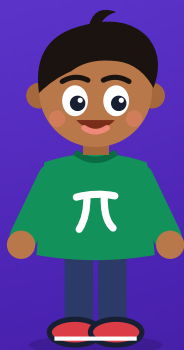


BANK SOAL • EDISI GURU

Mathpedia

Matematika Itu Asyik!

936 soal asli dari Lv 1 Pemula sampai Lv 6 Olimpiade, lengkap
dengan kunci dan pembahasan.



dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD

Editor: Abdullah Hanif Hidayat

Didukung oleh Aurumgen Academy

Tentang bank soal edisi guru

Setiap bab berisi 24 soal yang tersusun seperti tangga: 4 soal untuk setiap level.

Level	Untuk siapa
Lv 1 • Pemula	SD–SMP awal
Lv 2 • Penjelajah	SMP (Fase D)
Lv 3 • Pejuang	SMA • TKA/UTBK
Lv 4 • IGCSE	gaya Cambridge IGCSE
Lv 5 • IB DP	gaya IB Mathematics
Lv 6 • Olimpiade	gaya OSN/IMO

Edisi guru memuat kunci jawaban dan pembahasan langkah demi langkah tepat di bawah setiap soal.

Mathpedia • Matematika Itu Asyik! Edisi 1 (2026).

Penulis: **dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD**

Editor: **Abdullah Hanif Hidayat**

Didukung oleh Aurumgen Academy.

© 2026 dr. Rachmat Hidayat, M.Sc, PhD. Hak cipta dilindungi undang-undang. Dokumen ini boleh dicetak dan diperbanyak untuk keperluan pembelajaran nonkomersial dengan tetap mencantumkan sumber.

Semua soal dan LKPD adalah karya asli. Label "gaya IGCSE", "gaya IB", dan "gaya olimpiade" menunjukkan tingkat dan format, bukan salinan soal resmi. Disusun selaras dengan Capaian Pembelajaran 2025 (Keputusan Kepala BSKAP No. 046/H/KR/2025) dan pendekatan Pembelajaran Mendalam.

Versi interaktif dengan komik bergerak, Rumus Hidup, Grafik Hidup, Lab Mini, Adu Cepat, dan latihan berskor: aurumgen.my.id/mathpedia

Daftar isi

BAGIAN A • BILANGAN

1	Matematika Ada di Mana-mana	5
2	Bilangan Bulat & Garis Bilangan	12
3	Pecahan, Desimal & Persen	19
4	Faktor, Kelipatan & Bilangan Prima	27
5	Rasio, Proporsi & Laju	34
6	Pangkat, Akar & Notasi Ilmiah	41

BAGIAN B • ALJABAR & FUNGSI

7	Bahasa Aljabar	47
8	Persamaan & Pertidaksamaan Linear	54
9	Garis Lurus & Fungsi Linear	61
10	Sistem Persamaan Linear	68
11	Persamaan Kuadrat	76
12	Fungsi Kuadrat & Parabola	83
13	Fungsi: Komposisi, Invers & Transformasi	90
14	Eksponen & Logaritma	97
15	Barisan & Deret	103
16	Polinomial	110

BAGIAN C • GEOMETRI & PENGUKURAN

17	Garis, Sudut & Segitiga	117
18	Teorema Pythagoras	124
19	Keliling & Luas Bangun Datar	130
20	Lingkaran	138
21	Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume	145

22	Kesebangunan & Transformasi Geometri	152
23	Geometri Koordinat & Vektor	160
BAGIAN D • TRIGONOMETRI		
24	Trigonometri Segitiga Siku-siku	167
25	Aturan Sinus, Kosinus & Luas Segitiga	174
26	Fungsi & Identitas Trigonometri	181
BAGIAN E • KALKULUS		
27	Limit: Seni Mendekati	188
28	Turunan: Laju Perubahan	196
29	Aplikasi Turunan: Optimasi & Grafik	203
30	Integral: Menjumlahkan yang Tak Terhingga	211
BAGIAN F • DATA & PELUANG		
31	Statistika: Bercerita dengan Data	220
32	Kaidah Pencacahan	228
33	Peluang	234
34	Distribusi Peluang: Binomial & Normal	241
BAGIAN G • MATEMATIKA LANJUT & OLIMPIADE		
35	Logika & Pembuktian	248
36	Matriks	256
37	Bilangan Kompleks	264
38	Teori Bilangan Olimpiade	271
39	Strategi Olimpiade: Kombinatorika & Ketaksamaan	278

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pola berulang • 01-1-01

Selembar kain batik memiliki motif yang berulang dengan urutan: kawung, parang, truntum, kawung, parang, truntum, ... Motif ke-10 adalah...

- A. kawung
B. parang
C. truntum
D. mega mendung

Kunci: A

Pembahasan: Polanya berulang setiap 3 motif. Motif ke-3, ke-6, dan ke-9 adalah truntum, jadi motif ke-10 kembali ke awal putaran: **kawung**.

Cara cepat: $10 : 3 = 3$ sisa 1. Sisa 1 berarti motif pertama dalam satu putaran.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pola tambah tetap • 01-1-02

Bilangan berikutnya dari barisan 3, 7, 11, 15, ... adalah...

- A. 18
B. 19
C. 20
D. 21

Kunci: B

Pembahasan: Setiap suku bertambah 4: $3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+4} 15$.

Jadi suku berikutnya $15 + 4 = 19$.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Bilangan segitiga • 01-1-03

Kelereng disusun membentuk segitiga. Susunan ke-1, ke-2, ke-3, dan ke-4 berisi 1, 3, 6, dan 10 kelereng (baris-barisnya berisi 1, 2, 3, ... kelereng). Berapa banyak kelereng pada susunan ke-5?

Jawaban: kelereng

Kunci: 15 kelereng

Pembahasan: Susunan ke-5 punya baris berisi 1, 2, 3, 4, dan 5 kelereng.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Dengan rumus: $T_5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Bilangan Fibonacci • 01-1-04

Barisan Fibonacci dimulai 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... dan setiap suku adalah jumlah dua suku sebelumnya. Manakah yang merupakan bilangan Fibonacci?

- A. 12
B. 20
C. 34
D. 40

Kunci: C

Pembahasan: Lanjutkan barisannya: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, **34**, 55, ...

Bilangan 12, 20, dan 40 terlewat; mereka tidak pernah muncul di barisan Fibonacci.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Jumlah bilangan ganjil • 01-2-01

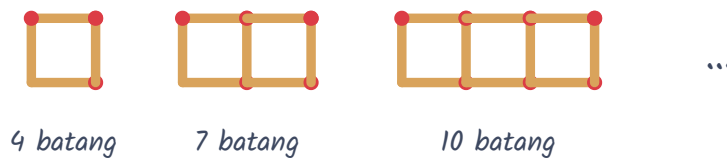
Hitunglah $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 29$.

Jawaban:

Kunci: 225**Pembahasan:** Bilangan ganjil dari 1 sampai 29 ada $\frac{29+1}{2} = 15$ buah.Jumlah n bilangan ganjil pertama sama dengan n^2 , jadi hasilnya $15^2 = 225$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Pola batang korek api • 01-2-02

Dimas menyusun persegi-persegi berjajar dari batang korek api (lihat gambar). 1 persegi butuh 4 batang, 2 persegi butuh 7 batang, dan 3 persegi butuh 10 batang. Berapa batang yang dibutuhkan untuk 20 persegi berjajar?



Jawaban: batang

Kunci: 61 batang**Pembahasan:** Setiap persegi baru hanya butuh 3 batang tambahan, karena satu sisinya memakai batang dari persegi sebelumnya.Pola 4, 7, 10, ... mengikuti rumus $3n + 1$.Untuk $n = 20$: $3 \times 20 + 1 = 61$ batang.Cek: $n = 3$ memberi $3 \times 3 + 1 = 10$. ✓

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Langkah Polya • 01-2-03

Ayu mendapat jawaban 45 untuk sebuah soal jabat tangan. Ia lalu menghitung ulang dengan cara yang berbeda dan mendapat 45 juga. Dalam empat langkah Polya, Ayu sedang...

A. memahami masalah

C. melaksanakan rencana

B. menyusun rencana

D. memeriksa kembali

Kunci: D**Pembahasan:** Mengecek jawaban dengan cara lain adalah langkah ke-4 Polya: **memeriksa kembali**. Langkah ini paling sering dilupakan, padahal paling ampuh untuk menangkap salah hitung.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Pola selisih bertambah • 01-2-04

Bilangan berikutnya dari barisan 1, 2, 4, 7, 11, 16, ... adalah...

A. 22

C. 32

B. 21

D. 20

Kunci: A**Pembahasan:** Selisihnya 1, 2, 3, 4, 5, jadi selisih berikutnya 6: $16 + 6 = 22$.

Jawaban 32 adalah jebakan "kali dua". Barisan ini tidak dikali; ia ditambah dengan bilangan yang makin besar.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Jabat tangan • 01-3-01

Dalam rapat RT, setiap warga yang hadir berjabat tangan tepat satu kali dengan setiap warga lain yang hadir. Tercatat ada 66 jabat tangan. Berapa warga yang hadir?

Jawaban: orang

Kunci: 12 orang

Pembahasan: Dengan n orang, setiap orang menjabat $n - 1$ tangan, dan setiap jabat tangan terhitung dua kali.

Jadi banyaknya $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 66 \Rightarrow n(n-1) = 132 = 12 \times 11.$$

Jadi $n = 12$ orang. Cek: $\frac{12 \times 11}{2} = 66$. ✓

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Tangga Fibonacci • 01-3-02

Dimas menaiki tangga dengan 9 anak tangga. Sekali melangkah ia boleh naik 1 atau 2 anak tangga. Sayangnya, anak tangga ke-5 rusak sehingga tidak boleh diinjak. Ada berapa cara berbeda bagi Dimas untuk sampai di anak tangga ke-9?

Jawaban: cara

Kunci: 15 cara

Pembahasan: Tanpa kerusakan, banyak cara mencapai anak tangga ke-1, 2, 3, 4 adalah 1, 2, 3, 5 (pola Fibonacci).

Anak tangga ke-5 tidak boleh diinjak, jadi Dimas harus berdiri di anak tangga ke-4 lalu melompat 2 ke anak tangga ke-6. Bagian ini ada 5 cara.

Dari anak tangga ke-6 ke ke-9 tersisa 3 anak tangga: 3 cara (1+1+1, 1+2, 2+1).

Total: $5 \times 3 = 15$ cara.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Jumlah bilangan genap • 01-3-03

Nilai $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ adalah...

A. 2.500

C. 2.600

B. 5.050

D. 2.550

Kunci: D

Pembahasan: Keluarkan faktor 2: $2(1 + 2 + \dots + 50) = 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 50 \times 51 = 2.550$.

Pengecoh 2.500 adalah jumlah bilangan *ganjil* $1 + 3 + \dots + 99$, sedangkan 5.050 adalah $1 + 2 + \dots + 100$.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Pola sarang lebah • 01-3-04

Sel sarang lebah tumbuh berlapis. Pola ke-1 adalah 1 sel. Pola ke-2 adalah sel itu dikelilingi cincin 6 sel (total 7). Pola ke-3 menambah cincin berikutnya (total 19), lalu 37, dan seterusnya. Berapa banyak sel pada pola ke-6?

Jawaban: sel

Kunci: 91 sel

Pembahasan: Cincin-cincin baru berisi 6, 12, 18, 24, dan 30 sel.

Pola ke-6: $1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 = 91$ sel.

Rumus umum: $1 + 6(1 + 2 + \dots + (n-1)) = 1 + 6 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 3n(n-1) + 1$. Untuk $n = 6$: $3 \times 6 \times 5 + 1 = 91$.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Suku ke-n • gaya IGCSE • 01-4-01

Diketahui barisan bilangan 5, 9, 13, 17, ... **Tentukan** rumus suku ke- n (n th term), lalu **hitung** suku ke-50.

Jawaban:

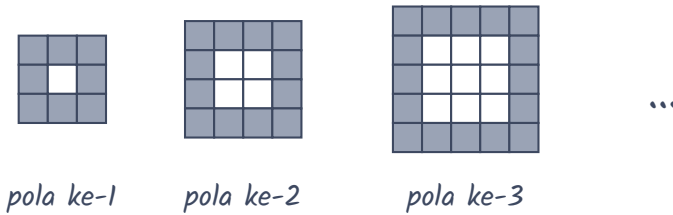
Kunci: 201

Pembahasan: Selisihnya tetap 4, jadi suku ke- n berbentuk $4n + c$. Suku pertama: $5 = 4(1) + c$, sehingga $c = 1$.

Suku ke- $n = 4n + 1$. Suku ke-50 = $4(50) + 1 = 201$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Pola ubin berbingkai • gaya IGCSE • 01-4-02

Pola ke- n terdiri atas persegi $n \times n$ ubin putih yang dikelilingi bingkai ubin abu-abu selebar satu ubin (lihat gambar). Pola ke-1, ke-2, dan ke-3 memakai 8, 12, dan 16 ubin abu-abu. Banyak ubin abu-abu pola ke- n adalah $4n + 4$. **Hitung** nomor pola yang memakai tepat 100 ubin abu-abu.



Jawaban:

Kunci: 24

Pembahasan: Mengapa $4n + 4$? Bingkai = persegi luar $(n + 2)^2$ dikurangi bagian dalam n^2 : $(n + 2)^2 - n^2 = 4n + 4$.

$$4n + 4 = 100 \Rightarrow 4n = 96 \Rightarrow n = 24.$$

Cek: pola ke-24 memakai $26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100$ ubin abu-abu. ✓

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Rumus suku ke-n • gaya IGCSE • 01-4-03

Rumus suku ke- n untuk barisan 2, 6, 12, 20, 30, ... adalah...

- A. $2n^2$
B. $4n - 2$
- C. $n(n + 1)$
D. $n^2 + 1$

Kunci: C

Pembahasan: Uji $n = 1, 2, 3$: $n(n+1)$ memberi 2, 6, 12. ✓

$2n^2$ memberi 2, 8, ... $\times$. $n^2 + 1$ memberi 2, 5, ... $\times$.

$4n - 2$ memberi 2, 6, 10: cocok untuk dua suku pertama saja. Itulah jebakannya: selalu uji minimal tiga suku!

Bilangan segitiga ke- n adalah $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(a) **Tunjukkan** secara aljabar bahwa $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$.

(b) **Gunakan** hasil (a) untuk menghitung $T_{20} + T_{21}$ tanpa menghitung T_{20} dan T_{21} satu per satu.

(c) **Jelaskan** dengan gambar susunan titik mengapa hasil (a) masuk akal.

Kunci/rubrik: (a) $T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)^2$. [2 poin: mengeluarkan faktor $(n+1)$ 1, menyederhanakan menjadi $(n+1)^2$ 1]

(b) Dengan $n = 20$: $T_{20} + T_{21} = 21^2 = 441$. (Cek: $210 + 231 = 441$.) [1 poin]

(c) Gambar persegi $(n+1) \times (n+1)$ titik. Bagian di atas dan pada diagonal berbentuk tangga $1, 2, \dots, n+1$ titik, yaitu T_{n+1} ; bagian di bawah diagonal berbentuk tangga $1, 2, \dots, n$, yaitu T_n . [1 poin]

Pembahasan: Kunci aljabarnya adalah mengeluarkan faktor persekutuan $(n+1)$. Gambar di bagian (c) adalah bukti tanpa kata: dua tangga yang berdampingan selalu membentuk persegi.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Barisan Fibonacci didefinisikan dengan $F_1 = F_2 = 1$ dan $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Misalkan $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

(a) Hitung $r_1, r_2, \dots, r_8$ dalam bentuk desimal (4 angka di belakang koma) dan jelaskan perilakunya.

(b) Tunjukkan bahwa $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$.

(c) Misalkan r_n mendekati suatu limit L untuk n besar. Tunjukkan bahwa $L^2 = L + 1$, lalu tentukan nilai eksak L .

Kunci/rubrik: (a) 1; 2; 1,5; 1,6667; 1,6; 1,625; 1,6154; 1,6190. Nilainya bergantian lebih besar dan lebih kecil, makin rapat di sekitar 1,618. [2]

(b) $r_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}$. [2]

(c) Untuk n besar, r_{n+1} dan r_n sama-sama mendekati L , jadi $L = 1 + \frac{1}{L}$. Kalikan dengan L : $L^2 = L + 1$, atau $L^2 - L - 1 = 0$, sehingga $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Karena semua $r_n > 0$, maka $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, yaitu rasio emas φ . [3]

Pembahasan: Hubungan $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$ menunjukkan bahwa φ adalah *titik tetap*: $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Karena itu φ dapat ditulis sebagai pecahan berlanjut yang indah: $\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$.

Ayu menabung setiap hari: Rp1.000 pada hari ke-1, Rp2.000 pada hari ke-2, Rp3.000 pada hari ke-3, dan seterusnya (setiap hari bertambah Rp1.000). Tentukan nomor hari ketika total tabungannya **pertama kali** melebihi Rp1.000.000.

Jawaban:

Kunci: 45

Pembahasan: Total setelah n hari: $1.000(1 + 2 + \dots + n) = 1.000 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ rupiah.

Syarat: $\frac{n(n+1)}{2} > 1.000 \Rightarrow n^2 + n - 2.000 > 0$. Akar positif persamaan $n^2 + n - 2.000 = 0$ adalah $n = \frac{-1 + \sqrt{8.001}}{2} \approx 44,2$.

Jadi $n = 45$. Cek: $T_{44} = 990$ (Rp990.000, belum) dan $T_{45} = 1.035$ (Rp1.035.000, sudah).

Pada bunga matahari, setiap biji baru tumbuh dengan berputar sebesar sudut emas $\theta = 360^\circ \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)$ dari biji sebelumnya, dengan $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Nilai θ yang paling dekat adalah...

- A. $120,0^\circ$ C. $135,0^\circ$
B. $137,5^\circ$ D. $222,5^\circ$

Kunci: B

Pembahasan: $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$, jadi $1 - \frac{1}{\varphi} \approx 0,382$ dan $\theta \approx 0,382 \times 360^\circ \approx 137,5^\circ$.

Pengecoh $222,5^\circ = 360^\circ/\varphi$ adalah putaran yang sama, tetapi diukur dari arah sebaliknya. Sudut 135° (tepat $\frac{3}{8}$ putaran) justru membuat biji berbaris di 8 jari-jari lurus dengan celah kosong di antaranya.

Sebanyak n titik diletakkan pada lingkaran, lalu setiap dua titik dihubungkan dengan tali busur. Titik-titiknya dipilih sehingga tidak ada tiga tali busur yang melalui satu titik di dalam lingkaran. Banyak daerah yang terbentuk adalah $R(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$. (Untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$ hasilnya 1, 2, 4, 8, 16.) Hitung $R(8)$.

Jawaban: daerah

Kunci: 99 daerah

Pembahasan: $\binom{8}{4} = 70$ dan $\binom{8}{2} = 28$, jadi $R(8) = 70 + 28 + 1 = 99$.

Bandingkan dengan tebakan pola “kali dua”: $2^7 = 128$. Selisihnya jauh! Rumus ini lahir dari menghitung titik potong (setiap 4 titik pada lingkaran menghasilkan tepat 1 titik potong) dan tali busur.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Bilangan segitiga adalah bilangan berbentuk $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk bilangan asli n .

- (a) Buktikan bahwa $8T_n + 1$ selalu bilangan kuadrat sempurna.
(b) Buktikan kebalikannya: jika m bilangan asli dan $8m + 1$ kuadrat sempurna, maka m bilangan segitiga.
(c) Apakah 2026 bilangan segitiga? Jelaskan.

Kunci/rubrik: (a) $8T_n + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$. [2]

(b) Misalkan $8m + 1 = k^2$ dengan k bilangan asli. Karena k^2 ganjil, k ganjil; tulis $k = 2n + 1$. Karena $m \geq 1$, $k^2 \geq 9$, jadi $n \geq 1$. Maka $8m = k^2 - 1 = 4n^2 + 4n$, sehingga $m = \frac{n(n+1)}{2} = T_n$. [3]

(c) $8 \times 2026 + 1 = 16.209$. Karena $127^2 = 16.129 < 16.209 < 16.384 = 128^2$, bilangan 16.209 bukan kuadrat sempurna. Menurut (a), 2026 **bukan** bilangan segitiga. (Memang $T_{63} = 2016$ dan $T_{64} = 2080$.) [2]

Pembahasan: Bagian (a) dan (b) bersama-sama memberi uji yang lengkap: m bilangan segitiga **jika dan hanya jika** $8m + 1$ kuadrat sempurna. Uji seperti ini jauh lebih cepat daripada mendaftar semua bilangan segitiga.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Segitiga bilangan • gaya olimpiade • 01-6-02

Bilangan asli disusun dalam baris-baris:

baris 1: 1

baris 2: 2, 3

baris 3: 4, 5, 6

baris 4: 7, 8, 9, 10

dan seterusnya (baris ke- k berisi k bilangan). Di baris ke berapa bilangan 2026 berada?

Jawaban:

Kunci: 64

Pembahasan: Bilangan terakhir di baris ke- k adalah $1 + 2 + \dots + k = T_k$.

$$T_{63} = \frac{63 \times 64}{2} = 2016 \text{ dan } T_{64} = \frac{64 \times 65}{2} = 2080.$$

Karena $2016 < 2026 \leq 2080$, bilangan 2026 ada di baris ke-**64** (tepatnya bilangan ke-10 di baris itu).

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Lampu hias Fibonacci • gaya olimpiade • 01-6-03

Menjelang 17 Agustus, 10 lampu hias dipasang berjajar di pagar. Setiap lampu boleh menyala atau padam, tetapi panitia membuat aturan: **tidak boleh ada dua lampu bersebelahan yang sama-sama menyala**. Berapa banyak pola nyala-padam yang mungkin? (Pola semua lampu padam juga dihitung.)

Jawaban: pola

Kunci: 144 pola

Pembahasan: Misalkan a_n banyak pola untuk n lampu.

Jika lampu terakhir padam, $n - 1$ lampu lainnya bebas mengikuti aturan: a_{n-1} pola. Jika lampu terakhir menyala, lampu sebelumnya wajib padam, dan $n - 2$ lampu sisanya bebas: a_{n-2} pola.

Jadi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dengan $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, **144**.

Fibonacci muncul lagi: $a_n = F_{n+2}$.

24. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Invarian paritas • gaya olimpiade • 01-6-04

Di papan tulis tertulis bilangan 1, 2, 3, ..., 2026. Dalam setiap langkah, Ancil menghapus dua bilangan sembarang a dan b , lalu menuliskan selisihnya $|a - b|$. Setelah 2025 langkah, tersisa satu bilangan. Pernyataan yang **pasti** benar tentang bilangan terakhir itu adalah...

- A. bilangan itu ganjil
- B. bilangan itu genap
- C. bilangan itu 0
- D. bisa ganjil atau genap, bergantung pada urutan langkah

Kunci: A

Pembahasan: Perhatikan **paritas** (genap-ganjilnya) jumlah semua bilangan di papan. Mengganti a dan b dengan $|a - b|$ mengurangi jumlah sebesar $a + b - |a - b| = 2 \min(a, b)$, yaitu bilangan genap. Jadi paritas jumlah tidak pernah berubah: ia adalah **invarian**.

Jumlah awal $1 + 2 + \dots + 2026 = \frac{2026 \times 2027}{2} = 2.053.351$, ganjil. Maka bilangan terakhir pasti ganjil, dan tentu tidak mungkin 0.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Bilangan negatif • 02-1-01

Pada suatu subuh di Dataran Tinggi Dieng, suhu udara 3 derajat Celsius **di bawah nol**. Bilangan yang tepat untuk menyatakan suhu itu adalah...

- A. 3 °C
B. 0 °C
C. -3 °C
D. -30 °C

Kunci: C

Pembahasan: Suhu di bawah nol ditulis dengan tanda negatif. Tiga derajat di bawah nol adalah -3 °C. Pada termometer, letaknya tiga strip di bawah angka 0.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengurutkan bilangan bulat • 02-1-02

Urutan bilangan -5, 3, -1, 0, -8 dari yang **terkecil** adalah...

- A. -1, -5, -8, 0, 3
B. -8, -5, -1, 0, 3
C. 0, -1, 3, -5, -8
D. 3, 0, -1, -5, -8

Kunci: B

Pembahasan: Bilangan yang paling kiri pada garis bilangan adalah yang terkecil. Dari kiri ke kanan: -8, -5, -1, 0, 3. Pilihan pertama keliru karena hanya melihat angkanya tanpa memperhatikan tanda negatif: -1 justru lebih besar daripada -5. Pilihan terakhir adalah urutan dari yang terbesar.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Lompat di garis bilangan • 02-1-03

Seekor katak berada di titik -4 pada garis bilangan, lalu melompat 7 satuan ke kanan. Di titik berapa katak itu sekarang?

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: Ke kanan berarti menambah: $-4 + 7 = 3$. Empat lompatan pertama membawa katak ke 0, lalu tiga lompatan berikutnya membawanya ke 3.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Lawan bilangan • 02-1-04

Lawan dari -9 adalah...

- A. -9
B. $-\frac{1}{9}$
C. 0
D. 9

Kunci: D

Pembahasan: Lawan sebuah bilangan berjarak sama dari 0, tetapi di sisi seberang. Lawan dari -9 adalah 9, karena $-9 + 9 = 0$. $-\frac{1}{9}$ bukan lawan, melainkan *kebalikan* dari -9, karena $(-9) \times (-\frac{1}{9}) = 1$.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Penjumlahan & pengurangan • 02-2-01

Hitunglah $-15 + 8 - (-6)$.

Jawaban:

Kunci: -1**Pembahasan:** Kerjakan dari kiri: $-15 + 8 = -7$.Mengurangi -6 sama dengan menambah 6: $-7 - (-6) = -7 + 6 = -1$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Aturan tanda • 02-2-02

Hasil dari $(-6) \times 4 : (-3)$ adalah...

A. 8

C. 72

B. -8 D. -2 **Kunci: A****Pembahasan:** Kali dan bagi dikerjakanurut dari kiri. $(-6) \times 4 = -24$ (tanda beda $\rightarrow$ negatif). $-24 : (-3) = 8$ (tanda sama $\rightarrow$ positif).

Cek cepat: ada dua tanda negatif (genap), jadi hasilnya positif.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Selisih suhu • 02-2-03

Es krim disimpan di dalam ruang pembeku (*freezer*) bersuhu -18°C , sedangkan suhu di dalam warung 30°C . Berapa derajat selisih suhu keduanya?Jawaban: $^\circ\text{C}$ **Kunci: 48 $^\circ\text{C}$** **Pembahasan:** Selisih = suhu tinggi – suhu rendah = $30 - (-18) = 30 + 18 = 48^\circ\text{C}$.Di termometer: dari -18 naik 18 strip ke 0, lalu 30 strip lagi ke 30. Totalnya 48 strip.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Kedalaman laut • 02-2-04

Sebuah kapal selam berada 250 m di bawah permukaan laut. Kapal itu naik 90 m, lalu turun lagi 140 m. Tuliskan posisi akhirnya sebagai bilangan bulat (permukaan laut = 0, di bawah permukaan = negatif).

Jawaban: m

Kunci: -300 m**Pembahasan:** Posisi awal -250 .Naik 90: $-250 + 90 = -160$.Turun 140: $-160 - 140 = -300$.Kapal selam berada di -300 m, yaitu 300 m di bawah permukaan laut.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Urutan operasi • 02-3-01

Hitunglah $18 - 4 \times (-3)^2 : 6 + (-7)$.

