma



Rumus penting

$$N = N_0 \cdot b^{t/T}$$

Pertumbuhan & peluruhan eksponensial. Mulai dari N_0 . Setiap lewat satu periode T , jumlahnya dikali b . Setelah waktu t , sudah lewat t/T periode.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$$

Bunga majemuk. Setiap periode, saldo dikali $(1 + r/100n)$. Dalam t tahun ada $n \cdot t$ periode, jadi pengali itu dipakai $n \cdot t$ kali.

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Logaritma: pangkat yang dicari. Logaritma menjawab satu pertanyaan: b harus dipangkatkan berapa supaya hasilnya x ?

$$\frac{E_B}{E_A} = 10^{1,5(M_B - M_A)}$$

Perbandingan energi dua gempa. Naik 1 magnitudo, energinya sekitar 32 kali. Naik 2 magnitudo, sekitar 1.000 kali.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Kenaikan persen yang berulang tidak boleh dijumlahkan begitu saja.
- Dua kali waktu paruh tidak membuat zat habis.
- Bunga harian yang kelihatan kecil bisa membengkak menjadi sangat besar.

🏔️ Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=14

🧩 Teka-teki untuk Bab 15

Konon, seorang raja ingin memberi hadiah kepada penemu permainan catur. Sang penemu hanya meminta beras: 1 butir di kotak pertama, 2 butir di kotak kedua, 4 butir di kotak ketiga, dan seterusnya, selalu berlipat dua sampai kotak ke-64. Raja tertawa, "Hanya beras?" Berapa butir beras di kotak terakhir saja? Dan berapa totalnya di seluruh papan?

▼ Intip petunjuk

Kotak ke-64 berisi 2^{63} butir. Dengan logaritma: $63 \log 2 \approx 18,96$, jadi $2^{63} \approx 9,2 \times 10^{18}$ butir. Totalnya $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$, kira-kira $1,8 \times 10^{19}$ butir: lebih banyak daripada beras yang dipanen seluruh dunia selama ratusan tahun! Mengapa jumlahnya tepat $2^{64} - 1$? Bab 15 akan membuka rahasia **deret geometri**.

15 Barisan & Deret: Dari Sebutir Beras ke Tak Hingga

Sebutir beras yang berlipat dua di setiap petak catur bisa mengalahkan panen padi seluruh dunia. Seorang anak menjumlahkan 1 sampai 100 dalam sekejap. Tak hingga banyak potongan bisa pas mengisi satu persegi. Selamat datang di dunia pola yang terus berjalan!

Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **pola** dan menuliskan rumus **suku ke- n** sebuah barisan;
- membedakan **barisan aritmetika** (beda tetap) dan **barisan geometri** (rasio tetap), lalu menghitung sukunya;
- menjumlahkan **deret aritmetika** dengan trik Gauss dan **deret geometri** dengan trik "kalikan rasio, lalu kurangkan";
- menghitung jumlah **deret geometri tak hingga** dan menjelaskan paradoks Zeno;
- memakai **notasi sigma** untuk tabungan rutin, anuitas, dan cicilan.

HADIAH DARI ANCIL

KOMIK • 4 PANEL

Lomba catur tujuh belasan di pos ronda

ANCIL

Dimas, kalau kamu menang, pilih hadiahmu: uang satu juta rupiah, atau beras di papan catur ini.

ANCIL

Petak pertama 1 butir, petak kedua 2 butir, lalu 4, 8, 16... selalu berlipat dua sampai petak ke-64.

DIMAS

Beras doang? Paling cuma sekantong. Aku pilih uang sejuta!

1, 2, 4, 8, ...

KAK LINTANG

Hati-hati, Dimas. Petak ke-64 saja berisi 2^{63} butir, kira-kira $9,2 \times 10^{18}$. Beratnya melebihi panen padi seluruh dunia selama lebih dari seratus tahun!



$$\begin{array}{l} \text{petak ke-64:} \\ 2^{63} \text{ butir} \\ \approx 9,2 \times 10^{18} \end{array}$$



GLEK!

Ancil tersenyum penuh rahasia...**ANCIL**

Totalnya $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63}$. Aku bisa menjumlahkan 64 bilangan raksasa itu dalam tiga detik!

AYU

Tiga detik? Pasti ada pola tersembunyi...



$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \\ \dots + 2^{63} \\ = ? \end{array}$$

**Tebak Dulu!**

Kalau seluruh beras di 64 petak itu dikumpulkan, kira-kira seberat apa? (Anggap sebutir beras $\pm 0,02$ gram.)

Satu karung beras 25 kg.

Satu truk penuh, ± 8 ton.

Isi semua gudang beras di satu provinsi.

Ratusan kali panen padi seluruh dunia dalam setahun.

Jawabannya: ratusan kali panen padi dunia! Totalnya tepat 18.446.744.073.709.551.615 butir. Dikali 0,02 gram, beratnya ± 369 miliar ton, padahal panen padi seluruh dunia ± 800 juta ton per tahun. Butuh ± 460 tahun panen sedunia untuk membayar hadiah Ancil. Di subbab 15.4 kamu akan menjumlahkannya sendiri dalam tiga detik, persis seperti Ancil.

15.1 Pola barisan: bilangan yang berbaris rapi

Nomor rumah di satu sisi jalan: 1, 3, 5, 7, ... Jadwal angkot dari terminal: 06.00, 06.15, 06.30, ... Banyak lipatan kertas: 1, 2, 4, 8, ... Semuanya adalah daftar bilangan yang tersusun menurut suatu **aturan**. Matematikawan menyebutnya **barisan**.



DEFINISI

Barisan adalah daftar bilangan yang berurutan menurut suatu aturan. Setiap bilangannya disebut **suku**. Suku pertama ditulis U_1 , suku kedua U_2 , dan suku ke- n ditulis U_n .

- **Rumus eksplisit** langsung memberi suku ke- n , misalnya $U_n = 2n + 1$ menghasilkan 3, 5, 7, 9, ...
- **Rumus rekursif** memberi suku berikutnya dari suku sebelumnya, misalnya $U_1 = 3$ dan $U_n = U_{n-1} + 2$.

Bahasa sederhana • Bayangkan barisan seperti antrean bilangan. Setiap bilangan punya nomor urut: yang pertama, yang kedua, dan seterusnya. Kalau kamu tahu aturannya, kamu bisa menebak bilangan nomor berapa pun tanpa menulis semuanya!

Cara terbaik menemukan aturan adalah **membangun polanya sendiri**. Di lab berikut, setiap pola dibuat dari batang korek api atau titik. Hitung bahannya, cari selisihnya, lalu tebak rumusnya sebelum menyalakan tombol rumus.

LAB MINI Pabrik pola korek api

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

Pola ke-3: 10 batang

■ oranye = tambahan baru



n	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	4	7	10	?	?	?	?	?
tambahan		+3	+3	?	?	?	?	?

Tebak isi kotak "?" sebelum menggeser n !

banyak bahan U_n
10

tambahan dari pola sebelumnya
3

jenis barisan

tebak dulu, lalu nyalakan rumus

Pilih pola, lalu geser n . Batang atau titik **oranye** adalah tambahan baru dari pola sebelumnya. Pola mana yang selalu bertambah dengan jumlah yang sama? Tebak suku ke-100 sebelum menyalakan **Tampilkan rumus!**

CONTOH Menebak suku berikutnya

Pola titik berbentuk persegi menghasilkan barisan 1, 4, 9, 16, ... Tentukan dua suku berikutnya dan suku ke-20.

1 Perhatikan: $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$. Jadi $U_n = n^2$.

2 Dua suku berikutnya: $U_5 = 25$ dan $U_6 = 36$.

3 Suku ke-20: $U_{20} = 20^2 = 400$.

Suku berikutnya 25 dan 36, sedangkan $U_{20} = 400$. Selisih antarsukunya 3, 5, 7, 9, ..., yaitu bilangan ganjil berurutan.



AWAS JEBAKAN

Beberapa suku pertama saja belum tentu cukup untuk memastikan sebuah pola. Taruh titik-titik di keliling lingkaran, lalu hubungkan setiap pasang titik dengan garis lurus (jangan sampai ada tiga garis yang berpotongan di satu titik). Untuk 1, 2, 3, 4, 5 titik, lingkaran terbagi menjadi 1, 2, 4, 8, 16 daerah. Pasti 32 untuk 6 titik? Ternyata hanya **31**! Karena itu, pola harus dibuktikan, bukan sekadar ditebak.



TAMU DARI MASA LALU

Pada tahun 1202, Leonardo dari Pisa (dikenal sebagai Fibonacci) menulis buku *Liber Abaci*. Di dalamnya ada teka-teki kelinci: setiap pasang kelinci dewasa melahirkan sepasang anak tiap bulan, dan anak kelinci menjadi dewasa setelah sebulan. Banyak pasangan kelinci tiap bulan membentuk barisan 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Setiap suku adalah jumlah dua suku sebelumnya. Barisan ini sudah dikenal lebih dulu oleh para ahli puisi dan musik di India.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

REKURENSI FIBONACCI DAN RASIO EMAS

Barisan Fibonacci didefinisikan secara rekursif: $F_1 = F_2 = 1$ dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Bagilah suku dengan suku sebelumnya: $\frac{8}{5} = 1,6$, $\frac{13}{8} = 1,625$, $\frac{21}{13} \approx 1,615$, $\frac{89}{55} \approx 1,618$. Rasionya mendekati **rasio emas** $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Ada pula rumus eksplisit yang mengejutkan (rumus Binet):

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rumus ini penuh bilangan irasional $\sqrt{5}$, tetapi hasilnya selalu bilangan bulat! Coba periksa untuk $n = 1$ dan $n = 2$.

Barisan aritmetika: langkah yang selalu sama

Dimas mengisi celengan Rp10.000 di minggu pertama. Setiap minggu ia menambah Rp2.000. Isi celengannya: 10.000, 12.000, 14.000, 16.000, ... Setiap suku diperoleh dengan **menambahkan bilangan yang sama**. Barisan seperti ini sangat sering kita temui.



DEFINISI

Barisan aritmetika adalah barisan yang selisih dua suku berurutannya selalu sama. Selisih tetap itu disebut **beda** dan ditulis b :

$$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1}.$$

Jika $b > 0$ barisannya naik, jika $b < 0$ barisannya turun, dan jika $b = 0$ semua sukunya sama.



Tebak Dulu!

Di sepanjang jalan desa yang panjangnya 1 km, dipasang tiang lampu setiap 50 m, termasuk di kedua ujung jalan. Berapa banyak tiang lampu?

20 tiang, karena $1.000 : 50 = 20$.

21 tiang.

19 tiang, karena ujungnya tidak dihitung.

50 tiang.

Jawabannya: 21 tiang. Posisi tiang membentuk barisan aritmetika 0, 50, 100, ..., 1.000 meter. Ada 20 jarak antartiang, tetapi tiangnya selalu satu lebih banyak daripada jaraknya. Jebakan "kurang satu" ini adalah alasan munculnya $n - 1$ di rumus suku ke- n .



SUKU KE-N BARISAN ARITMETIKA

Untuk barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b ,

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Dari suku pertama ke suku ke- n ada $n - 1$ langkah, dan setiap langkah menambah b .

Bahasa sederhana • Gampangnya begini: suku pertama sudah ada. Untuk sampai ke suku ke-10, kamu cukup melangkah 9 kali. Kalau setiap langkah naik 2, suku ke-10 = suku pertama + 9×2 .

RUMUS HIDUP Suku ke- n barisan aritmetika

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Mulai dari suku pertama, lalu tambahkan beda sebanyak $n - 1$ kali. Hanya ada $n - 1$ langkah dari suku pertama ke suku ke- n .



SUKU KE- n

39

barisan naik

Barisannya **3, 7, 11, 15, ...** Dari suku pertama melangkah **9** kali dengan beda **4**: $3 + 9 \times (4) = 39$.

Cek satuan: Satuan suku sama dengan satuan suku pertama dan beda (rupiah tetap rupiah, meter tetap meter).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-SUKU-ARITMETIKA



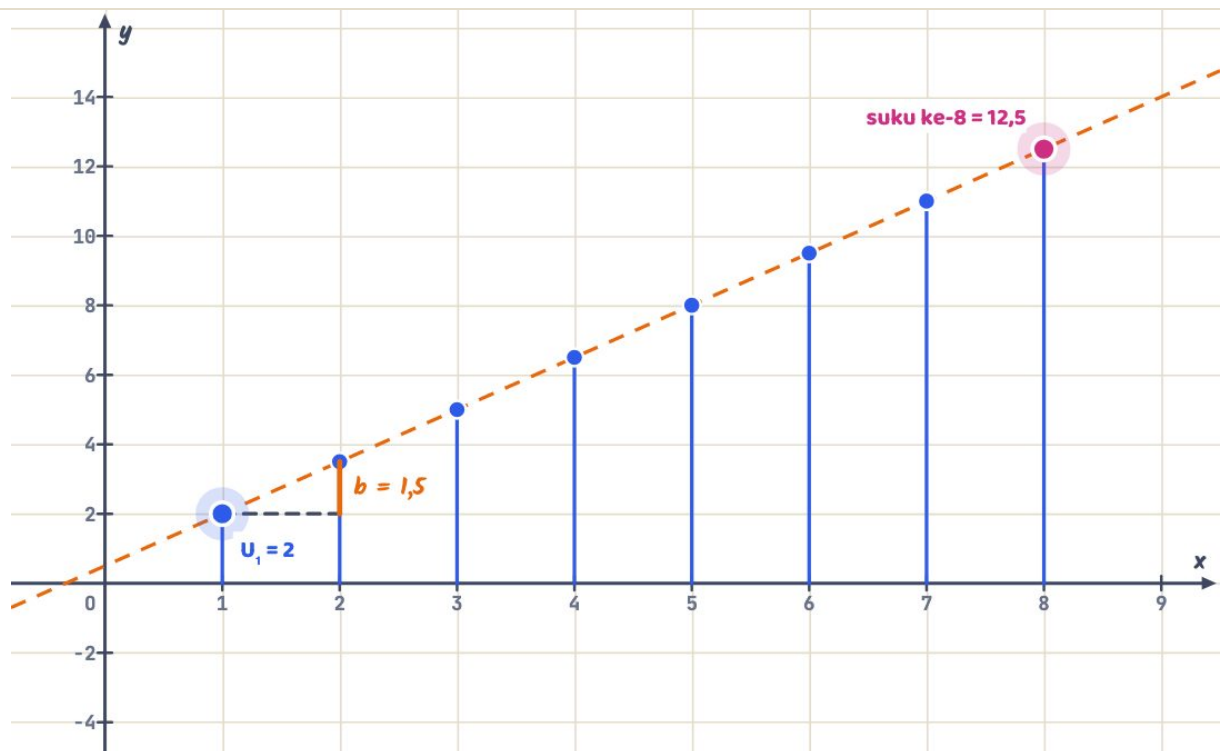
AWAS JEBAKAN

Kesalahan paling sering adalah menulis $U_n = a + nb$. Coba periksa dengan $n = 1$: rumus yang benar harus menghasilkan suku pertama sendiri, yaitu $U_1 = a + 0 \cdot b = a$. Jadi pengalinya $n - 1$, bukan n .