Jawaban:

Kunci: 5**Pembahasan:** Pangkat: $(-3)^2 = 9$.Kali-bagi dari kiri: $4 \times 9 = 36$, lalu $36 : 6 = 6$.Tambah-kurang dari kiri: $18 - 6 = 12$, lalu $12 + (-7) = 5$.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Titik tengah • 02-3-02

Pada garis bilangan, titik P berada di -7 dan titik Q di 5 . Titik R terletak tepat di tengah-tengah P dan Q . Di bilangan berapa R berada?

A. 6

C. 1

B. -6 D. -1 **Kunci: D****Pembahasan:** Jarak $PQ = |5 - (-7)| = 12$. Setengahnya 6.Dari $P = -7$ berjalan 6 ke kanan: $-7 + 6 = -1$.Cara cepat: titik tengah $= \frac{-7 + 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Angka 6 adalah setengah jarak, bukan letak titik tengahnya.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Lift tanpa lantai nol • 02-3-03

Di sebuah gedung, urutan lantai dari bawah adalah B3, B2, B1, 1, 2, 3, 4, ... (tidak ada lantai 0). Ayu naik lift dari lantai B3 ke lantai 4. Berapa lantai yang ia naiki?

A. 7

C. 1

B. 6

D. 8

Kunci: B**Pembahasan:** Jika B3 ditulis -3 , hitungan $4 - (-3) = 7$ menganggap ada lantai 0 di antara B1 dan lantai 1.

Padahal di gedung ini lantai 0 tidak ada.

Hitung langsung: B3 $\rightarrow$ B2 $\rightarrow$ B1 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4, yaitu 6 kali naik satu lantai.

Jadi Ayu naik 6 lantai. Model garis bilangan hanya tepat bila penomorannya juga memuat nol.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Jumlah bilangan bulat berurutan • 02-3-04

Hitunglah $-30 + (-29) + (-28) + \dots + 33 + 34$, yaitu jumlah semua bilangan bulat dari -30 sampai 34 .

Jawaban:

Kunci: 130**Pembahasan:** Bilangan dari -30 sampai 30 berpasangan dengan lawannya: $(-30) + 30 = 0$, $(-29) + 29 = 0$, dan seterusnya; angka 0 tidak mengubah jumlah.Sisanya hanya $31 + 32 + 33 + 34 = 130$.Cek dengan rumus: banyak suku $34 - (-30) + 1 = 65$, jumlahnya $\frac{(-30 + 34) \times 65}{2} = 130$. ✓

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Membaca tabel suhu • gaya IGCSE • 02-4-01

Tabel berikut menunjukkan suhu terendah yang tercatat di lima tempat pada suatu pagi.

Tempat	Suhu (°C)
Dieng	-2
Wamena	9
Puncak Jaya	-6
Ruteng	12
Jakarta	25

Hitung selisih suhu antara tempat terhangat dan tempat terdingin.

Jawaban: °C

Kunci: 31 °C

Pembahasan: Terhangat: Jakarta, 25 °C. Terdingin: Puncak Jaya, -6 °C (karena $-6 < -2$).

Selisih = $25 - (-6) = 25 + 6 = 31$ °C.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Pangkat & pembagian • gaya IGCSE • 02-4-02

Hitung nilai dari $\frac{(-3)^3 - (-5)^2}{-4}$.

Jawaban:

Kunci: 13

Pembahasan: $(-3)^3 = -27$ (pangkat ganjil, tanda tetap negatif).

$(-5)^2 = 25$ (pangkat genap, hasilnya positif).

Pembilang: $-27 - 25 = -52$.

$-52 : (-4) = 13$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Sifat operasi • gaya IGCSE • 02-4-03

Manakah pernyataan yang **selalu** benar untuk semua bilangan bulat a dan b ?

A. $a - b = b - a$

C. $a \times (b + 1) = a \times b + a$

B. $|a + b| = |a| + |b|$

D. $(a - b) - 1 = a - (b - 1)$

Kunci: C

Pembahasan: Pernyataan ketiga benar karena sifat distributif: $a \times (b + 1) = a \times b + a \times 1 = a \times b + a$.

Pernyataan pertama salah: $5 - 2 = 3$, tetapi $2 - 5 = -3$.

Pernyataan kedua salah bila tandanya berbeda: $|3 + (-5)| = 2$, sedangkan $|3| + |-5| = 8$.

Pernyataan keempat salah: ruas kanan = $a - b + 1$, selalu 2 lebih besar daripada ruas kiri $a - b - 1$.

Bendahara kelas mencatat perubahan kas (dalam ribu rupiah) selama lima minggu:

Minggu	1	2	3	4	5
Perubahan	+45	-30	-28	+16	-9

Kas awal adalah 10 ribu rupiah.

(a) **Hitung** kas pada akhir minggu ke-5.

(b) **Tentukan** pada akhir minggu ke berapa kas paling sedikit, lalu **jelaskan** arti nilainya.

(c) **Tunjukkan** bahwa jika urutan kelima perubahan itu diacak, kas akhir tetap sama, tetapi kas paling sedikit bisa berbeda.

Kunci/rubrik: (a) $10 + 45 - 30 - 28 + 16 - 9 = 4$, jadi kas akhir Rp 4.000. [2 poin]

(b) Kas pada akhir setiap minggu: 55, 25, -3, 13, 4. Paling sedikit -3 pada akhir minggu ke-3. Artinya kas kurang Rp 3.000: kelas berutang Rp 3.000, misalnya ditalangi dulu oleh bendahara. [2 poin]

(c) Penjumlahan bersifat komutatif dan asosiatif, sehingga $10 + 45 + (-30) + (-28) + 16 + (-9)$ bernilai 4 dalam urutan apa pun. Contoh urutan lain: -30, -28, -9, +45, +16 memberi kas -20, -48, -57, -12, 4. Kas akhirnya tetap 4, tetapi kas paling sedikit menjadi -57. [2 poin]

Pembahasan: Total perubahan $45 - 30 - 28 + 16 - 9 = -6$ tidak bergantung pada urutan, jadi kas akhir selalu $10 + (-6) = 4$. Yang bergantung pada urutan adalah "perjalanan" kasnya, seperti katak yang tiba di titik yang sama lewat urutan lompatan yang berbeda.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Suhu udara turun kira-kira 6°C setiap naik 1.000 m. Suatu pagi, suhu di pantai (ketinggian 0 m) adalah 30°C . Dengan model ini, suhu pada ketinggian h meter adalah $T = 30 - \frac{6h}{1000}$.

Tentukan ketinggian (dalam meter) ketika suhu menurut model mencapai -3°C .

Jawaban: m

Kunci: 5.500 m

Pembahasan: $30 - \frac{6h}{1000} = -3 \Rightarrow \frac{6h}{1000} = 33 \Rightarrow h = \frac{33 \times 1000}{6} = 5500$ m.

Model ini meramalkan suhu di bawah nol di atas ketinggian sekitar 5.000 m. Puncak Jaya (± 4.884 m) hampir setinggi itu, sehingga suhunya mendekati 0°C ; itulah sebabnya ada es di puncaknya walaupun dekat khatulistiwa. Model linear ini hanya perkiraan: suhu nyata juga dipengaruhi cuaca, angin, dan waktu.

Banyak bilangan bulat x yang memenuhi $|x - 3| \leq 5$ adalah...

A. 10

C. 5

B. 11

D. 8

Kunci: B

Pembahasan: $|x - 3| \leq 5$ berarti jarak x ke 3 paling jauh 5: $-5 \leq x - 3 \leq 5$, jadi $-2 \leq x \leq 8$.

Bilangan bulatnya -2, -1, 0, 1, ..., 8; banyaknya $8 - (-2) + 1 = 11$.

Jebakan umum: menjawab 10 karena lupa bahwa kedua ujung ikut dihitung.

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Pendinginan • gaya IB • 02-5-03

Ruang pendingin ikan di sebuah pelabuhan perikanan mula-mula bersuhu 22°C . Setelah mesin dinyalakan, suhunya turun 4°C setiap jam. Setelah berapa jam suhunya **pertama kali berada di bawah** -10°C ?

Jawaban: jam

Kunci: 9 jam

Pembahasan: Suhu setelah t jam: $T = 22 - 4t$.

Syarat: $22 - 4t < -10 \Rightarrow 4t > 32 \Rightarrow t > 8$.

Pada $t = 8$ suhunya tepat -10°C , belum *di bawah* -10°C . Jadi jawabannya $t = 9$ jam, saat suhunya -14°C .

20. Lv 5 • IB DP • Uraian • Jumlah bilangan bulat berurutan • gaya IB • 02-5-04

Misalkan $S(m, n)$ adalah jumlah semua bilangan bulat dari m sampai n , dengan $m \leq n$.

(a) Tunjukkan bahwa $S(-k, k) = 0$ untuk setiap bilangan asli k .

(b) Hitung $S(-12, 20)$.

(c) Buktikan bahwa jika jumlah p bilangan bulat berurutan sama dengan 0 , maka p ganjil.

Kunci/rubrik: (a) Suku-suku $-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$ dapat dipasangkan: j dengan $-j$. Setiap pasangan berjumlah 0 , dan suku 0 tidak menambah apa pun, jadi $S(-k, k) = 0$. [2 poin]

(b) $S(-12, 20) = S(-12, 12) + (13 + 14 + \dots + 20) = 0 + \frac{(13 + 20) \times 8}{2} = 132$. [2 poin]

(c) Misalkan sukunya $m, m + 1, \dots, m + p - 1$. Jumlahnya $pm + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(2m + p - 1)}{2}$. Jumlah ini 0 dan $p > 0$, jadi $2m + p - 1 = 0$, sehingga $p = 1 - 2m$, yaitu bilangan ganjil. [3 poin]

Pembahasan: Bagian (c) menunjukkan bahwa deret bilangan bulat berurutan yang berjumlah nol selalu simetris terhadap 0 : suku tengahnya $m + \frac{p-1}{2} = 0$. Contoh: $-3 + (-2) + \dots + 3$ punya 7 suku.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Paritas • gaya olimpiade • 02-6-01

Di depan setiap bilangan $1, 2, 3, \dots, 2026$ diberi tanda $+$ atau $-$, lalu semuanya dijumlahkan.

(a) Buktikan bahwa hasilnya tidak mungkin 0 .

(b) Tentukan hasil tak negatif terkecil yang mungkin, dan tunjukkan satu susunan tanda yang menghasilkannya.

Kunci/rubrik: (a) Jika semua tanda $+$, hasilnya $1 + 2 + \dots + 2026 = \frac{2026 \times 2027}{2} = 1013 \times 2027$, bilangan ganjil.

Mengganti tanda di depan bilangan k dari $+$ menjadi $-$ mengurangi hasil sebesar $2k$, bilangan genap. Jadi hasilnya selalu ganjil dan tidak mungkin 0 . [3 poin]

(b) Menurut (a), hasil tak negatif terkecil paling sedikit 1, dan 1 bisa dicapai: $-1 + 2 + (3 - 4 - 5 + 6) + (7 - 8 - 9 + 10) + \dots + (2023 - 2024 - 2025 + 2026)$. Setiap kurung berjumlah 0 , sehingga hasilnya $-1 + 2 = 1$. [3 poin]

Pembahasan: Inilah ide **paritas** (genap-ganjil): mengganti tanda tidak pernah mengubah genap-ganjilnya hasil.

Pola $+- - +$ pada empat bilangan berurutan selalu berjumlah nol: $k - (k + 1) - (k + 2) + (k + 3) = 0$. Bilangan 3 sampai 2026 ada 2024 buah, pas menjadi 506 kelompok berisi empat.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Katak pelompat • gaya olimpiade • 02-6-02

Ancil si Kancil mulai di titik 0 pada garis bilangan. Lompatan ke-1 sejauh 1 satuan, lompatan ke-2 sejauh 2 satuan, lompatan ke-3 sejauh 3 satuan, dan seterusnya. Setiap kali, ia boleh memilih melompat ke kanan atau ke kiri. Berapa lompatan **paling sedikit** yang dibutuhkan agar ia mendarat tepat di titik 12?

Jawaban: lompatan

Kunci: 7 lompatan

Pembahasan: Setelah n lompatan yang semuanya ke kanan, posisinya $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Membalik arah lompatan k mengurangi posisi sebesar $2k$. Jadi posisi akhir selalu $\leq T_n$ dan genap-ganjilnya sama dengan T_n . Kita butuh $T_n \geq 12$ dan T_n genap seperti 12: $T_4 = 10$ (kurang), $T_5 = 15$ (ganjil), $T_6 = 21$ (ganjil), $T_7 = 28$ (genap ✓). Dengan 7 lompatan, kelebihan $28 - 12 = 16 = 2 \times 8$. Balik arah lompatan yang panjangnya berjumlah 8, misalnya lompatan 1 dan 7: $-1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 = 12$. ✓
Jadi paling sedikit **7** lompatan.

23. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Jumlah jarak minimum • gaya olimpiade • 02-6-03

Untuk bilangan real x , nilai terkecil dari $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 9|$ adalah...

- A. 20
B. 45
C. 25
D. 0

Kunci: A

Pembahasan: Pasangkan suku dari luar: $|x - 1| + |x - 9| \geq 8$, $|x - 2| + |x - 8| \geq 6$, $|x - 3| + |x - 7| \geq 4$, $|x - 4| + |x - 6| \geq 2$, dan $|x - 5| \geq 0$. Setiap ketaksamaan benar karena jumlah jarak sebuah titik ke dua titik lain paling sedikit sama dengan jarak kedua titik itu.
Jadi jumlahnya $\geq 8 + 6 + 4 + 2 + 0 = 20$, dan nilai 20 tercapai saat $x = 5$ (median), karena semua ketaksamaan menjadi kesamaan.
Seperti halte angkot: titik terbaik adalah titik tengah.

24. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Invarian • gaya olimpiade • 02-6-04

Di papan tulis tertulis 12 bilangan: $-5, -4, -3, \dots, 5, 6$. Setiap langkah, Ancil menghapus dua bilangan sembarang a dan b , lalu menulis $a - b$ sebagai gantinya. Setelah 11 langkah tersisa satu bilangan. Pernyataan yang **pasti** benar tentang bilangan terakhir itu adalah...

- A. selalu 0
B. selalu ganjil
C. selalu negatif
D. selalu genap

Kunci: D

Pembahasan: Mengganti a dan b dengan $a - b$ mengubah jumlah semua bilangan di papan sebesar $(a - b) - (a + b) = -2b$, bilangan genap. Jadi genap-ganjilnya jumlah tidak pernah berubah; inilah sebuah **invarian**.
Jumlah awal: $-5 + (-4) + \dots + 5 + 6 = 6$, genap. Jadi bilangan terakhir pasti genap.
Bilangan terakhir tidak selalu 0 dan tidak selalu negatif. Misalnya, jika Ancil selalu mengurangi hasil sebelumnya dengan bilangan berikutnya, $6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 0 - (-1) - (-2) - (-3) - (-4) - (-5) = 6$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Makna pecahan • 03-1-01

Sebuah martabak dipotong menjadi 8 potong sama besar. Dimas memakan 3 potong. Bagian martabak yang dimakan Dimas adalah...

- A. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{5}{8}$
 B. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{5}$

Kunci: B

Pembahasan: Penyebut = banyak potongan sama besar seluruhnya (8). Pembilang = banyak potongan yang diambil (3). Jadi $\frac{3}{8}$.

$\frac{5}{8}$ adalah bagian yang *tersisa*, sedangkan $\frac{3}{5}$ membandingkan potongan yang dimakan dengan potongan yang tersisa.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pecahan senilai • 03-1-02

Pecahan yang senilai dengan $\frac{2}{3}$ adalah...

- A. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{8}{12}$
 B. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{6}$

Kunci: C

Pembahasan: Kalikan pembilang dan penyebut dengan bilangan yang sama: $\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$.

$\frac{4}{5}$ dan $\frac{3}{4}$ didapat dengan *menambahkan* bilangan yang sama ke pembilang dan penyebut (cara itu mengubah nilai), sedangkan $\frac{2}{6}$ hanya mengalikan penyebutnya.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Pecahan dari bilangan • 03-1-03

Kelas 7B berisi 40 siswa. Sebanyak $\frac{3}{8}$ dari mereka ikut pramuka. Berapa siswa yang ikut pramuka?

Jawaban: siswa

Kunci: 15 siswa

Pembahasan: $\frac{3}{8}$ dari 40 berarti: bagi 40 siswa menjadi 8 kelompok sama besar, lalu ambil 3 kelompok.
 $40 : 8 = 5$, dan $3 \times 5 = 15$. Jadi 15 siswa.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Membandingkan • 03-1-04

Manakah bilangan yang paling besar?

- A. 0,5 C. 45%
 B. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

Kunci: D

Pembahasan: Ubah semuanya ke bentuk yang sama, misalnya persen: $0,5 = 50\%$, $\frac{2}{5} = 40\%$, 45% , dan $\frac{3}{5} = 60\%$.
 Yang terbesar adalah $\frac{3}{5}$.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Menjumlahkan pecahan • 03-2-01

Hitunglah $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$. Tulis jawabanmu sebagai pecahan.

Jawaban:

Kunci: 0,9167**Pembahasan:** Samakan penyebut. KPK dari 3 dan 4 adalah 12.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ dan } \frac{1}{4} = \frac{3}{12}.$$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}.$$

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Diskon • 03-2-02

Harga sebuah tas Rp150.000. Toko memberi diskon 20%. Berapa rupiah yang harus dibayar?

Jawaban: rupiah

Kunci: 120.000 rupiah**Pembahasan:** Diskon: $20\% \times 150.000 = 30.000$.Bayar: $150.000 - 30.000 = 120.000$ rupiah.Cara cepat: yang dibayar 80%, yaitu $0,8 \times 150.000 = 120.000$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Pecahan ke desimal • 03-2-03

Bentuk desimal dari $\frac{5}{8}$ adalah...

A. 0,625

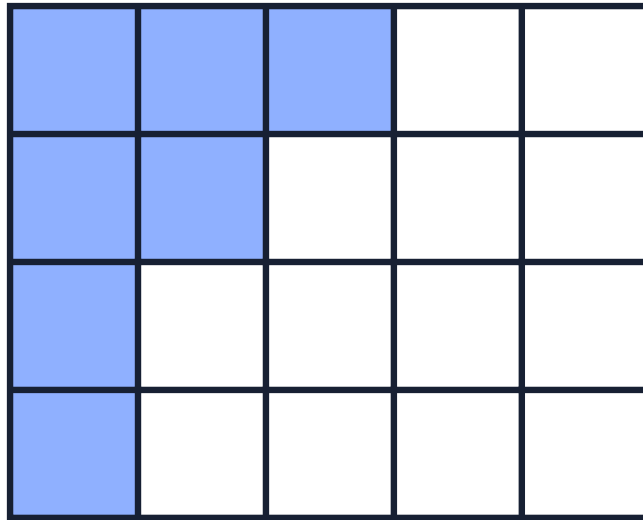
C. 0,85

B. 0,58

D. 1,6

Kunci: A**Pembahasan:** Bagi pembilang dengan penyebut: $5 : 8 = 0,625$.Atau: $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 125}{8 \times 125} = \frac{625}{1000} = 0,625$.0,58 hanya menempelkan angka 5 dan 8, sedangkan 1,6 adalah $8 : 5$.

Persegi panjang di bawah dibagi menjadi kotak-kotak yang sama besar. Berapa persen bagian yang diarsir?



Jawaban: %

Kunci: 35 %

Pembahasan: Ada $5 \times 4 = 20$ kotak, dan 7 di antaranya diarsir.

Bagian yang diarsir = $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 35\%$.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

Setelah didiskon 25%, harga sepasang sepatu menjadi Rp240.000. Berapa harga sepatu sebelum diskon?

Jawaban: rupiah

Kunci: 320.000 rupiah

Pembahasan: Setelah diskon 25%, yang dibayar adalah $100\% - 25\% = 75\%$ dari harga awal.

$75\% \rightarrow 240.000$, jadi $1\% \rightarrow 3.200$ dan $100\% \rightarrow 320.000$.

Dengan faktor pengali: $240.000 : 0,75 = 320.000$ rupiah.

Cek: $25\% \times 320.000 = 80.000$, dan $320.000 - 80.000 = 240.000 \checkmark$. (Jebakan: $240.000 + 25\% \times 240.000 = 300.000$ itu keliru.)

Sebuah toko memberi diskon 40%, lalu diskon tambahan 25% dari harga setelah diskon pertama. Kedua diskon itu setara dengan satu kali diskon sebesar...

A. 65%

C. 45%

B. 60%

D. 55%

Kunci: D

Pembahasan: Faktor pengali: $0,6 \times 0,75 = 0,45$. Pembeli membayar 45% dari harga awal, jadi diskon totalnya $100\% - 45\% = 55\%$.

65% keliru karena diskon kedua dihitung dari harga yang sudah turun. 45% adalah bagian yang *dibayar*, bukan diskonnnya.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Desimal berulang • 03-3-03

Bilangan $0,\overline{36} = 0,363636 \dots$ dapat ditulis sebagai pecahan $\frac{a}{b}$ dalam bentuk paling sederhana. Tentukan $a + b$.

Jawaban:

Kunci: 15

Pembahasan: $x = 0,3636 \dots$ dan $100x = 36,3636 \dots$

Kurangkan: $99x = 36$, sehingga $x = \frac{36}{99}$.

FPB dari 36 dan 99 adalah 9, jadi $x = \frac{4}{11}$.

$a + b = 4 + 11 = 15$. (Cek: $4 : 11 = 0,3636 \dots \checkmark$)

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Pecahan dari sisa • 03-3-04

Ayu memakai $\frac{1}{3}$ uang sakunya untuk membeli buku dan $\frac{1}{4}$ dari **sisanya** untuk jajan. Sisa uangnya, Rp30.000, ia tabung. Berapa uang saku Ayu mula-mula?

Jawaban: rupiah

Kunci: 60.000 rupiah

Pembahasan: Misalkan uang saku = U .

Buku: $\frac{1}{3}U$, sisa $\frac{2}{3}U$.

Jajan: $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}U = \frac{1}{6}U$.

Ditabung: $\frac{2}{3}U - \frac{1}{6}U = \frac{4}{6}U - \frac{1}{6}U = \frac{1}{2}U$.

$\frac{1}{2}U = 30.000$, jadi $U = 60.000$ rupiah.

Cek: buku 20.000, jajan $\frac{1}{4} \times 40.000 = 10.000$, sisa 30.000 $\checkmark$.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Persentase penurunan • gaya IGCSE • 03-4-01

Harga sebuah sepeda motor bekas turun dari Rp18.000.000 menjadi Rp15.300.000. **Hitung** persentase penurunannya (*percentage decrease*).

Jawaban: %

Kunci: 15 %

Pembahasan: Penurunan: $18.000.000 - 15.300.000 = 2.700.000$.

Persentase penurunan = $\frac{2.700.000}{18.000.000} \times 100\% = 15\%$.

Ingat: pembagiannya selalu nilai **lama**.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Persen balik PPN • gaya IGCSE • 03-4-02

Harga sebuah laptop adalah Rp7.215.000, **sudah termasuk** PPN 11%. **Hitung** harga laptop sebelum PPN (*reverse percentage*).

Jawaban: rupiah

Kunci: $6,5 \times 10^6$ rupiah

Pembahasan: Harga dengan PPN = 111% harga sebelum PPN, atau dikali faktor 1,11.

Harga sebelum PPN = $7.215.000 : 1,11 = 6.500.000$ rupiah.

Cek: $11\% \times 6.500.000 = 715.000$ dan $6.500.000 + 715.000 = 7.215.000 \checkmark$.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Membagi pecahan campuran • gaya IGCSE • 03-4-03

Hitung $2\frac{1}{3} : 1\frac{3}{4}$. Berikan jawabanmu sebagai pecahan campuran dalam bentuk paling sederhana.

Jawaban:

Kunci: 1,3333

Pembahasan: Ubah ke pecahan biasa: $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ dan $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

Membagi = mengalikan dengan kebalikan: $\frac{7}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$.

$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Desimal berhenti atau berulang • gaya IGCSE • 03-4-04

(a) **Tunjukkan** bahwa $0,1\overline{6} = \frac{1}{6}$.

(b) Tanpa membagi bersusun, **jelaskan** mengapa $\frac{7}{40}$ merupakan desimal berhenti, lalu **tuliskan** bentuk desimalnya.

(c) Dimas berkata, " $\frac{21}{56}$ pasti desimal berulang karena 56 habis dibagi 7." **Tentukan** apakah Dimas benar dan berikan alasanmu.

Kunci/rubrik: (a) Misalkan $x = 0,1666\dots$. Maka $10x = 1,666\dots$ dan $100x = 16,666\dots$. Kurangkan: $90x = 15$, sehingga $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$. [2 poin: pengurangan yang menghapus ekor 1, penyederhanaan 1]

(b) $40 = 2^3 \times 5$ hanya memuat faktor prima 2 dan 5, jadi desimalnya berhenti. $\frac{7}{40} = \frac{7 \times 25}{40 \times 25} = \frac{175}{1000} = 0,175$. [2 poin]

(c) Dimas keliru. Sederhanakan dulu: $\frac{21}{56} = \frac{3}{8}$ dan $8 = 2^3$, jadi desimalnya berhenti, yaitu 0,375. Faktor 7 hilang saat pecahan disederhanakan. [2 poin]

Pembahasan: Kunci soal ini: aturan "hanya faktor 2 dan 5" berlaku untuk pecahan dalam bentuk **paling sederhana**. Selalu sederhanakan dulu sebelum memeriksa penyebutnya.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Bunga majemuk • gaya IB • 03-5-01

Ayu menabung Rp5.000.000 di bank dengan bunga majemuk 4% per tahun dan tidak pernah mengambilnya. Tentukan saldo tabungannya setelah 3 tahun.

Jawaban: rupiah

Kunci: $5,6243 \times 10^6$ rupiah

Pembahasan: Saldo setelah n tahun: $M_n = 5.000.000 \times 1,04^n$.

$1,04^3 = 1,124864$.

$M_3 = 5.000.000 \times 1,124864 = 5.624.320$ rupiah.

Bandingkan dengan bunga tunggal: $5.000.000 + 3 \times 200.000 = 5.600.000$. Selisih Rp24.320 adalah bunga dari bunga.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Penyusutan • gaya IB • 03-5-02

Nilai sebuah sepeda motor menyusut 12% setiap tahun dari nilai tahun sebelumnya. Setelah berapa tahun (bilangan bulat) nilainya **pertama kali** kurang dari setengah nilai awal?

Jawaban: tahun

Kunci: 6 tahun

Pembahasan: Setelah n tahun nilainya $V_0 \times 0,88^n$. Kita perlu $0,88^n < 0,5$.

$0,88^5 \approx 0,528$ (belum) dan $0,88^6 \approx 0,464$ (sudah).

Dengan logaritma: $n > \frac{\ln 0,5}{\ln 0,88} \approx 5,42$, jadi $n = 6$ tahun.

Perhatikan: $5 \times 12\% = 60\%$ tidak berarti nilainya tinggal 40%, karena penyusutan dihitung dari nilai yang terus mengecil.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Perubahan berturut-turut • gaya IB • 03-5-03

Harga sebuah barang naik 10% pada tahun pertama dan naik 10% lagi pada tahun kedua. Kenaikan total selama dua tahun adalah...

- | | |
|--------|---------|
| A. 21% | C. 10% |
| B. 20% | D. 121% |

Kunci: A

Pembahasan: Faktor pengali: $1,1 \times 1,1 = 1,21$. Harga akhir 121% dari harga awal, jadi kenaikannya 21%.

20% keliru karena kenaikan kedua dihitung dari harga yang sudah naik; 121% adalah harga akhir, bukan kenaikannya.

20. Lv 5 • IB DP • Uraian • Memilih kupon • gaya IB • 03-5-04

Sebuah toko daring menawarkan dua kupon untuk barang seharga x rupiah. Pembeli hanya boleh memakai salah satu:

- Kupon A: potongan langsung Rp50.000.
- Kupon B: diskon 15%.

(a) Tuliskan harga setelah memakai kupon A, $f(x)$, dan setelah memakai kupon B, $g(x)$.

(b) Tentukan harga barang x yang membuat kedua kupon sama untungnya.

(c) Untuk barang seharga Rp250.000 dan Rp500.000, kupon mana yang sebaiknya dipakai? Jelaskan dengan merujuk jawaban (b).

Kunci/rubrik: (a) $f(x) = x - 50.000$ dan $g(x) = 0,85x$. [2]

(b) $x - 50.000 = 0,85x \Rightarrow 0,15x = 50.000 \Rightarrow x = 333.333,33 \dots$, yaitu sekitar Rp333.333. [2]

(c) Rp250.000: $f = 200.000$ dan $g = 212.500$, jadi kupon A lebih murah. Rp500.000: $f = 450.000$ dan $g = 425.000$, jadi kupon B lebih murah. Di bawah ±Rp333.333 potongan tetap lebih untung; di atasnya diskon persen lebih untung, karena 15% dari harga yang besar melebihi Rp50.000. [2]

Pembahasan: Ini contoh pemodelan dengan dua fungsi linear. Grafik f dan g berpotongan di $x \approx 333.333$; di kanan titik itu grafik g berada di bawah f , artinya kupon B memberi harga lebih rendah.

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Jumlah teleskop • gaya olimpiade • 03-6-01

Hitunglah $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Jawaban:

Kunci: 0,99

Pembahasan: Pecah setiap suku: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Jumlahnya $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$.

Semua suku di tengah saling menghapus (teleskop), tersisa $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

22. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Pecahan Mesir • gaya olimpiade • 03-6-02

Ada berapa pasangan bilangan asli (a, b) dengan $a < b$ yang memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$?

A. 2

C. 4

B. 3

D. 9

Kunci: C

Pembahasan: Kedua pecahan positif, jadi masing-masing kurang dari $\frac{1}{6}$; akibatnya $a, b > 6$.

Kalikan dengan $6ab$: $6b + 6a = ab$, sehingga $ab - 6a - 6b + 36 = 36$, yaitu $(a - 6)(b - 6) = 36$.

Pasangan faktor positif 36 dengan faktor pertama lebih kecil: $1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9$. (Pasangan 6×6 memberi $a = b$.)

Hasilnya $(7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15)$: ada **4** pasangan. Cek satu: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{1}{6} \checkmark$.

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Digit desimal berulang • gaya olimpiade • 03-6-03

Angka berapakah yang menempati tempat ke-2026 di belakang koma pada bentuk desimal $\frac{1}{7}$?

Jawaban:

Kunci: 8

Pembahasan: $\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857 \dots$, periodenya 6.

$2026 = 6 \times 337 + 4$, jadi tempat ke-2026 sama dengan tempat ke-4 dalam blok 142857.

Angka ke-4 adalah **8**.

Misalkan a, b, c, d bilangan asli dan $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

(a) Buktikan bahwa $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

(b) Gunakan (a) untuk menemukan sebuah pecahan di antara $\frac{3}{5}$ dan $\frac{2}{3}$.

(c) Tunjukkan bahwa tidak ada pecahan berpenyebut kurang dari 8 yang terletak (tegas) di antara $\frac{3}{5}$ dan $\frac{2}{3}$.

Kunci/rubrik: (a) Karena $bd > 0$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$. Maka $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$ dan $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d) - d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0$. [3 poin]

(b) $\frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8}$; memang $0,6 < 0,625 < 0,666 \dots$ [1 poin]

(c) Untuk penyebut $q \leq 7$, cari bilangan bulat p dengan $\frac{3}{5}q < p < \frac{2}{3}q$. Untuk $q = 1, 2, \dots, 7$ selangnya $(0,6; 0,67)$, $(1,2; 1,33)$, $(1,8; 2)$, $(2,4; 2,67)$, $(3; 3,33)$, $(3,6; 4)$, $(4,2; 4,67)$. Tidak satu pun memuat bilangan bulat (ujung selang tidak termasuk), jadi pecahan seperti itu tidak ada. [2 poin]

Pembahasan: Pecahan $\frac{a+c}{b+d}$ disebut *mediant*. Pada soal ini $bc - ad = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$. Untuk pasangan "bertetangga" seperti itu, mediant selalu menjadi pecahan berpenyebut terkecil di antara keduanya. Ide ini adalah dasar barisan Farey dan pohon Stern–Brocot.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Bilangan prima • 04-1-01

Manakah bilangan berikut yang merupakan bilangan prima?

- A. 1 C. 21
B. 9 D. 23

Kunci: D**Pembahasan:** Bilangan prima tepat mempunyai dua faktor: 1 dan dirinya sendiri.

- 1 hanya punya satu faktor, jadi bukan prima.
- $9 = 3 \times 3$ dan $21 = 3 \times 7$ adalah bilangan komposit.
- 23 hanya habis dibagi 1 dan 23, jadi **23 prima**.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Banyak faktor • 04-1-02

Berapa banyak faktor dari 12?

Jawaban: faktor

Kunci: 6 faktor**Pembahasan:** Pasangan perkalian 12: 1×12 , 2×6 , 3×4 .Faktornya 1, 2, 3, 4, 6, 12, jadi ada **6** faktor.Cek dengan rumus: $12 = 2^2 \times 3$, sehingga banyak faktornya $(2 + 1)(1 + 1) = 6$.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kelipatan • 04-1-03

Kelipatan 7 yang terletak di antara 30 dan 40 adalah...

- A. 32 C. 36
B. 35 D. 38

Kunci: B**Pembahasan:** Kelipatan 7: 7, 14, 21, 28, **35**, 42, Satu-satunya yang berada di antara 30 dan 40 adalah 35, karena $35 = 7 \times 5$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Faktorisasi prima • 04-1-04

Faktorisasi prima dari 24 adalah...

- A. $2^3 \times 3$ C. 4×6
B. 2×12 D. $2^2 \times 3^2$

Kunci: A**Pembahasan:** Faktorisasi prima hanya boleh memuat **bilangan prima**. $24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$.Pilihan 2×12 dan 4×6 memang bernilai 24, tetapi 12, 4, dan 6 bukan prima. Adapun $2^2 \times 3^2 = 36$.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Jumlah bilangan prima • 04-2-01

Tentukan jumlah semua bilangan prima yang terletak di antara 20 dan 40.

Jawaban:

Kunci: 120

Pembahasan: Periksa bilangan ganjil dari 21 sampai 39 (bilangan genap pasti bukan prima).

Yang komposit: $21 = 3 \times 7$, $25 = 5 \times 5$, $27 = 3 \times 9$, $33 = 3 \times 11$, $35 = 5 \times 7$, $39 = 3 \times 13$.

Yang prima: 23, 29, 31, 37.

Jumlahnya $23 + 29 + 31 + 37 = 120$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • KPK • lampu kedip • 04-2-02

Lampu hias di gapura kampung berkedip setiap 9 detik, sedangkan lampu di tiang bendera berkedip setiap 12 detik. Tepat pukul 19.00.00 keduanya berkedip bersamaan. Setelah berapa detik keduanya berkedip bersamaan lagi untuk pertama kalinya?

Jawaban: detik

Kunci: 36 detik

Pembahasan: Peristiwa yang berulang bersamaan $\rightarrow$ KPK.

$9 = 3^2$ dan $12 = 2^2 \times 3$, jadi $KPK = 2^2 \times 3^2 = 36$.

Cek dengan daftar: 9, 18, 27, **36** dan 12, 24, **36**. Jadi 36 detik kemudian, yaitu pukul 19.00.36. (Bukan $9 \times 12 = 108$!)

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Ciri habis dibagi 9 • 04-2-03

Bilangan empat angka $4\square52$ habis dibagi 9. Angka yang tepat untuk mengisi $\square$ adalah...

A. 0

C. 7

B. 3

D. 9

Kunci: C

Pembahasan: Sebuah bilangan habis dibagi 9 jika jumlah angkanya habis dibagi 9.

$4 + \square + 5 + 2 = 11 + \square$. Kelipatan 9 yang bisa dicapai ($\square$ paling besar 9) hanya 18, jadi $\square = 7$.

Cek: $4.752 = 9 \times 528$. ✓

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • FPB • membagi rata • 04-2-04

Dimas punya 18 kelereng merah dan 24 kelereng biru. Ia ingin memasukkan semuanya ke kantong-kantong kecil sebanyak mungkin, sehingga setiap kantong berisi kelereng merah yang sama banyak dan kelereng biru yang sama banyak. Berapa kantong yang ia perlukan?

Jawaban: kantong

Kunci: 6 kantong

Pembahasan: Dibagi rata sebanyak-banyaknya $\rightarrow$ FPB.

$18 = 2 \times 3^2$ dan $24 = 2^3 \times 3$, jadi $FPB = 2 \times 3 = 6$.

Ada 6 kantong. Setiap kantong berisi $18 : 6 = 3$ kelereng merah dan $24 : 6 = 4$ kelereng biru.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • FPB • regu pramuka • 04-3-01

Dalam sebuah perkemahan, 84 anggota pramuka putra dan 108 anggota pramuka putri dibagi ke dalam regu campuran sebanyak-banyaknya. Setiap regu memiliki banyak anggota putra yang sama dan banyak anggota putri yang sama. Berapa orang anggota setiap regu?

Jawaban: orang

Kunci: 16 orang

Pembahasan: $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ dan $108 = 2^2 \times 3^3$, jadi FPB $= 2^2 \times 3 = 12$ regu.

Setiap regu berisi $84 : 12 = 7$ putra dan $108 : 12 = 9$ putri.

Anggota setiap regu $= 7 + 9 = 16$ orang. Perhatikan: soal menanyakan isi regu, bukan banyak regu!

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • KPK tiga bilangan • 04-3-02

Tiga lampu menara berkedip setiap 15 detik, 20 detik, dan 25 detik. Tepat pukul 20.00.00 ketiganya berkedip bersamaan. Berapa kali ketiganya berkedip bersamaan sesudah pukul 20.00.00 sampai pukul 21.00.00 (pukul 21.00.00 ikut dihitung)?

Jawaban: kali

Kunci: 12 kali

Pembahasan: $15 = 3 \times 5$, $20 = 2^2 \times 5$, $25 = 5^2$, jadi KPK $= 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$ detik, yaitu 5 menit.

Kedipan bersama terjadi pukul 20.05, 20.10, ..., 21.00.

Banyaknya $3.600 : 300 = 12$ kali.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Banyak faktor • 04-3-03

Berapa banyak faktor positif dari 720?

Jawaban: faktor

Kunci: 30 faktor

Pembahasan: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$.

Banyak faktor $= (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$.

Bayangkan kalau harus mendaftar 30 faktor satu per satu!

12. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • FPB × KPK • 04-3-04

Dua bilangan memiliki FPB 6 dan KPK 180. Jika salah satu bilangan adalah 36, bilangan yang lain adalah...

A. 30

C. 216

B. 5

D. 6.480

Kunci: A

Pembahasan: $\text{FPB} \times \text{KPK} = a \times b \Rightarrow 6 \times 180 = 36 \times b \Rightarrow b = 1.080 : 36 = 30$.

Cek: $36 = 2^2 \times 3^2$ dan $30 = 2 \times 3 \times 5$. $\text{FPB} = 2 \times 3 = 6 \checkmark$ dan $\text{KPK} = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180 \checkmark$.

Pengecoh: 5 muncul jika lupa FPB ($180 : 36$), 216 dari 6×36 .

13. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Faktorisasi, FPB & kuadrat sempurna • gaya IGCSE • 04-4-01

- (a) **Tuliskan** 504 sebagai hasil kali faktor-faktor prima dalam bentuk pangkat.
 (b) Diketahui $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$. **Tentukan** FPB dari 504 dan 540 (*highest common factor*).
 (c) **Tentukan** bilangan bulat positif terkecil k sehingga $504k$ merupakan bilangan kuadrat sempurna (*perfect square*).

Kunci/rubrik: (a) $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. [2 poin: faktorisasi benar 1, bentuk pangkat 1]

(b) Ambil prima bersama dengan pangkat terkecil: $2^2 \times 3^2 = 36$. [2 poin]

(c) Pada bilangan kuadrat sempurna, semua pangkat primanya genap. Pangkat 2 (yaitu 3) dan pangkat 7 (yaitu 1) masih ganjil, jadi $k = 2 \times 7 = 14$. Cek: $504 \times 14 = 7.056 = 84^2$. [2 poin]

Pembahasan: Teknik (c) sangat berguna: bilangan kuadrat sempurna adalah bilangan yang semua pangkat prima dalam faktorisasinya genap. Jadi cukup 'menggenapkan' pangkat yang masih ganjil: $504 \times 14 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2 = 84^2$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • KPK lewat faktorisasi • gaya IGCSE • 04-4-02

Diketahui $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ dan $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. **Hitung** KPK dari 84 dan 90 (*lowest common multiple*).

Jawaban:

Kunci: 1.260

Pembahasan: KPK: ambil semua prima dengan pangkat terbesar.

$$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 4 \times 9 \times 35 = 1.260.$$

Cek: $1.260 : 84 = 15$ dan $1.260 : 90 = 14$, keduanya bilangan bulat. ✓

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Jadwal kereta • gaya IGCSE • 04-4-03

Di sebuah stasiun, kereta jurusan A berangkat setiap 12 menit, jurusan B setiap 15 menit, dan jurusan C setiap 20 menit. Ketiganya berangkat bersamaan pukul 06.00. **Tentukan** berapa kali ketiga kereta berangkat bersamaan dari pukul 06.00 sampai pukul 12.00 (kedua waktu itu ikut dihitung).

Jawaban: kali

Kunci: 7 kali

Pembahasan: $12 = 2^2 \times 3$, $15 = 3 \times 5$, $20 = 2^2 \times 5$, jadi $KPK = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$ menit.

Ketiganya berangkat bersamaan setiap jam: 06.00, 07.00, 08.00, 09.00, 10.00, 11.00, 12.00.

Jumlahnya **7 kali** (6 selang ditambah titik awal).

16. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Mengenali faktor • gaya IGCSE • 04-4-04

Diketahui $N = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Manakah yang **bukan** faktor dari N ?

- | | |
|-------|-------|
| A. 18 | C. 45 |
| B. 40 | D. 27 |

Kunci: D

Pembahasan: Sebuah bilangan adalah faktor N jika pangkat setiap primanya tidak melebihi pangkat di N .

$$18 = 2 \times 3^2 \checkmark, 40 = 2^3 \times 5 \checkmark, 45 = 3^2 \times 5 \checkmark.$$

$27 = 3^3$ memerlukan pangkat 3 sebesar 3, padahal N hanya memuat 3^2 . Jadi 27 **bukan** faktor $N = 360$.

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Roda gigi & KPK • gaya IB • 04-5-01

Dua roda gigi saling bersinggungan. Roda A memiliki 36 gigi dan roda B memiliki 84 gigi. Sepasang gigi yang sedang bersentuhan diberi tanda merah.

- Setelah roda A berputar berapa kali, kedua tanda merah bersentuhan lagi untuk pertama kalinya?
- Berapa kali roda B berputar pada saat itu?
- Roda A diganti dengan roda 37 gigi. Tentukan jawaban (a) dan (b) yang baru, lalu jelaskan mengapa perancang mesin menyukai banyak gigi yang relatif prima.

Kunci/rubrik: (a) Tanda bertemu lagi setelah banyak gigi yang lewat merupakan kelipatan 36 sekaligus kelipatan 84. $\text{KPK}(36, 84) = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$ gigi, jadi roda A berputar $252 : 36 = 7$ kali. [2 poin]

(b) Roda B berputar $252 : 84 = 3$ kali. [1 poin]

(c) 37 prima dan tidak membagi 84, jadi $\text{KPK}(37, 84) = 37 \times 84 = 3.108$. Roda A berputar 84 kali dan roda B 37 kali. Karena FPB-nya 1, setiap gigi A bergiliran bertemu **semua** 84 gigi B sebelum pola berulang, sehingga keausan tersebar merata. [3 poin]

Pembahasan: Pada (a), karena $\text{FPB}(36, 84) = 12$, setiap gigi A hanya pernah bertemu $84 : 12 = 7$ gigi tertentu dari B. Gigi yang selalu 'berjodoh' dengan gigi yang sama akan aus tidak merata, apalagi jika salah satunya cacat. Itulah alasan banyak gigi yang relatif prima lebih disukai.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Bilangan dengan 12 faktor • gaya IB • 04-5-02

Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki tepat 12 faktor positif.

Jawaban:

Kunci: 60

Pembahasan: Banyak faktor $= (a+1)(b+1) \dots$. Kemungkinan bentuknya:

- 12: p^{11} , terkecil $2^{11} = 2.048$.
- 6×2 : $p^5 q$, terkecil $2^5 \times 3 = 96$.
- 4×3 : $p^3 q^2$, terkecil $2^3 \times 3^2 = 72$.
- $3 \times 2 \times 2$: $p^2 q r$, terkecil $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Yang terkecil adalah **60**. Cek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 (tepat 12 faktor ✓).

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Pangkat dalam FPB & KPK • gaya IB • 04-5-03

Diketahui $a = 2^3 \times 3^m \times 5$ dan $b = 2^n \times 3^2 \times 7$ untuk bilangan cacah m dan n . Jika $\text{FPB}(a, b) = 12$ dan $\text{KPK}(a, b) = 2.520$, nilai $m + n$ adalah...

- | | |
|------|------|
| A. 5 | C. 3 |
| B. 4 | D. 2 |

Kunci: C

Pembahasan: $\text{FPB} = 2^{\min(3,n)} \times 3^{\min(m,2)} = 2^2 \times 3^1$, jadi $\min(3, n) = 2 \Rightarrow n = 2$ dan $\min(m, 2) = 1 \Rightarrow m = 1$.

Cek KPK: $2^{\max(3,2)} \times 3^{\max(1,2)} \times 5 \times 7 = 8 \times 9 \times 35 = 2.520$ ✓.

Jadi $m + n = 1 + 2 = 3$.

20. Lv 5 • IB DP • Isian • Petak kebun & tiang • gaya IB • 04-5-04

Sebidang kebun berbentuk persegi panjang $84 \text{ m} \times 60 \text{ m}$ akan dibagi menjadi petak-petak persegi yang sama besar dan seluas mungkin. Di setiap titik sudut petak (termasuk yang berada di tepi kebun) dipasang sebuah tiang. Berapa banyak tiang yang diperlukan?

Jawaban: tiang

Kunci: 48 tiang

Pembahasan: Sisi petak terbesar = $\text{FPB}(84, 60) = 12 \text{ m}$, jadi ada $84 : 12 = 7$ petak memanjang dan $60 : 12 = 5$ petak melebar.

Titik sudut petak membentuk kisi $(7 + 1) \times (5 + 1)$.

Banyak tiang = $8 \times 6 = 48$. Jebakan umum: menjawab $7 \times 5 = 35$, padahal itu banyak petak, bukan banyak tiang.

Lv 6 • Olimpiade • gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Tepat tiga faktor • gaya olimpiade • 04-6-01

Banyak bilangan asli $n \leq 100$ yang memiliki tepat 3 faktor positif adalah...

- A. 10
B. 4
C. 25
D. 3

Kunci: B

Pembahasan: Karena 3 prima, satu-satunya cara $(a + 1)(b + 1) \cdots = 3$ adalah $n = p^2$ dengan p prima (faktornya $1, p, p^2$).

$p^2 \leq 100 \Rightarrow p \leq 10$, jadi p adalah 2, 3, 5, atau 7, dan $n = 4, 9, 25, 49$.

Jawabannya 4. (Pilihan 10 menghitung semua bilangan kuadrat, padahal $36 = 6^2$ punya 9 faktor.)

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Angka satuan • gaya olimpiade • 04-6-02

Tentukan angka satuan dari $1! + 2! + 3! + \cdots + 2026!$. (Ingat: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.)

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: Untuk $n \geq 5$, $n!$ memuat faktor $2 \times 5 = 10$, jadi angka satuannya 0.

Yang menentukan hanya $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$.

Angka satuannya 3. Lebih dari dua ribu suku sisanya tidak berpengaruh sama sekali!

23. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • FPB bentuk aljabar • gaya olimpiade • 04-6-03

(a) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n , $\text{FPB}(5n + 3, 3n + 2) = 1$.

(b) Tentukan semua bilangan asli n sehingga pecahan $\frac{n+7}{n+2}$ dapat disederhanakan.

Kunci/rubrik: (a) Misalkan d membagi $5n + 3$ dan $3n + 2$. Maka d juga membagi $3(5n + 3) - 5(3n + 2) = 9 - 10 = -1$. Jadi $d = 1$, sehingga FPB-nya 1. [3 poin: kombinasi yang menghapus n , kesimpulan 1]

(b) Setiap pembagi bersama $n + 7$ dan $n + 2$ membagi selisihnya, yaitu 5. Jadi $\text{FPB}(n + 7, n + 2)$ bernilai 1 atau 5. Pecahan dapat disederhanakan tepat ketika 5 membagi $n + 2$, yaitu $n = 5k + 3$ untuk bilangan cacah k : $n = 3, 8, 13, 18, \dots$ [3 poin: reduksi ke 5, jawaban lengkap 1]

Pembahasan: Teknik kuncinya: pembagi bersama dua bilangan juga membagi setiap kombinasinya (jumlah, selisih, atau kelipatannya). Pilih kombinasi yang menghapus n . Cek (b): $n = 3$ memberi $\frac{10}{5} = 2$, dan $n = 8$ memberi $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, sedangkan $n = 4$ memberi $\frac{11}{6}$ yang tidak dapat disederhanakan.

- (a) Buktikan bahwa setiap bilangan prima $p > 3$ berbentuk $6k + 1$ atau $6k - 1$ untuk suatu bilangan asli k .
 (b) Buktikan bahwa untuk setiap prima $p > 3$, bilangan $p^2 - 1$ habis dibagi 24.
 (c) Apakah kebalikan (a) benar, yaitu setiap bilangan berbentuk $6k \pm 1$ pasti prima? Beri alasan.

Kunci/rubrik: (a) Setiap bilangan bulat berbentuk $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$, atau $6k + 3$. Bentuk $6k$ dan $6k \pm 2$ habis dibagi 2, sedangkan $6k + 3$ habis dibagi 3. Prima $p > 3$ tidak habis dibagi 2 maupun 3, jadi $p = 6k \pm 1$. [2 poin]
 (b) $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Karena p ganjil, $p - 1$ dan $p + 1$ adalah dua bilangan genap berurutan, sehingga salah satunya habis dibagi 4 dan hasil kalinya habis dibagi $2 \times 4 = 8$. Di antara tiga bilangan berurutan $p - 1, p, p + 1$ ada satu yang habis dibagi 3, dan itu bukan p ; jadi 3 membagi $(p - 1)(p + 1)$. Karena 8 dan 3 relatif prima, 24 membagi $p^2 - 1$. [3 poin]
 (c) Tidak. Contoh penyangkal: $25 = 6 \times 4 + 1$ dan $35 = 6 \times 6 - 1$ bukan prima. [1 poin]

Pembahasan: Cek angka: $5^2 - 1 = 24$, $7^2 - 1 = 48$, $11^2 - 1 = 120$, $13^2 - 1 = 168$, semuanya kelipatan 24. Bagian (a) menjelaskan dua 'pita' prima yang kamu lihat pada saringan 6 kolom di subbab 4.2.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 · Pemula · Pilihan ganda · Menyederhanakan rasio · 05-1-01

Di kelas Dimas ada 12 siswa laki-laki dan 18 siswa perempuan. Rasio banyak siswa laki-laki terhadap siswa perempuan dalam bentuk paling sederhana adalah...

- A. 3 : 2
B. 2 : 3
C. 12 : 30
D. 6 : 9

Kunci: B

Pembahasan: Rasio laki-laki : perempuan = 12 : 18.

FPB dari 12 dan 18 adalah 6. Bagi kedua suku dengan 6: $12 : 18 = 2 : 3$.

Pilihan 3 : 2 urutannya terbalik, 12 : 30 membandingkan laki-laki dengan seluruh siswa, dan 6 : 9 belum paling sederhana.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Skala denah • 05-1-02

Pada denah berskala 1 : 100, panjang sebuah kamar 4 cm. Panjang kamar sebenarnya adalah...

- A. 40 cm C. 40 m
B. 400 m D. 4 m

Kunci: D

Pembahasan: Skala 1 : 100 berarti 1 cm pada denah mewakili 100 cm sebenarnya.

$$4 \times 100 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}.$$

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Perbandingan senilai • 05-1-03

Harga 2 kg gula pasir Rp 36.000. Berapa rupiah harga 5 kg gula pasir yang sama?

Jawaban: rupiah

Kunci: 90.000 rupiah

Pembahasan: Cari harga 1 kg dulu: $\text{Rp } 36.000 \div 2 = \text{Rp } 18.000$.

Harga 5 kg: $5 \times \text{Rp } 18.000 = \text{Rp } 90.000$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengenali berbalik nilai • 05-1-04

Manakah pasangan besaran berikut yang **berbalik nilai**?

- A. banyak buku tulis yang dibeli dan harga totalnya
- B. jarak tempuh motor dan bensin yang terpakai
- C. banyak tukang dan lama waktu membangun sebuah rumah
- D. panjang sisi persegi dan kelilingnya

Kunci: C

Pembahasan: Makin banyak tukang, makin sedikit hari yang dibutuhkan, dan hasil kali keduanya (beban kerja) tetap. Itulah berbalik nilai.

Tiga pilihan lain senilai: kalau yang satu dikali 2, yang lain juga dikali 2.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Membagi menurut rasio • 05-2-01

Uang Rp 120.000 dibagikan kepada Ayu dan adiknya dengan perbandingan 5 : 3. Berapa rupiah bagian Ayu?

Jawaban: rupiah

Kunci: 75.000 rupiah

Pembahasan: Banyak bagian: $5 + 3 = 8$. Satu bagian = $\text{Rp } 120.000 \div 8 = \text{Rp } 15.000$.

Bagian Ayu = $5 \times \text{Rp } 15.000 = \text{Rp } 75.000$. (Adiknya mendapat Rp 45.000; jumlahnya kembali Rp 120.000.)

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Menentukan skala • 05-2-02

Jarak sebenarnya Kota P ke Kota Q adalah 60 km. Pada sebuah peta, jarak itu digambar 4 cm. Jika skala peta itu 1 : n , berapakah n ?

Jawaban:

Kunci: $1,5 \times 10^6$

Pembahasan: Samakan satuan: $60 \text{ km} = 60 \times 100.000 \text{ cm} = 6.000.000 \text{ cm}$.

Skala = $4 : 6.000.000$. Bagi kedua suku dengan 4: skala = $1 : 1.500.000$.

Jadi $n = 1.500.000$, artinya 1 cm di peta mewakili 15 km.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Kecepatan • 05-2-03

Sebuah angkot menempuh jarak 30 km dalam waktu 45 menit. Kecepatan rata-rata angkot itu adalah...