Kalau titik-titik (n, U_n) digambar di bidang Kartesius, ada kejutan: semuanya berbaris pada **satu garis lurus**. Beda b tidak lain adalah kemiringan garis itu (ingat Bab 9). Barisan aritmetika adalah fungsi linear yang hanya "dicipi" pada bilangan asli.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 2 + 1,5(n - 1)$$



naik: garisnya mendaki

Suku terakhir
12,5

Kemiringan garis
1,5

Jumlah semua titik
58

Seret titik biru ke atas atau ke bawah untuk mengubah suku pertama, dan seret titik magenta ke kanan untuk menambah suku. Geser beda b : garis putus-putus ikut menjadi lebih curam atau lebih landai. Setiap batang biru naik tepat b dari batang sebelumnya.

CONTOH Kursi gedung pertunjukan

Baris pertama sebuah gedung pertunjukan berisi 20 kursi. Setiap baris di belakangnya berisi 2 kursi lebih banyak daripada baris di depannya. Berapa kursi di baris ke-15?

1 Banyak kursi per baris membentuk barisan aritmetika dengan $a = 20$ dan $b = 2$.

2 $U_{15} = a + (15 - 1)b = 20 + 14 \times 2 = 48$.

Baris ke-15 berisi 48 kursi. Cek cepat: dari baris 1 ke baris 15 ada 14 langkah, bukan 15.

KERJAKAN BERSAMA Dua suku yang berjauhan

Suku ke-3 sebuah barisan aritmetika adalah 11, sedangkan suku ke-8 adalah 31. Tentukan suku ke-20.

1 Dari suku ke-3 ke suku ke-8 ada $8 - 3 = 5$ langkah, dan nilainya naik $31 - 11 = 20$. Jadi $b = \frac{20}{5} = 4$.

2 Mundur ke suku pertama: $a = U_3 - 2b = 11 - 8 = 3$.

3 $U_{20} = 3 + 19 \times 4 = 79$.

$U_{20} = 79$. Barisannya 3, 7, 11, 15, ..., dan memang suku ke-8 adalah $3 + 7 \times 4 = 31$.



TRIK KAK LINTANG

Untuk dua suku yang berjauhan, pakai rumus "naik dibagi langkah": $b = \frac{U_q - U_p}{q - p}$. Ini sama persis dengan kemiringan garis di Bab 9: perubahan nilai dibagi perubahan posisi.

ADU CEPAT Suku ke-n kilat

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Beda = suku kedua – suku pertama. Lalu $U_n = a + (n - 1)b$. Contoh: 4, 7, 10, ... punya beda 3, jadi $U_{10} = 4 + 9 \times 3 = 31$.



MATEMATIKA NUSANTARA

Naiklah ke tiga teras melingkar di bagian atas Candi Borobudur. Di teras paling bawah berdiri 32 stupa berlubang, di teras tengah 24 stupa, dan di teras paling atas 16 stupa. Barisan 32, 24, 16 adalah barisan aritmetika dengan beda -8 , dan jumlahnya $32 + 24 + 16 = 72$ stupa, mengelilingi satu stupa induk di puncak. Pola yang tertata seperti ini membuat candi berumur lebih dari 1.200 tahun itu tampak seimbang dan megah.

15.3 Deret aritmetika dan trik Gauss

Kalau suku-suku sebuah barisan **dijumlahkan**, hasilnya disebut **deret**. Barisan 1, 2, 3, ..., 100 menghasilkan deret $1 + 2 + 3 + \dots + 100$. Jumlah n suku pertama ditulis S_n . Menjumlahkan satu per satu tentu bisa, tetapi lama dan mudah salah. Ada cara yang jauh lebih indah.



TAMU DARI MASA LALU

Konon, sekitar tahun 1786, seorang guru di Jerman menyuruh murid-muridnya menjumlahkan 1 sampai 100 agar kelas tenang. Baru sebentar, Carl Friedrich Gauss yang berumur sekitar 9 tahun sudah menyerahkan jawaban: 5.050. Detail kisah ini mungkin sudah dibumbui, tetapi triknya nyata. Jauh sebelumnya, ahli matematika India Aryabhata (± 499 M) juga sudah menuliskan aturan menjumlahkan deret aritmetika.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = ?$$

Langkah 1. Kita ingin menghitung $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$. Menjumlahkan satu per satu? Lama sekali, dan gampang salah hitung.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \text{ dibalik!}$$

Langkah 2. Tulis jumlah yang sama sekali lagi, tetapi **dibalik**: dari 100 turun sampai 1. Isinya sama, jadi nilainya tetap S .

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \text{ dibalik!}$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

Langkah 3. Jumlahkan per kolom: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, dan seterusnya. Setiap kolom selalu bernilai 101!

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \text{ dibalik!}$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

$$2S = 100 \times 101 = 10.100$$

Langkah 4. Ada 100 kolom, masing-masing bernilai 101. Dua baris itu bersama-sama bernilai $2S$, jadi $2S = 100 \times 101 = 10.100$.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \text{ dibalik!}$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

$$2S = 100 \times 101 = 10.100$$

$$S = 10.100 : 2 = 5.050$$

Langkah 5. Karena setiap bilangan terhitung dua kali, bagi dua: $S = 5.050$. Inilah trik yang membuat Gauss kecil selesai paling cepat.

Bahasa sederhana • Intinya: pasangan bilangan terkecil dengan terbesar, yang kedua terkecil dengan yang kedua terbesar, dan seterusnya. Setiap pasangan jumlahnya sama. Hitung saja ada berapa pasangan, lalu kalikan.

Trik yang sama bekerja untuk **semua** deret aritmetika, karena suku dari depan naik b dan suku dari belakang turun b . Jumlah setiap pasangan selalu "suku pertama + suku terakhir".



JUMLAH N SUKU PERTAMA DERET ARITMETIKA

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Dalam kata-kata: *jumlah = banyak suku × rata-rata suku pertama dan suku terakhir.*

▼ Bukti (trik Gauss untuk deret aritmetika umum)

Tulis S_n maju dan mundur, lalu jumlahkan per kolom:

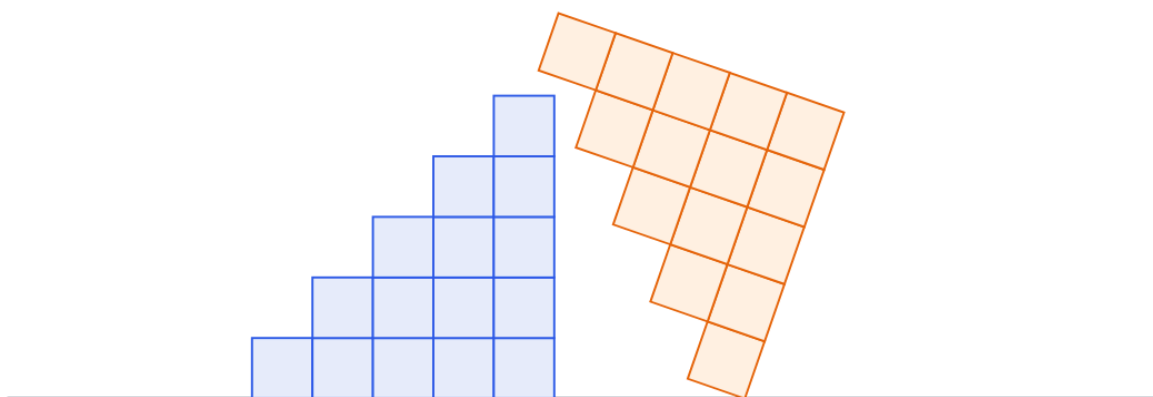
$$\begin{aligned} S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + U_n \\ S_n &= U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \cdots + a \\ \hline 2S_n &= (a + U_n) + (a + U_n) + \cdots + (a + U_n) = n(a + U_n). \end{aligned}$$

Jadi $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$. Substitusikan $U_n = a + (n - 1)b$ untuk memperoleh bentuk kedua.



Trik Gauss juga punya **bukti tanpa kata**. Susun deretnya sebagai anak tangga dari kotak satuan, buat salinannya, putar salinan itu setengah putaran, lalu tumpuk. Hasilnya selalu persegi panjang!

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = ?$$



anak tangga terakhir U_n
5

persegi panjang = 2 tangga
?

S_n = setengahnya
? (tekan ▶)

Atur banyak anak tangga n , tinggi anak tangga pertama a , dan kenaikan b . Tekan ▶ **Jalankan**: tangga oranye berputar 180° lalu menumpuk tepat di atas tangga biru. Mengapa hasilnya selalu persegi panjang selebar n dan setinggi $a + U_n$?

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)b)$$

Banyak suku dikali rata-rata suku pertama dan suku terakhir. Itulah trik Gauss dalam satu baris.

 a

Suku pertama

 b

Beda

 n

Banyak suku

 S_n

Jumlah n suku

JUMLAH N SUKU

5.050

$$\star 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$$

Suku pertama **1**, suku terakhir $U_n = 100$. Rata-ratanya **50,5**, dikali banyak suku **100**, hasilnya **5.050**.

Cek satuan: Satuan jumlah sama dengan satuan sukunya, misalnya rupiah atau kursi.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DERET-ARITMETIKA



TRIK KAK LINTANG

Ingat satu kalimat saja: **jumlah = banyak suku × rata-rata ujung-ujungnya**. Contoh: $5 + 8 + 11 + \dots + 50$. Banyak suku $= \frac{50-5}{3} + 1 = 16$, rata-rata ujung $= \frac{5+50}{2} = 27,5$, jadi jumlahnya $16 \times 27,5 = 440$.

Ayu menabung Rp2.000 pada hari pertama. Setiap hari berikutnya ia menabung Rp500 lebih banyak daripada hari sebelumnya. Berapa total tabungannya setelah 30 hari?

- 1 Setoran harian membentuk barisan aritmetika: $a = 2.000$, $b = 500$, $n = 30$.
- 2 Setoran hari ke-30: $U_{30} = 2.000 + 29 \times 500 = 16.500$.
- 3 $S_{30} = \frac{30}{2}(2.000 + 16.500) = 15 \times 18.500 = 277.500$.

Tabungan Ayu menjadi Rp277.500. Bandingkan dengan menabung tetap Rp2.000 per hari yang hanya menghasilkan Rp60.000.



ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pasangkan suku pertama dan terakhir: jumlah = banyak suku $\times$ (pertama + terakhir) : 2.



HUBUNGAN SUKU DAN JUMLAH

Karena $S_n = S_{n-1} + U_n$, suku ke- n bisa dicari dari dua jumlah berurutan: $U_n = S_n - S_{n-1}$.

Misalnya, jika $S_n = n^2$ untuk setiap n , maka $U_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$. Itulah bilangan ganjil 1, 3, 5, 7, ...



LANJUT • IB & OLIMPIADE

KEJUTAN: JUMLAH KUBIK

Perhatikan pola ini:

$$1^3 = 1^2, \quad 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2.$$

Bilangan 1, 3, 6, 10 adalah jumlah deret $1 + 2 + \dots + n$. Jadi $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$: jumlah kubik sama dengan kuadrat jumlah! Rumus seperti ini dibuktikan dengan **induksi matematika** (Bab 35). Sebagai pasangannya, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

15.4 Barisan dan deret geometri: berlipat ganda

Kembali ke hadiah Ancil: 1, 2, 4, 8, 16, ... Kali ini suku berikutnya bukan diperoleh dengan menambah, melainkan dengan **mengalikan** bilangan yang sama. Barisan "berlipat" seperti ini tumbuh jauh lebih cepat daripada yang

dibayangkan intuisi kita.



DEFINISI

Barisan geometri adalah barisan yang hasil bagi dua suku berurutannya selalu sama. Hasil bagi tetap itu disebut **rasio** dan ditulis r :

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}}.$$



SUKU KE-N BARISAN GEOMETRI

Untuk barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r ,

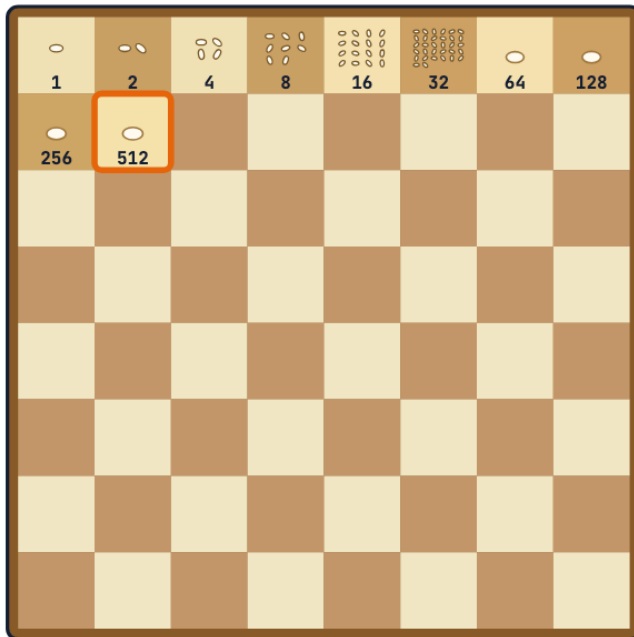
$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Dari suku pertama ke suku ke- n ada $n - 1$ langkah, dan setiap langkah mengalikan dengan r .

	Barisan aritmetika	Barisan geometri
Aturan	tambah beda b	kali rasio r
Cara mengecek	$U_n - U_{n-1}$ selalu sama	$U_n : U_{n-1}$ selalu sama
Suku ke-n	$a + (n - 1)b$	ar^{n-1}
Jumlah n suku	$\frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$	$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1$
Titik-titiknya	pada garis lurus	pada kurva eksponensial (Bab 14)
Contoh	3, 7, 11, 15, ...	3, 6, 12, 24, ...

LAB MINI Beras di papan catur

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15



Petak ke-10

isi = $2^9 = 512$ butir

total petak 1-10:

$2^{10} - 1 = 1.023$ butir

massa $\approx 20,46$ gram

kurang dari sekantong 1 kg



Trik tiga detik Ancil

petak berikutnya: $2^{10} = 1.024$

total sejauh ini = itu - 1 = 1.023

ketuk petak mana saja

isi petak terakhir (butir)

512

total butir

1.023

massa total ($\pm 0,02$ g/butir)

20,46 gram

Tekan ► **Jalankan** atau ketuk sebuah petak. Petak 1 sampai 6 menampilkan butirnya satu per satu, setelah itu butirnya terlalu banyak untuk digambar! Perhatikan kotak kuning: total semua petak selalu **satu butir kurang** dari isi petak berikutnya. (Anggap 1 butir $\pm 0,02$ gram.)

Kotak kuning di lab itu menyimpan trik tiga detik Ancil: $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$. Mengapa? Kalikan seluruh deret dengan 2. Setiap suku bergeser satu petak ke depan, sehingga hampir semua suku muncul di kedua deret dan saling menghapus saat dikurangkan. Cara "kalikan rasio, lalu kurangkan" ini bekerja untuk semua deret geometri.



JUMLAH N SUKU PERTAMA DERET GEOMETRI

Untuk $r \neq 1$,

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Kedua bentuk itu sama; pakai bentuk pertama bila $r > 1$ dan bentuk kedua bila $r < 1$ agar angkanya positif. Untuk $r = 1$, semua suku sama dan $S_n = na$.

▼ **Bukti: kalikan rasio, lalu kurangkan**

$$\begin{aligned} rS_n &= ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \\ S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ \hline rS_n - S_n &= ar^n - a. \end{aligned}$$

Semua suku tengah saling menghapus. Jadi $(r - 1)S_n = a(r^n - 1)$, sehingga $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$. Untuk beras Ancil, $a = 1$, $r = 2$, $n = 64$: $S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ butir.



JALAN PINTAS ANCIL

Untuk deret berlipat dua, ingat: **total semua petak sebelumnya = isi petak berikutnya - 1**. Jadi $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1 = 31$, dan $1 + 2 + \dots + 512 = 1024 - 1 = 1023$. Seandainya kamu punya sekeping uang Rp1, Rp2, Rp4, Rp8, ... sampai Rp512, kamu bisa membayar *setiap* harga bulat dari Rp1 sampai Rp1.023 dengan uang pas. Itulah rahasia bilangan biner di komputermu!

RUMUS HIDUP

Jumlah deret geometri

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Kalikan deret dengan rasionya, kurangkan dari deret semula, dan hampir semua suku saling menghapus.

a Suku pertama

r Rasio

n Banyak suku

S_n Jumlah n suku

JUMLAH N SUKU

1.023

suku makin besar: tumbuh meledak

Suku-sukunya **1, 2, 4, ...,** sampai suku ke-**10** yaitu **512**. Jumlahnya **1.023**.

Cek satuan: Satuan jumlah sama dengan satuan suku pertama. Bilangan yang sangat besar ditulis dalam notasi ilmiah (Bab 6).

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DERET-GEOMETRI

Seberapa cepat sebenarnya barisan geometri tumbuh? Adu dua barisan berikut. Barisan aritmetika biasanya unggul di awal, tetapi barisan geometri dengan $r > 1$ pasti menyalip, cepat atau lambat.

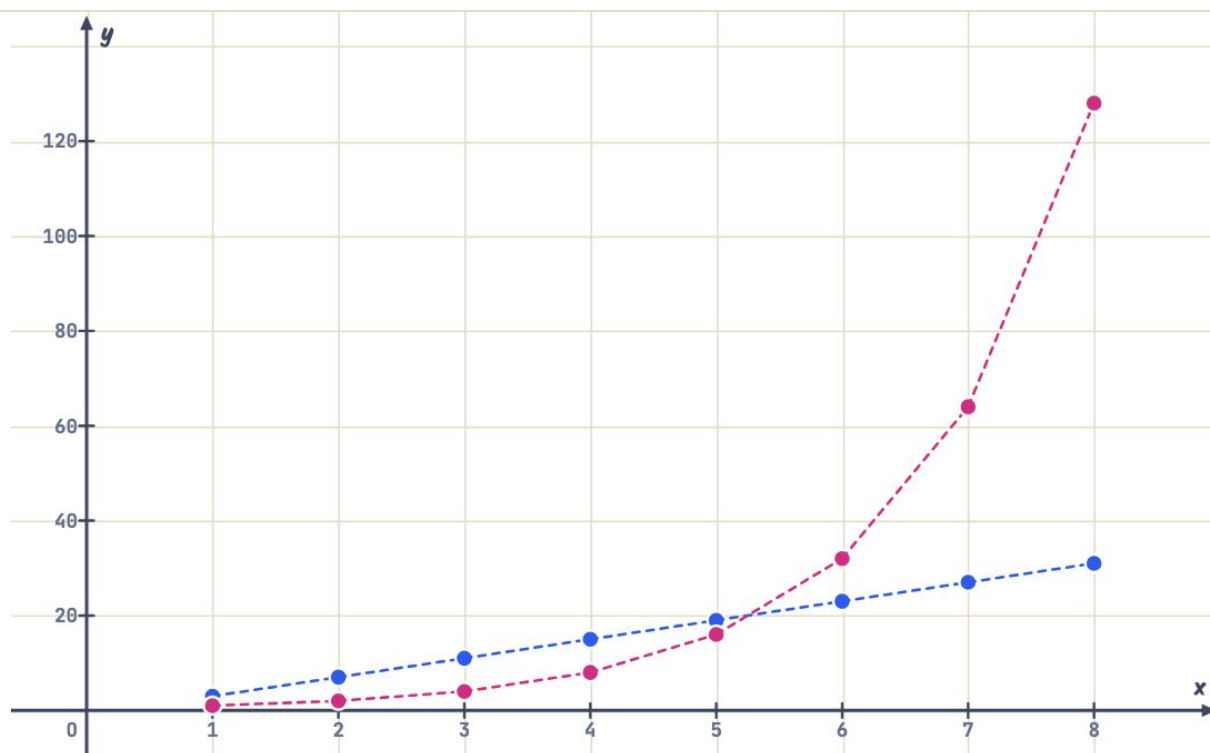
GRAFIK HIDUP

Lomba lari: aritmetika melawan geometri

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15

$$U_n = a + (n - 1)b \quad \text{vs} \quad V_n = c \cdot r^{n-1}$$

$$U_N = 31 \quad V_N = 128$$



geometri memimpin di suku ke-8

Aritmetika U_N

31

Geometri V_N

128

Geometri unggul mulai suku ke-

6

Mulai dengan $N = 8$: barisan biru masih terlihat. Lalu geser N ke 15 dan lihat barisan biru "tenggelam" di dasar grafik. Coba buat aritmetika sekuat mungkin ($a = 20$, $b = 10$) dan geometri selemah mungkin dengan $r = 1,5$. Apakah geometri tetap menyalip sebelum suku ke-15? Bacaan "—" berarti geometri belum pernah unggul sampai suku ke- N .

CONTOH Pesan berantai

Pada jam pertama, satu orang menerima sebuah pesan berantai. Setiap jam, setiap penerima baru meneruskannya kepada 3 orang lain yang belum menerimanya. Berapa penerima baru pada jam ke-6, dan berapa orang yang sudah menerima pesan setelah 6 jam?

1 Penerima baru per jam: 1, 3, 9, 27, ... adalah barisan geometri dengan $a = 1$, $r = 3$.

2 Jam ke-6: $U_6 = 1 \cdot 3^5 = 243$ orang.

3 Total: $S_6 = \frac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{728}{2} = 364$ orang.

Ada 243 penerima baru pada jam ke-6, dan 364 orang sudah menerima pesan. Begitulah hoaks menyebar: saring dulu sebelum berbagi!

COBA SENDIRI Kapan beras menembus sejuta butir?

Mulai dari petak pertama, beras Ancil dijumlahkan petak demi petak. Pada petak ke berapa totalnya pertama kali melebihi satu juta butir?

1 Total sampai petak ke- k adalah $2^k - 1$. Syaratnya $2^k - 1 > 1.000.000$, atau $2^k > 1.000.001$.

2 Pakai logaritma (Bab 14): $k > \frac{\log 1.000.001}{\log 2} \approx \frac{6}{0,301} \approx 19,9$.

3 Jadi $k = 20$. Cek: $2^{19} - 1 = 524.287$ (belum), sedangkan $2^{20} - 1 = 1.048.575$ (sudah).

Petak ke-20, baru di baris ketiga papan catur! Masih ada 44 petak lagi yang terus berlipat dua.



AWAS JEBAKAN

Pangkatnya hanya menempel pada r : $U_n = a \cdot r^{n-1}$, bukan $(ar)^{n-1}$. Untuk 3, 6, 12, ..., suku ke-4 adalah $3 \cdot 2^3 = 24$, sedangkan $(3 \cdot 2)^3 = 216$ jelas keliru. Hati-hati juga dengan rasio negatif: barisan 5, -10, 20, -40, ... punya $r = -2$, dan tandanya bergantian.

15.5 Deret tak hingga dan paradoks Zeno

Ancil menantang seekor siput "balap" untuk adu lari. Siput diberi keuntungan start 9 meter di depan. Ancil berlari 10 kali lebih cepat daripada siput. Seorang filsuf kuno bernama Zeno pasti akan berkata: "Ancil tidak akan pernah menyusul!" Benarkah?



Tebak Dulu!

Saat Ancil tiba di posisi awal siput (9 m), siput sudah maju 0,9 m. Saat Ancil menempuh 0,9 m itu, siput maju lagi 0,09 m, dan seterusnya tanpa akhir. Jadi...

Ancil tidak pernah menyusul, karena langkahnya tak hingga banyak.

Ancil menyusul tepat setelah berlari 9 m.

Ancil menyusul setelah berlari 9,9 m.

Ancil menyusul tepat setelah berlari 10 m.

Jawabannya: tepat di 10 m. Jarak lari Ancil adalah $9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = 9,999\dots$, dan nilainya tepat 10. Langkahnya memang tak hingga banyak, tetapi semakin pendek dan waktunya juga semakin singkat, sehingga jumlahnya **terbatas**. Cek dengan aljabar: setelah Ancil berlari x meter, siput sudah berlari $\frac{x}{10}$ meter. Keduanya bertemu saat $x = 9 + \frac{x}{10}$, yaitu $x = 10$.



TAMU DARI MASA LALU

Zeno dari Elea (± 490 – 430 SM) dari Yunani kuno terkenal dengan paradoks "Akhilles dan kura-kura": pelari tercepat seolah-olah tak mampu menyusul kura-kura yang diberi start lebih dulu. Paradoks ini membingungkan para pemikir selama berabad-abad. Jawaban yang memuaskan baru datang setelah matematikawan memahami bahwa **jumlah tak hingga banyak bilangan bisa bernilai terbatas**, gagasan yang menjadi dasar konsep limit di Bab 27. Di Nusantara, kita punya dongeng kancil yang kalah adu lari melawan siput karena tipuan. Kali ini Ancil menang berkat matematika!

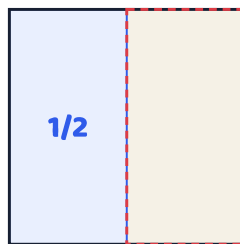
Cara paling indah untuk "melihat" jumlah tak hingga adalah dengan sebuah persegi. Ikuti langkah-langkahnya:



Persegi ini luasnya 1.

Aturan main: setiap langkah, isi setengah dari bagian yang masih kosong.

Langkah 1. Ambil persegi bersisi 1, jadi luasnya 1. Kita akan mengisinya dengan potongan yang makin kecil.

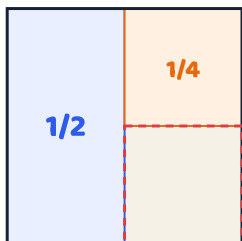


Isi setengahnya.

Terisi: $\frac{1}{2}$

Sisa (garis merah): $\frac{1}{2}$

Langkah 2. Isi setengah persegi: $\frac{1}{2}$. Bagian yang masih kosong (garis merah) juga $\frac{1}{2}$.

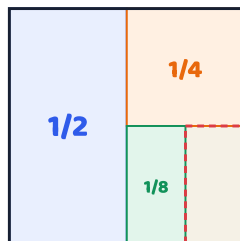


Isi setengah dari sisanya.

Terisi: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Sisa: $\frac{1}{4}$

Langkah 3. Isi setengah dari bagian kosong itu: $\frac{1}{4}$. Terisi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, sisanya $\frac{1}{4}$.

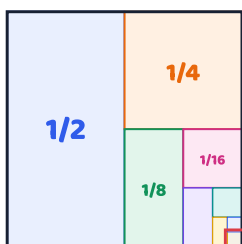


Lagi!

Terisi: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Sisa: $\frac{1}{8}$

Langkah 4. Ulangi: tambah $\frac{1}{8}$. Terisi $\frac{7}{8}$, sisa $\frac{1}{8}$. Setiap potongan baru tepat setengah dari potongan sebelumnya, jadi ini deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}$.



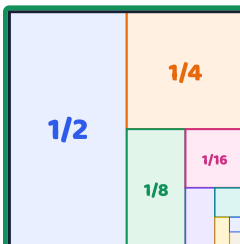
Setelah 8 potong:

Terisi: $\frac{255}{256}$

Sisa: hanya $\frac{1}{256}$!

Sisa selalu sama dengan potongan terakhir, dan terus mengecil menuju 0.

Langkah 5. Setelah 8 potongan, terisi $\frac{255}{256}$ dan sisanya hanya $\frac{1}{256}$. Sisa selalu sama dengan potongan terakhir, dan terus mengecil.



Tidak ada bagian yang tersisa.

Semua potongan, kalau dijumlahkan tanpa henti, mengisi persegi itu:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Langkah 6. Kalau proses ini diteruskan tanpa henti, sisanya mendekati 0. Jadi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$. Tak hingga banyak potongan, tetapi luasnya pas 1!

Mengapa ini berhasil? Untuk deret geometri, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. Jika $-1 < r < 1$, pangkat r^n makin lama makin mendekati 0 (misalnya $0,5^{10} \approx 0,001$). Akibatnya S_n makin mendekati $\frac{a}{1-r}$. Deret yang jumlahnya mendekati satu bilangan tertentu disebut **konvergen**. Deret yang tidak demikian disebut **divergen**.



JUMLAH DERET GEOMETRI TAK HINGGA

Jika $-1 < r < 1$ (ditulis $|r| < 1$), maka

$$S_{\infty} = a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1 - r}$$

Jika $|r| \geq 1$, deret geometri tak hingga divergen (kecuali $a = 0$): jumlahnya tidak menuju satu bilangan.

▼ Mengapa rumusnya $\frac{a}{1 - r}$?

Dari $S_n = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n$, suku kedua adalah "sisa" yang belum terjumlah. Karena $|r| < 1$, $r^n \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$, sehingga sisanya lenyap dan $S_n \rightarrow \frac{a}{1 - r}$. Cara cepat lainnya: misalkan $S = a + ar + ar^2 + \dots$. Maka $S = a + r(a + ar + \dots) = a + rS$, jadi $S(1 - r) = a$. (Cara cepat ini hanya sah bila kita sudah tahu deretnya konvergen.)