A. 40 km/jam

C. 22,5 km/jam

B. 45 km/jam

D. 0,67 km/jam

Kunci: A

Pembahasan: Ubah waktu ke jam: $45 \text{ menit} = \frac{45}{60} = 0,75 \text{ jam}$.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{30}{0,75} = 40 \text{ km/jam.}$$

Angka 0,67 muncul dari $30 \div 45$, padahal hasil itu dalam km per *menit*. Angka 22,5 muncul dari $30 \times 0,75$ (keliru mengalikan).

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Perbandingan berbalik nilai • 05-2-04

Persediaan pakan cukup untuk 40 ekor ayam selama 15 hari. Jika ayamnya 60 ekor dan setiap ayam makan sama banyak, persediaan itu cukup untuk berapa hari?

Jawaban: hari

Kunci: 10 hari

Pembahasan: Banyak ayam dan lama hari berbalik nilai: hasil kalinya tetap.

Persediaan = $40 \times 15 = 600$ "ayam-hari".

Untuk 60 ayam: $600 \div 60 = 10$ hari. Cek: ayam bertambah, jadi harinya memang harus berkurang.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Rasio berantai • 05-3-01

Perbandingan uang Ayu dan Dimas 3 : 4, sedangkan perbandingan uang Dimas dan Ancil 6 : 5. Jika uang Ayu Rp 45.000, berapa rupiah uang Ancil?

Jawaban: rupiah

Kunci: 50.000 rupiah

Pembahasan: Ayu : Dimas = 3 : 4 = 9 : 12 (dikali 3).

Dimas : Ancil = 6 : 5 = 12 : 10 (dikali 2).

Jadi Ayu : Dimas : Ancil = 9 : 12 : 10.

Satu bagian = Rp 45.000 ÷ 9 = Rp 5.000, sehingga uang Ancil = 10 × Rp 5.000 = Rp 50.000.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kerja bersama • 05-3-02

Keran A dapat mengisi penuh sebuah bak dalam 20 menit, sedangkan keran B dalam 30 menit. Jika kedua keran dibuka bersamaan, dalam berapa menit bak itu penuh?

Jawaban: menit

Kunci: 12 menit

Pembahasan: Laju A = $\frac{1}{20}$ bak/menit, laju B = $\frac{1}{30}$ bak/menit.

Laju bersama = $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{3}{60} + \frac{2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ bak/menit.

Jadi bak penuh dalam 12 menit. Cek: 12 menit lebih cepat daripada keran tercepat (20 menit). Masuk akal!

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Kecepatan rata-rata • 05-3-03

Ayah mengemudi dari kota A ke kota B sejauh 150 km dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam, lalu kembali melalui jalan yang sama dengan kecepatan rata-rata 100 km/jam. Kecepatan rata-rata untuk perjalanan pulang-pergi adalah...

A. 80 km/jam

C. 75 km/jam

B. 70 km/jam

D. 85 km/jam

Kunci: C

Pembahasan: Waktu pergi = $150 \div 60 = 2,5$ jam. Waktu pulang = $150 \div 100 = 1,5$ jam.

Total jarak 300 km, total waktu 4 jam.

Kecepatan rata-rata = $300 \div 4 = 75$ km/jam, bukan $(60 + 100) \div 2 = 80$ km/jam.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Skala dan luas • 05-3-04

Sebidang tanah berbentuk persegi panjang digambar pada denah berskala 1 : 500 dengan ukuran 8 cm × 6 cm. Berapa m² luas tanah sebenarnya?

Jawaban: m²

Kunci: 1.200 m²

Pembahasan: Panjang sebenarnya = $8 \times 500 = 4.000$ cm = 40 m. Lebar sebenarnya = $6 \times 500 = 3.000$ cm = 30 m.

Luas = $40 \times 30 = 1.200$ m².

Perhatikan: luas di denah (48 cm²) harus dikali 500², bukan dikali 500.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Kurs mata uang • gaya IGCSE • 05-4-01

Pada suatu hari, kurs 1 dolar Singapura (SGD) = Rp 12.000. Ayu menukar Rp 3.000.000, dan penukaran itu dikenai biaya 2% dari jumlah rupiah sebelum ditukar. **Hitung** banyak dolar Singapura yang Ayu terima.

Jawaban: SGD

Kunci: 245 SGD

Pembahasan: Biaya 2% dari Rp 3.000.000 = Rp 60.000, jadi yang ditukar Rp 2.940.000.

Banyak SGD = $2.940.000 \div 12.000 = 245$ SGD.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Variasi langsung • gaya IGCSE • 05-4-02

y berbanding lurus dengan kuadrat x (y is directly proportional to x^2). Ketika $x = 4$, $y = 40$. **Hitung** nilai y ketika $x = 6$.

Jawaban:

Kunci: 90

Pembahasan: Tulis bentuk umum: $y = kx^2$.

Cari k : $40 = k \times 16$, jadi $k = 2,5$.

Untuk $x = 6$: $y = 2,5 \times 36 = 90$.

Cek dengan faktor: x dikali 1,5, jadi y dikali $1,5^2 = 2,25$; $40 \times 2,25 = 90$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Variasi invers • gaya IGCSE • 05-4-03

y berbanding terbalik dengan $\sqrt{x}$ (y is inversely proportional to $\sqrt{x}$). Ketika $x = 9$, $y = 8$. Nilai x ketika $y = 6$ adalah...

A. 12

C. 16

B. 4

D. 6,75

Kunci: C

Pembahasan: Bentuk umum: $y = \frac{k}{\sqrt{x}}$, jadi $k = y\sqrt{x} = 8 \times 3 = 24$.

Untuk $y = 6$: $\sqrt{x} = \frac{24}{6} = 4$, sehingga $x = 16$.

Pilihan 4 lupa mengkuadratkan, 12 memakai xy tetap (lupa akarnya), dan 6,75 memakai variasi langsung.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Kecepatan dan satuan • gaya IGCSE • 05-4-04

Sebuah kereta berangkat dari Stasiun A pukul 08.15 dan tiba di Stasiun B pukul 10.45. Jarak A-B adalah 210 km.

- Hitung kecepatan rata-rata kereta dalam km/jam.
- Ubah kecepatan itu ke m/detik (bulatkan sampai 3 angka penting).
- Pada perjalanan pulang, kecepatan rata-ratanya 105 km/jam. **Tunjukkan** bahwa kecepatan rata-rata pulang-pergi **bukan** 94,5 km/jam, lalu **hitung** nilai yang benar.

Kunci/rubrik: (a) Lama perjalanan 08.15 → 10.45 = 2 jam 30 menit = 2,5 jam. $v = 210 \div 2,5 = 84$ km/jam. [2 poin: waktu 1, hasil 1]

(b) $84 \times \frac{1000}{3600} \approx 23,3$ m/detik. [1 poin]

(c) 94,5 adalah $(84 + 105) \div 2$, rata-rata biasa. Waktu pulang = $210 \div 105 = 2$ jam. Total jarak 420 km dan total waktu 4,5 jam, jadi kecepatan rata-rata = $420 \div 4,5 = 93\frac{1}{3} \approx 93,3$ km/jam. [3 poin: waktu pulang 1, total jarak dan waktu 1, hasil 1]

Pembahasan: Kunci bagian (c): kecepatan rata-rata selalu total jarak dibagi total waktu. Kereta lebih lama berada pada kecepatan 84 km/jam (2,5 jam) daripada 105 km/jam (2 jam), jadi rata-ratanya lebih dekat ke 84.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Hukum kuadrat terbalik • gaya IB • 05-5-01

Terang cahaya I (lux) dari sebuah lampu berbanding terbalik dengan kuadrat jarak d (meter) dari lampu. Pada jarak 2 m terukur 90 lux. Pada jarak berapa meter terangnya tinggal 10 lux?

Jawaban: m

Kunci: 6 m

Pembahasan: $k = Id^2 = 90 \times 4 = 360$.

$10 = \frac{360}{d^2} \Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = 6$ m (jarak bernilai positif).

Makna: terangnya menjadi $\frac{1}{9}$ semula karena jaraknya dikali 3.

18. Lv 5 • IB DP • Uraian • Model kerja • gaya IB • 05-5-02

Pembangunan jalan desa direncanakan selesai dalam 36 hari oleh 15 pekerja. Setelah 12 hari bekerja sesuai rencana, kepala desa ingin jalan itu selesai 6 hari lebih cepat daripada rencana semula.

- Hitung total pekerjaan dalam satuan orang-hari.
- Tentukan banyak pekerja **tambahan** yang diperlukan mulai hari ke-13.
- Sebutkan dua asumsi dalam model ini, lalu jelaskan satu alasan mengapa kenyataannya bisa berbeda.

Kunci/rubrik: (a) $15 \times 36 = 540$ orang-hari. [1]

(b) Dalam 12 hari selesai $15 \times 12 = 180$ orang-hari, sisa $540 - 180 = 360$ orang-hari. Target selesai pada hari ke-30, jadi sisa waktunya $30 - 12 = 18$ hari. Pekerja yang diperlukan $360 \div 18 = 20$, sehingga tambahannya $20 - 15 = 5$ pekerja. [3]

(c) Asumsi, misalnya: semua pekerja sama produktif; pekerjaan bisa dibagi rata; tidak ada hari libur atau hujan. Kenyataan bisa berbeda karena pekerja baru perlu waktu beradaptasi, alat terbatas, atau terlalu banyak pekerja justru saling menghambat. [2]

Pembahasan: Pola standar soal kerja: ubah semuanya ke satuan orang-hari, kurangi bagian yang sudah dikerjakan, lalu bagi sisa pekerjaan dengan sisa waktu.

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Kecepatan rata-rata • gaya IB • 05-5-03

Sebuah drone pengantar paket terbang 12 km melawan angin dengan kecepatan 40 km/jam terhadap tanah, lalu kembali 12 km searah angin dengan kecepatan 60 km/jam. Tentukan kecepatan rata-rata drone (km/jam) untuk seluruh perjalanan.

Jawaban: km/jam

Kunci: 48 km/jam

Pembahasan: Waktu berangkat = $12 \div 40 = 0,3$ jam; waktu kembali = $12 \div 60 = 0,2$ jam.

Kecepatan rata-rata = $24 \div 0,5 = 48$ km/jam.

Ini rata-rata harmonik: $\frac{2 \times 40 \times 60}{40 + 60} = 48$, lebih kecil daripada rata-rata biasa, 50.

20. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Rasio campuran • gaya IB • 05-5-04

Larutan gula A berkadar 10% dan larutan gula B berkadar 25%. Keduanya dicampur agar diperoleh larutan berkadar 15%. Perbandingan volume A : B yang diperlukan adalah...

A. 2 : 1

C. 3 : 2

B. 1 : 2

D. 2 : 3

Kunci: A

Pembahasan: Banyak gula: $0,10a + 0,25b = 0,15(a + b)$.

$0,25b - 0,15b = 0,15a - 0,10a \Rightarrow 0,10b = 0,05a \Rightarrow a : b = 2 : 1$.

Cara cepat (aturan silang): $(25 - 15) : (15 - 10) = 10 : 5 = 2 : 1$. Masuk akal: 15% lebih dekat ke 10%, jadi larutan A harus lebih banyak.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Laju relatif jarum jam • gaya olimpiade • 05-6-01

Tepat pukul 12.00, jarum jam dan jarum menit berimpit. Berapa menit kemudian keduanya berimpit lagi untuk pertama kalinya?

Jawaban: menit

Kunci: 65,4545 menit

Pembahasan: Laju jarum menit: 360° per 60 menit = 6° /menit. Laju jarum jam: 360° per 12 jam = $0,5^\circ$ /menit.

Jarum menit mendekati jarum jam dengan laju relatif $6 - 0,5 = 5,5^\circ$ /menit dan harus unggul 360° .

Waktu = $\frac{360}{5,5} = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$ menit, yaitu sekitar pukul 13.05 lewat 27 detik.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Kerja bersama tiga orang • gaya olimpiade • 05-6-02

Ayu dan Dimas bersama-sama dapat melukis sebuah mural dalam 6 hari. Dimas dan Ancil bersama-sama dalam 10 hari, sedangkan Ayu dan Ancil bersama-sama dalam 7,5 hari. Berapa hari yang dibutuhkan Ayu jika melukis sendirian?

Jawaban: hari

Kunci: 10 hari

Pembahasan: $a + d = \frac{1}{6}$, $d + c = \frac{1}{10}$, dan $a + c = \frac{1}{7,5} = \frac{2}{15}$.

Jumlahkan: $2(a + d + c) = \frac{5}{30} + \frac{3}{30} + \frac{4}{30} = \frac{12}{30}$, jadi $a + d + c = \frac{1}{5}$.

$a = \frac{1}{5} - (d + c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$. Ayu sendirian butuh **10 hari**.

(Sekalian: $d = \frac{1}{15}$ dan $c = \frac{1}{30}$, jadi Dimas butuh 15 hari dan Ancil 30 hari.)

Dimas berjalan menaiki eskalator yang sedang bergerak naik dan menghitung 30 anak tangga yang ia injak sampai di atas. Ayu, yang melangkah dua kali lebih cepat daripada Dimas, menaiki eskalator yang sama dan menghitung 40 anak tangga. Berapa banyak anak tangga yang terlihat jika eskalator itu berhenti?

Jawaban: anak tangga

Kunci: 60 anak tangga

Pembahasan: Misalkan Dimas melangkah 1 anak tangga per detik dan eskalator bergerak e anak tangga per detik.

Dimas: 30 langkah butuh 30 detik, eskalator menyumbang $30e$. Jadi $N = 30 + 30e$.

Ayu: 2 langkah per detik, 40 langkah butuh 20 detik, eskalator menyumbang $20e$. Jadi $N = 40 + 20e$.

$30 + 30e = 40 + 20e \Rightarrow e = 1 \Rightarrow N = 60$.

Cek: Dimas dan eskalator sama cepat, jadi masing-masing menyumbang 30 anak tangga.

Semua huruf berikut mewakili bilangan bulat positif.

(a) Buktikan: jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, maka $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

(b) Jelaskan arti hasil (a) untuk dua teko sirup: teko Ayu berisi 2 bagian sirup dari 5 bagian, teko Dimas berisi 4 bagian sirup dari 9 bagian, lalu keduanya dituang ke satu wadah besar.

(c) Tunjukkan dengan contoh bahwa dari $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ **tidak** selalu berlaku $\frac{a+p}{b+q} < \frac{c+r}{d+s}$.

Kunci/rubrik: (a) Karena semuanya positif, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$. Maka $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$ dan $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d) - d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0$. Terbukti. [3 poin]

(b) Kadar sirup campuran $\frac{2+4}{5+9} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 42,9\%$, berada di antara $\frac{2}{5} = 40\%$ dan $\frac{4}{9} \approx 44,4\%$. Campuran tidak mungkin lebih manis daripada teko termanis atau lebih tawar daripada teko tertawar. [1 poin]

(c) Contoh: $\frac{1}{5} < \frac{2}{8}$ dan $\frac{6}{8} < \frac{4}{5}$, tetapi $\frac{1+6}{5+8} = \frac{7}{13} > \frac{6}{13} = \frac{2+4}{8+5}$. [2 poin]

Pembahasan: Pecahan $\frac{a+c}{b+d}$ disebut *mediant* (pecahan tengah) dari $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$; ia selalu terletak di antara keduanya. Bagian (c) dikenal sebagai **paradoks Simpson**. Contoh nyata: pemain basket B memasukkan 2 dari 8 tembakan di babak pertama (25%) dan 4 dari 5 di babak kedua (80%), sedangkan pemain A hanya 1 dari 5 (20%) dan 6 dari 8 (75%). B lebih baik di *setiap* babak, tetapi secara keseluruhan A lebih baik: 7 dari 13 melawan 6 dari 13!

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Arti pangkat • 06-1-01

Bentuk 2^5 artinya...

- A. 2×5
- B. 5×5
- C. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
- D. $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

Kunci: C

Pembahasan: Pangkat menyatakan perkalian berulang. 2^5 berarti 2 dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak 5 faktor: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Pilihan 2×5 dan $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ sama-sama bernilai 10. Keduanya jebakan yang sering muncul.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Menghitung pangkat • 06-1-02

Kamu mengirim sebuah pesan ke 3 teman (putaran 1). Setiap penerima meneruskannya ke 3 orang baru (putaran 2), dan seterusnya. Banyak penerima baru pada putaran ke-4 adalah 3^4 . Berapa orang?

Jawaban: orang

Kunci: 81 orang

Pembahasan: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 = 81$ orang.

Polanya: putaran 1 ada 3 orang, putaran 2 ada 9, putaran 3 ada 27, putaran 4 ada 81. Setiap putaran dikalikan 3.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pangkat nol • 06-1-03

Nilai 2026^0 adalah...

- A. 1
- B. 0
- C. 2026
- D. tidak terdefinisi

Kunci: A

Pembahasan: Untuk setiap bilangan $a \neq 0$ berlaku $a^0 = 1$.

Alasannya: $\frac{a^n}{a^n} = 1$, padahal menurut sifat pembagian $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. Jadi $2026^0 = 1$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Notasi ilmiah • 06-1-04

Penduduk Indonesia sekitar 280.000.000 jiwa. Dalam notasi ilmiah, bilangan itu ditulis...

- A. 28×10^7
- B. $2,8 \times 10^7$
- C. $0,28 \times 10^9$
- D. $2,8 \times 10^8$

Kunci: D

Pembahasan: Notasi ilmiah berbentuk $a \times 10^n$ dengan $1 \leq a < 10$. Lompatkan koma 280.000.000 ke kiri sampai tersisa satu angka di depannya: 2,8. Koma melompat 8 kali, jadi $2,8 \times 10^8$.

28×10^7 dan $0,28 \times 10^9$ bernilai sama, tetapi bukan notasi ilmiah karena 28 dan 0,28 tidak terletak antara 1 dan 10. Pilihan $2,8 \times 10^7$ kurang satu nol.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Pembelahan bakteri • 06-2-01

Sebuah koloni berisi 5 bakteri. Setiap bakteri membelah menjadi dua setiap 20 menit. Berapa banyak bakteri setelah 2 jam?

Jawaban: bakteri

Kunci: 320 bakteri

Pembahasan: 2 jam = 120 menit, jadi terjadi $120 : 20 = 6$ kali pembelahan.

Setiap pembelahan menggandakan jumlah bakteri: $5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$ bakteri.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Sifat pangkat • 06-2-02

Bentuk sederhana dari $\frac{a^8 \times a^2}{a^5}$ (dengan $a \neq 0$) adalah...

A. a^{11}

C. a^{16}

B. a^5

D. a^3

Kunci: B

Pembahasan: Kali $\rightarrow$ pangkat dijumlahkan: $a^8 \times a^2 = a^{10}$.

Bagi $\rightarrow$ pangkat dikurangkan: $a^{10} : a^5 = a^5$.

Pilihan a^{16} muncul kalau pangkat dikalikan, padahal perkalian pangkat hanya untuk pangkat dari pangkat.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Menyederhanakan akar • 06-2-03

Sederhanakan $\sqrt{75}$ menjadi bentuk $k\sqrt{3}$. Berapa nilai k ?

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: $75 = 25 \times 3$, dan 25 adalah kuadrat sempurna.

$\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Jadi $k = 5$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Pangkat negatif • 06-2-04

Nilai 4^{-2} adalah...

A. -16

C. -8

B. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{8}$

Kunci: B

Pembahasan: Pangkat negatif berarti kebalikan: $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$.

Hasilnya positif! Pilihan -16 dan -8 muncul dari salah paham bahwa pangkat negatif membuat bilangan negatif.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Pangkat pecahan • 06-3-01

Hitung nilai $\frac{27^{2/3} \times 16^{3/4}}{4^{-1/2}}$.

Jawaban:

Kunci: 144

Pembahasan: $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$.

$16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.

$4^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

Jadi nilainya $\frac{9 \times 8}{1/2} = 72 \times 2 = 144$.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Merasionalkan penyebut • 06-3-02

Bentuk rasional dari $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ adalah...

A. $\sqrt{5} + 1$

B. $\sqrt{5} - 1$

C. $4\sqrt{5} + 4$

D. $\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

Kunci: A

Pembahasan: Kalikan dengan sekawan penyebut:

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1.$$

Cek: $4 : (2,236 - 1) \approx 3,236$ dan $\sqrt{5} + 1 \approx 3,236$. ✓

Pilihan $4\sqrt{5} + 4$ lupa membagi dengan $5 - 1 = 4$.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Memori HP • 06-3-03

Memori sebuah HP berkapasitas 128 GB. Anggap 1 GB = 2^{30} byte, 1 MB = 2^{20} byte, dan setiap foto berukuran 4 MB. Paling banyak berapa foto yang muat di memori itu?

Jawaban: foto

Kunci: 32.768 foto

Pembahasan: Banyak foto = $\frac{128 \times 2^{30}}{4 \times 2^{20}} = \frac{2^7 \times 2^{30}}{2^2 \times 2^{20}} = \frac{2^{37}}{2^{22}} = 2^{15} = 32.768$ foto.

Pada kenyataannya sedikit lebih sedikit, karena sebagian memori dipakai sistem HP.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Notasi ilmiah • 06-3-04

Cahaya merambat dengan kecepatan 3×10^8 m/s. Jarak Bumi ke Matahari sekitar $1,5 \times 10^{11}$ m. Berapa detik waktu yang dibutuhkan cahaya Matahari untuk sampai ke Bumi?

Jawaban: detik

Kunci: 500 detik

Pembahasan: $t = \frac{1,5 \times 10^{11}}{3 \times 10^8} = \frac{1,5}{3} \times 10^{11-8} = 0,5 \times 10^3 = 500$ detik.

Itu sekitar 8 menit 20 detik. Jadi Matahari yang kamu lihat adalah Matahari 8 menit yang lalu!

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Bentuk baku • gaya IGCSE • 06-4-01

Hitung $(3,2 \times 10^5) \times (4,5 \times 10^{-2})$. Berikan jawabanmu dalam notasi ilmiah (bentuk baku, *standard form*).

Jawaban:

Kunci: 14.400**Pembahasan:** Kalikan angka depannya: $3,2 \times 4,5 = 14,4$. Jumlahkan pangkatnya: $10^{5+(-2)} = 10^3$. $14,4 \times 10^3$ belum baku karena $14,4 \geq 10$. Geser koma satu tempat ke kiri: $1,44 \times 10^4 (= 14.400)$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Persamaan pangkat • gaya IGCSE • 06-4-02

Tentukan nilai n jika $\frac{2^n \times 8}{4^3} = 32$.

Jawaban:

Kunci: 8**Pembahasan:** $8 = 2^3$, $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$, dan $32 = 2^5$.

$$\frac{2^n \times 2^3}{2^6} = 2^{n+3-6} = 2^{n-3}$$

$$2^{n-3} = 2^5 \Rightarrow n-3 = 5 \Rightarrow n = 8$$

$$\text{Cek: } \frac{256 \times 8}{64} = 32. \checkmark$$

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Bentuk akar sekawan • gaya IGCSE • 06-4-03

Tunjukkan bahwa $(5 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})$ adalah bilangan bulat, lalu **tuliskan** nilainya.

Jawaban:

Kunci: 13**Pembahasan:** Pakai $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ dengan $x = 5$ dan $y = 2\sqrt{3}$:

$$5^2 - (2\sqrt{3})^2 = 25 - 4 \times 3 = 25 - 12 = 13$$

Bentuk akarnya lenyap! Inilah alasan sekawan dipakai untuk merasionalkan penyebut.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Virus dan rambut • gaya IGCSE • 06-4-04

Diameter sebuah virus $1,2 \times 10^{-7}$ m, sedangkan tebal sehelai rambut 8×10^{-5} m.(a) **Hitung** berapa kali tebal rambut dibandingkan diameter virus. Tulis jawabanmu dalam bentuk baku.(b) **Nyatakan** diameter virus dalam nanometer ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$).(c) **Bulatkan** jawaban (a) sampai 2 angka penting.**Kunci/rubrik:** (a) $\frac{8 \times 10^{-5}}{1,2 \times 10^{-7}} = \frac{8}{1,2} \times 10^{-5-(-7)} = 6,67 \times 10^2$ (sekitar 667 kali). [2 poin: pembagian angka depan 1, pangkat sepuluh benar 1]

$$(b) 1,2 \times 10^{-7} \text{ m} = \frac{1,2 \times 10^{-7}}{10^{-9}} \text{ nm} = 1,2 \times 10^2 \text{ nm} = 120 \text{ nm}. [1 \text{ poin}]$$

$$(c) 6,7 \times 10^2 (= 670). [1 \text{ poin}]$$

Pembahasan: Saat membagi, kurangkan pangkatnya dengan hati-hati: $-5 - (-7) = +2$. Rambut ternyata ratusan kali lebih tebal daripada virus. Itulah sebabnya virus hanya bisa dilihat dengan mikroskop elektron.

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Model pertumbuhan • gaya IB • 06-5-01

Banyak bakteri dalam segelas susu yang dibiarkan di luar kulkas dimodelkan oleh $N(t) = 500 \cdot 2^{t/3}$, dengan t dalam jam. Tentukan banyak bakteri setelah satu hari.

Jawaban: bakteri

Kunci: 128.000 bakteri

Pembahasan: $N(24) = 500 \cdot 2^{24/3} = 500 \cdot 2^8 = 500 \times 256 = 128.000$ bakteri.

Model ini berarti banyak bakteri berlipat dua setiap 3 jam (setiap kali t bertambah 3, pangkatnya bertambah 1).

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Persamaan eksponen • gaya IB • 06-5-02

Selesaikan persamaan $9^{x+1} = 27^{x-1}$.

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: $9^{x+1} = (3^2)^{x+1} = 3^{2x+2}$ dan $27^{x-1} = (3^3)^{x-1} = 3^{3x-3}$.

$3^{2x+2} = 3^{3x-3} \Rightarrow 2x+2 = 3x-3 \Rightarrow x = 5$.

Cek: $9^6 = 531.441$ dan $27^4 = 531.441$. ✓

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Pangkat pecahan • gaya IB • 06-5-03

$\sqrt{8} \times \sqrt[3]{4}$ dapat ditulis sebagai 2^k . Nilai k adalah...

A. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{13}{6}$

B. 1

D. $\frac{5}{2}$

Kunci: C

Pembahasan: $\sqrt{8} = (2^3)^{1/2} = 2^{3/2}$ dan $\sqrt[3]{4} = (2^2)^{1/3} = 2^{2/3}$.

Kalikan $\rightarrow$ jumlahkan pangkat: $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6}$.

Cek: $2^{13/6} \approx 4,490$ dan $\sqrt{8} \times \sqrt[3]{4} \approx 2,828 \times 1,587 \approx 4,490$. ✓

20. Lv 5 • IB DP • Uraian • Lipatan kertas ke Bulan • gaya IB • 06-5-04

Selembat kertas setebal 0,1 mm dilipat dua berulang kali (anggap selalu bisa).

(a) Tunjukkan bahwa tebal setelah n lipatan adalah $T_n = 10^{-4} \cdot 2^n$ meter.

(b) Tentukan banyak lipatan paling sedikit agar tebalnya melampaui jarak Bumi-Bulan, $3,84 \times 10^8$ m.

(c) Setiap lipatan juga membagi dua luas permukaan kertas. Jika luas mula-mula 1 m^2 , hitung luas kertas setelah banyak lipatan pada (b), lalu jelaskan mengapa percobaan ini mustahil dilakukan.

Kunci/rubrik: (a) $0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$. Setiap lipatan menggandakan banyak lapisan, sehingga setelah n lipatan ada 2^n lapis dan tebalnya $10^{-4} \cdot 2^n \text{ m}$. [1]

(b) Syaratnya $10^{-4} \cdot 2^n > 3,84 \times 10^8$, yaitu $2^n > 3,84 \times 10^{12}$. Karena $2^{41} \approx 2,20 \times 10^{12}$ (belum cukup) dan $2^{42} \approx 4,40 \times 10^{12}$ (cukup), jawabannya $n = 42$. [2]

(c) Luas $= 2^{-42} \text{ m}^2 \approx 2,27 \times 10^{-13} \text{ m}^2$, setara persegi bersisi $\approx 4,8 \times 10^{-7} \text{ m}$ ($\pm 0,5$ mikrometer, lebih kecil daripada sebutir bakteri). Kertas berubah menjadi menara setinggi ratusan ribu kilometer dengan alas lebih kecil daripada bakteri, dan setiap lipatan butuh tenaga yang terus berlipat. Jadi mustahil secara fisik. [2]

Pembahasan: Tebal dikalikan 2 dan luas dibagi 2 pada setiap lipatan, sehingga hasil kali tebal $\times$ luas (volume kertas) tetap: $10^{-4} \cdot 2^{42} \times 2^{-42} = 10^{-4} \text{ m}^3$. Pertumbuhan dan penyusutan berpangkat berjalan beriringan. Dengan kalkulator, $n > \log_2(3,84 \times 10^{12}) \approx 41,8$; logaritma akan kamu pelajari di Bab 14.

21. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Membandingkan pangkat raksasa • gaya olimpiade • 06-6-01

Manakah bilangan yang terbesar?

- A. 10^{30} C. 5^{40}
 B. 3^{60} D. 2^{100}

Kunci: D

Pembahasan: Samakan pangkatnya menjadi 20: $2^{100} = (2^5)^{20} = 32^{20}$, $3^{60} = (3^3)^{20} = 27^{20}$, $5^{40} = (5^2)^{20} = 25^{20}$. Jadi $2^{100} > 3^{60} > 5^{40}$.

Bandingkan dengan 10^{30} : karena $2^{10} = 1.024 > 1.000 = 10^3$, maka $2^{100} = (2^{10})^{10} > (10^3)^{10} = 10^{30}$.
 Jadi yang terbesar 2^{100} , meskipun 10^{30} nyaris menyamainya.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Angka satuan • gaya olimpiade • 06-6-02

Berapakah angka satuan dari 7^{2026} ?

Jawaban:

Kunci: 9

Pembahasan: Angka satuan perpangkatan 7 berulang dengan periode 4: $7^1 \rightarrow 7$, $7^2 = 49 \rightarrow 9$, $7^3 = 343 \rightarrow 3$, $7^4 = 2.401 \rightarrow 1$, lalu kembali ke 7.

Karena $2026 = 4 \times 506 + 2$, angka satuan 7^{2026} sama dengan angka satuan 7^2 , yaitu **9**.

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Jumlah teleskopik • gaya olimpiade • 06-6-03

Hitung $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.

Jawaban:

Kunci: 9

Pembahasan: $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

Jumlahnya menjadi $(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$. Suku-suku di tengah saling menghapus (jumlah teleskopik), tersisa $\sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9$.

24. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Bukti irasional • gaya olimpiade • 06-6-04

Buktikan bahwa $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ adalah bilangan irasional.

Kunci/rubrik: Andaikan $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ rasional. Kuadratkan: $r^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$, sehingga $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$ juga rasional. [2]

Sekarang tunjukkan $\sqrt{6}$ irasional. Andaikan $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ dengan p, q bilangan asli tanpa faktor persekutuan. Maka $p^2 = 6q^2$, jadi p^2 genap dan p genap; tulis $p = 2s$. Diperoleh $4s^2 = 6q^2$, atau $2s^2 = 3q^2$. Jadi $3q^2$ genap, sehingga q genap. Ini bertentangan dengan p, q tanpa faktor persekutuan. [2]

Jadi pengandaian salah, dan $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irasional. ■ [1]

Pembahasan: Strategi "andaikan rasional, lalu kuadratkan" sering dipakai di olimpiade untuk menyingkirkan akar satu per satu. Perhatikan bahwa jumlah dua bilangan irasional tidak selalu irasional (contoh: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$), jadi bukti seperti ini memang diperlukan.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Menerjemahkan cerita • 07-1-01

Ekspresi aljabar untuk “lima lebihnya dari sebuah bilangan n ” adalah...

A. $5n$ C. $n - 5$ B. $n + 5$ D. $5 - n$ **Kunci: B****Pembahasan:** “Lima lebihnya dari n ” berarti n ditambah 5, yaitu $n + 5$.Bentuk $5n$ berarti lima kali n , sedangkan $n - 5$ berarti “lima kurangnya dari n ”.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Substitusi • 07-1-02

Jika $x = 3$, nilai dari $4x$ adalah...

A. 43

C. 12

B. 7

D. 1

Kunci: C**Pembahasan:** $4x$ berarti $4 \times x$. Untuk $x = 3$: $4 \times 3 = 12$.

Jawaban 43 muncul jika angka ditempelkan, dan 7 jika dijumlahkan. Keduanya keliru.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Nilai ekspresi • 07-1-03

Hitung nilai $2p + 7$ untuk $p = 6$.

Jawaban:

Kunci: 19**Pembahasan:** $2p + 7 = 2(6) + 7 = 12 + 7 = 19$. Kalikan dulu, baru tambahkan.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Suku sejenis • 07-1-04

Manakah pasangan **suku sejenis**?

A. $3x$ dan $3y$ C. 4 dan $4x$ B. $2x$ dan $2x^2$ D. $5ab$ dan $-2ba$ **Kunci: D****Pembahasan:** Suku sejenis punya variabel **dan** pangkat yang sama persis. Karena $ba = ab$, suku $5ab$ dan $-2ba$ sejenis (jumlahnya $3ab$).Koefisien yang sama, seperti pada $3x$ dan $3y$, tidak membuat suku menjadi sejenis.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Tarif ojek • 07-2-01

Tarif sebuah ojek adalah Rp6.000 ditambah Rp2.500 untuk setiap kilometer. Berapa rupiah ongkos untuk perjalanan sejauh 8 km?

Jawaban: rupiah

Kunci: 26.000 rupiah

Pembahasan: Ekspresinya $T = 6.000 + 2.500k$, dengan k jarak dalam km.

Untuk $k = 8$: $T = 6.000 + 2.500 \times 8 = 6.000 + 20.000 = 26.000$.

Ongkosnya Rp26.000.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Menyederhanakan • 07-2-02

Bentuk sederhana dari $5x + 3y - 2x + y$ adalah...

A. $3x + 4y$

C. $3x + 3y$

B. $7xy$

D. $7x + 4y$

Kunci: A

Pembahasan: Kumpulkan suku sejenis: $(5x - 2x) + (3y + y) = 3x + 4y$.

Ingat, y berarti $1y$, jadi $3y + y = 4y$. Suku x dan y tidak sejenis, jadi tidak bisa digabung menjadi $7xy$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Sifat distributif • 07-2-03

Hasil dari $3(2x - 5)$ adalah...

A. $6x - 5$

C. $6x + 15$

B. $5x - 8$

D. $6x - 15$

Kunci: D

Pembahasan: Kalikan 3 dengan **setiap** suku di dalam kurung: $3 \cdot 2x - 3 \cdot 5 = 6x - 15$.

Jawaban $6x - 15$ lupa mengalikan suku kedua.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Faktor persekutuan • 07-2-04

Bentuk $12x + 18$ dapat difaktorkan menjadi $k(2x + 3)$. Berapakah k ?

Jawaban:

Kunci: 6

Pembahasan: FPB dari 12 dan 18 adalah 6.

$12x + 18 = 6 \cdot 2x + 6 \cdot 3 = 6(2x + 3)$, jadi $k = 6$.

Cek: $6(2x + 3) = 12x + 18$ ✓.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Identitas kuadrat • 07-3-01

Diketahui $a + b = 9$ dan $ab = 14$. Tentukan nilai $a^2 + b^2$.

Jawaban:

Kunci: 53

Pembahasan: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 81 = a^2 + b^2 + 28 \Rightarrow a^2 + b^2 = 53$.

Cek: a dan b adalah 2 dan 7 ($2 + 7 = 9$, $2 \cdot 7 = 14$), dan $4 + 49 = 53$ ✓.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Selisih dua kuadrat • 07-3-02

Hitunglah $1003^2 - 997^2$ tanpa kalkulator.

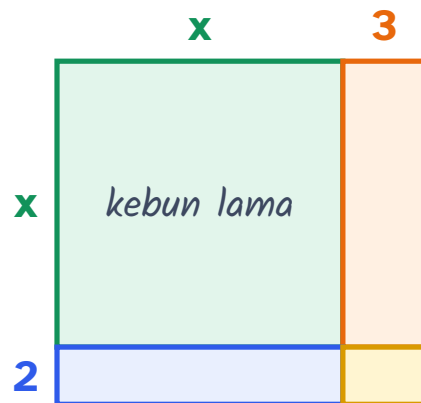
Jawaban:

Kunci: 12.000

Pembahasan: $1003^2 - 997^2 = (1003 + 997)(1003 - 997) = 2000 \times 6 = 12.000$.
Tanpa menghitung satu kuadrat pun!

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Model luas • 07-3-03

Sebidang kebun berbentuk persegi bersisi x meter diperluas: satu sisi ditambah 3 m dan sisi lainnya ditambah 2 m sehingga menjadi persegi panjang (lihat gambar). Pertambahan luas kebun adalah...



A. 6 m^2

B. $(5x + 6) \text{ m}^2$

C. $(x^2 + 5x + 6) \text{ m}^2$

D. $5x \text{ m}^2$

Kunci: B

Pembahasan: Luas baru $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$. Luas lama x^2 .
Pertambahannya $5x + 6 \text{ m}^2$: dua pita ($3x$ dan $2x$) ditambah pojok $3 \times 2 = 6$.
Pilihan 6 m^2 hanya menghitung pojoknya, sedangkan $x^2 + 5x + 6$ adalah luas baru seluruhnya.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Sulap tanggal lahir • 07-3-04

Ancil meminta Ayu: “Kalikan tanggal lahirmu dengan 20, tambah 3, kalikan 5, lalu tambahkan nomor bulan lahirmu.” Ayu menyebut hasil 1.727. Pada **tanggal** berapa Ayu lahir?

Jawaban:

Kunci: 17

Pembahasan: $(20t + 3) \times 5 + b = 100t + 15 + b$.
Kurangi 15: $1727 - 15 = 1712 = 100t + b$. Dua angka terakhir adalah bulan (12), sisanya tanggal (17).
Ayu lahir tanggal 17 Desember. Cek: $(17 \cdot 20 + 3) \cdot 5 + 12 = 343 \cdot 5 + 12 = 1727 \checkmark$.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Ekspansi • gaya IGCSE • 07-4-01

Ekspansikan dan sederhanakan $(2x + 3)(x - 4)$. Tuliskan **koefisien** x pada hasilnya.

Jawaban:

Kunci: -5**Pembahasan:** $(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x^2 - 5x - 12$.Koefisien x adalah -5 (tandanya ikut!).Cek dengan $x = 1$: ruas kiri $5 \cdot (-3) = -15$, ruas kanan $2 - 5 - 12 = -15 \checkmark$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Faktorisasi lengkap • gaya IGCSE • 07-4-02

Faktorkan sepenuhnya $15a^2b - 10ab^2$. Hasilnya berbentuk $kab(3a - 2b)$. **Tentukan** k .

Jawaban:

Kunci: 5**Pembahasan:** FPB koefisien 15 dan 10 adalah 5. Variabel yang ada di kedua suku: a dan b , masing-masing dengan pangkat terkecil 1. Faktor persekutuan terbesarnya $5ab$. $15a^2b - 10ab^2 = 5ab(3a - 2b)$, jadi $k = 5$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Kurung dan tanda minus • gaya IGCSE • 07-4-03

Sederhanakan $4(3x - 2) - 2(5x - 7)$.A. $2x + 6$ C. $2x - 1$ B. $2x - 22$ D. $22x - 22$ **Kunci: A****Pembahasan:** $4(3x - 2) = 12x - 8$ dan $-2(5x - 7) = -10x + 14$ (minus kali minus menjadi plus!). $12x - 8 - 10x + 14 = 2x + 6$.Pilihan $2x - 22$ muncul jika $-2 \times (-7)$ dihitung sebagai -14 .

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Bingkai foto • gaya IGCSE • 07-4-04

Sebuah foto berbentuk persegi bersisi x cm diberi bingkai selebar 2 cm di sekelilingnya.(a) **Tunjukkan** bahwa luas bingkainya saja adalah $8x + 16 \text{ cm}^2$.(b) **Faktorkan** $8x + 16$ sepenuhnya.(c) Luas bingkai ternyata 96 cm^2 . Dengan memakai bentuk faktor dari (b), **tentukan** x .**Kunci/rubrik:** (a) Sisi luar $x + 4$. Luas bingkai $= (x + 4)^2 - x^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16$. [2 poin: sisi luar $x + 4$ 1, ekspansi dan penyederhanaan 1](b) $8x + 16 = 8(x + 2)$. [1 poin](c) $8(x + 2) = 96 \Rightarrow x + 2 = 12 \Rightarrow x = 10$. Cek: $14^2 - 10^2 = 196 - 100 = 96 \checkmark$. [2 poin]**Pembahasan:** Jebakan umum: menganggap sisi luarnya $x + 2$. Bingkai menambah 2 cm di **kedua** tepi, jadi sisi luar bertambah 4 cm.Bentuk faktor $8(x + 2)$ juga punya arti: bingkai dapat dipotong menjadi 4 persegi panjang berukuran $2 \times (x + 2)$.

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Model keuntungan • gaya IB • 07-5-01

Kelas 8A memesan kaos untuk dijual saat pentas seni. Ada biaya desain Rp150.000 (dibayar sekali) dan biaya cetak Rp45.000 per kaos. Setiap kaos dijual Rp60.000, dan semua kaos yang dipesan terjual. Tuliskan keuntungan U sebagai ekspresi dalam n (banyak kaos), lalu hitung keuntungannya jika dipesan 40 kaos.

Jawaban: rupiah

Kunci: 450.000 rupiah

Pembahasan: $U = 60.000n - (150.000 + 45.000n) = 15.000n - 150.000$.

Untuk $n = 40$: $U = 600.000 - 150.000 = 450.000$. Keuntungannya Rp450.000.

Makna koefisien: setiap kaos menyumbang untung Rp15.000, dan biaya desain baru tertutup setelah $150.000 \div 15.000 = 10$ kaos.

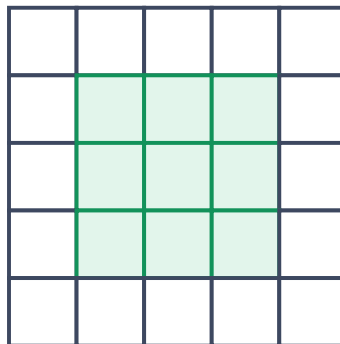
18. Lv 5 • IB DP • Uraian • Pola ubin teras • gaya IB • 07-5-02

Sebuah taman berbentuk persegi berisi $n \times n$ ubin hijau dikelilingi satu lapis ubin putih (gambar menunjukkan $n = 3$).

(a) Tunjukkan bahwa banyak ubin putih adalah $4n + 4$.

(b) Dimas menulis $4(n + 1)$, sedangkan Ayu menulis $(n + 2)^2 - n^2$. Tunjukkan bahwa ketiga ekspresi itu setara, lalu jelaskan cara berpikir di balik ekspresi Ayu.

(c) Tersedia 100 ubin putih. Tentukan n terbesar yang mungkin, dan apakah semua ubin putih terpakai.



$n = 3$

Kunci/rubrik: (a) Sisi atas dan bawah masing-masing $n + 2$ ubin; sisi kiri dan kanan masing-masing n ubin (pojok sudah terhitung). Total $2(n + 2) + 2n = 4n + 4$. [2]

(b) $4(n + 1) = 4n + 4$; $(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$. Ayu menghitung semua ubin pada persegi besar $(n + 2) \times (n + 2)$, lalu mengurangkan ubin hijau $n \times n$. [3]

(c) $4n + 4 \leq 100 \Rightarrow n \leq 24$. Untuk $n = 24$: $4 \cdot 24 + 4 = 100$, jadi semua ubin putih terpakai tepat habis. [2]

Pembahasan: Satu situasi bisa dihitung dengan banyak cara, dan aljabar membuktikan bahwa semuanya sama. Ini persis ide pagar bambu di subbab 7.2. Untuk $n = 3$: $4 \cdot 3 + 4 = 16$ ubin putih, cocok dengan gambar ($25 - 9 = 16$).

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Makna koefisien • gaya IB • 07-5-03

Tagihan air bulanan sebuah rumah dimodelkan dengan $T = 12.000 + 4.500v$, dengan v volume air yang dipakai (m^3) dan T dalam rupiah. Apa arti angka 4.500?

- A. biaya tetap yang dibayar walaupun tidak memakai air
- B. banyak air yang dipakai dalam sebulan
- C. biaya untuk setiap $1 m^3$ air yang dipakai
- D. total tagihan jika memakai $1 m^3$ air

Kunci: C

Pembahasan: 4.500 adalah koefisien v : setiap kenaikan pemakaian $1 m^3$ menambah tagihan Rp4.500.

Angka 12.000 adalah konstanta (biaya tetap). Total tagihan untuk $1 m^3$ adalah $12.000 + 4.500 = 16.500$, bukan 4.500.

20. Lv 5 • IB DP • Isian • Manipulasi aljabar • gaya IB • 07-5-04

Diketahui $x - \frac{1}{x} = 3$. Tentukan nilai $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Jawaban:

Kunci: 11

Pembahasan: $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$.

Jadi $9 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$.

Kuncinya: suku tengah $2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$ berubah menjadi konstanta.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Bilangan raksasa • gaya olimpiade • 07-6-01

Hitung $2026^2 - 2025 \times 2027$.

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: Dengan $n = 2026$: $2025 \times 2027 = (n - 1)(n + 1) = n^2 - 1$.

Jadi $n^2 - (n^2 - 1) = 1$. Tidak ada satu kuadrat pun yang perlu dihitung!

22. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Perkalian teleskopik • gaya olimpiade • 07-6-02

Nilai dari $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ adalah...

- A. $\frac{1}{10}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{9}{10}$
- D. $\frac{11}{20}$

Kunci: D

Pembahasan: $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k - 1)(k + 1)}{k \cdot k}$.

Hasil kalinya $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdots \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 10}$.

Hampir semua faktor saling mencoret (teleskopik). Yang tersisa $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{10} = \frac{11}{20}$.

Bilangan real a dan b memenuhi $a + b = 5$ dan $a^2 + b^2 = 13$. Tentukan $a^3 + b^3$.

Jawaban:

Kunci: 35

Pembahasan: $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 25 - 13 = 12$, jadi $ab = 6$.

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Rightarrow 125 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 6 \cdot 5 \Rightarrow a^3 + b^3 = 125 - 90 = 35$.

Cek: $a, b = 2, 3$ memberi $8 + 27 = 35 \checkmark$.

(a) Hitung $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1$, dan $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$. Apa yang istimewa?

(b) **Buktikan** bahwa untuk setiap bilangan bulat n , bilangan $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ selalu merupakan kuadrat sempurna.

(c) Tanpa kalkulator, tentukan $\sqrt{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 1}$.

Kunci/rubrik: (a) 25, 121, 361, yaitu 5^2 , 11^2 , 19^2 . [1]

(b) Pasangkan faktor luar dan faktor dalam: $n(n + 3) = n^2 + 3n$ dan $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$. Misalkan $m = n^2 + 3n$. Bilangannya menjadi $m(m + 2) + 1 = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$, sebuah kuadrat sempurna. [3: pemasangan 1, substitusi 1, kesimpulan 1]

(c) Untuk $n = 10$: $n^2 + 3n + 1 = 100 + 30 + 1 = 131$. [1]

Pembahasan: Ide kuncinya: pasangkan faktor-faktor sehingga bentuk $n^2 + 3n$ muncul dua kali, lalu ganti bentuk itu dengan satu huruf baru. Teknik “ganti dengan huruf baru” (substitusi) sangat sering dipakai di olimpiade.

Cek (c): $131^2 = 17.161$ dan $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 1 = 17.160 + 1 \checkmark$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Persamaan sebagai timbangan • 08-1-01

Sebuah timbangan seimbang. Di piring kiri ada 2 kantong gula yang sama beratnya dan anak timbangan 3 kg. Di piring kanan ada anak timbangan 9 kg. Berapa berat satu kantong gula?

- A. 6 kg
B. 3 kg
C. 4,5 kg
D. 12 kg

Kunci: B

Pembahasan: Tulis sebagai persamaan: $2x + 3 = 9$.

Ambil 3 kg dari kedua piring: $2x = 6$.

Bagi dua: $x = 3$ kg.

Cek: $2 \times 3 + 3 = 9$ ✓. Jawaban 6 kg lupa membagi dua, sedangkan 4,5 kg lupa mengambil 3 kg dari kedua piring.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengenali PLSV • 08-1-02

Manakah yang merupakan persamaan linear satu variabel?

- A. $3x + 5$
B. $x^2 = 16$
C. $2x - 1 = 9$
D. $x + y = 7$

Kunci: C

Pembahasan: Persamaan linear satu variabel memuat tanda sama dengan, hanya satu variabel, dan variabelnya berpangkat satu.

$3x + 5$ tidak punya tanda "=", jadi baru berupa ekspresi. $x^2 = 16$ memuat pangkat dua. $x + y = 7$ memuat dua variabel. Hanya $2x - 1 = 9$ yang memenuhi semua syarat.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Persamaan satu langkah • 08-1-03

Jika $x + 7 = 15$, berapa nilai x ?

Jawaban:

Kunci: 8

Pembahasan: Kurangi kedua ruas dengan 7: $x = 15 - 7 = 8$.

Cek: $8 + 7 = 15$ ✓.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kata kunci pertidaksamaan • 08-1-04

Agar tuntas, nilai ulangan Ayu harus **paling sedikit** 75. Jika nilai Ayu n , pertidaksamaan yang tepat adalah...

- A. $n < 75$
B. $n \leq 75$
C. $n > 75$
D. $n \geq 75$

Kunci: D

Pembahasan: "Paling sedikit 75" berarti nilai 75 boleh, dan semua nilai di atas 75 juga boleh. Jadi $n \geq 75$.

Pilihan $n > 75$ keliru karena nilai tepat 75 tidak ikut, padahal 75 sudah tuntas. Pilihan $n \leq 75$ berarti "paling banyak 75".

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Variabel di kedua ruas • 08-2-01

Selesaikan $5x - 8 = 2x + 13$.

Jawaban:

Kunci: 7**Pembahasan:** Kurangi kedua ruas dengan $2x$: $3x - 8 = 13$.Tambah kedua ruas dengan 8: $3x = 21$.Bagi 3: $x = 7$.Cek: ruas kiri $5 \cdot 7 - 8 = 27$, ruas kanan $2 \cdot 7 + 13 = 27 \checkmark$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Membalik tanda • 08-2-02

Penyelesaian dari $-3x + 2 > 14$ adalah...A. $x < -4$ C. $x > 4$ B. $x > -4$ D. $x < 4$ **Kunci: A****Pembahasan:** Kurangi kedua ruas dengan 2: $-3x > 12$.Bagi kedua ruas dengan -3 . Karena pembagiannya negatif, tanda dibalik: $x < -4$.Cek dengan $x = -5$: $-3(-5) + 2 = 17 > 14 \checkmark$. Dengan $x = 0$: $2 > 14$ salah, jadi daerahnya memang di kiri -4 .

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Kuota internet • 08-2-03

Kuota internet Dimas 25 GB. Setiap hari ia memakai 1,5 GB. Setelah berapa hari kuotanya tersisa 4 GB?

Jawaban: hari

Kunci: 14 hari**Pembahasan:** Misalkan banyak hari d . Sisa kuota: $25 - 1,5d = 4$. $1,5d = 21$, jadi $d = 21 : 1,5 = 14$.Cek: $25 - 1,5 \times 14 = 25 - 21 = 4 \checkmark$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Membaca garis bilangan • 08-2-04

Garis bilangan di bawah menunjukkan penyelesaian sebuah pertidaksamaan. Pertidaksamaan manakah itu?

A. $x \leq 2$ C. $x > 2$ B. $x \geq 2$ D. $x < 2$ **Kunci: D****Pembahasan:** Bulatan **kosong** di 2 berarti 2 tidak termasuk. Arsiran ke **kiri** berarti semua bilangan yang lebih kecil daripada 2. Jadi $x < 2$.Seandainya bulatannya penuh, jawabannya $x \leq 2$.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Persamaan pecahan • 08-3-01

Selesaikan $\frac{2x-1}{3} + \frac{x+3}{2} = 7$.

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: KPK dari 3 dan 2 adalah 6. Kalikan semua suku dengan 6:

$$2(2x-1) + 3(x+3) = 42.$$

$$4x - 2 + 3x + 9 = 42 \Rightarrow 7x + 7 = 42 \Rightarrow 7x = 35 \Rightarrow x = 5.$$

$$\text{Cek: } \frac{9}{3} + \frac{8}{2} = 3 + 4 = 7 \checkmark.$$

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Tarif parkir • 08-3-02

Tarif parkir mobil di sebuah mal: Rp5.000 untuk jam pertama dan Rp3.000 untuk setiap jam berikutnya (bagian jam dihitung satu jam). Kak Lintang menyiapkan Rp26.000 untuk parkir. Paling lama berapa jam ia dapat parkir?

Jawaban: jam

Kunci: 8 jam

$$\text{Pembahasan: } 5.000 + 3.000(t-1) \leq 26.000$$

$$3.000(t-1) \leq 21.000$$

$$t-1 \leq 7 \Rightarrow t \leq 8.$$

Lama parkir maksimal 8 jam, dengan tarif tepat Rp26.000. Parkir 9 jam membutuhkan Rp29.000, jadi uangnya tidak cukup.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Nilai minimal KKM • 08-3-03

Nilai tiga ulangan Dimas adalah 72, 80, dan 76. Agar rata-rata empat ulangan paling sedikit 78, nilai ulangan keempat minimal...

A. 78

C. 84

B. 82

D. 86

Kunci: C

$$\text{Pembahasan: Misalkan nilai keempat } X. \frac{72+80+76+X}{4} \geq 78.$$

$$\text{Kalikan 4: } 228 + X \geq 312 \Rightarrow X \geq 84.$$

Cek: $\frac{228+84}{4} = \frac{312}{4} = 78 \checkmark$. Jawaban 78 menjebak: rata-rata tiga nilai pertama baru 76, jadi ulangan keempat harus menutup kekurangannya.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Soal umur • 08-3-04

Umur ayah sekarang 4 kali umur Ayu. Dua puluh tahun lagi, umur ayah menjadi 2 kali umur Ayu. Berapa umur Ayu sekarang?

Jawaban: tahun

Kunci: 10 tahun

$$\text{Pembahasan: } 4a + 20 = 2(a + 20)$$

$$4a + 20 = 2a + 40$$

$$2a = 20 \Rightarrow a = 10.$$

Ayu 10 tahun dan ayah 40 tahun. Dua puluh tahun lagi umur mereka 30 dan 60, dan memang $60 = 2 \times 30 \checkmark$.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Persamaan dengan kurung • gaya IGCSE • 08-4-01

Selesaikan $4(2x - 3) - 3(x - 5) = 23$.