$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r}$$

Kalau setiap suku menyusut dengan rasio di antara -1 dan 1 , jumlah tak hingga banyak suku itu mendekati a dibagi $(1 - r)$.

 a

Suku pertama

 r

Rasio

 S_{∞}

Jumlah tak hingga

JUMLAH TAK HINGGA

2

konvergen: jumlah parsial naik menuju batas

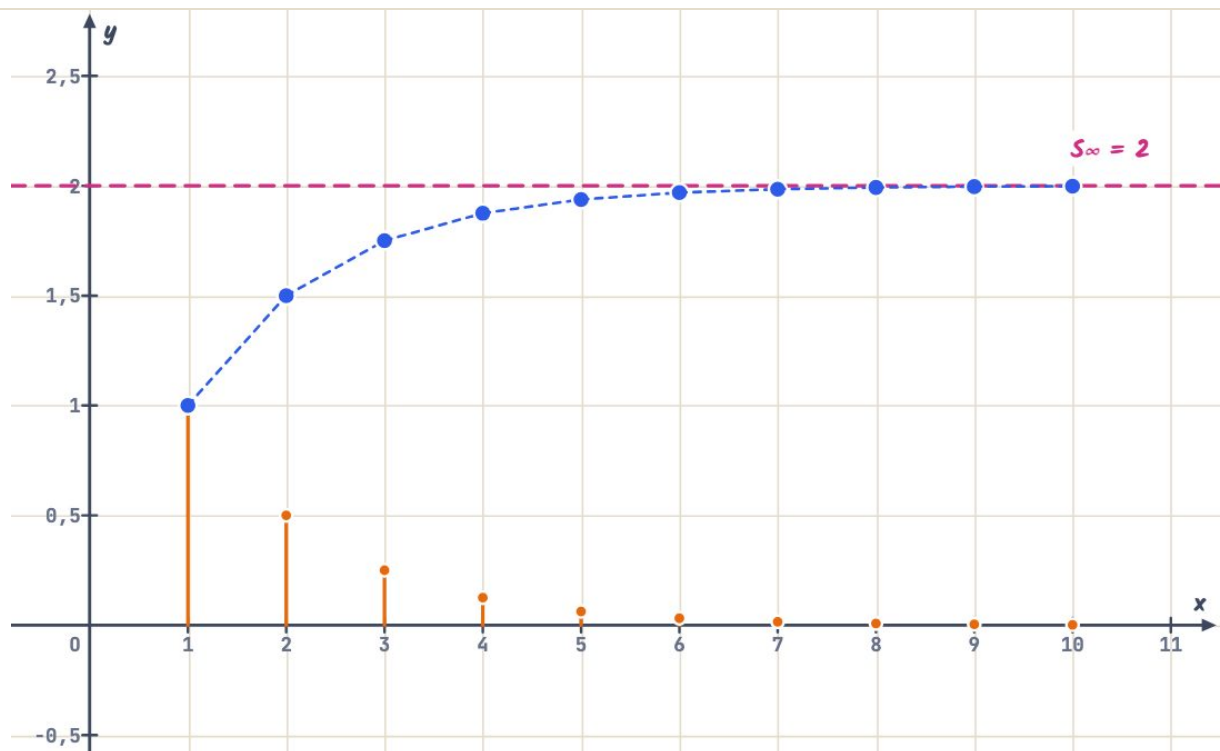
Suku-sukunya **1, 0,5, 0,25, 0,125, ...** Rasionya di antara -1 dan 1 , jadi deretnya **konvergen**. Jumlah tak hingganya: **2** (tanda — berarti jumlahnya tidak menuju satu bilangan).

Cek satuan: Hasilnya bersatuan sama dengan suku pertama. Tanda — muncul bila $|r| \geq 1$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-DERET-TAK-HINGGA

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \longrightarrow S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1 - (0,5)} = 2$$



jumlah parsial naik perlahan menuju garis batas

S_N (jumlah N suku)

1,998

S_∞ (batas)

2

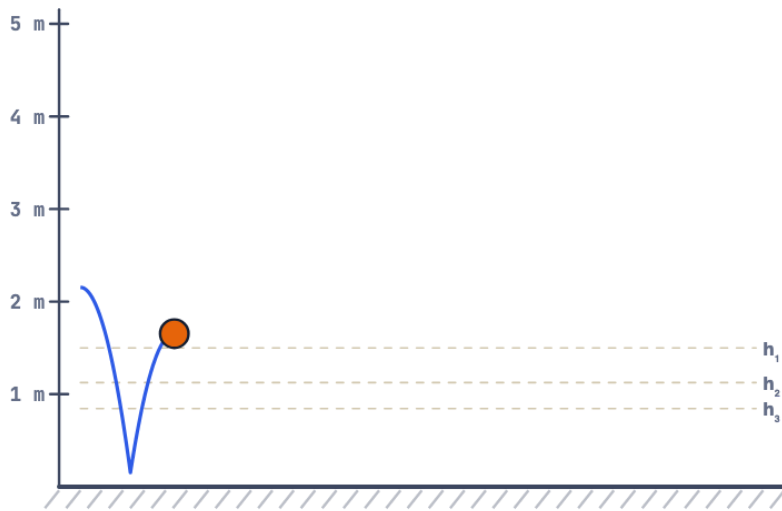
Sisa $S_\infty - S_N$

0,00195

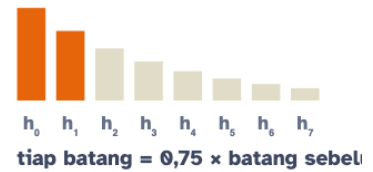
Titik **biru** adalah jumlah parsial S_n , batang **oranye** adalah suku-sukunya, dan garis **magenta** adalah batas S_∞ . Tambah N dan lihat sisanya mengecil. Lalu buat r negatif: jumlah parsialnya melompat-lompat di sekitar batas!

LAB MINI Bola yang memantul tanpa henti

LAB MINI INTERAKTIF • COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-15



tinggi tiap pantulan



jarak 3,5 m dari batas 14 m

25%

$$h + 2hr + 2hr^2 + \dots = h(1 + r),$$

pantulan ke-
1

tinggi pantulan ini
1,5 m

jarak tempuh
3,5 m

batas $h(1 + r)/(1 - r)$
14 m

waktu semua pantulan
8,9 s

Bola dijatuhkan dari ketinggian h . Setiap kali memantul, tingginya tinggal r kali tinggi sebelumnya. Tekan ► **Jalankan**. Secara teori bola memantul tak hingga kali, tetapi jarak tempuhnya terbatas, dan waktu totalnya juga terbatas! Ubah r dan bandingkan jarak tempuh dengan batas $\frac{h(1 + r)}{1 - r}$.

KERJAKAN BERSAMA Panjang lintasan bola

Bola dijatuhkan dari ketinggian 2 m. Setiap memantul, bola mencapai $\frac{3}{4}$ tinggi sebelumnya. Berapa panjang seluruh lintasan bola sampai berhenti?

- 1 Jatuh pertama: 2 m. Setelah itu setiap pantulan naik lalu turun lagi, jadi tiap tinggi pantulan dihitung **dua kali**.
- 2 Tinggi pantulan: 1,5; 1,125; ... adalah deret geometri tak hingga dengan $a = 1,5$ dan $r = \frac{3}{4}$.
Jumlahnya $\frac{1,5}{1 - 0,75} = 6$ m.
- 3 Panjang lintasan = $2 + 2 \times 6 = 14$ m.

Panjang lintasan 14 m. Rumus umumnya $h \cdot \frac{1 + r}{1 - r} = 2 \cdot \frac{1,75}{0,25} = 14$. Cocokkan dengan Lab Mini di atas!

Nyatakan $0,363636\dots$ sebagai pecahan paling sederhana.

1 Pecah menjadi $0,36 + 0,0036 + 0,000036 + \dots$, yaitu deret geometri tak hingga dengan $a = 0,36$ dan $r = 0,01$.

2
$$S_{\infty} = \frac{0,36}{1 - 0,01} = \frac{0,36}{0,99} = \frac{36}{99}.$$

3 Sederhanakan dengan membagi 9: $\frac{36}{99} = \frac{4}{11}.$

$0,363636\dots = \frac{4}{11}$. **Cek dengan kalkulator:** $4 : 11 = 0,3636\dots$ ✓. Dengan cara yang sama,
 $0,999\dots = \frac{0,9}{1 - 0,1} = 1.$



AWAS JEBAKAN

Rumus $\frac{a}{1-r}$ hanya boleh dipakai jika $-1 < r < 1$. Kalau dipaksakan untuk $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ (dengan $r = 2$), hasilnya $\frac{1}{1-2} = -1$. Menjumlahkan bilangan positif kok hasilnya negatif? Jelas mustahil! Deret itu divergen karena jumlahnya membesar tanpa batas.

MITOS

"0,999... itu sedikit lebih kecil daripada 1."

MITOS

"Menjumlahkan tak hingga banyak bilangan positif pasti hasilnya tak hingga."

FAKTA

Sama persis!

$$0,999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = \frac{0,9}{1 - 0,1} = 1$$

. Tidak ada satu bilangan pun yang bisa diselipkan di antara keduanya.

FAKTA

Belum tentu:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

. Namun hati-hati,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

justu membesar tanpa batas walaupun sukunya makin kecil.

MITOS

"Barisan geometri selalu makin besar."

FAKTA

Jika

$$0 < r < 1$$

, sukunya makin kecil, misalnya sisa obat di dalam tubuh. Jika

r

negatif, tandanya bergantian positif dan negatif.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

DERET HARMONIK: SUKU MENGECIL, JUMLAH TETAP MELEDAK

Sekitar tahun 1350, Nicole Oresme dari Prancis membuktikan bahwa deret harmonik $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ divergen. Kelompokkan sukunya:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \dots$$

Setiap kelompok bernilai lebih dari $\frac{1}{2}$, dan ada tak hingga banyak kelompok, jadi jumlahnya melampaui bilangan berapa pun. Pelajarannya: suku yang menuju 0 **belum cukup** untuk membuat deret konvergen. Uniknya, pertumbuhannya sangat lambat: agar jumlahnya melewati 10, dibutuhkan 12.367 suku!

15.6 Notasi sigma, anuitas, dan cicilan

Menulis " $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ " itu panjang. Matematikawan memakai huruf Yunani Σ (sigma, huruf S besar untuk *sum*, jumlah) sebagai singkatan.



DEFINISI: NOTASI SIGMA

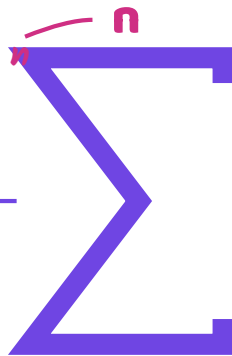
$$\sum_{k=1}^n U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n.$$

Huruf k disebut **indeks**. Angka di bawah sigma adalah **batas bawah** (indeks mulai), dan angka di atasnya adalah **batas atas** (indeks berhenti).

batas atas:
berhenti di $k = n$

Σ : "jumlahkan
semuanya"

batas bawah:
mulai dari $k = 1$



$$(2k + 1)$$

$$= 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$$

rumus suku ke- k :
ganti k dengan 1, 2, 3, ...

Notasi sigma dibaca "jumlah $2k + 1$ untuk k dari 1 sampai n ".



SIFAT-SIFAT NOTASI SIGMA

- $\sum_{k=1}^n c = nc$ (menjumlahkan bilangan tetap c sebanyak n kali);
- $\sum_{k=1}^n c U_k = c \sum_{k=1}^n U_k$ (faktor tetap boleh dikeluarkan);
- $\sum_{k=1}^n (U_k + V_k) = \sum_{k=1}^n U_k + \sum_{k=1}^n V_k$ (jumlah boleh dipisah);
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (trik Gauss).

KERJAKAN BERSAMA

Menghitung dengan sifat sigma

Hitunglah $\sum_{k=1}^{20} (3k - 1)$.

1 Pisahkan: $\sum_{k=1}^{20} (3k - 1) = 3 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 1$.

2 $\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \times 21}{2} = 210$ dan $\sum_{k=1}^{20} 1 = 20$.

3 Hasilnya $3 \times 210 - 20 = 610$.

Jumlahnya **610**. Cek dengan rumus deret aritmetika: sukunya 2, 5, 8, ..., 59, jadi $S_{20} = \frac{20}{2}(2 + 59) = 610$ ✓.



AWAS JEBAKAN

Banyak suku dari $k = p$ sampai $k = q$ adalah $q - p + 1$, bukan $q - p$. Jadi $\sum_{k=3}^{10} 5$ bernilai $8 \times 5 = 40$, karena $k = 3, 4, \dots, 10$ ada 8 nilai. Ini jebakan tiang lampu lagi!

Sekarang kita pakai deret geometri untuk urusan uang. Kalau tabungan memberi bunga i per bulan (misalnya $0,5\% = 0,005$), uang Rp1 hari ini bernilai $(1 + i)$ rupiah sebulan kemudian, $(1 + i)^2$ dua bulan kemudian, dan seterusnya. Pembayaran rutin yang besarnya sama setiap periode disebut **anuitas**. Contohnya setoran tabungan rencana atau angsuran kredit.

COBA SENDIRI Tabungan rutin berbunga

Setiap akhir bulan, Kak Lintang menyeter Rp500.000 ke tabungan berbunga majemuk 0,5% per bulan. Berapa saldonya tepat setelah setoran ke-12?

- 1 Setoran terakhir belum berbunga, setoran ke-11 berbunga 1 bulan, ..., setoran pertama berbunga 11 bulan.
- 2 Saldo = $500.000 (1 + 1,005 + 1,005^2 + \dots + 1,005^{11})$: deret geometri dengan $a = 500.000$, $r = 1,005$, $n = 12$.
- 3 $S_{12} = 500.000 \times \frac{1,005^{12} - 1}{0,005} \approx 500.000 \times 12,3356 \approx 6.167.781$.

Saldonya ±Rp6.167.781. Kak Lintang menyeter Rp6.000.000, jadi bunganya ±Rp167.781.

Cicilan bekerja seperti tabungan yang dibalik. Misalkan kamu meminjam M rupiah dengan bunga i per bulan dan melunasinya dengan n angsuran sama besar A . Jika tidak dicicil, utangmu tumbuh menjadi $M(1 + i)^n$. Agar lunas, nilai itu harus sama dengan "tabungan" dari semua angsuran:

$$M(1 + i)^n = A(1 + (1 + i) + \dots + (1 + i)^{n-1}) = A \cdot$$

▼ Dari persamaan itu ke rumus angsuran

Kalikan kedua ruas dengan i , lalu bagi dengan $(1 + i)^n - 1$: $A = \frac{Mi(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$. Bagi pembilang dan penyebut dengan $(1 + i)^n$:

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$

RUMUS HIDUP

Angsuran cicilan (anuitas)

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Angsuran tiap bulan ditentukan oleh besar pinjaman, bunga per bulan, dan lama cicilan. Semakin lama mencicil, angsurannya lebih ringan, tetapi total bunganya lebih besar.

M Pinjaman juta Rp

i Bunga per bulan %

n Lama cicilan bulan

A Angsuran per bulan ribu Rp

ANGSURAN PER BULAN

898,6

ribu Rp

Pinjaman Rp**18** juta, bunga **1,5%** per bulan, **24** kali angsuran: angsurannya ±Rp**898,6** ribu per bulan. Total yang dibayar ±Rp**21,567** juta, jadi total bunganya ±Rp**3,567** juta. Sebagai pembandingan, bunga flat **1,5%** per bulan menghasilkan angsuran Rp**1.020** ribu.

Cek satuan: M dalam juta rupiah, i dalam persen per bulan, n dalam bulan, dan A dalam ribu rupiah.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-ANGSURAN-ANUITAS



BUNGA FLAT DAN BUNGA EFEKTIF

Sebagian kredit kendaraan memakai **bunga flat**: bunga setiap bulan dihitung dari pokok awal, sehingga total bunganya $M \cdot i \cdot n$, sebuah deret aritmetika. Rumus anuitas di atas memakai **bunga efektif**: bunga dihitung dari sisa utang yang terus berkurang. Untuk persentase yang sama, bunga flat lebih mahal. Pinjaman Rp18 juta selama 24 bulan dengan bunga 1,5% per bulan berangsur ±Rp898.600 (efektif) tetapi Rp1.020.000 (flat). Selalu tanyakan jenis bunganya sebelum menandatangani perjanjian!



LANJUT • IB & OLIMPIADE

DERET TELESKOPIK: RUNTUH SEPERTI TEROPONG

Deret $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ bukan deret aritmetika maupun geometri. Kuncinya: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Maka

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Suku-suku di tengah saling menghapus seperti teropong yang dipendekkan, sehingga hanya ujung-ujungnya yang tersisa. Untuk $n \rightarrow \infty$, jumlahnya menuju 1. Teknik **teleskopik** adalah senjata favorit di soal olimpiade.



Celengan bertingkat

Menabung Rp1.000 di hari pertama, Rp2.000 di hari kedua, dan seterusnya selama 30 hari menghasilkan Rp465.000. Itu deret aritmetika!