Jawaban:

Kunci: 4**Pembahasan:** Jabarkan kurung, hati-hati dengan tanda minus di depan kurung kedua: $8x - 12 - 3x + 15 = 23$.Sederhanakan: $5x + 3 = 23 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$.Cek: $4(5) - 3(-1) = 20 + 3 = 23 \checkmark$. Kesalahan yang sering muncul: menulis $-3(x - 5) = -3x - 15$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Pertidaksamaan ganda • gaya IGCSE • 08-4-02

Tentukan banyak bilangan bulat n yang memenuhi $-7 < 2n + 3 \leq 9$.

Jawaban: bilangan

Kunci: 8 bilangan**Pembahasan:** Kurangi semua bagian dengan 3: $-10 < 2n \leq 6$.Bagi dengan 2 (positif, tanda tetap): $-5 < n \leq 3$.Bilangan bulatnya: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Ada **8** bilangan. Perhatikan: -5 tidak ikut (tanda $<$), sedangkan 3 ikut (tanda $\leq$).

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Tak hingga penyelesaian • gaya IGCSE • 08-4-03

Persamaan $3(x + 2) = 3x + k$ dipenuhi oleh **semua** bilangan x jika k bernilai...

A. 2

C. 3

B. 6

D. tidak ada nilai k yang memenuhi**Kunci: B****Pembahasan:** Jabarkan: $3x + 6 = 3x + k$. Kurangi kedua ruas dengan $3x$: $6 = k$.Jika $k = 6$, persamaannya menjadi $0 = 0$ setelah disederhanakan, yang benar untuk semua x : tak hingga banyak penyelesaian. Jika $k \neq 6$, hasilnya $6 = k$ yang salah, sehingga tidak ada penyelesaian sama sekali.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Keliling persegi panjang • gaya IGCSE • 08-4-04

Sebuah persegi panjang memiliki panjang $(2x + 3)$ cm dan lebar $(x - 1)$ cm.(a) **Tunjukkan** bahwa kelilingnya $(6x + 4)$ cm.(b) Kelilingnya 40 cm. **Hitung** x , lalu **hitung** luas persegi panjang itu.(c) Jika kelilingnya harus kurang dari 40 cm, **tentukan** semua nilai x yang mungkin. **Jelaskan** mengapa x juga harus lebih dari 1.**Kunci/rubrik:** (a) $K = 2(p + l) = 2((2x + 3) + (x - 1)) = 2(3x + 2) = 6x + 4$. [1 poin](b) $6x + 4 = 40 \Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = 6$. Panjang 15 cm, lebar 5 cm, luas $15 \times 5 = 75 \text{ cm}^2$. [2 poin: x benar 1, luas benar 1](c) $6x + 4 < 40 \Rightarrow 6x < 36 \Rightarrow x < 6$. Lebar harus positif: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Jadi $1 < x < 6$. [2 poin: pertidaksamaan 1, alasan lebar positif 1]**Pembahasan:** Soal bertahap seperti ini khas IGCSE: hasil bagian (a) dipakai lagi di bagian (b) dan (c). Pada bagian (c), syarat dari dunia nyata (panjang sisi harus positif) ikut membatasi penyelesaian. Panjang $2x + 3$ otomatis positif bila $x > 1$.

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Celsius dan Fahrenheit • gaya IB • 08-5-01

Suhu dalam derajat Fahrenheit dihitung dengan $F = \frac{9}{5}C + 32$. Tentukan suhu ketika angka pada termometer Celsius dan termometer Fahrenheit sama persis.

Jawaban: °

Kunci: -40 °

Pembahasan: Misalkan $F = C$: $C = \frac{9}{5}C + 32$.

Kalikan 5: $5C = 9C + 160 \Rightarrow -4C = 160 \Rightarrow C = -40$.

Cek: $\frac{9}{5} \times (-40) + 32 = -72 + 32 = -40 \checkmark$. Jadi $-40^\circ\text{C} = -40^\circ\text{F}$, suhu yang jauh lebih dingin daripada ruang pembeku (freezer) di rumah.

18. Lv 5 • IB DP • Uraian • Membandingkan paket data • gaya IB • 08-5-02

Sebuah operator menawarkan dua paket data bulanan.

Paket A: Rp25.000 ditambah Rp4.000 per GB.

Paket B: Rp55.000 ditambah Rp1.500 per GB.

(a) Tuliskan biaya $A(g)$ dan $B(g)$ untuk pemakaian g GB.

(b) Tentukan nilai-nilai g yang membuat Paket A lebih murah daripada Paket B.

(c) Ayu memperkirakan pemakaiannya 15 GB per bulan. Paket mana yang kamu sarankan, dan berapa rupiah yang dihemat?

Kunci/rubrik: (a) $A(g) = 25.000 + 4.000g$ dan $B(g) = 55.000 + 1.500g$. [1 poin]

(b) $25.000 + 4.000g < 55.000 + 1.500g \Rightarrow 2.500g < 30.000 \Rightarrow g < 12$. Paket A lebih murah bila pemakaian kurang dari 12 GB. [2 poin]

(c) $A(15) = 85.000$ dan $B(15) = 77.500$. Sarankan Paket B; hematnya Rp7.500. [2 poin]

Pembahasan: Pada $g = 12$ kedua paket sama mahal, yaitu Rp73.000. Di bawah 12 GB, biaya awal yang murah membuat Paket A unggul; di atas 12 GB, tarif per GB yang murah membuat Paket B unggul. Gagasan "titik impas" ini akan kamu lihat sebagai titik potong dua garis di Bab 10.

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Persamaan nilai mutlak • gaya IB • 08-5-03

Tentukan hasil kali semua penyelesaian dari $|2x - 5| = 9$.

Jawaban:

Kunci: -14

Pembahasan: $2x - 5 = 9 \Rightarrow x = 7$, atau $2x - 5 = -9 \Rightarrow x = -2$.

Cek: $|14 - 5| = 9 \checkmark$ dan $|-4 - 5| = 9 \checkmark$.

Hasil kali: $7 \times (-2) = -14$. Secara geometri, $|2x - 5| = 9$ setara dengan $|x - 2,5| = 4,5$: dua titik yang berjarak 4,5 dari 2,5.

- (a) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x berlaku $|x - 1| + |x + 2| \geq 3$.
 (b) Simpulkan bahwa persamaan $|x - 1| + |x + 2| = 2$ tidak mempunyai penyelesaian.
 (c) Tentukan semua x yang memenuhi $|x - 1| + |x + 2| = 5$.

Kunci/rubrik: (a) Bagi tiga kasus. Jika $x \geq 1$: jumlahnya $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1 \geq 3$. Jika $-2 \leq x < 1$: jumlahnya $(1 - x) + (x + 2) = 3$. Jika $x < -2$: jumlahnya $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1 > 3$. Dalam semua kasus jumlahnya paling sedikit 3. [3 poin] (Cara geometri: jumlah jarak x ke 1 dan ke -2 tidak mungkin kurang dari jarak antara 1 dan -2 , yaitu 3.)

(b) Ruas kiri selalu $\geq 3 > 2$, jadi tidak pernah sama dengan 2. [1 poin]

(c) Nilai 5 tidak tercapai pada kasus kedua (nilainya selalu 3). Kasus pertama: $2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2$. Kasus ketiga: $-2x - 1 = 5 \Rightarrow x = -3$. Cek: $|1| + |4| = 5 \checkmark$ dan $|-4| + |-1| = 5 \checkmark$. [2 poin]

Pembahasan: Membagi kasus menurut tanda isi nilai mutlak adalah senjata utama soal nilai mutlak. Tafsiran jarak memberi bukti satu baris: di garis bilangan, perjalanan dari -2 ke 1 yang mampir di x tidak mungkin lebih pendek daripada jalan lurus sepanjang 3.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kuadran • 09-1-01

Titik $P(-3, 4)$ terletak di kuadran...

- A. I C. III
B. II D. IV

Kunci: B

Pembahasan: Koordinat $x = -3$ negatif (ke kiri dari O) dan $y = 4$ positif (ke atas). Kiri-atas adalah **kuadran II**.
Pola tanda: I $(+, +)$, II $(-, +)$, III $(-, -)$, IV $(+, -)$.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Gradien dari persamaan • 09-1-02

Gradien garis $y = 7 - 3x$ adalah...

- A. 7 C. -3
B. 3 D. $\frac{1}{3}$

Kunci: C

Pembahasan: Tulis ulang ke bentuk $y = mx + c$: $y = -3x + 7$.
Gradien adalah koefisien x , yaitu -3 . Angka 7 adalah titik potong sumbu- y , bukan gradien.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Tarif ojek • 09-1-03

Tarif ojek online di sebuah kota adalah Rp5.000 untuk biaya awal ditambah Rp2.000 per km. Berapa rupiah tarif untuk perjalanan 6 km?

Jawaban: rupiah

Kunci: 17.000 rupiah

Pembahasan: $T = 5.000 + 2.000 \times 6 = 5.000 + 12.000 = 17.000$.
Jadi tarifnya Rp17.000.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Relasi dan fungsi • 09-1-04

Manakah himpunan pasangan berurutan berikut yang merupakan **fungsi**?

- A. $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ C. $\{(4, 0), (4, 1), (5, 2)\}$
B. $\{(2, 1), (3, 1), (2, 7)\}$ D. $\{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

Kunci: D

Pembahasan: Pada fungsi, setiap masukan (anggota pertama) hanya punya **satu** keluaran.
Pada opsi terakhir, masukan 1, 2, dan 3 masing-masing punya tepat satu pasangan. Semuanya dipasangkan ke 5, dan itu boleh!
Opsi lain gagal: masukan 1 (opsi pertama), 2 (opsi kedua), dan 4 (opsi ketiga) masing-masing punya dua keluaran berbeda.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Gradien dua titik • 09-2-01

Tentukan gradien garis yang melalui titik $A(2, 1)$ dan $B(6, 9)$.

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2.$

Garis naik 2 satuan untuk setiap 1 langkah ke kanan.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Persamaan garis • 09-2-02

Sebuah garis bergradien -3 memotong sumbu-y di titik $(0, 4)$. Persamaan garis itu adalah...

A. $y = -3x + 4$

C. $y = 3x + 4$

B. $y = 4x - 3$

D. $y = -3x - 4$

Kunci: A**Pembahasan:** Bentuk $y = mx + c$ dengan $m = -3$ dan $c = 4$: $y = -3x + 4$.Opsi $y = 4x - 3$ menukar peran m dan c ; opsi lain salah tanda.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Nilai fungsi • 09-2-03

Diketahui $f(x) = 4x - 7$. Jika $f(a) = 21$, berapakah a ?

Jawaban:

Kunci: 7

Pembahasan: $4a - 7 = 21$

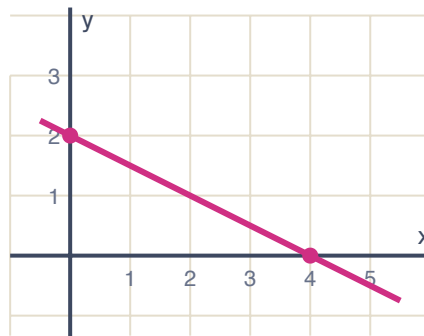
$4a = 28$

$a = 7.$

Cek: $f(7) = 28 - 7 = 21. \checkmark$

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Membaca grafik • 09-2-04

Perhatikan grafik garis berikut. Gradien garis itu adalah...



A. 2

C. $\frac{1}{2}$

B. -2

D. $-\frac{1}{2}$

Kunci: D**Pembahasan:** Garis melalui $(0, 2)$ dan $(4, 0)$.

$$m = \frac{0 - 2}{4 - 0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Garis turun dari kiri ke kanan, jadi gradiennya pasti negatif: turun 1 setiap maju 2.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Titik potong sumbu- x • 09-3-01

Sebuah garis melalui titik $(-1, 5)$ dan $(3, -3)$. Garis itu memotong sumbu- x di titik $(k, 0)$. Tentukan k .

Jawaban:

Kunci: 1,5

Pembahasan: $m = \frac{-3 - 5}{3 - (-1)} = \frac{-8}{4} = -2$, jadi $y = -2x + c$.

Titik $(-1, 5)$: $5 = 2 + c$, sehingga $c = 3$. Persamaannya $y = -2x + 3$.

Memotong sumbu- x saat $y = 0$: $-2x + 3 = 0$, jadi $x = 1,5$.

$k = 1,5$. Cek dengan $(3, -3)$: $-6 + 3 = -3$. ✓

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Garis sejajar • 09-3-02

Garis g sejajar dengan garis $2x + 3y = 6$ dan melalui titik $(3, 1)$. Persamaan garis g adalah...

A. $3x - 2y = 7$

C. $2x + 3y = 9$

B. $2x + 3y = 6$

D. $3x + 2y = 11$

Kunci: C

Pembahasan: Gradien $2x + 3y = 6$ adalah $-\frac{2}{3}$. Garis sejajar punya gradien sama, jadi bentuknya $2x + 3y = k$.

Melalui $(3, 1)$: $k = 2(3) + 3(1) = 9$. Jadi $2x + 3y = 9$.

Pengecoh: $3x - 2y = 7$ melalui $(3, 1)$ tetapi *tegak lurus*; $2x + 3y = 6$ tidak melalui $(3, 1)$; $3x + 2y = 11$ bergradien $-\frac{3}{2}$.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Model kuota • 09-3-03

Kuota internet Dimas 30 GB di awal bulan dan ia memakainya dengan laju tetap. Setelah 4 hari, sisa kuotanya 24 GB. Pada hari ke berapa kuotanya habis?

Jawaban: hari

Kunci: 20 hari

Pembahasan: Gradien: $m = \frac{24 - 30}{4 - 0} = -1,5$ GB per hari.

Model: $K = 30 - 1,5t$.

Habis saat $K = 0$: $1,5t = 30$, jadi $t = 20$.

Kuotanya habis pada hari ke-20.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Model tarif taksi • 09-3-04

Ayu naik taksi online dua kali dengan aturan tarif yang sama: perjalanan 5 km bertarif Rp32.000 dan perjalanan 12 km bertarif Rp60.000. Tarif mengikuti model linear. Dengan uang Rp100.000, berapa km perjalanan terjauh yang bisa ia bayar?

Jawaban: km

Kunci: 22 km

Pembahasan: Gradien: $m = \frac{60.000 - 32.000}{12 - 5} = \frac{28.000}{7} = 4.000$ rupiah per km.

Biaya awal: $c = 32.000 - 5 \times 4.000 = 12.000$. Model: $T = 4.000x + 12.000$.

$4.000x + 12.000 \leq 100.000 \Rightarrow 4.000x \leq 88.000 \Rightarrow x \leq 22$.

Perjalanan terjauh 22 km.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Gradien • gaya IGCSE • 09-4-01

Garis L melalui titik $(-2, 7)$ dan $(4, -2)$. **Hitung** gradien (*gradient*) garis L .

Jawaban:

Kunci: -1,5

Pembahasan: $m = \frac{-2 - 7}{4 - (-2)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2} = -1,5$.

Tanda negatif cocok: dari titik kiri yang tinggi ke titik kanan yang rendah, garis turun.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Luas dengan sumbu • gaya IGCSE • 09-4-02

Garis $2y - 6x = 12$ memotong sumbu- x di P dan sumbu- y di Q . **Hitung** luas segitiga OPQ , dengan O titik asal.

Jawaban: satuan luas

Kunci: 6 satuan luas

Pembahasan: Potong sumbu- y ($x = 0$): $2y = 12$, jadi $Q(0, 6)$.

Potong sumbu- x ($y = 0$): $-6x = 12$, jadi $P(-2, 0)$.

Segitiga OPQ siku-siku di O dengan kaki $| -2 | = 2$ dan 6 .

Luas $= \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$ satuan luas. Panjang selalu positif, meskipun koordinatnya negatif.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Garis tegak lurus • gaya IGCSE • 09-4-03

Manakah garis yang tegak lurus (*perpendicular*) terhadap $y = 4x - 1$?

A. $y = 4x + 2$

C. $y = -4x + 1$

B. $y = -\frac{1}{4}x + 3$

D. $y = \frac{1}{4}x - 1$

Kunci: B

Pembahasan: Gradien tegak lurus: balik dan ganti tanda, $4 \rightarrow -\frac{1}{4}$.

Cek: $4 \times (-\frac{1}{4}) = -1$. ✓

$y = 4x + 2$ sejajar; $y = -4x + 1$ hanya diganti tanda; $y = \frac{1}{4}x - 1$ hanya dibalik.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Garis sumbu ruas • gaya IGCSE • 09-4-04

Diketahui titik $A(1, 3)$ dan $B(5, 11)$.

(a) **Hitung** gradien AB .

(b) **Tentukan** persamaan garis AB dalam bentuk $y = mx + c$.

(c) Titik tengah AB adalah $M(3, 7)$. **Tentukan** persamaan garis yang tegak lurus AB dan melalui M .

(d) **Hitung** koordinat titik potong garis pada (c) dengan sumbu- x .

Kunci/rubrik: (a) $m = \frac{11 - 3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$. [1 poin]

(b) $y = 2x + c$; titik A : $3 = 2 + c$, jadi $c = 1$. Persamaan $y = 2x + 1$. [2 poin: substitusi 1, jawaban 1]

(c) Gradien tegak lurus $-\frac{1}{2}$. $y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, jadi $y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$ (atau $x + 2y = 17$). [2 poin: gradien 1, persamaan 1]

(d) $y = 0$: $\frac{1}{2}x = \frac{17}{2}$, jadi $x = 17$. Titik $(17, 0)$. [1 poin]

Pembahasan: Garis pada (c) disebut **garis sumbu** ruas AB : setiap titik di garis itu berjarak sama ke A dan ke B .

Cek (c): $M(3, 7)$ memenuhi $3 + 2(7) = 17$. ✓ Cek (d): $17 + 2(0) = 17$. ✓

Cek tegak lurus: $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$. ✓

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Rumus Braak • gaya IB • 09-5-01

Model Braak memperkirakan suhu rata-rata T ($^{\circ}\text{C}$) di Indonesia pada ketinggian h meter di atas permukaan laut: $T = 26,3 - 0,006h$. Pada ketinggian berapa meter suhu rata-rata diperkirakan $14,3^{\circ}\text{C}$?

Jawaban: m

Kunci: 2.000 m

Pembahasan: $26,3 - 0,006h = 14,3$

$$0,006h = 12$$

$$h = \frac{12}{0,006} = 2.000 \text{ m.}$$

Kira-kira setinggi Dataran Tinggi Dieng. Gradien $-0,006^{\circ}\text{C}$ per meter sama dengan $-0,6^{\circ}\text{C}$ per 100 m.

18. Lv 5 • IB DP • Uraian • Pemodelan linear • gaya IB • 09-5-02

Biaya sewa sepeda listrik di sebuah taman kota tercatat sebagai berikut: 10 menit Rp13.000, 25 menit Rp22.000, dan 40 menit Rp31.000.

- Tunjukkan bahwa ketiga data itu cocok dengan model linear.
- Tentukan model $B(t) = mt + c$, dengan t dalam menit dan B dalam rupiah.
- Tafsirlah arti m dan c dalam konteks soal.
- Seseorang memakai model itu untuk memperkirakan biaya sewa selama 10 jam. Berikan satu alasan mengapa perkiraan itu mungkin tidak dapat dipercaya.

Kunci/rubrik: (a) Gradien antara data 1 dan 2: $\frac{22.000 - 13.000}{25 - 10} = 600$. Antara data 2 dan 3: $\frac{31.000 - 22.000}{40 - 25} = 600$

. Gradien sama, jadi ketiga titik segaris. [2]

(b) $m = 600$; $c = 13.000 - 600 \times 10 = 7.000$. $B(t) = 600t + 7.000$. [2]

(c) m : biaya bertambah Rp600 untuk setiap menit tambahan. c : biaya tetap Rp7.000 yang dibayar di awal (misalnya biaya buka kunci), bahkan untuk 0 menit. [2]

(d) 10 jam = 600 menit, jauh di luar rentang data 10–40 menit (ekstrapolasi). Baterai bisa habis, atau penyewa memakai tarif harian/batas maksimum, sehingga model mungkin tidak berlaku. [1]

Pembahasan: Model memberi $B(600) = 600 \times 600 + 7.000 = 367.000$ rupiah, angka yang patut dicurigai. Di IB, menilai batas berlakunya model sama pentingnya dengan menyusun model itu sendiri.

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Celsius dan Fahrenheit • gaya IB • 09-5-03

Hubungan suhu Celsius C dan Fahrenheit F adalah linear: air membeku pada $0^{\circ}\text{C} = 32^{\circ}\text{F}$ dan mendidih pada $100^{\circ}\text{C} = 212^{\circ}\text{F}$. Pada suhu berapa derajat angka pada kedua skala sama?

Jawaban: $^{\circ}$

Kunci: -40°

Pembahasan: Gradien: $m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$. Model: $F = 1,8C + 32$.

Kedua angka sama: $C = 1,8C + 32 \Rightarrow -0,8C = 32 \Rightarrow C = -40$.

Jadi $-40^{\circ}\text{C} = -40^{\circ}\text{F}$. Secara grafik, ini titik potong garis $F = 1,8C + 32$ dengan garis $F = C$.

Fungsi $f(x) = -2x + 5$ mempunyai daerah asal $-1 \leq x \leq 3$. Daerah hasil fungsi itu adalah...

- A. $-1 \leq f(x) \leq 7$ C. $-1 \leq f(x) \leq 3$
 B. $3 \leq f(x) \leq 11$ D. $f(x) \geq -1$

Kunci: A

Pembahasan: Fungsi linear dengan gradien negatif selalu turun, jadi nilai ekstremnya ada di ujung daerah asal.

$f(-1) = 2 + 5 = 7$ (terbesar) dan $f(3) = -6 + 5 = -1$ (terkecil).

Daerah hasil: $-1 \leq f(x) \leq 7$. Opsi $3 \leq f(x) \leq 11$ muncul jika gradiennya dikira $+2$.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Berapa banyak titik yang kedua koordinatnya bilangan bulat dan terletak pada ruas garis dari $(0, 0)$ ke $(84, 120)$, termasuk kedua ujungnya?

Jawaban: titik

Kunci: 13 titik

Pembahasan: $\gcd(84, 120) = 12$, sehingga $\frac{120}{84} = \frac{10}{7}$. Langkah terkecil antartitik kisi adalah $(7, 10)$.

Titik kisinya $(7k, 10k)$ untuk $k = 0, 1, \dots, 12$.

Banyaknya $12 + 1 = 13$ titik. Rumus umumnya: $\gcd(a, b) + 1$.

Sebuah garis melalui titik $(2, 3)$ serta memotong sumbu- x positif di P dan sumbu- y positif di Q . Berapa luas terkecil segitiga OPQ ?

Jawaban: satuan luas

Kunci: 12 satuan luas

Pembahasan: Misalkan $P(p, 0)$ dan $Q(0, q)$, dengan $p, q > 0$. Garisnya $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, jadi $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$.

AM-GM: $1 = \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \geq 2\sqrt{\frac{6}{pq}}$, sehingga $pq \geq 24$.

Luas $= \frac{1}{2}pq \geq 12$. Kesamaan terjadi saat $\frac{2}{p} = \frac{3}{q} = \frac{1}{2}$, yaitu $p = 4, q = 6$.

Luas terkecil 12. Menariknya, $(2, 3)$ tepat titik tengah PQ !

Ke-16 titik (x, y) dengan $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ membentuk kisi 4×4 . Berapa banyak garis berbeda yang melalui titik asal O dan sedikitnya satu titik kisi itu?

- A. 16 C. 11
 B. 12 D. 10

Kunci: C

Pembahasan: Garis melalui O ditentukan oleh gradiennya $\frac{y}{x}$. Setiap gradien bisa disederhanakan menjadi $\frac{y'}{x'}$ dengan $\gcd(x', y') = 1$, dan (x', y') masih di dalam kisi.

Jadi banyak garis = banyak pasangan (x, y) dengan $\gcd(x, y) = 1$.

Dari 16 pasangan, yang tidak relatif prima: $(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (3, 3)$, yaitu 5 pasangan.

Banyak garis $= 16 - 5 = 11$.

Titik kisi adalah titik yang kedua koordinatnya bilangan bulat.

(a) Misalkan a, b bilangan asli dan $d = \gcd(a, b)$. Buktikan bahwa ruas garis dari $(0, 0)$ ke (a, b) memuat tepat $d + 1$ titik kisi, termasuk kedua ujungnya.

(b) Hitung banyak titik kisi pada ruas garis dari $(0, 0)$ ke $(2025, 1350)$.

(c) Hitung banyak titik kisi pada ruas garis dari $(3, -2)$ ke $(2028, 1348)$.

Kunci/rubrik: (a) Tulis $a = da'$, $b = db'$ dengan $\gcd(a', b') = 1$. Titik (ka', kb') untuk $k = 0, 1, \dots, d$ adalah titik kisi pada ruas itu, jadi ada sedikitnya $d + 1$ titik. [1]

Sebaliknya, misalkan (x, y) titik kisi pada ruas. Titik itu segaris dengan O dan (a, b) , jadi $bx = ay$, atau $b'x = a'y$. Karena $\gcd(a', b') = 1$, a' membagi x : $x = ka'$, lalu $y = kb'$. Syarat $0 \leq x \leq a$ memberi $0 \leq k \leq d$. Jadi tidak ada titik kisi lain: tepat $d + 1$. [2]

(b) $\gcd(2025, 1350) = 675$, jadi ada 676 titik kisi. [1]

(c) Geser semua titik dengan vektor $(-3, 2)$. Pergeseran bilangan bulat mengubah titik kisi menjadi titik kisi, dan ruasnya menjadi $(0, 0)$ ke $(2025, 1350)$. Jadi jawabannya juga 676. [1]

Pembahasan: Faktorisasi: $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ dan $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, sehingga $\gcd = 3^3 \cdot 5^2 = 675$.

Bagian (c) memakai ide **invarian**: banyak titik kisi tidak berubah oleh pergeseran bilangan bulat. Yang menentukan hanya selisih koordinat $(\Delta x, \Delta y)$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Arti penyelesaian • 10-1-01

Pasangan (x, y) manakah yang memenuhi **kedua** persamaan $x + y = 7$ dan $x - y = 1$ sekaligus?

- A. (3, 4) C. (5, 2)
B. (4, 3) D. (6, 1)

Kunci: B

Pembahasan: Cek setiap pilihan ke kedua persamaan.

(3, 4): $3 + 4 = 7$ ✓, tetapi $3 - 4 = -1 \neq 1$ ✗.

(4, 3): $4 + 3 = 7$ ✓ dan $4 - 3 = 1$ ✓.

(5, 2) dan (6, 1) memenuhi $x + y = 7$, tetapi selisihnya 3 dan 5.

Jadi penyelesaiannya (4, 3). Ingat: urutan dalam pasangan berurutan itu penting!

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Metode grafik • 10-1-02

Grafik dua persamaan linear berpotongan di titik (2, 5). Apa artinya?

- A. Penyelesaiannya $x = 5$ dan $y = 2$.
B. Sistem itu tidak mempunyai penyelesaian.
C. Penyelesaiannya $x = 2$ dan $y = 5$.
D. Kedua garis sejajar.

Kunci: C

Pembahasan: Titik potong berada pada kedua garis, jadi memenuhi kedua persamaan sekaligus. Koordinat (2, 5) berarti $x = 2$ (mendatar) dan $y = 5$ (tegak).

Pilihan pertama menukar urutannya, sedangkan garis sejajar justru tidak pernah berpotongan.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Ayam dan kambing • 10-1-03

Di halaman rumah Mbah Sastro ada ayam dan kambing. Banyak kepalanya 5 dan banyak kakinya 14. Berapa ekor kambing di sana?