Cicilan motor

Angsuran bulanan dihitung dengan rumus anuitas, yang lahir dari deret geometri dengan rasio $1 + i$.



Obat dalam tubuh

Jika tubuh membuang sebagian obat secara teratur, dosis yang diulang-ulang menumpuk menuju batas $\frac{a}{1-r}$, bukan naik terus.



Kursi gedung pertunjukan

Baris belakang lebih lebar, sehingga jumlah kursi per baris sering bertambah tetap: barisan aritmetika.



Nanas dan bunga matahari

Hitung spiral sisik nanas: biasanya ada 8 ke satu arah dan 13 ke arah lain, dua bilangan Fibonacci berurutan.



Pesan berantai

Jika setiap penerima meneruskan ke 5 orang baru, putaran ke-8 saja menjangkau $5^8 = 390.625$ orang baru. Barisan geometri menyebar sangat cepat.



Cek Cepat

Suku ke-20 barisan 5, 8, 11, 14, ... adalah...

65

60

62

68

Rasio barisan geometri 48, -24, 12, -6, ... adalah...

$-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

-2

-24

Nilai $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ adalah...

tak hingga

$\frac{4}{3}$

1

$\frac{3}{2}$

Kunci Cek Cepat: 1. C • 2. A • 3. D

Tantangan Rumah: bola yang tak mau berhenti

Bahan: bola pingpong atau bola bekel, meteran gulung, selotip, HP dengan mode video gerak lambat (slow motion), buku catatan.

1. Tempelkan meteran tegak di dinding, dengan angka 0 di lantai.
2. Jatuhkan bola dari ketinggian 100 cm di depan meteran sambil merekam dengan mode gerak lambat.
3. Putar ulang videonya. Catat tinggi puncak pantulan pertama, kedua, dan ketiga.
4. Hitung rasio r = tinggi pantulan : tinggi sebelumnya untuk setiap pantulan. Ulangi percobaan tiga kali.
5. Hitung rata-rata r , lalu prediksi panjang lintasan total dengan rumus $h \cdot \frac{1+r}{1-r}$.

Pertanyaan: Apakah rasionya hampir sama di setiap pantulan? Jika benar, pantulan bolamu membentuk barisan geometri. Menurut rumus, bola memantul tak hingga kali. Mengapa bola sungguhan tetap berhenti?

RINGKASAN KILAT Bab 15 dalam 3 menit

Kamu sekarang bisa...

- mengenali **pola** dan menuliskan rumus **suku ke-n** sebuah barisan
- membedakan **barisan aritmetika** (beda tetap) dan **barisan geometri** (rasio tetap), lalu menghitung sukunya
- menjumlahkan **deret aritmetika** dengan trik Gauss dan **deret geometri** dengan trik "kalikan rasio, lalu kurangkan"
- menghitung jumlah **deret geometri tak hingga** dan menjelaskan paradoks Zeno
- memakai **notasi sigma** untuk tabungan rutin, anuitas, dan cicilan

Istilah kunci

barisan

Barisan

suku

rasio emas

Barisan aritmetika

beda

deret

Barisan geometri

rasio

konvergen

divergen

indeks

anuitas

teleskopik

Rumus penting

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Suku ke-n barisan aritmetika. Mulai dari suku pertama, lalu tambahkan beda sebanyak $n - 1$ kali. Hanya ada $n - 1$ langkah dari suku pertama ke suku ke-n.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Jumlah deret aritmetika. Banyak suku dikali rata-rata suku pertama dan suku terakhir. Itulah trik Gauss dalam satu baris.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Jumlah deret geometri. Kalikan deret dengan rasionya, kurangkan dari deret semula, dan hampir semua suku saling menghapus.

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

Jumlah deret geometri tak hingga. Kalau setiap suku menyusut dengan rasio di antara -1 dan 1 , jumlah tak hingga banyak suku itu mendekati a dibagi $(1 - r)$.

$$A = \frac{M \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Angsuran cicilan (anuitas). Angsuran tiap bulan ditentukan oleh besar pinjaman, bunga per bulan, dan lama cicilan. Semakin lama mencicil, angsurannya lebih ringan, tetapi total bunganya lebih besar.

⚠ Jangan sampai terjebak

- Beberapa suku pertama saja belum tentu cukup untuk memastikan sebuah pola.
- Kesalahan paling sering adalah menulis $U_n = a + nb$.
- Pangkatnya hanya menempel pada r : $U_n = a \cdot r^{n-1}$, bukan $(ar)^{n-1}$.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=15

🧩 Teka-teki untuk Bab 16

Ancil menulis di papan: $\frac{x^5 - 1}{x - 1}$. Dimas mencoba $x = 2$: hasilnya $\frac{31}{1} = 31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$. Ayu mencoba $x = 3$: hasilnya $\frac{242}{2} = 121 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$. Apakah $x^5 - 1$ selalu habis dibagi $x - 1$? Apa hasil baginya? Dan kalau $x^5 + 3$ yang dibagi $x - 1$, berapa sisanya?

▼ Intip petunjuk

Ingat rumus deret geometri dengan $a = 1$ dan rasio x : $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$. Jadi $x^5 - 1$ habis dibagi $x - 1$, dan hasil baginya adalah suku banyak $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Karena $x^5 + 3 = (x^5 - 1) + 4$, sisanya 4. Coba hitung nilai $x^5 + 3$ untuk $x = 1$. Kebetulan? Bab 16 membahas pembagian suku banyak dan Teorema Sisa yang menjelaskannya!

16

BAB 16 · ALJABAR & FUNGSI

Polinomial: Bilangan yang Menyamar

Bisakah huruf dibagi huruf? Mengapa $11 \times 11 \times 11 = 1331$ mirip barisan segitiga Pascal? Dan bagaimana caranya menebak sisa pembagian tanpa membagi sama sekali? Selamat datang di dunia suku banyak.

Setelah bab ini, kamu bisa

- mengenali **suku**, **koefisien**, dan **derajat** sebuah polinomial, lalu menghitung nilainya;
- menjumlahkan, mengurangi, dan mengalikan polinomial, serta memakai **kesamaan polinomial**;
- membagi polinomial dengan **cara bersusun** dan **metode Horner**;
- memakai **teorema sisa** dan **teorema faktor** untuk mencari sisa, faktor, dan akar;
- membaca **grafik polinomial** (akar, akar kembar, perilaku ujung) dan memakai **rumus Vieta** derajat tiga.

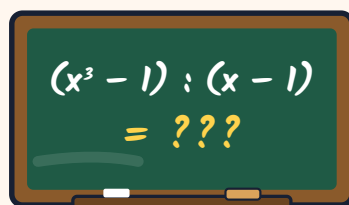
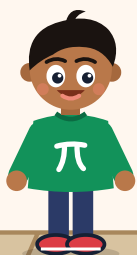
MEMBAGI HURUF?

KOMIK · 4 PANEL

Sore hari, belajar bareng di teras

DIMAS

Kak, di akhir Bab 15 katanya kita mau membagi suku banyak. Masa huruf dibagi huruf?

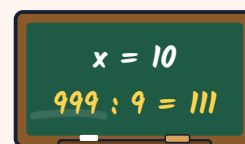


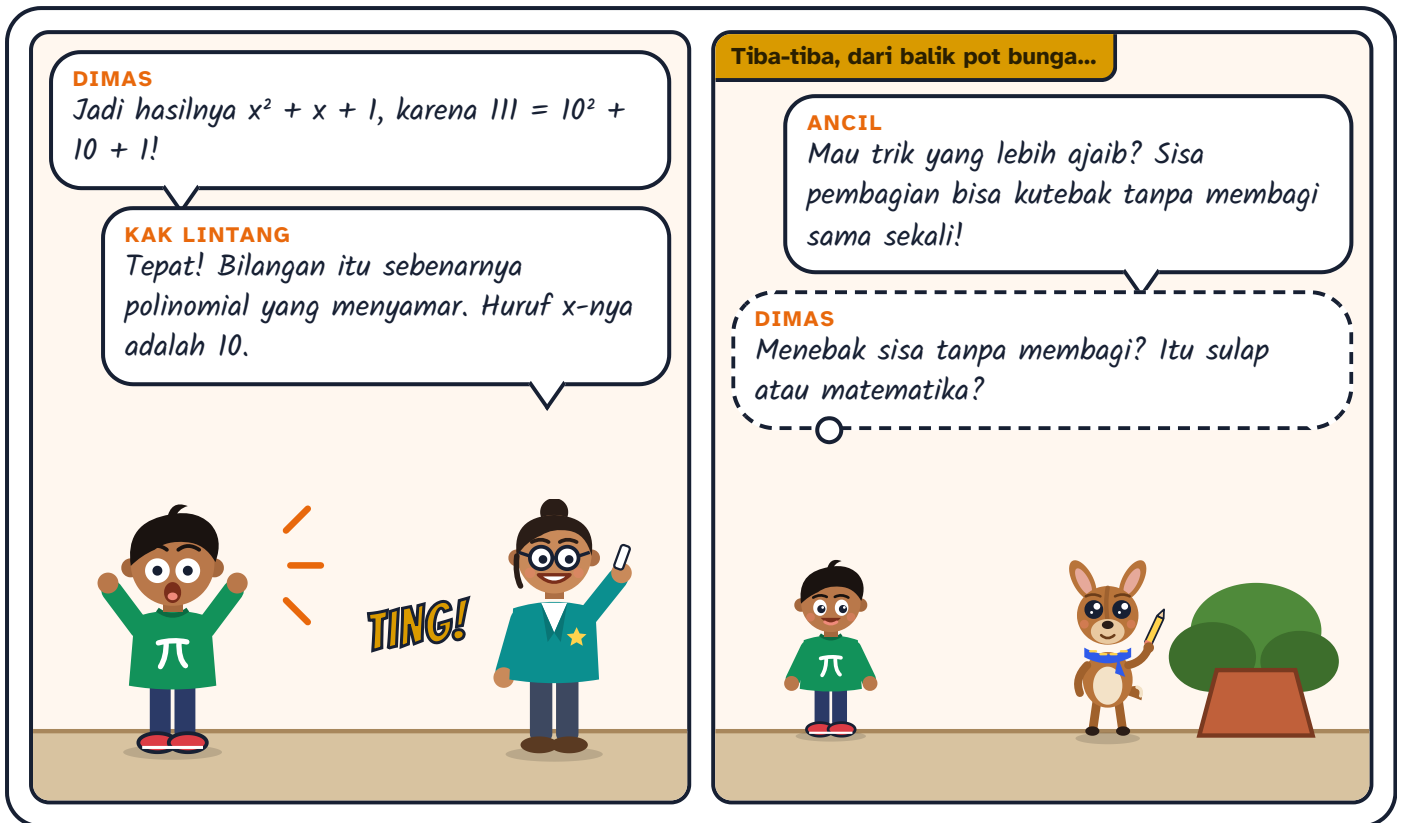
KAK LINTANG

Coba ganti setiap x dengan 10. Soalnya berubah jadi pembagian bilangan biasa, kan?

AYU

$x^3 - 1$ jadi 999, dan $x - 1$ jadi 9. Lalu $999 : 9 = 111$!





16.1 Suku banyak: anatomi dan derajat

Lihat bilangan 2.026. Sebenarnya ia singkatan dari $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$. Ganti setiap 10 dengan huruf x , dan muncullah $2x^3 + 2x + 6$. Bentuk seperti ini disebut **polinomial** atau **suku banyak**: jumlah beberapa suku, dan setiap suku berupa bilangan yang dikalikan dengan pangkat x .



DEFINISI

Polinomial dalam x yang berderajat n adalah bentuk

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

dengan n bilangan cacah. Bilangan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ disebut **koefisien**. Pangkat tertinggi n disebut **derajat**, a_n disebut **koefisien utama**, dan a_0 disebut **suku tetap** (konstanta).

$P(x) = 3x^4 + 0x^3 - 5x^2 + x - 7$

koefisien utama: 3 derajat: 4 koefisien x^2 : -5

suku x^3 "hilang": koefisiennya 0 koefisien x : 1 suku tetap: -7

Polinomial ini berderajat 4. Suku x^3 tidak tertulis, artinya koefisiennya 0. Ingat ini baik-baik: nanti di metode Horner, angka 0 itu wajib ditulis!

Bahasa sederhana • Gampangnya, polinomial itu seperti rangkaian gerbong kereta. Setiap gerbong (suku) membawa sebuah angka (koefisien) dan sebuah x yang dipangkatkan bilangan cacah: 0, 1, 2, 3, dan seterusnya. Gerbong dengan pangkat paling besar adalah lokomotifnya. Pangkat lokomotif itulah **derajat** polinomial.

Derajat	Nama	Contoh	Bentuk grafiknya
0	konstan	7	garis mendatar
1	linear	$2x + 1$	garis lurus miring (Bab 9)
2	kuadrat	$x^2 - 4x + 3$	parabola (Bab 12)
3	kubik	$x^3 - x$	lengkung berkelok seperti huruf N atau S
4	kuartik	$x^4 - 5x^2 + 4$	bisa mirip huruf W atau M
5	kuintik	$x^5 - 5x^3 + 4x$	ular berkelok, paling banyak 4 belokan



AWAS JEBAKAN

Derajat ditentukan oleh pangkat tertinggi, bukan oleh suku yang ditulis paling depan. Polinomial $5 + 2x - x^3$ berderajat 3 dengan koefisien utama -1. Ingat juga: pangkat x harus bilangan cacah, jadi $\frac{1}{x} = x^{-1}$ dan $\sqrt{x} = x^{1/2}$ **bukan** suku polinomial. Sebaliknya, koefisien boleh berupa pecahan atau akar: $\sqrt{2}x^2 - \frac{1}{2}$ tetap polinomial.

Menghitung **nilai polinomial** $P(a)$ berarti mengganti setiap x dengan bilangan a . Bilangan 2.026 tadi tidak lain adalah nilai $P(x) = 2x^3 + 2x + 6$ di $x = 10$.

CONTOH Menghitung nilai polinomial

Diketahui $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$. Hitung $P(2)$, $P(-1)$, dan $P(0)$.

1 $P(2) = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 4 = 16 - 12 + 4 = 8.$

2 $P(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 4 = -2 - 3 + 4 = -1.$ Hati-hati: $(-1)^3 = -1$, tetapi $(-1)^2 = +1.$

3 $P(0) = 0 - 0 + 4 = 4.$ Nilai di nol selalu sama dengan suku tetapnya.

$P(2) = 8, P(-1) = -1, \text{ dan } P(0) = 4.$ Iseng-iseng: $P(10) = 2.000 - 300 + 4 = 1.704.$

Polinomial tidak hanya hidup di buku. Ambil karton $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$, potong persegi bersisi $x \text{ cm}$ di keempat pojoknya, lalu lipat sisi-sisinya ke atas. Jadilah kotak terbuka dengan alas $(30 - 2x) \times (20 - 2x)$ dan tinggi x . Volumennya

$$V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x,$$

sebuah polinomial derajat tiga! Geser-geser rumus di bawah, lalu simpan pertanyaan ini: potongan berapa sentimeter yang membuat kotaknya paling lega? Kita akan menjawabnya di 16.6.

$$V = x(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume = tinggi $\times$ panjang alas $\times$ lebar alas. Tingginya x , sedangkan panjang dan lebar karton masing-masing berkurang $2x$ karena dipotong di kedua ujungnya.

x Potongan pojok cm p Panjang karton cm l Lebar karton cm

V Volume kotak cm³

VOLUME KOTAK

1.056

cm³



hampir volume terbesar untuk karton ini!