Jawaban: ekor

Kunci: 2 ekor

Pembahasan: Anggap dulu semua hewan ayam: $5 \times 2 = 10$ kaki. Masih kurang $14 - 10 = 4$ kaki.

Setiap kambing punya 2 kaki lebih banyak daripada ayam, jadi kambingnya $4 : 2 = 2$ ekor (dan ayamnya 3 ekor).

Cek: $3 \times 2 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$ ✓.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Menyusun model • 10-1-04

Harga 2 buku tulis dan 1 pensil adalah Rp12.000. Jika b = harga satu buku tulis dan p = harga satu pensil (dalam rupiah), persamaan yang tepat adalah...

A. $2b + p = 12.000$

C. $2(b + p) = 12.000$

B. $b + 2p = 12.000$

D. $2bp = 12.000$

Kunci: A

Pembahasan: Dua buku tulis berharga $2b$ dan satu pensil berharga p . Totalnya $2b + p = 12.000$.

Bentuk $2(b + p)$ berarti 2 buku dan 2 pensil, sedangkan $2bp$ mengalikan harga buku dengan harga pensil, yang tidak bermakna dalam belanja.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Substitusi • 10-2-01

Selesaikan sistem $y = 2x - 1$ dan $3x + y = 19$. Berapa nilai x ?

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: Substitusikan $y = 2x - 1$ ke persamaan kedua:

$$3x + (2x - 1) = 19 \Rightarrow 5x - 1 = 19 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Lalu } y = 2(4) - 1 = 7. \text{ Cek: } 3(4) + 7 = 19 \checkmark.$$

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Eliminasi • 10-2-02

Diketahui $3x + 2y = 16$ dan $x - 2y = 0$. Berapa nilai y ?

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: Koefisien y berlawanan tanda ($+2y$ dan $-2y$), jadi **jumlahkan** kedua persamaan:

$$4x = 16 \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Dari } x - 2y = 0: 4 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2. \text{ Cek: } 3(4) + 2(2) = 16 \checkmark.$$

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Tiket museum • 10-2-03

Di sebuah museum, tiket untuk 1 dewasa dan 2 anak seharga Rp20.000, sedangkan tiket untuk 1 dewasa dan 1 anak seharga Rp14.000. Harga satu tiket anak adalah...

A. Rp8.000

C. Rp10.000

B. Rp7.000

D. Rp6.000

Kunci: D

Pembahasan: Kurangkan kedua pembelian: (1 dewasa + 2 anak) - (1 dewasa + 1 anak) = 1 anak.

Jadi tiket anak = $20.000 - 14.000 = 6.000$ rupiah, dan tiket dewasa = $14.000 - 6.000 = 8.000$ rupiah.

Rp7.000 adalah jebakan $14.000 : 2$ (menganggap harga tiket dewasa dan anak sama).

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Titik impas • 10-2-04

Aplikasi ojek A memasang tarif Rp6.000 + Rp2.500 per km, sedangkan aplikasi B Rp3.000 + Rp3.000 per km. Pada jarak berapa km tarif keduanya sama?

Jawaban: km

Kunci: 6 km

Pembahasan: Misalkan jaraknya x km. Tarif sama jika $6.000 + 2.500x = 3.000 + 3.000x$.
 $3.000 = 500x \Rightarrow x = 6$.

Pada 6 km keduanya Rp21.000. Untuk jarak kurang dari 6 km B lebih murah; lebih dari 6 km A lebih murah.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Campuran beras • 10-3-01

Pedagang beras mencampur beras pandan wangi seharga Rp16.000/kg dengan beras medium seharga Rp12.000/kg. Ia ingin membuat 50 kg campuran yang bernilai Rp13.600/kg. Berapa kg beras pandan wangi yang diperlukan?

Jawaban: kg

Kunci: 20 kg

Pembahasan: Berat: $p + m = 50$. Nilai (ribu rupiah): $16p + 12m = 50 \times 13,6 = 680$.

Substitusi $m = 50 - p$: $16p + 600 - 12p = 680 \Rightarrow 4p = 80 \Rightarrow p = 20$.

Jadi 20 kg pandan wangi dan 30 kg beras medium. Cek: $320 + 360 = 680 \checkmark$.

Wajar: harga campuran 13,6 ribu lebih dekat ke 12 ribu, jadi beras medium lebih banyak.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Banyak penyelesaian • 10-3-02

Agar sistem $2x + 3y = 6$ dan $4x + ky = 15$ **tidak** mempunyai penyelesaian, nilai k haruslah...

A. 6

C. 12

B. 3

D. -6

Kunci: A

Pembahasan: Garis sejajar jika $\frac{2}{4} = \frac{3}{k}$, yaitu $k = 6$.

Cek ruas kanan: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$, jadi garisnya sejajar dan tidak berimpit.

Dengan eliminasi: dua kali persamaan pertama adalah $4x + 6y = 12$, padahal persamaan kedua $4x + ky = 15$.

Muncul $0 = 3$: mustahil.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Bilangan dua angka • 10-3-03

Jumlah kedua angka sebuah bilangan dua angka adalah 11. Jika kedua angkanya ditukar, bilangan baru 27 lebih besar daripada bilangan semula. Tentukan bilangan semula.

Jawaban:

Kunci: 47

Pembahasan: Misalkan angka puluhan a dan angka satuan b . Bilangan semula $10a + b$, bilangan tukaran $10b + a$.
 $a + b = 11$ dan $(10b + a) - (10a + b) = 27 \Rightarrow 9b - 9a = 27 \Rightarrow b - a = 3$.

Jumlahkan: $2b = 14 \Rightarrow b = 7$, lalu $a = 4$. Bilangan semula **47**. Cek: $74 - 47 = 27 \checkmark$.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • SPLTV simetris • 10-3-04

Ayu membeli 2 pensil, 1 penghapus, dan 1 penggaris seharga Rp13.000. Dimas membeli 1 pensil, 2 penghapus, dan 1 penggaris seharga Rp12.000. Ancil membeli 1 pensil, 1 penghapus, dan 2 penggaris seharga Rp15.000. Berapa rupiah harga satu penggaris?

Jawaban: rupiah

Kunci: 5.000 rupiah

Pembahasan: Misalkan pensil p , penghapus h , penggaris g (ribu rupiah).

$$2p + h + g = 13, p + 2h + g = 12, p + h + 2g = 15.$$

$$\text{Jumlahkan ketiganya: } 4p + 4h + 4g = 40 \Rightarrow p + h + g = 10.$$

$$\text{Kurangkan dari belanjaan Ancil: } g = 15 - 10 = 5. \text{ (Dengan cara yang sama, } p = 3 \text{ dan } h = 2.)$$

Jadi satu penggaris Rp5.000.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Persamaan simultan • gaya IGCSE • 10-4-01

Selesaikan persamaan simultan (*simultaneous equations*) berikut, lalu tuliskan nilai y .

$$5x + 3y = 9$$

$$2x - 5y = 16$$

Jawaban:

Kunci: -2

Pembahasan: Kalikan persamaan pertama dengan 5 dan persamaan kedua dengan 3:

$$25x + 15y = 45 \text{ dan } 6x - 15y = 48.$$

$$\text{Jumlahkan: } 31x = 93 \Rightarrow x = 3.$$

$$\text{Substitusi: } 5(3) + 3y = 9 \Rightarrow 3y = -6 \Rightarrow y = -2.$$

$$\text{Cek: } 2(3) - 5(-2) = 6 + 10 = 16 \checkmark.$$

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Titik potong dua garis • gaya IGCSE • 10-4-02

Garis L_1 melalui titik $(0, 3)$ dan $(4, 11)$. Garis L_2 mempunyai persamaan $x + 2y = 16$.

(a) **Tentukan** persamaan L_1 dalam bentuk $y = mx + c$.

(b) **Hitung** koordinat titik potong L_1 dan L_2 . Tuliskan nilai x -nya.

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: (a) Gradien (*gradient*) $m = \frac{11 - 3}{4 - 0} = 2$ dan $c = 3$, jadi $L_1 : y = 2x + 3$.

(b) Substitusi ke L_2 : $x + 2(2x + 3) = 16 \Rightarrow 5x + 6 = 16 \Rightarrow x = 2$, lalu $y = 7$.

Titik potongnya $(2, 7)$. Cek: $2 + 2(7) = 16 \checkmark$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Makna hasil eliminasi • gaya IGCSE • 10-4-03

Saat menyelesaikan sistem dua persamaan linear dengan eliminasi, Dimas memperoleh $0 = 7$. **Apa** kesimpulan yang benar?

- A. $x = 7$
- B. Kedua garis berimpit; penyelesaiannya tak hingga banyak.
- C. Kedua garis sejajar; sistem tidak mempunyai penyelesaian.
- D. $x = 0$ dan $y = 7$.

Kunci: C

Pembahasan: Kedua variabel lenyap sekaligus, berarti ruas kiri kedua persamaan sebanding (garisnya sejajar atau berimpit). Pernyataan $0 = 7$ selalu salah, jadi tidak ada pasangan (x, y) yang memenuhi: garisnya **sejajar**. Seandainya muncul $0 = 0$ (selalu benar), barulah garisnya berimpit dan penyelesaiannya tak hingga.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Tiket pertunjukan • gaya IGCSE • 10-4-04

Pertunjukan wayang orang menjual tiket VIP seharga Rp100.000 dan tiket reguler seharga Rp50.000. Pada hari Sabtu terjual 120 tiket dengan pemasukan Rp7.800.000.

- (a) **Tuliskan** dua persamaan dengan v = banyak tiket VIP dan r = banyak tiket reguler.
- (b) **Selesaikan** sistem tersebut.
- (c) Panitia berkata, "Hari Minggu kami menjual 150 tiket dan mendapat Rp6.000.000." **Jelaskan** mengapa pernyataan itu pasti keliru.

Kunci/rubrik: (a) $v + r = 120$ dan $100.000v + 50.000r = 7.800.000$, atau disederhanakan $2v + r = 156$. [2 poin]

(b) Kurangkan: $(2v + r) - (v + r) = 156 - 120 \Rightarrow v = 36$, lalu $r = 84$. Cek: $3.600.000 + 4.200.000 = 7.800.000$ ✓. [3 poin]

(c) Dengan 150 tiket, pemasukan paling kecil terjadi jika semuanya reguler: $150 \times 50.000 = 7.500.000$ rupiah, sudah lebih dari Rp6.000.000. Secara aljabar, $v + r = 150$ dan $2v + r = 120$ memberi $v = -30$, padahal banyak tiket tidak mungkin negatif. [2 poin]

Pembahasan: Membagi persamaan uang dengan 50.000 membuat angkanya kecil dan mudah dieliminasi. Bagian (c) mengajarkan hal penting: penyelesaian aljabar harus diperiksa kewajarannya dalam cerita (banyak tiket tidak bisa negatif).

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Model biaya langganan • gaya IB • 10-5-01

Dua penyedia internet rumah menawarkan paket berikut. Penyedia P: biaya pemasangan Rp300.000, lalu Rp250.000 per bulan. Penyedia Q: tanpa biaya pemasangan, Rp280.000 per bulan.

- (a) Tuliskan model biaya total $C_P(t)$ dan $C_Q(t)$ (dalam ribu rupiah) setelah t bulan.
- (b) Tentukan nilai t ketika biaya total keduanya sama, lalu jelaskan maknanya.
- (c) Keluarga Ayu berencana berlangganan selama 1,5 tahun. Sarankan penyedia yang lebih hemat dan hitung penghematannya.

Kunci/rubrik: (a) $C_P(t) = 300 + 250t$ dan $C_Q(t) = 280t$. [2]

(b) $300 + 250t = 280t \Rightarrow 30t = 300 \Rightarrow t = 10$. Setelah 10 bulan biaya total keduanya sama, yaitu Rp2.800.000; sebelum itu Q lebih murah, sesudahnya P lebih murah. [3]

(c) $t = 18$: $C_P = 300 + 4.500 = 4.800$ dan $C_Q = 5.040$ (ribu rupiah). Pilih P; hemat Rp240.000. [2]

Pembahasan: Titik impas $t = 10$ adalah titik potong dua garis biaya. Biaya pemasangan P 'terbayar kembali' oleh selisih Rp30.000 per bulan: $300.000 : 30.000 = 10$ bulan. Model ini mengandaikan harga tidak berubah selama berlangganan.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Kurva melalui tiga titik • gaya IB • 10-5-02

Kurva $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(1, 2)$, $(2, 7)$, dan $(-1, 4)$. Tentukan nilai a .

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: Substitusi ketiga titik:

$$a + b + c = 2 \dots (1)$$

$$4a + 2b + c = 7 \dots (2)$$

$$a - b + c = 4 \dots (3)$$

$$(1) - (3): 2b = -2 \Rightarrow b = -1.$$

$$(2) - (1): 3a + b = 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2. \text{ Dari (1): } c = 2 - 2 + 1 = 1.$$

$$\text{Kurvanya } y = 2x^2 - x + 1. \text{ Cek } (-1, 4): 2 + 1 + 1 = 4 \checkmark.$$

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Program linear • gaya IB • 10-5-03

Daerah layak ditentukan oleh $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 10$, dan $x + 3y \leq 18$. Nilai maksimum $f(x, y) = 2x + 5y$ pada daerah itu adalah...

A. 30

C. 50

B. 20

D. 32

Kunci: D

Pembahasan: Titik pojok: $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 6)$, dan titik potong $x + y = 10$ dengan $x + 3y = 18$. Kurangkan: $2y = 8 \Rightarrow y = 4$, $x = 6$.

$$f(0, 0) = 0, f(10, 0) = 20, f(0, 6) = 30, f(6, 4) = 12 + 20 = 32.$$

Maksimum **32** di $(6, 4)$. Jebakan **50** berasal dari $(0, 10)$, padahal titik itu melanggar $x + 3y \leq 18$.

20. Lv 5 • IB DP • Isian • Sistem dengan parameter • gaya IB • 10-5-04

Diketahui sistem $kx + 2y = 4$ dan $8x + ky = 8$. Tentukan nilai k yang membuat sistem itu mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: Determinan $D = k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k = 4$ atau $k = -4$.

$k = 4$: $4x + 2y = 4$ dan $8x + 4y = 8$. Persamaan kedua tepat 2 kali persamaan pertama: berimpit, tak hingga penyelesaian $\checkmark$.

$k = -4$: $-4x + 2y = 4$ dan $8x - 4y = 8$. Kalikan persamaan pertama dengan -2 : $8x - 4y = -8 \neq 8$. Sejajar, tidak ada penyelesaian $\times$.

Jadi $k = 4$.

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Sistem siklik • gaya olimpiade • 10-6-01

Bilangan real a, b, c, d memenuhi

$$a + b + c = 13, b + c + d = 15, c + d + a = 14, d + a + b = 12.$$

Tentukan nilai $abcd$.

Jawaban:

Kunci: 360**Pembahasan:** Jumlahkan semuanya: $3(a + b + c + d) = 54$, jadi $a + b + c + d = 18$.Kurangkan setiap persamaan dari 18: $d = 18 - 13 = 5$, $a = 18 - 15 = 3$, $b = 18 - 14 = 4$, $c = 18 - 12 = 6$.Cek: $3 + 4 + 6 = 13 \checkmark$, $4 + 6 + 5 = 15 \checkmark$, $6 + 5 + 3 = 14 \checkmark$, $5 + 3 + 4 = 12 \checkmark$. $abcd = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 = 360$. Simetri mengubah sistem empat variabel menjadi hitungan beberapa detik!

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Penyelesaian bilangan bulat • gaya olimpiade • 10-6-02

Ancil membeli tepat 20 kue dengan uang tepat Rp20.000. Kue A seharga Rp3.000, kue B Rp2.000, dan kue C Rp500. Setiap jenis kue dibeli paling sedikit satu. Berapa banyak kue B yang dibeli Ancil?

Jawaban: kue

Kunci: 5 kue**Pembahasan:** Misalkan banyak kue A, B, C berturut-turut a, b, c (bilangan asli).

$$a + b + c = 20 \text{ dan } 3.000a + 2.000b + 500c = 20.000, \text{ atau } 6a + 4b + c = 40.$$

Kurangkan: $5a + 3b = 20$. Karena $b \geq 1$, $5a \leq 17$, jadi $a \in \{1, 2, 3\}$.

$$a = 1: 3b = 15, b = 5 \checkmark. a = 2: 3b = 10 \times. a = 3: 3b = 5 \times.$$

Jadi $a = 1$, $b = 5$, $c = 14$. Cek: $3.000 + 10.000 + 7.000 = 20.000 \checkmark$. Kue B ada 5.

23. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Tidak mungkin tepat dua • gaya olimpiade • 10-6-03

Buktikan: jika sistem $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$ mempunyai dua penyelesaian yang berbeda, maka sistem itu mempunyai tak hingga banyak penyelesaian. (Akibatnya, sebuah SPLDV tidak mungkin mempunyai tepat dua penyelesaian.)**Kunci/rubrik:** Misalkan $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ keduanya penyelesaian. Tulis $p = x_2 - x_1$ dan $q = y_2 - y_1$; maka $(p, q) \neq (0, 0)$. [1 poin]

$$\text{Kurangkan: } ap + bq = c - c = 0 \text{ dan } dp + eq = f - f = 0. [1 \text{ poin}]$$

Untuk setiap bilangan real t , titik $(x_1 + tp, y_1 + tq)$ memenuhi $a(x_1 + tp) + b(y_1 + tq) = c + t(ap + bq) = c$, dan dengan cara yang sama memenuhi persamaan kedua. [2 poin]Karena $(p, q) \neq (0, 0)$, nilai t yang berbeda memberi titik yang berbeda, sehingga penyelesaiannya tak hingga banyak. ■ [1 poin]**Pembahasan:** Secara geometris: dua garis lurus yang berbagi dua titik pasti berimpit, karena melalui dua titik hanya ada satu garis. Bukti aljabar di atas juga berlaku untuk sistem linear dengan lebih banyak variabel: banyak penyelesaiannya selalu 0, 1, atau tak hingga.

Bilangan real x dan y memenuhi

$$2026x + 2027y = 2028$$

$$2027x + 2026y = 2025.$$

Tentukan nilai $x^2 + y^2$.

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: Jumlahkan: $4053x + 4053y = 4053 \Rightarrow x + y = 1$.

Kurangkan (pertama – kedua): $-x + y = 3$, jadi $y - x = 3$.

Maka $y = 2$ dan $x = -1$. Cek: $-2026 + 4054 = 2028 \checkmark$ dan $-2027 + 4052 = 2025 \checkmark$.

$x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5$. (Tanpa mencari x, y pun bisa: $x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2 + (y-x)^2}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$.)

11 Persamaan Kuadrat

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengenali persamaan kuadrat • 11-1-01

Manakah yang merupakan persamaan kuadrat?

A. $3x + 5 = 11$

C. $x^3 = 8$

B. $x^2 - 4x + 3 = 0$

D. $\frac{2}{x} = 5$

Kunci: B

Pembahasan: Persamaan kuadrat dapat ditulis sebagai $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, jadi pangkat tertinggi variabelnya 2.

$x^2 - 4x + 3 = 0$ cocok: $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$.

$3x + 5 = 11$ adalah persamaan linear, $x^3 = 8$ berpangkat tiga, dan $\frac{2}{x} = 5$ memuat x sebagai penyebut.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Sifat perkalian nol • 11-1-02

Akar-akar persamaan $(x - 2)(x + 5) = 0$ adalah...

A. 2 dan 5

C. 2 dan -5

B. -2 dan 5

D. -2 dan -5

Kunci: C

Pembahasan: Hasil kali bernilai nol jika salah satu faktornya nol.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, atau $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

Perhatikan: akarnya adalah **lawan** dari bilangan yang ditambahkan di dalam kurung.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Luas persegi • 11-1-03

Luas sebuah ubin persegi 49 cm^2 . Jika panjang sisinya $x \text{ cm}$, maka $x^2 = 49$. Berapa panjang sisi ubin itu?

Jawaban: cm

Kunci: 7 cm

Pembahasan: $x^2 = 49$ memberi $x = 7$ atau $x = -7$, karena $(-7)^2 = 49$ juga.

Panjang sisi tidak mungkin negatif, jadi sisinya 7 cm. Cek: $7 \times 7 = 49$. ✓

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Koefisien bentuk baku • 11-1-04

Pada persamaan $2x^2 - 7x + 3 = 0$, nilai a , b , dan c berturut-turut adalah...

A. 2, 7, 3

C. 2, -7 , -3

B. -7 , 2, 3

D. 2, -7 , 3

Kunci: D

Pembahasan: Bandingkan dengan bentuk baku $ax^2 + bx + c = 0$.

Koefisien x^2 : $a = 2$. Koefisien x : $b = -7$ (tanda minusnya ikut!). Konstanta: $c = 3$.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Pemfaktoran • 11-2-01

Tentukan akar **positif** dari persamaan $x^2 + 3x - 28 = 0$.

Jawaban:

Kunci: 4**Pembahasan:** Cari dua bilangan dengan hasil kali -28 dan jumlah 3 ; yaitu 7 dan -4 .

$$(x + 7)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = -7 \text{ atau } x = 4.$$

Akar positifnya 4 . Cek: $16 + 12 - 28 = 0$. ✓

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Makna diskriminan nol • 11-2-02

Persamaan $x^2 - 6x + 9 = 0$ memiliki diskriminan $D = 0$. Artinya...

- A. persamaan itu punya akar kembar, yaitu $x = 3$
- B. persamaan itu tidak punya akar real
- C. persamaan itu punya dua akar real yang berbeda
- D. akar-akarnya 0 dan 6

Kunci: A**Pembahasan:** $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, jadi akarnya kembar.Memang $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, sehingga satu-satunya akar adalah $x = 3$. Rumus akar kembar: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Soal cerita luas • 11-2-03

Sebuah taman berbentuk persegi panjang. Panjangnya 4 m lebih dari lebarnya, dan luasnya 60 m^2 . Berapa lebar taman itu?

Jawaban: m

Kunci: 6 m**Pembahasan:** Misalkan lebar x m, maka panjang $(x + 4)$ m.

$$x(x + 4) = 60 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 6) = 0.$$

 $x = -10$ ditolak karena lebar tidak mungkin negatif. Jadi lebarnya 6 m. Cek: $6 \times 10 = 60$. ✓

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Jumlah akar • 11-2-04

Jumlah akar-akar persamaan $x^2 - 11x + 7 = 0$ adalah...

- | | |
|----------|---------|
| A. -11 | C. 11 |
| B. 7 | D. -7 |

Kunci: C**Pembahasan:** Menurut Vieta, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-11}{1} = 11$.Angka 7 adalah hasil kali akar ($\frac{c}{a}$), sedangkan -11 adalah jebakan lupa tanda minus.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Gerak bola • 11-3-01

Sebuah bola dilempar tegak ke atas. Tingginya $h = 20t - 5t^2$ meter setelah t detik. Setelah berapa detik bola **pertama kali** mencapai ketinggian 15 m?

Jawaban: detik

Kunci: 1 detik

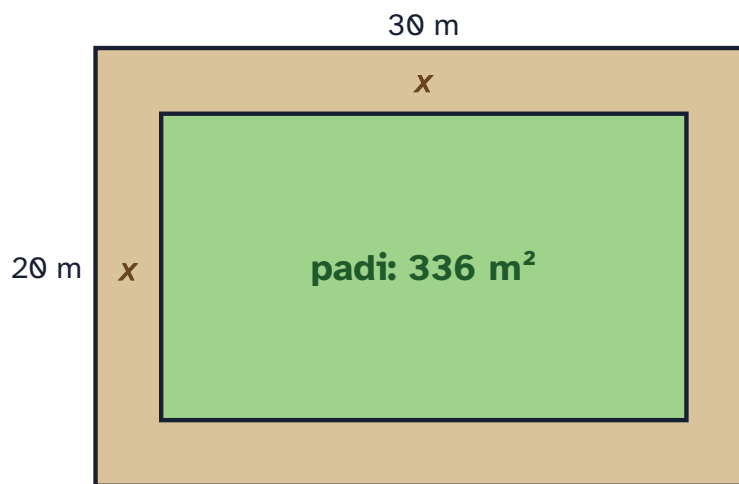
Pembahasan: $20t - 5t^2 = 15 \Rightarrow 5t^2 - 20t + 15 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$.

$(t - 1)(t - 3) = 0$, jadi $t = 1$ atau $t = 3$.

Bola setinggi 15 m saat naik ($t = 1$) dan saat turun ($t = 3$). Yang pertama: $t = 1$ detik.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Jalan setapak di sawah • 11-3-02

Sebidang sawah berukuran 30 m × 20 m. Di dalam sawah, di sepanjang keempat tepinya, dibuat jalan setapak selebar x m. Sisa lahan untuk menanam padi berbentuk persegi panjang seluas 336 m². Tentukan x .



Jawaban: m

Kunci: 3 m

Pembahasan: $(30 - 2x)(20 - 2x) = 336 \Rightarrow 600 - 100x + 4x^2 = 336 \Rightarrow 4x^2 - 100x + 264 = 0$.

Bagi dengan 4: $x^2 - 25x + 66 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 22) = 0$.

$x = 22$ ditolak karena $20 - 2 \cdot 22 < 0$. Jadi $x = 3$ m. Cek: $24 \times 14 = 336$. ✓

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Parameter akar kembar • 11-3-03

Persamaan $x^2 + kx + 16 = 0$ memiliki akar kembar. Nilai k yang mungkin adalah...

A. 4 saja

C. 8 saja

B. -4 atau 4

D. -8 atau 8

Kunci: D

Pembahasan: Akar kembar $\Leftrightarrow D = 0$: $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0 \Rightarrow k^2 = 64 \Rightarrow k = \pm 8$.

Untuk $k = 8$: $(x + 4)^2 = 0$. Untuk $k = -8$: $(x - 4)^2 = 0$. Kedua nilai sah, jadi jangan lupa yang negatif.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Ekspresi simetris akar • 11-3-04

Akar-akar $x^2 - 5x + 2 = 0$ adalah α dan β . Tanpa mencari akarnya, hitunglah $\alpha^2 + \beta^2$.

Jawaban:

Kunci: 21

Pembahasan: Vieta: $\alpha + \beta = 5$ dan $\alpha\beta = 2$.

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 4 = 21$.

Cek kasar: akarnya $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \approx 4,56$ dan $0,44$; kuadratnya $\approx 20,81 + 0,19 = 21$. ✓

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Rumus abc • gaya IGCSE • 11-4-01

Selesaikan persamaan $2x^2 - 5x - 4 = 0$. Berikan akar positifnya dalam bentuk eksak atau dibulatkan sampai 3 angka penting.

Jawaban:

Kunci: 3,137

Pembahasan: $a = 2, b = -5, c = -4$, sehingga $b^2 - 4ac = 25 + 32 = 57$.

$x = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{4}$, yaitu $x \approx \frac{5 + 7,550}{4} \approx 3,14$ atau $x \approx \frac{5 - 7,550}{4} \approx -0,637$.

Akar positifnya $\frac{5 + \sqrt{57}}{4} \approx 3,14$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Melengkapi kuadrat • gaya IGCSE • 11-4-02

Ekspresi $x^2 + 6x + 2$ dapat ditulis dalam bentuk $(x + p)^2 + q$. **Tentukan** nilai q .

Jawaban:

Kunci: -7

Pembahasan: Separuh koefisien x : $p = 3$, dan $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Agar sama dengan $x^2 + 6x + 2$, kurangi 7: $x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 7$.

Jadi $p = 3$ dan $q = -7$. Bonus: nilai terkecil ekspresi ini -7 , dicapai saat $x = -3$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Diskriminan & grafik • gaya IGCSE • 11-4-03

Grafik $y = x^2 - 4x + k$ tidak memotong dan tidak menyinggung sumbu- x . Nilai k yang memenuhi adalah...