Alas kotak **22 cm $\times$ 12 cm**, tinggi **4 cm**, jadi volumenya **1.056 cm³** (sekitar **1,056 liter**).
Dalam bentuk polinomial: $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.

Cek satuan: cm $\times$ cm $\times$ cm = cm³. Ingat, 1.000 cm³ = 1 liter.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VOLUME-KARDUS



TRIK KAK LINTANG

Dua jalan pintas yang sering menyelamatkan: $P(0)$ selalu sama dengan **suku tetap**, dan $P(1)$ selalu sama dengan **jumlah semua koefisien**. Untuk $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$: $V(1) = 4 - 100 + 600 = 504$. Cek dengan kardusnya: $1 \times 28 \times 18 = 504$. Cocok!

16.2 Operasi polinomial dan rahasia 11ⁿ

Menjumlahkan dan mengurangi polinomial berarti menggabungkan **suku sejenis**, yaitu suku-suku dengan pangkat x yang sama. Persis seperti menjumlahkan satuan dengan satuan dan puluhan dengan puluhan:

$$(3x^3 - 2x + 5) + (x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 4x^3 + 4x^2 +$$

Perhatikan: suku x lenyap karena $-2x + 2x = 0$. **Mengalikan** polinomial berarti mengalikan setiap suku dengan setiap suku. Agar tidak ada yang tercecer, pakai *tabel kotak*: setiap sel berisi hasil kali kepala baris dan kepala kolomnya.

$\times$	x^2	$-x$	4
$2x$	$2x^3$	$-2x^2$	$8x$
3	$3x^2$	$-3x$	12

Jumlahkan isi semua sel, kelompokkan menurut pangkat: $(2x + 3)(x^2 - x + 4) = 2x^3 + (-2x^2 + 3x^2) + (8x - 3x) + 12 = 2x^3 + x^2 + 5x + 12$.

☆

SIFAT DERAJAT

- Derajat hasil kali = **jumlah** derajatnya: $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$. (Contoh: derajat 1 $\times$ derajat 2 = derajat 3.)
- Derajat hasil jumlah atau selisih **paling tinggi** sama dengan derajat terbesar di antara keduanya. Bisa lebih kecil jika suku-suku terdepannya saling menghapus, misalnya $(x^2 + x) - (x^2 - 3) = x + 3$.

Sekarang, kejutan kecil. Bilangan 11 adalah $x + 1$ dengan $x = 10$. Jadi pangkat-pangkat 11 hanyalah $(x + 1)^n$ yang menyamar:

n	$(x + 1)^n$	Koefisien	11^n
1	$x + 1$	1 1	11
2	$x^2 + 2x + 1$	1 2 1	121
3	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	1 3 3 1	1.331
4	$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$	1 4 6 4 1	14.641
5	$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$	1 5 10 10 5 1	?



Tebak Dulu!

Koefisien $(x + 1)^n$ membentuk barisan segitiga Pascal. Baris kelima adalah 1, 5, 10, 10, 5, 1. Berapakah 11^5 ?

15.101.051, tinggal tulis baris Pascal berjajar.

161.051

1.615.051

Tidak bisa ditebak, karena polanya hanya kebetulan sampai 11^4 .

Jawabannya: 161.051. Polanya tetap benar, tetapi ada "simpanan" seperti penjumlahan bersusun: $1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1 = 100.000 + 50.000 + 10.000 + 1.000 + 50 + 1 = 161.051$. Koefisien 10 terlalu besar untuk satu kolom angka, jadi ia meluap ke kolom kirinya. Polinomialnya rapi, bilangannya saja yang "berantakan" karena simpanan.

Dua polinomial disebut **sama** (identik, ditulis $\equiv$) jika nilainya sama untuk **setiap** x . Ini terjadi tepat ketika koefisien suku-suku sejenisnya sama. Sifat ini sangat berguna untuk mencari bilangan yang belum diketahui.

KERJAKAN BERSAMA

Mencocokkan koefisien

Tentukan a dan b agar $(x - 2)(x + a) \equiv x^2 + bx - 6$.

1 Jabarkan ruas kiri: $(x - 2)(x + a) = x^2 + ax - 2x - 2a = x^2 + (a - 2)x - 2a$.

2 Cocokkan suku tetap: $-2a = -6$, jadi $a = 3$.

3 Cocokkan koefisien x : $b = a - 2 = 3 - 2 = 1$.

$a = 3$ dan $b = 1$. Cek: $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$. ✓



LANJUT • IB & OLIMPIADE

DUA TITIK MENENTUKAN GARIS, TIGA TITIK MENENTUKAN PARABOLA

Polinomial berderajat paling tinggi n ditentukan secara **tunggal** oleh nilainya di $n + 1$ titik. Mengapa? Jika P dan Q bernilai sama di $n + 1$ titik, maka $P - Q$ (derajatnya paling tinggi n) punya $n + 1$ akar. Padahal polinomial tak nol berderajat n paling banyak punya n akar, karena setiap akar a menyumbang satu faktor $(x - a)$. Jadi $P - Q$ haruslah polinomial nol, dan $P \equiv Q$. Ide yang sama dipakai dalam *berbagi rahasia Shamir* di kriptografi: rahasia disimpan sebagai suku tetap sebuah polinomial, dan hanya gabungan beberapa pemegang kunci yang dapat membukanya.

16.3 Pembagian bersusun dan metode Horner

Membagi 17 dengan 5 menghasilkan 3 sisa 2, yang bisa ditulis $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Polinomial dibagi dengan cara yang sama persis. Bedanya, "ukuran" sisa diukur dengan derajat, bukan dengan besar bilangan.



ALGORITMA PEMBAGIAN

Untuk polinomial $P(x)$ dan pembagi $D(x)$ yang bukan nol, selalu ada tepat satu **hasil bagi** $H(x)$ dan satu **sisa** $S(x)$ sehingga

$$P(x) = D(x) \cdot H(x) + S(x), \quad \deg S < \deg D.$$

Jika pembaginya berbentuk $x - a$ (derajat 1), sisanya pasti sebuah bilangan (derajat 0).

Mari bagi $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ dengan $x - 3$ secara bersusun, lalu lihat bagaimana semuanya menyusut menjadi tabel mungil.

$$x - 3 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}$$

Seperti pembagian
bersusun bilangan:

bagi → kali → kurang
→ turunkan, ulangi.

Langkah 1. Susun seperti pembagian bersusun bilangan: pembagi $x - 3$ di kiri, $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ di bawah "atap". Urutkan suku dari pangkat tertinggi.

$$x - 3 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}$$

$$(-) \underline{2x^3 - 6x^2} $$

$$2x^3 : x = 2x^2$$

$$\text{kali } (x - 3):$$

$$2x^3 - 6x^2$$

Langkah 2. Bagi suku terdepan: $2x^3 : x = 2x^2$. Tulis $2x^2$ di atas, lalu kalikan: $2x^2(x - 3) = 2x^3 - 6x^2$.

$$x - 3 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}$$

$$(-) \underline{2x^3 - 6x^2} $$

$$3x^2 - 11x$$

Kurangkan:

$$-3x^2 - (-6x^2) = 3x^2$$

lalu turunkan $-11x$

Langkah 3. Kurangkan: $(2x^3 - 3x^2) - (2x^3 - 6x^2) = 3x^2$. Suku $2x^3$ pasti habis, itulah tujuannya. Turunkan suku berikutnya, $-11x$.

$$x - 3 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}$$

$$(-) \underline{2x^3 - 6x^2} $$

$$3x^2 - 11x$$

$$(-) \underline{3x^2 - 9x} $$

$$-2x + 6$$

$$3x^2 : x = 3x$$

$$\text{kali: } 3x^2 - 9x$$

$$\text{kurang: } -2x$$

$$\text{turunkan } +6$$

Langkah 4. Ulangi: $3x^2 : x = 3x$. Kalikan $3x(x - 3) = 3x^2 - 9x$, kurangkan, lalu turunkan $+6$. Sisanya sekarang $-2x + 6$.

$$x - 3 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}$$

$$(-) \underline{2x^3 - 6x^2} $$

$$3x^2 - 11x$$

$$(-) \underline{3x^2 - 9x} $$

$$-2x + 6$$

$$(-) \underline{-2x + 6}$$

$$0 \leftarrow \text{sisa}$$

$$-2x : x = -2$$

$$\text{kali: } -2x + 6$$

sisa 0, jadi
 $(x - 3)$ faktor!

Langkah 5. Sekali lagi: $-2x : x = -2$. Kalikan $-2(x - 3) = -2x + 6$, kurangkan: sisanya 0. Jadi $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$.

$$x - 3 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}$$

$$(-) \underline{2x^3 - 6x^2} $$

$$3x^2 - 11x$$

$$(-) \underline{3x^2 - 9x} $$

$$-2x + 6$$

$$(-) \underline{-2x + 6}$$

$$0 \leftarrow \text{sisa}$$

Versi Horner

3	2	-3	-11	6
		6	9	-6
	2	3	-2	0

hasil bagi: $2x^2 + 3x - 2$
sisa: 0

Langkah 6. Perhatikan: semua x hanya "penanda kolom". Buang mereka dan simpan koefisiennya saja. Tulis 3 (bukan -3) di kiri agar kita cukup **menjumlah**, bukan mengurang. Pembagian panjang tadi menyusut menjadi tabel Horner yang mungil!

Bahasa sederhana • Kalau bingung, ingat pembagian bersusun bilangan di SD: **bagi, kali, kurang, turunkan**, lalu ulangi sampai habis. Polinomial memakai empat langkah yang sama. Metode Horner hanyalah versi hematnya: tanpa huruf x , tanpa tanda kurang.

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

► Jalankan = lihat langkahnya

dibagi $(x - 3)$ → tulis $a = 3$ di kotak kiri

	x^3	x^2	x	konstanta
koefisien	2	-3	-11	6
kali a		6	9	-6
jumlah	2	3	-2	0

turunkan
 hasil bagi (derajat turun satu)
 sisa

$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2) + 0$$

🎯 Sisa 0: $(x - 3)$ adalah faktor, dan $x = 3$ adalah akar $P(x)$!Hasil bagi $H(x)$

$$2x^2 + 3x - 2$$

Sisa

0

 $P(a)$ dihitung langsung

0

Atur koefisien $P(x)$ dan nilai a pada pembagi $(x - a)$, lalu tekan ► **Jalankan** untuk melihat langkahnya satu per satu: turunkan, kali, jumlahkan. Bandingkan kotak **sisa** dengan **$P(a)$** . Kebetulan? Coba tombol 🔍

Berburu akar untuk mencari a yang membuat sisanya 0.

**AWAS JEBAKAN**

Suku yang hilang wajib ditulis dengan koefisien 0. Untuk $x^3 - 7x + 6$, baris koefisiennya adalah 1, 0, -7, 6, bukan 1, -7, 6. Kalau angka 0 dilupakan, semua kolom bergeser dan hasilnya kacau. Satu lagi: pembagi $x + 3$ sama dengan $x - (-3)$, jadi yang ditulis di kotak kiri adalah -3.

Bagilah $x^3 - 7x + 6$ dengan $x + 3$. Lalu faktorkan $x^3 - 7x + 6$ sepenuhnya.

- 1 Koefisien: 1, 0, -7 , 6 (suku x^2 hilang, tulis 0). Pembagi $x + 3$, jadi $a = -3$.
- 2 Turunkan 1. Kali $1 \times (-3) = -3$, jumlahkan $0 + (-3) = -3$. Kali $-3 \times (-3) = 9$, jumlahkan $-7 + 9 = 2$. Kali $2 \times (-3) = -6$, jumlahkan $6 + (-6) = 0$.
- 3 Baris bawah 1, -3 , 2 | 0: hasil bagi $x^2 - 3x + 2$, sisa 0.
- 4 Faktorkan hasil baginya: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2). \text{ Akar-akarnya } -3, 1, \text{ dan } 2.$$



PEMBAGI BERBENTUK $AX - B$

Tulis $ax - b = a \left(x - \frac{b}{a} \right)$. Pakai Horner dengan $\frac{b}{a}$, lalu bagi hasil baginya dengan a ; sisanya tidak berubah. Contoh: $(4x^3 - 2x^2 + 6x - 1) : (2x - 1)$. Horner dengan $\frac{1}{2}$ memberi baris 4, 0, 6 | 2, jadi $4x^3 - 2x^2 + 6x - 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right) (4x^2 + 6) + 2 = (2x - 1)(2x^2 + 3) + 2$. Hasil baginya $2x^2 + 3$ dan sisanya 2.



TAMU DARI MASA LALU

Metode ini memakai nama William George Horner, matematikawan Inggris yang menerbitkannya pada 1819. Paolo Ruffini dari Italia sudah menulis cara serupa pada 1804, sehingga di beberapa negara ia disebut *aturan Ruffini*. Yang lebih mengejutkan, matematikawan Tiongkok Qin Jiushao sudah memakai langkah-langkah yang setara dalam bukunya tahun 1247, dengan batang-batang hitung yang digeser di atas papan. Satu ide yang sama ditemukan ulang berkali-kali, karena ia memang sangat hemat: menghitung nilai polinomial derajat n cukup dengan n perkalian.



Tebak Dulu!

Berapa sisa pembagian $x^{100} + 1$ oleh $x - 1$? (Jangan membagi bersusun, nanti seratus langkah!)

0, karena pangkat 100 bisa dibagi habis.

1, karena sisanya pasti suku tetapnya.

2

101

Jawabannya: 2. Ancil benar, sisa bisa ditebak tanpa membagi. Sisanya sama dengan nilai polinomial di $x = 1$: $1^{100} + 1 = 2$. Seratus langkah diganti satu langkah. Bukti ajaibnya ada tepat di bawah.

Mulai dari algoritma pembagian dengan pembagi $x - a$: $P(x) = (x - a) \cdot H(x) + S$, dengan S sebuah bilangan. Kesamaan ini benar untuk **setiap** x , jadi boleh kita isi $x = a$. Faktor $(x - a)$ menjadi nol dan "menelan" seluruh hasil bagi, sehingga yang tersisa hanya S .



TEOREMA SISA

Sisa pembagian polinomial $P(x)$ oleh $(x - a)$ adalah $P(a)$.

$$P(x) : (x - a) \text{ bersisa } P(a)$$

Lebih umum, sisa pembagian $P(x)$ oleh $(ax - b)$ adalah $P(\frac{b}{a})$.

▼ Bukti singkat

Menurut algoritma pembagian, $P(x) = (x - a)H(x) + S$ untuk suatu polinomial H dan bilangan S . Substitusikan $x = a$:

$$P(a) = (a - a)H(a) + S = 0 \cdot H(a) + S = S.$$

Untuk pembagi $ax - b$, tulis $P(x) = (ax - b)H(x) + S$, lalu substitusikan $x = \frac{b}{a}$ sehingga $a \cdot \frac{b}{a} - b = 0$. ■

Bahasa sederhana • Bayangkan teorema sisa sebagai **mesin cek**: masukkan $x = a$ ke dalam polinomial, dan keluarlah sisanya. Pembagi $(x - 2)$? Masukkan 2. Pembagi $(x + 5)$? Masukkan -5 , karena itulah bilangan yang membuat pembagiannya nol.

RUMUS HIDUP Teorema Sisa

$$S = P(a) = a^3 + ba^2 + ca + d$$

Mau tahu sisa pembagian $P(x)$ oleh $(x - a)$? Tidak perlu membagi: cukup masukkan $x = a$ ke dalam $P(x)$.

b Koefisien x^2

c Koefisien x

d Suku tetap

a Nilai a pada $(x - a)$

S Sisa pembagian

SISA PEMBAGIAN
6

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ dibagi $(x - 4)$ bersisa **6**. Geser a ke 1, 2, dan 3. Apa yang terjadi?

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-TEOREMA-SISA

ADU CEPAT Sisa kilat: cukup masukkan nilai a !

ADU CEPAT • MAINKAN DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-16

Latihan kilat 60 detik dengan soal acak dan rekor pribadi.

Pembagi $(x - a)$ berarti hitung $P(a)$. Hati-hati: pembagi $(x + 2)$ berarti masukkan $x = -2$.

Tentukan sisa pembagian $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ oleh $x^2 - x - 2$, tanpa membagi bersusun.

- 1 Pembaginya berderajat 2, jadi sisanya berderajat paling tinggi 1: misalkan $S(x) = px + q$.
- 2 Faktorkan pembagi: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Maka $P(x) = (x - 2)(x + 1)H(x) + px + q$.
- 3 Isi $x = 2$: $P(2) = 16 - 24 + 4 - 5 = -9$, jadi $2p + q = -9$. Isi $x = -1$: $P(-1) = 1 + 3 - 2 - 5 = -3$, jadi $-p + q = -3$.
- 4 Kurangkan kedua persamaan: $3p = -6$, sehingga $p = -2$ dan $q = -3 + p = -5$.

Sisanya $-2x - 5$. Trik ini memilih nilai x yang membuat pembagi nol, persis seperti teorema sisa, hanya saja dipakai dua kali.

16.5 Teorema faktor dan berburu akar rasional

Apa artinya sisa sama dengan nol? Pembagiannya *habis*, sama seperti 12 habis dibagi 3 karena 3 adalah faktor 12. Dari teorema sisa langsung lahir senjata paling ampuh di bab ini.



TEOREMA FAKTOR

$(x - a)$ adalah faktor $P(x)$ **jika dan hanya jika** $P(a) = 0$. Bilangan a seperti itu disebut **akar** (atau pembuat nol) polinomial P .

Tetapi bagaimana menemukan a yang tepat? Untung ada petunjuk dari koefisiennya.



TEOREMA AKAR RASIONAL

Jika polinomial berkoefisien bulat $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ punya akar rasional $\frac{p}{q}$ (pecahan paling sederhana), maka p membagi suku tetap a_0 dan q membagi koefisien utama a_n . Khususnya, jika $a_n = 1$, setiap akar bulatnya pasti pembagi a_0 .

Resep berburu akar: (1) daftar semua calon $\pm \frac{p}{q}$; (2) uji calon-calon itu dengan teorema sisa atau Horner, mulai dari yang kecil; (3) begitu ketemu akar, bagi dengan Horner sehingga derajatnya turun satu; (4) ulangi, atau selesaikan sisa kuadratnya dengan pemfaktoran atau rumus abc (Bab 11). Tombol 🔍 **Berburu akar** di Mesin Horner menjalankan resep ini untukmu.



TRIK KAK LINTANG

Selalu cek $x = 1$ dan $x = -1$ lebih dulu, karena hitungannya paling ringan. $P(1)$ = jumlah semua koefisien. $P(-1)$ = jumlah koefisien pangkat genap dikurangi jumlah koefisien pangkat ganjil. Contoh: koefisien $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ berjumlah $1 - 2 - 5 + 6 = 0$, jadi $x = 1$ akar dan $(x - 1)$ faktornya, tanpa coret-core!

COBA SENDIRI Mencari k, lalu memfaktorkan

Diketahui $(x - 2)$ adalah faktor dari $P(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$. Tentukan k , faktorkan $P(x)$, lalu tentukan semua akar realnya.

- 1 Teorema faktor: $P(2) = 0$. Jadi $8 + 4k - 2 - 2 = 0$, atau $4k + 4 = 0$, sehingga $k = -1$.
- 2 $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$. Horner dengan $a = 2$: koefisien $1, -1, -1, -2$ menghasilkan baris $1, 1, 1 \mid 0$.
- 3 Jadi $P(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$.
- 4 Diskriminan $x^2 + x + 1$ adalah $1 - 4 = -3 < 0$, jadi faktor kuadrat itu tidak punya akar real.

$k = -1$, $P(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$, dan akar realnya hanya satu: $x = 2$. Polinomial derajat tiga tidak selalu punya tiga akar real!



AWAS JEBAKAN

" $(x + 2)$ faktor dari $P(x)$ " berarti $P(-2) = 0$, bukan $P(2) = 0$. Akar sebuah faktor adalah bilangan yang membuat faktor itu bernilai nol, jadi tandanya selalu berlawanan dengan yang tertulis di dalam kurung.

MITOS

"Polinomial derajat 3 pasti punya tiga akar real."

FAKTA

Bisa hanya satu! Contohnya

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$$

. Yang pasti: kubik selalu punya

minimal satu

akar real, karena kedua ujung grafiknya menuju arah yang berlawanan.

MITOS

"Kalau dibagi

$$(x + 3)$$

, masukkan saja

$$x = 3$$

."

FAKTA

Pembagi

$$x + 3 = x - (-3)$$

, jadi yang dimasukkan adalah

$$x = -3$$

, bilangan yang membuat pembagi bernilai nol.

MITOS

"Pembagian polinomial cuma trik hafalan tanpa makna."

FAKTA

Ia sama persis dengan pembagian bersusun bilangan. Contohnya

$$1.331 : 11 = 121$$

adalah

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x + 1) = x^2 + 2x + 1$$

di

$$x = 10$$

.



LANJUT • IB & OLIMPIADE

MENGAPA TEOREMA AKAR RASIONAL BENAR, DAN BATAS KEKUATANNYA

Misalkan $\frac{p}{q}$ akar dengan $\gcd(p, q) = 1$. Substitusikan, lalu kalikan kedua ruas dengan q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Semua suku kecuali $a_0 q^n$ memuat faktor p , jadi $p \mid a_0 q^n$. Karena p dan q saling prima, $p \mid a_0$. Dengan cara serupa, semua suku kecuali $a_n p^n$ memuat q , sehingga $q \mid a_n$. Fakta menarik: persamaan derajat 3 dan 4 punya rumus umum (rumit sekali!) yang diterbitkan di Italia pada abad ke-16. Namun untuk derajat 5 ke atas, Niels Henrik Abel (1824) membuktikan bahwa **tidak ada** rumus umum yang hanya memakai tambah, kurang, kali, bagi, dan tanda akar. Karena itulah berburu akar rasional dan metode numerik begitu penting.

16.6 Grafik polinomial: akar, pantulan, dan perilaku ujung

Akar polinomial adalah titik potong grafiknya dengan sumbu- x , karena di situ $y = P(x) = 0$. Bentuk faktor $P(x) = k(x - r)(x - s)(x - t)$ memamerkan ketiga akarnya secara langsung. Seret titik-titik akar di bawah dan lihat polinomialnya ikut berubah.

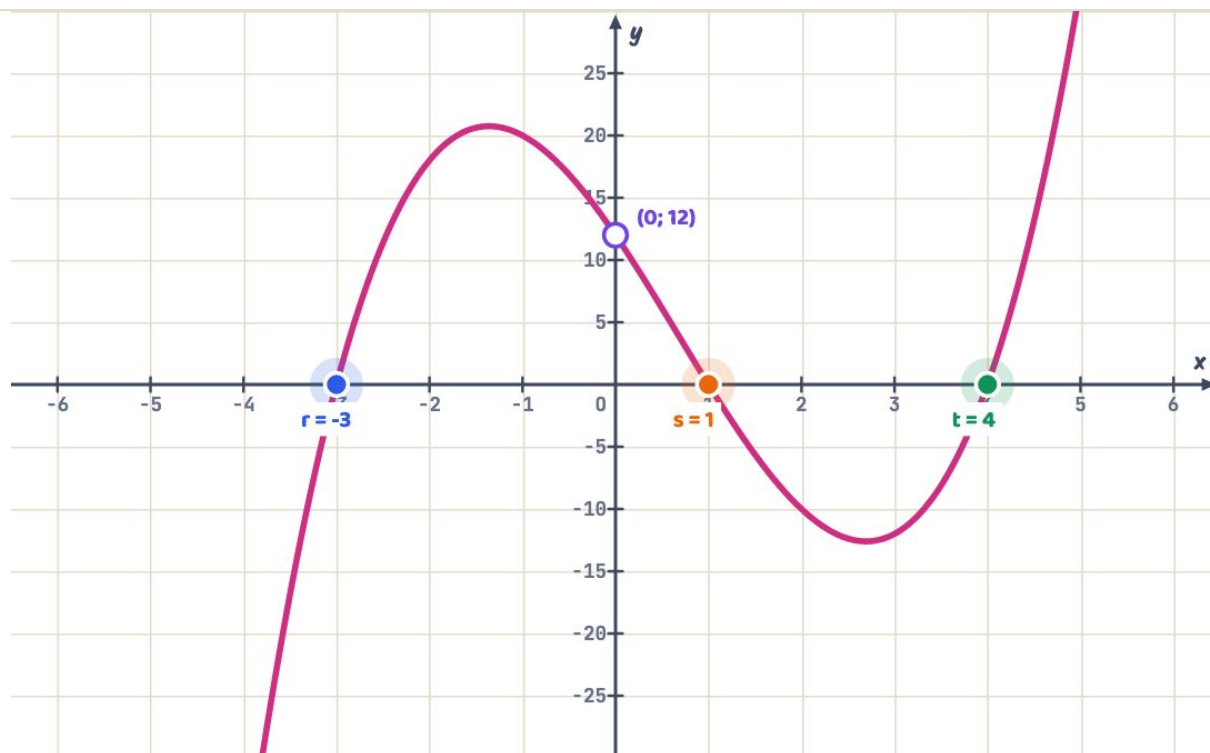
GRAFIK HIDUP Kubik dengan akar yang bisa diseret

GRAFIK HIDUP INTERAKTIF · COBA SENDIRI DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#BAB-16

$$y = k(x - r)(x - s)(x - t)$$

$$y = (x + 3)(x - 1)(x - 4) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

Bentuk faktor menunjukkan akar; bentuk panjang menyimpan rahasia Vieta (16.7).



$k > 0$: ujung kiri turun ☒, ujung kanan naik ☒

$r + s + t$
2

$rs + rt + st$
-11

$r \cdot s \cdot t$
-12

Potong sumbu- y
12

Seret titik akar di sumbu- x . Coba tumpuk dua akar di tempat yang sama: apakah grafiknya masih menembus sumbu- x ? Lalu ubah tanda k dan perhatikan kedua ujung grafik.

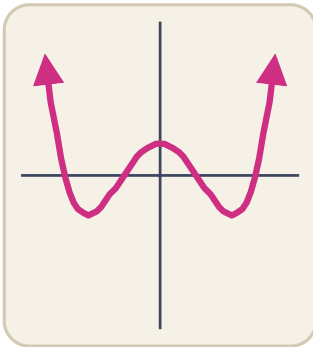


AKAR KEMBAR: MENEMBUS ATAU MEMANTUL?

Jika faktor $(x - r)$ muncul tepat m kali, r disebut akar dengan **kelipatan** m .

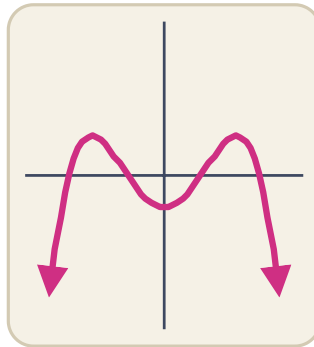
- m ganjil (1, 3, ...): grafik **menembus** sumbu- x di r . Untuk $m = 3$, grafik sempat mendatar sebelum menembus.
- m genap (2, 4, ...): grafik **menyinggung** sumbu- x di r lalu memantul kembali, karena $(x - r)^2$ tidak pernah negatif.

Bagaimana dengan ujung-ujung grafik, jauh di kiri dan jauh di kanan? Di sana, suku berpangkat tertinggi menang telak. Untuk $x = 100$, suku x^3 bernilai sejuta, sedangkan $-10x$ hanya -1.000 . Jadi **perilaku ujung** polinomial hanya ditentukan oleh **derajat** (genap atau ganjil) dan **tanda koefisien utamanya**.



n genap, $a > 0$

kedua ujung naik



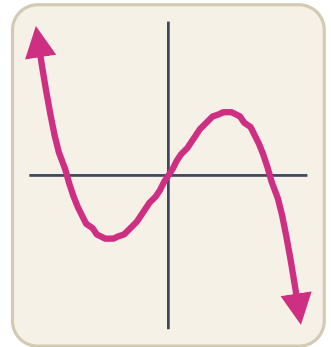
n genap, $a < 0$

kedua ujung turun



n ganjil, $a > 0$

kiri turun, kanan naik



n ganjil, $a < 0$

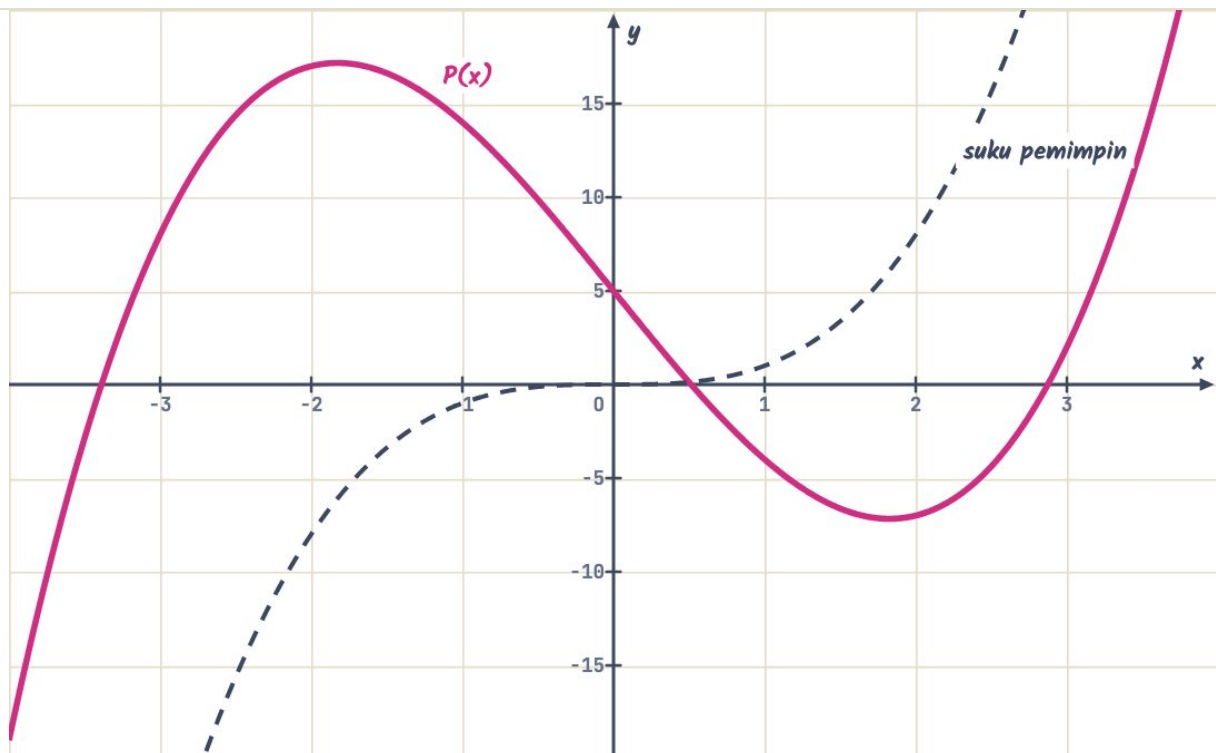
kiri naik, kanan turun

Perilaku ujung hanya bergantung pada derajat n (genap atau ganjil) dan tanda koefisien utama a . Suku-suku lain hanya membuat "kelokan" di bagian tengah.

$$P(x) = a x^n - 10x + 5$$

$$P(x) = x^3 - 10x + 5 \quad y = x^3$$

Kurva magenta adalah $P(x)$; kurva putus-putus hanya suku pemimpinnya. Tekan ► untuk mundur (zoom keluar) dan lihat keduanya makin berimpit.



n ganjil, $a > 0$: kiri turun ↓, kanan naik ↑

Tepi kanan $x =$

4

$P(x) \div (a \cdot x^n)$ di tepi kanan

0,453

Tekan ► **Jalankan** atau geser "zoom keluar". Dari jauh, kelokan di tengah mengecil dan $P(x)$ nyaris berimpit dengan suku pemimpinnya. Perhatikan pembacaan " $P \div ax^n$ " yang makin mendekati 1.

Kembali ke kardus 30 cm × 20 cm. Grafik $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$ berakar di $x = 0$, $x = 10$, dan $x = 15$, tetapi kardus hanya masuk akal untuk $0 < x < 10$. Di antara dua akar pertama, grafiknya naik lalu turun. Di puncak itulah kotak terbesar bersembunyi.



Tebak Dulu!

Dari karton $30\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, kamu memotong persegi berukuran sama di keempat pojok lalu melipat sisinya menjadi kotak terbuka. Potongan seperti apa yang menghasilkan volume terbesar?

Sekecil mungkin, misalnya 1 cm , supaya alasnya lebar.

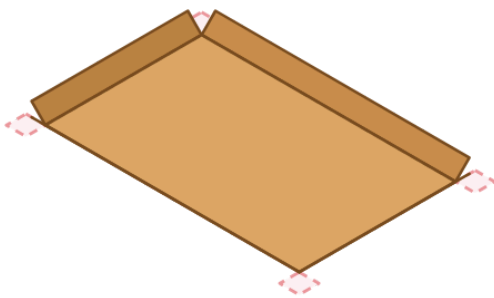
Sebesar mungkin, misalnya 9 cm , supaya kotaknya tinggi.

Sedang-sedang saja, sekitar 4 cm .

Semua potongan menghasilkan volume yang sama, karena kartonnya sama.

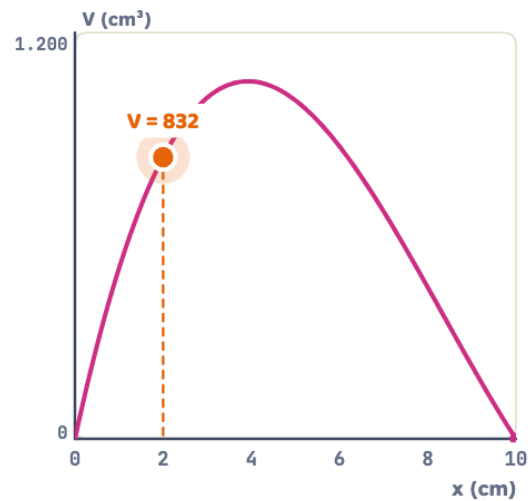
Jawabannya: sekitar 4 cm . Potongan 1 cm memberi $1 \times 28 \times 18 = 504\text{ cm}^3$, potongan 9 cm hanya $9 \times 12 \times 2 = 216\text{ cm}^3$, sedangkan potongan 4 cm memberi $4 \times 22 \times 12 = 1.056\text{ cm}^3$. Terlalu kecil membuat kotak pendek, terlalu besar membuat alasnya sempit. Juara ada di tengah, dan Lab Mini di bawah menunjukkan letak tepatnya.

Melipat sisi-sisinya...



▶ sedang dilipat

$$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$$



👉 seret titik oranye di grafik

Ukuran kotak ($p \times l \times t$) $26 \times 16 \times 2 \text{ cm}$

Volume

 832 cm^3

Juara volume

rahasia 🕵️

Geser ukuran potongan x atau seret titik oranye di grafik. Tekan ▶ **Jalankan** untuk melihat karton dilipat menjadi kotak. Bisakah kamu menemukan puncak grafik $V(x)$ sebelum menyalakan sakelar "Tunjukkan titik maksimum"? Coba juga karton berukuran lain.

**BOCORAN DARI BAB 29**

Untuk karton $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$, puncaknya ada di $x \approx 3,92 \text{ cm}$ dengan volume $\approx 1.056,3 \text{ cm}^3$.

Menemukan titik puncak secara tepat memerlukan **turunan**, alat kalkulus yang akan kamu pelajari di Bab 28 dan 29. Untuk sekarang, grafik polinomial sudah memberi jawaban yang sangat dekat.

**MATEMATIKA NUSANTARA**

Di banyak desa di Jawa, perajin menganyam **besek**, kotak bambu wadah nasi berkat dan oleh-oleh. Lembar anyaman berbentuk persegi panjang ditekuk di keempat sisinya, dan pojok-pojoknya dilipat ke dalam. Ukuran kotaknya mengikuti aturan yang sama dengan karton kita: tekukan setinggi x membuat alas berukuran $(p - 2x) \times (l - 2x)$. Para perajin menemukan tekukan yang "pas" lewat pengalaman turun-temurun. Kita bisa menemukannya lewat polinomial $V(x) = x(p - 2x)(l - 2x)$.



Pabrik kemasan

Volume kardus dan kotak makanan dari selebar karton adalah polinomial derajat tiga dari ukuran potongannya.



Tikungan jalan & rel

Peralihan dari jalan lurus ke tikungan dibuat bertahap memakai lengkung peralihan. Salah satu bentuk klasiknya adalah parabola kubik, agar penumpang tidak tersentak.



Kode QR

Kode QR tetap terbaca walau sebagian tertutup stiker karena memakai kode Reed–Solomon, yang bekerja dengan polinomial.



Huruf di layar HP

Lengkung setiap huruf pada font disimpan sebagai kurva Bézier, yaitu potongan-potongan polinomial derajat dua atau tiga.



Menyimpan rahasia

Kunci brankas digital bisa dipecah menjadi beberapa "titik" sebuah polinomial; rahasia baru terbuka bila cukup banyak titik dikumpulkan.

16.7

Rumus Vieta: akar dan koefisien bersekongkol

Coba lihat lagi Grafik Hidup di 16.6. Saat akar diseret, koefisien bentuk panjangnya ikut berubah dengan pola yang rapi. Pola itu disebut **rumus Vieta**, menurut François Viète (1540–1603), ahli hukum Prancis yang gemar aljabar dan termasuk orang pertama yang memakai huruf untuk bilangan yang belum diketahui.



RUMUS VIETA DERAJAT TIGA

Jika x_1, x_2, x_3 adalah akar-akar $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, maka

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

▼ Bukti: jabarkan bentuk faktornya

Karena x_1, x_2, x_3 akar-akarnya, menurut teorema faktor $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Jabarkan ruas kanan:

$$a \left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \right].$$

Cocokkan koefisien (kesamaan polinomial, 16.2): $b = -a(x_1 + x_2 + x_3)$, $c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, dan $d = -a x_1x_2x_3$. Bagi dengan a , selesai. ■

$$d = -rst$$

Untuk $x^3 + bx^2 + cx + d$ dengan akar r, s, t : suku tetapnya adalah hasil kali ketiga akar dengan tanda dibalik. Koefisien b dan c juga bisa dibaca langsung dari akar-akarnya.

 r

Akar pertama

 s

Akar kedua

 t

Akar ketiga

 d Suku tetap d

SUKU TETAP D

-6

Akar **1, 2**, dan **3**: $b = -(r + s + t) = \mathbf{-6}$, $c = rs + rt + st = \mathbf{11}$, dan $d = -rst = \mathbf{-6}$. Jadi $(x - r)(x - s)(x - t) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

RUMUS HIDUP: GESER NILAINYA DAN KUMPULKAN KARTUNYA DI AURUMGEN.MY.ID/MATHPEDIA#RM-VIETA-KUBIK

Salah satu akar $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ adalah **3**. Tentukan dua akar lainnya tanpa membagi.

- 1 Misalkan akar-akarnya $3, u, v$. Jumlah akar: $3 + u + v = -\frac{-4}{1} = 4$, jadi $u + v = 1$.
- 2 Hasil kali akar: $3uv = -\frac{6}{1} = -6$, jadi $uv = -2$.
- 3 Dua bilangan berjumlah 1 dan berhasil kali -2 adalah akar $t^2 - t - 2 = 0$, yaitu $(t - 2)(t + 1) = 0$.

Akar lainnya 2 dan -1. Cek: $P(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$ dan $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$. ✓

Akar-akar $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ adalah x_1, x_2, x_3 . Hitung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

1 Vieta: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2}$ dan $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-4}{2} = -2$.

2 Kuadratkan jumlahnya: $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

3 Jadi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(-2) = \frac{25}{4} + 4 = \frac{41}{4}$.

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{41}{4} = 10,25$. **Cek:** akarnya ternyata 3, $\frac{1}{2}$, dan -1 , dan $9 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{4}$. ✓



LANJUT • IB & OLIMPIADE

TRIK OLIMPIADE: JIKA $A + B + C = 0$, MAKA $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$

Pandang a, b, c sebagai akar-akar $t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc = 0$. Karena $a + b + c = 0$, persamaannya menjadi $t^3 + et - abc = 0$ dengan $e = ab + bc + ca$. Setiap akar memenuhi $t^3 = -et + abc$. Jumlahkan untuk $t = a, b, c$:

$$a^3 + b^3 + c^3 = -e(a + b + c) + 3abc = 3abc.$$

Contoh kilat: $13^3 + (-5)^3 + (-8)^3$ tanpa kalkulator. Karena $13 - 5 - 8 = 0$, hasilnya $3 \cdot 13 \cdot (-5) \cdot (-8) = 1.560$. Cek: $2.197 - 125 - 512 = 1.560$. ✓

Cek Cepat

Derajat polinomial $(x^2 + 1)(x^3 - x)$ adalah...

Sisa pembagian $x^3 - 2x + 7$ oleh $x + 1$ adalah...

6

4

8

10

Manakah yang merupakan faktor dari $x^3 + 2x^2 - x - 2$?

$x + 2$

$x - 2$

$x + 3$

$x - 3$

Kunci Cek Cepat: 1. B • 2. C • 3. A



Tantangan Rumah: pabrik kotak dari kertas bekas

Bahan: 4 lembar kertas atau karton bekas berukuran sama (misalnya HVS A4, 29,7 cm × 21 cm), penggaris, pensil, gunting, selotip, beras atau kacang hijau, dan sendok makan.

1. Potong persegi di keempat pojok setiap lembar: 2 cm untuk lembar pertama, lalu 3 cm, 4 cm, dan 5 cm untuk lembar lainnya.
2. Lipat sisi-sisinya ke atas dan rekatkan pojoknya dengan selotip.
3. Isi setiap kotak dengan beras sampai penuh dan rata. Hitung berapa sendok yang kamu perlukan.
4. Hitung juga volume tiap kotak dengan rumus $V(x) = x(29,7 - 2x)(21 - 2x)$.
5. Urutkan keempat kotak dari yang paling sedikit sampai yang paling banyak menampung beras.

Pertanyaan: Apakah urutan hasil takaran berasmu sama dengan urutan hasil rumus? Potongan berapa sentimeter (boleh desimal) yang menurutmu memberi kotak terbesar untuk kertas A4? Cek tebakanmu dengan Rumus Hidup volume kotak di 16.1.



RINGKASAN KILAT

Bab 16 dalam 3 menit

✓ Kamu sekarang bisa...

- mengenali **suku**, **koefisien**, dan **derajat** sebuah polinomial, lalu menghitung nilainya
- menjumlahkan, mengurangi, dan mengalikan polinomial, serta memakai **kesamaan polinomial**
- membagi polinomial dengan **cara bersusun** dan **metode Horner**
- memakai **teorema sisa** dan **teorema faktor** untuk mencari sisa, faktor, dan akar
- membaca **grafik polinomial** (akar, akar kembar, perilaku ujung) dan memakai **rumus Vieta** derajat tiga

🔑 Istilah kunci

polinomial

suku banyak

koefisien

derajat

koefisien utama

suku tetap

nilai polinomial

suku sejenis

sama

hasil bagi

sisa

akar

kelipatan

perilaku ujung

rumus Vieta

📊 Rumus penting

$$V = x(p - 2x)(l - 2x)$$

Volume kotak dari karton. Volume = tinggi × panjang alas × lebar alas. Tingginya x , sedangkan panjang dan lebar karton masing-masing berkurang $2x$ karena dipotong di kedua ujungnya.

$$S = P(a) = a^3 + ba^2 + ca + d$$

Teorema Sisa. Mau tahu sisa pembagian $P(x)$ oleh $(x - a)$? Tidak perlu membagi: cukup masukkan $x = a$ ke dalam $P(x)$.

$$d = -rst$$

Vieta: dari akar ke koefisien. Untuk $x^3 + bx^2 + cx + d$ dengan akar r, s, t : suku tetapnya adalah hasil kali ketiga akar dengan tanda dibalik. Koefisien b dan c juga bisa dibaca langsung dari akar-akarnya.

⚠️ Jangan sampai terjebak

- Derajat ditentukan oleh pangkat tertinggi, bukan oleh suku yang ditulis paling depan.
- Suku yang hilang wajib ditulis dengan koefisien 0.
- " $(x + 2)$ faktor dari $P(x)$ " berarti $P(-2) = 0$, bukan $P(2) = 0$.

📄 Tangga Latihan: 24 soal bab ini (Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade) ada di PDF Bank Soal dan di aurumgen.my.id/mathpedia#soal?bab=16

Teka-teki untuk Bab 17

Jumlah sudut dalam segi- n ternyata sebuah polinomial derajat satu: $S(n) = 180n - 360$ (dalam derajat). Segi empat: $S(4) = 360^\circ$. Segi lima: $S(5) = 540^\circ$. Segitiga: $S(3) = 180^\circ$. Tetapi tunggu dulu. Mengapa **setiap** segitiga, entah kecil atau raksasa, lancip atau tumpul, sudutnya selalu berjumlah tepat 180° ? Bisakah kamu meyakinkan temanmu hanya dengan selembar kertas?

▼ Intip petunjuk

Gunting sebuah segitiga dari kertas, sobek ketiga pojoknya, lalu jajarkan ketiga ujung sudut itu pada satu titik. Bentuk apa yang muncul? Bab 17 akan menjelaskan rahasianya dengan garis-garis sejajar.