A. $k > 4$

C. $k = 4$

B. $k < 4$

D. $k > -4$

Kunci: A

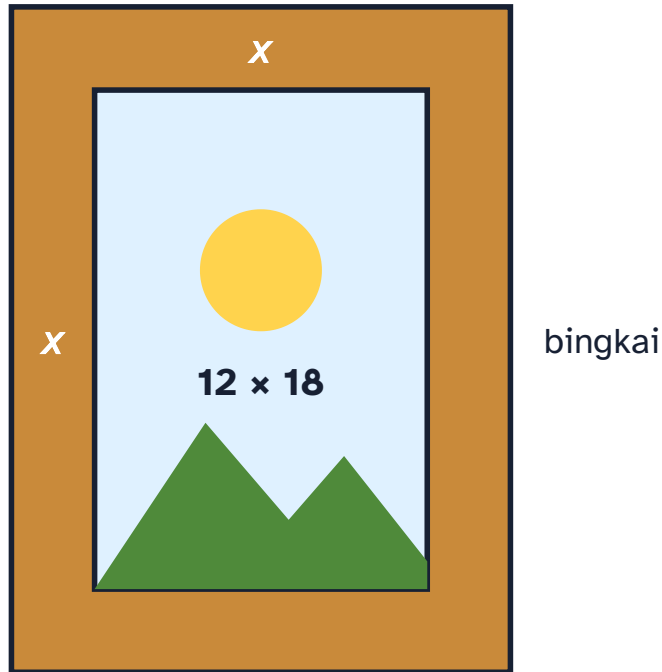
Pembahasan: Tidak ada titik potong $\Leftrightarrow D < 0$: $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \Rightarrow 16 - 4k < 0 \Rightarrow k > 4$.

Saat $k = 4$ grafiknya menyinggung sumbu- x (akar kembar $x = 2$), jadi $k = 4$ tidak termasuk.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Bingkai foto • gaya IGCSE • 11-4-04

Sebuah foto berukuran $12\text{ cm} \times 18\text{ cm}$ dipasang di dalam bingkai yang lebarnya sama di semua sisi, yaitu x cm. Luas bingkai saja (tanpa foto) sama dengan luas foto.

- (a) **Tunjukkan** bahwa $x^2 + 15x - 54 = 0$.
 (b) **Selesaikan** persamaan itu dan **jelaskan** mengapa salah satu jawaban ditolak.
 (c) **Hitung** ukuran luar bingkai.



Kunci/rubrik: (a) Ukuran luar $(12 + 2x)\text{ cm} \times (18 + 2x)\text{ cm}$. Luas luar = luas foto + luas bingkai = $2 \times 216 = 432$.
 Jadi $(12 + 2x)(18 + 2x) = 432 \Rightarrow 216 + 60x + 4x^2 = 432 \Rightarrow 4x^2 + 60x - 216 = 0 \Rightarrow x^2 + 15x - 54 = 0$. [2 poin: ukuran luar 1, penyederhanaan 1]
 (b) $(x + 18)(x - 3) = 0$, jadi $x = 3$ atau $x = -18$. Nilai $x = -18$ ditolak karena lebar bingkai tidak mungkin negatif. [2 poin]
 (c) $12 + 6 = 18\text{ cm}$ dan $18 + 6 = 24\text{ cm}$, jadi ukuran luarnya $18\text{ cm} \times 24\text{ cm}$. [1 poin]
Pembahasan: Kuncinya: luas bingkai = luas luar – luas foto, sehingga luas luar sama dengan dua kali luas foto. Cek: $18 \times 24 = 432 = 2 \times 216$. ✓ Cara ini jauh lebih ringkas daripada menghitung luas empat potong bingkai satu per satu.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Parameter & diskriminan • gaya IB • 11-5-01

Persamaan $kx^2 - 4x + (k - 3) = 0$ memiliki akar kembar, dengan $k > 0$. Tentukan nilai k .

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: $D = 16 - 4k(k - 3) = 16 - 4k^2 + 12k = 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$.
 $(k - 4)(k + 1) = 0$, jadi $k = 4$ atau $k = -1$. Karena $k > 0$, maka $k = 4$.
 Cek: $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$, dengan akar kembar $x = \frac{1}{2}$. ✓

Pak Made menjual es kelapa muda seharga Rp10.000 per gelas dan rata-rata laku 120 gelas per hari. Survei menunjukkan bahwa setiap kenaikan harga Rp1.000, penjualan turun 8 gelas per hari. Misalkan harga dinaikkan n kali Rp1.000.

(a) Tunjukkan bahwa pendapatan harian (dalam ribu rupiah) adalah $R = (10 + n)(120 - 8n) = -8n^2 + 40n + 1200$.

(b) Tentukan harga jual agar pendapatan tepat Rp1.248.000 per hari. Ada dua jawaban. Harga mana yang lebih menguntungkan bagi Pak Made? Beri alasan.

(c) Gunakan diskriminan untuk menunjukkan bahwa pendapatan Rp1.300.000 per hari mustahil dicapai.

Kunci/rubrik: (a) Harga $(10 + n)$ ribu rupiah dan banyak gelas $120 - 8n$, jadi $R = (10 + n)(120 - 8n) = 1200 - 80n + 120n - 8n^2 = -8n^2 + 40n + 1200$. [1 poin]

(b) $-8n^2 + 40n + 1200 = 1248 \Rightarrow 8n^2 - 40n + 48 = 0 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 0 \Rightarrow n = 2$ atau $n = 3$. Harga Rp12.000 (laku 104 gelas) atau Rp13.000 (laku 96 gelas); keduanya memberi Rp1.248.000. Rp13.000 lebih menguntungkan karena kelapa yang terpakai lebih sedikit sehingga modalnya lebih kecil. [3 poin: persamaan 1, kedua akar 1, alasan 1]

(c) $-8n^2 + 40n + 1200 = 1300 \Rightarrow 8n^2 - 40n + 100 = 0 \Rightarrow 2n^2 - 10n + 25 = 0$. $D = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25 = 100 - 200 = -100 < 0$, jadi tidak ada nilai n real yang memenuhi. [2 poin]

Pembahasan: Model kuadrat muncul karena harga naik sementara penjualan turun. Bagian (c) menunjukkan kekuatan diskriminan: tanpa mencoba-coba, kita tahu target itu mustahil. Di Bab 12 kamu akan menemukan bahwa pendapatan terbesar, Rp1.250.000, dicapai saat $n = 2,5$, yaitu harga Rp12.500.

Akar-akar $2x^2 - 6x + 1 = 0$ adalah α dan β . Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{\beta}$ adalah...

A. $x^2 - 3x + 2 = 0$

C. $2x^2 - 6x + 1 = 0$

B. $x^2 - 6x + 2 = 0$

D. $x^2 + 6x + 2 = 0$

Kunci: B

Pembahasan: Vieta: $\alpha + \beta = 3$ dan $\alpha\beta = \frac{1}{2}$.

Jumlah akar baru: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{1/2} = 6$. Hasil kali akar baru: $\frac{1}{\alpha\beta} = 2$.

Persamaannya $x^2 - 6x + 2 = 0$. Trik cepat: akar kebalikan diperoleh dengan **membalik urutan koefisien** (2, -6, 1 menjadi 1, -6, 2).

Dalam model sederhana lompat batu Nias, tinggi kaki pelompat adalah $h = 7t - 5t^2$ meter setelah t detik. Berapa lama kaki pelompat berada **di atas** ketinggian 2 m?

Jawaban: detik

Kunci: 0,6 detik

Pembahasan: $7t - 5t^2 = 2 \Rightarrow 5t^2 - 7t + 2 = 0 \Rightarrow (5t - 2)(t - 1) = 0$.

$t_1 = 0,4$ s dan $t_2 = 1$ s. Di antara kedua waktu itu, $h > 2$.

Lamanya $1 - 0,4 = 0,6$ detik. Rumus umumnya: selisih akar = $\frac{\sqrt{D}}{|a|} = \frac{\sqrt{49-40}}{5} = 0,6$.

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Identitas simetris • gaya olimpiade • 11-6-01

Bilangan real a dan b memenuhi $a + b = 5$ dan $ab = 3$. Hitunglah $a^3 + b^3$ tanpa mencari a dan b .

Jawaban:

Kunci: 80

Pembahasan: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 125 - 3 \cdot 3 \cdot 5 = 125 - 45 = 80$.

Catatan: a dan b adalah akar $x^2 - 5x + 3 = 0$. Diskriminannya $D = 13 > 0$, jadi keduanya memang bilangan real.

22. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Akar bulat & Vieta • gaya olimpiade • 11-6-02

Ada berapa banyak bilangan bulat k sehingga kedua akar persamaan $x^2 - kx + 12 = 0$ merupakan bilangan bulat?

- A. 3
B. 4
C. 6
D. 12

Kunci: C

Pembahasan: Misalkan akarnya bilangan bulat p dan q . Vieta: $pq = 12$ dan $p + q = k$.

Pasangan tak berurut dengan hasil kali 12: $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$ dan pasangan negatifnya $(-1, -12)$, $(-2, -6)$, $(-3, -4)$.

Nilai k : 13, 8, 7, -13, -8, -7, semuanya berbeda. Akar kembar tidak mungkin karena 12 bukan kuadrat sempurna. Jadi ada 6 nilai k .

Jebakan: 3 (lupa pasangan negatif) dan 12 (menghitung pasangan berurut).

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Jumlah pangkat akar • gaya olimpiade • 11-6-03

Akar-akar $x^2 - x - 1 = 0$ adalah α dan β . Hitunglah $\alpha^6 + \beta^6$.

Jawaban:

Kunci: 18

Pembahasan: Setiap akar memenuhi $x^2 = x + 1$, jadi $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$. Jumlahkan untuk α dan β : $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$.

$s_0 = 2$, $s_1 = \alpha + \beta = 1$, lalu $s_2 = 3$, $s_3 = 4$, $s_4 = 7$, $s_5 = 11$, $s_6 = 18$.

Jadi $\alpha^6 + \beta^6 = 18$. Barisan 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... disebut barisan Lucas, saudara dekat barisan Fibonacci.

24. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Pembuktian paritas • gaya olimpiade • 11-6-04

Misalkan a , b , dan c bilangan bulat **ganjil**.

(a) Jika $\frac{p}{q}$ (pecahan paling sederhana, $q > 0$) adalah akar $ax^2 + bx + c = 0$, tunjukkan bahwa $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$.

(b) Buktikan bahwa persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ tidak memiliki akar rasional.

Kunci/rubrik: (a) Substitusi $x = \frac{p}{q}$: $a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c = 0$. Kalikan kedua ruas dengan q^2 : $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. [1 poin]

(b) Karena $\frac{p}{q}$ paling sederhana, p dan q tidak keduanya genap. Ada tiga kasus. (i) p dan q ganjil: ketiga suku ganjil, dan jumlah tiga bilangan ganjil adalah ganjil. (ii) p genap, q ganjil: ap^2 dan bpq genap, cq^2 ganjil, jadi jumlahnya ganjil. (iii) p ganjil, q genap: ap^2 ganjil, dua suku lainnya genap, jadi jumlahnya ganjil. Di semua kasus ruas kiri ganjil, padahal 0 genap. Kontradiksi, jadi tidak ada akar rasional. [4 poin: pembagian kasus 1, tiap kasus 1]

Pembahasan: Argumen paritas (ganjil-genap) adalah senjata favorit olimpiade. Cara lain lewat diskriminan: kuadrat bilangan ganjil selalu bersisa 1 jika dibagi 8, sedangkan $4ac$ bersisa 4, sehingga $D = b^2 - 4ac$ bersisa 5 jika dibagi 8. Padahal kuadrat sempurna hanya bisa bersisa 0, 1, atau 4. Jadi D bukan kuadrat sempurna, dan akarnya irasional atau tidak real. Contoh: $3x^2 + 5x + 1 = 0$ ($D = 13$) dan $x^2 + x + 1 = 0$ ($D = -3$).

12 Fungsi Kuadrat & Parabola

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengenali fungsi kuadrat • 12-1-01

Manakah yang merupakan fungsi kuadrat?

A. $y = 3x + 2$

B. $y = x^2 - 5x + 1$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = 2^x$

Kunci: B

Pembahasan: Fungsi kuadrat berbentuk $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$; pangkat tertinggi x adalah 2. Hanya $y = x^2 - 5x + 1$ yang memenuhi ($a = 1, b = -5, c = 1$).

$y = 3x + 2$ fungsi linear, $y = \frac{2}{x}$ fungsi kebalikan, dan $y = 2^x$ fungsi eksponen (Bab 14).

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Arah buka • 12-1-02

Grafik $y = -x^2 + 4$ berbentuk...

A. garis lurus

B. parabola terbuka ke atas

C. parabola terbuka ke bawah

D. lingkaran

Kunci: C

Pembahasan: Koefisien x^2 adalah $a = -1$, negatif, sehingga parabola terbuka ke bawah ("cemberut"). Puncaknya $(0, 4)$ adalah titik tertinggi.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Nilai fungsi • 12-1-03

Jika $f(x) = x^2 - 3$, berapakah $f(4)$?

Jawaban:

Kunci: 13

Pembahasan: $f(4) = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$. Jadi titik $(4, 13)$ terletak pada parabola itu.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Puncak bentuk puncak • 12-1-04

Titik puncak grafik $y = (x - 2)^2 + 5$ adalah...

A. $(2, 5)$

B. $(-2, 5)$

C. $(2, -5)$

D. $(5, 2)$

Kunci: A

Pembahasan: Bentuk puncak $y = a(x - h)^2 + k$ berpuncak di (h, k) . Di sini $h = 2$ dan $k = 5$.

Cek: $(x - 2)^2$ paling kecil bernilai 0 saat $x = 2$, sehingga y paling kecil = 5.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Sumbu simetri • 12-2-01

Tentukan sumbu simetri grafik $y = x^2 - 8x + 3$. Tuliskan nilai x -nya.

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: $x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4$. Jadi sumbu simetrinya garis $x = 4$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Simetri parabola • 12-2-02

Sebuah parabola mempunyai sumbu simetri $x = 3$. Titik $(1, 7)$ terletak pada parabola itu. Titik lain pada parabola yang juga mempunyai $y = 7$ adalah $(p, 7)$. Berapakah p ?

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: Titik $(1, 7)$ berjarak $3 - 1 = 2$ di kiri sumbu. Kembarannya berjarak 2 di kanan sumbu: $p = 3 + 2 = 5$.
Rumus cepat: $p = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Maksimum atau minimum • 12-2-03

Grafik $y = -2x^2 + 4x + 1$ terbuka ke ... dan puncaknya merupakan titik ...

- A. atas; minimum
B. atas; maksimum

- C. bawah; minimum
D. bawah; maksimum

Kunci: D

Pembahasan: $a = -2 < 0$, jadi parabola terbuka ke bawah dan puncaknya titik tertinggi (maksimum).

Puncak: $x_p = -\frac{4}{2(-2)} = 1$, $y_p = -2 + 4 + 1 = 3$. Nilai maksimumnya 3.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Nilai minimum • 12-2-04

Berapakah nilai minimum fungsi $f(x) = x^2 + 6x + 10$?

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: Lengkapi kuadrat: $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 - 9 + 10 = (x + 3)^2 + 1$.

Karena $(x + 3)^2 \geq 0$, nilai terkecilnya 1, dicapai saat $x = -3$.

Cek dengan rumus: $y_p = -\frac{D}{4a} = -\frac{36 - 40}{4} = 1$.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Batu dilempar ke atas • 12-3-01

Sebuah batu dilempar tegak ke atas dari jembatan. Tingginya dari permukaan sungai setelah t detik adalah $h(t) = 2 + 15t - 5t^2$ meter. Berapa tinggi maksimum batu dari permukaan sungai?

Jawaban: m

Kunci: 13,25 m

Pembahasan: $t_p = -\frac{15}{2(-5)} = 1,5$ detik.

$$h(1,5) = 2 + 22,5 - 5(2,25) = 2 + 22,5 - 11,25 = 13,25 \text{ m.}$$

Batu mencapai 13,25 m di atas sungai, 1,5 detik setelah dilempar.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kebun di tepi sungai • 12-3-02

Pak Darto punya kawat 60 m untuk memagari kebun persegi panjang di tepi sungai. Sisi yang berbatasan dengan sungai tidak perlu dipagari. Berapa luas kebun terbesar yang bisa ia buat?

Jawaban: m²

Kunci: 450 m²

Pembahasan: Misalkan sisi yang tegak lurus sungai x . Sisi sejajar sungai $60 - 2x$, jadi luasnya $L(x) = x(60 - 2x)$. Akar-akarnya $x = 0$ dan $x = 30$, sehingga puncaknya di tengah: $x = 15$.

$$L(15) = 15 \times 30 = 450 \text{ m}^2. \text{ Kebun terbaik berukuran } 15 \text{ m} \times 30 \text{ m: sisi sejajar sungai dua kali sisi lainnya.}$$

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Menyusun dari puncak • 12-3-03

Fungsi kuadrat yang grafiknya berpuncak di $(1, -4)$ dan melalui titik $(3, 0)$ adalah...

A. $y = x^2 + 2x - 3$

C. $y = x^2 - 2x - 3$

B. $y = 2x^2 - 4x - 2$

D. $y = x^2 - 2x + 5$

Kunci: C

Pembahasan: Mulai dari $y = a(x - 1)^2 - 4$. Masukkan $(3, 0)$: $0 = 4a - 4$, jadi $a = 1$.

$$y = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3. \text{ Cek: } 9 - 6 - 3 = 0 \checkmark.$$

$x^2 + 2x - 3$ berpuncak di $(-1, -4)$ (tanda h terbalik); $2x^2 - 4x - 2$ memang berpuncak di $(1, -4)$, tetapi nilainya di $x = 3$ adalah 4; $x^2 - 2x + 5$ berpuncak di $(1, 4)$.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Bilangan bulat penyelesaian • 12-3-04

Ada berapa bilangan bulat x yang memenuhi $x^2 - 2x - 15 < 0$?

Jawaban: bilangan

Kunci: 7 bilangan

Pembahasan: $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$, dengan akar -3 dan 5 .

Parabola terbuka ke atas, jadi bernilai negatif di antara akar: $-3 < x < 5$.

Bilangan bulatnya $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$: ada **7**. (-3 dan 5 tidak ikut karena tandanya " $<$ ", bukan " $\leq$ ".)

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Melengkapi kuadrat • gaya IGCSE • 12-4-01

Tuliskan $x^2 - 10x + 7$ dalam bentuk $(x - p)^2 + q$, lalu **tentukan** nilai q .

Jawaban:

Kunci: -18**Pembahasan:** $x^2 - 10x + 7 = (x - 5)^2 - 25 + 7 = (x - 5)^2 - 18$.Jadi $p = 5$ dan $q = -18$. Artinya grafik $y = x^2 - 10x + 7$ berpuncak di $(5, -18)$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Akar dan nilai minimum • gaya IGCSE • 12-4-02

Grafik $y = x^2 + bx + c$ memotong sumbu- x di $x = -1$ dan $x = 7$. **Hitung** nilai minimum y .

Jawaban:

Kunci: -16**Pembahasan:** $y = (x + 1)(x - 7)$. Sumbu simetri di tengah akar: $x = \frac{-1 + 7}{2} = 3$. $y(3) = (3 + 1)(3 - 7) = 4 \times (-4) = -16$.Nilai minimum -16 , dicapai di $x = 3$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Membaca tabel nilai • gaya IGCSE • 12-4-03

Tabel berikut berisi nilai fungsi kuadrat $y = f(x)$. x : -1, 0, 1, 2, 3 y : 7, 2, -1, -2, -1**Tentukan** rumus $f(x)$.

A. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

C. $f(x) = (x - 2)^2 + 2$

B. $f(x) = x^2 + 4x + 2$

D. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

Kunci: A**Pembahasan:** Nilai y simetris di sekitar $x = 2$ ($f(1) = f(3) = -1$), dan $f(2) = -2$ paling kecil. Jadi puncaknya $(2, -2)$: $f(x) = a(x - 2)^2 - 2$.Dari $f(0) = 2$: $4a - 2 = 2$, sehingga $a = 1$. Jadi $f(x) = (x - 2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$.Cek: $f(-1) = 1 + 4 + 2 = 7 \checkmark$. Beda kedua tabel tetap 2, cocok dengan $2a = 2$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Bentuk puncak & pertidaksamaan • gaya IGCSE • 12-4-04

Diberikan $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$.(a) **Tuliskan** $f(x)$ dalam bentuk $a(x - h)^2 + k$.(b) **Tuliskan** koordinat titik puncak grafik $y = f(x)$ dan **jelaskan** apakah titik itu minimum atau maksimum.(c) **Selesaikan** $f(x) < 3$.**Kunci/rubrik:** (a) $2x^2 - 12x + 13 = 2(x^2 - 6x) + 13 = 2[(x - 3)^2 - 9] + 13 = 2(x - 3)^2 - 5$. [3 poin: mengeluarkan faktor 2 (1), melengkapi kuadrat (1), hasil akhir (1)](b) Puncak $(3, -5)$; titik minimum karena $a = 2 > 0$ (terbuka ke atas). [2 poin](c) $2(x - 3)^2 - 5 < 3 \Rightarrow (x - 3)^2 < 4 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$. [3 poin: menyusun ketaksamaan (1), batas ± 2 (1), interval (1)]**Pembahasan:** Bagian (c) juga bisa dikerjakan dengan bentuk umum: $2x^2 - 12x + 10 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) < 0$, jadi $1 < x < 5$. Interval ini simetris terhadap sumbu $x = 3$, sesuai sifat parabola.

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Terowongan parabola • gaya IB • 12-5-01

Mulut sebuah terowongan berbentuk parabola dengan lebar dasar 8 m dan tinggi puncak 6 m. Letakkan titik asal di tengah dasar terowongan.

(a) Tunjukkan bahwa lengkung terowongan dapat dimodelkan dengan $y = 6 - 0,375x^2$.

(b) Sebuah truk selebar 2,6 m dan setinggi 4,2 m melaju tepat di tengah. Tentukan apakah truk itu dapat lewat.

(c) Tentukan lebar maksimum truk setinggi 4,2 m yang masih dapat lewat bila melaju di tengah. Berikan jawaban sampai 3 angka penting.

Kunci/rubrik: (a) Puncak $(0, 6)$, jadi $y = ax^2 + 6$. Kaki terowongan di $(4, 0)$: $0 = 16a + 6$, sehingga $a = -\frac{6}{16} = -0,375$. [2]

(b) Pojok atas truk berada di $x = 1,3$: $y = 6 - 0,375(1,69) \approx 5,37 \text{ m} > 4,2 \text{ m}$, jadi truk dapat lewat. [2]

(c) $6 - 0,375x^2 = 4,2 \Rightarrow x^2 = 4,8 \Rightarrow x \approx 2,191$. Lebar maksimum $2x \approx 4,38 \text{ m}$. [3]

Pembahasan: Kunci pemodelan: pilih titik asal yang membuat rumus sederhana. Di sini sumbu simetri berimpit dengan sumbu- y , sehingga $b = 0$. Pada (c), lebar truk sama dengan 2 kali jarak pojoknya ke sumbu simetri.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Untung produksi keripik • gaya IB • 12-5-02

Untung harian sebuah usaha keripik singkong dimodelkan dengan $U(x) = -2x^2 + 80x - 350$ (ribu rupiah), dengan x banyak kilogram keripik yang diproduksi per hari. Tentukan untung maksimum per hari, dalam ribu rupiah.

Jawaban: ribu rupiah

Kunci: 450 ribu rupiah

Pembahasan: $x_p = -\frac{80}{2(-2)} = 20 \text{ kg}$.

$U(20) = -2(400) + 1600 - 350 = 450$.

Untung maksimum Rp450.000 per hari, dengan produksi 20 kg. Memproduksi lebih banyak justru menurunkan untung, misalnya karena biaya lembur dan stok yang tidak laku.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Tidak memotong sumbu- x • gaya IB • 12-5-03

Grafik $f(x) = x^2 + kx + 9$ tidak memotong sumbu- x . Nilai k yang memenuhi adalah...

A. $k < -6$ atau $k > 6$

C. $k > 6$

B. $-3 < k < 3$

D. $-6 < k < 6$

Kunci: D

Pembahasan: Tidak memotong sumbu- x berarti tidak ada akar real: $D < 0$.

$D = k^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow k^2 < 36 \Leftrightarrow -6 < k < 6$.

Pilihan pertama justru syarat $D > 0$ (dua titik potong).

20. Lv 5 • IB DP • Isian • Tiga titik data • gaya IB • 12-5-04

Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(1, 4)$, $(2, 3)$, dan $(4, 7)$. Tentukan nilai minimum f .

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $a + b + c = 4$, $4a + 2b + c = 3$, $16a + 4b + c = 7$.

Kurangkan berurutan: $3a + b = -1$ dan $12a + 2b = 4$, atau $6a + b = 2$. Jadi $3a = 3$: $a = 1$, $b = -4$, $c = 7$.

$f(x) = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3$. Nilai minimum 3 (di $x = 2$). Ternyata titik $(2, 3)$ yang diberikan adalah puncaknya!

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Minimum dua variabel • gaya olimpiade • 12-6-01

Untuk bilangan real x dan y , tentukan nilai minimum $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 10$.

Jawaban:

Kunci: 6

Pembahasan: $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 10 = (x - y)^2 + y^2 - 4y + 10 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 6$.

Kedua kuadrat ≥ 0 , jadi nilainya ≥ 6 . Nilai 6 tercapai saat $y = 2$ dan $x = y = 2$.

Minimum = 6.

22. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Jejak titik puncak • gaya olimpiade • 12-6-02

Untuk setiap bilangan real k , titik puncak parabola $y = x^2 - 2kx + k^2 + k - 3$ selalu terletak pada...

A. parabola $y = x^2 - 3$

C. garis $y = -3$

B. garis $y = x - 3$

D. lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

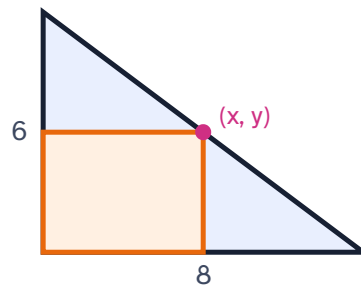
Kunci: B

Pembahasan: $y = (x - k)^2 + k - 3$, jadi puncaknya $(k, k - 3)$.

Misalkan $X = k$ dan $Y = k - 3$. Hilangkan k : $Y = X - 3$.

Saat k berubah, puncak berjalan di sepanjang garis $y = x - 3$. Contoh: $k = 0 \rightarrow (0, -3)$, $k = 3 \rightarrow (3, 0)$.

Sebuah persegi panjang diletakkan di dalam segitiga siku-siku dengan kaki 6 cm dan 8 cm. Dua sisi persegi panjang menempel pada kedua kaki segitiga, dan satu titik sudutnya terletak pada sisi miring. Berapa luas terbesar persegi panjang itu?



Jawaban: cm^2

Kunci: 12 cm^2

Pembahasan: Letakkan sudut siku-siku di $(0, 0)$, kaki 8 di sumbu- x , kaki 6 di sumbu- y . Titik sudut (x, y) pada sisi miring memenuhi $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$, yaitu $y = 6 - \frac{3}{4}x$.

Luas $L(x) = x(6 - \frac{3}{4}x)$, dengan akar 0 dan 8, sehingga puncaknya di $x = 4$.

$L(4) = 4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$.

Indah sekali: luas terbesar tepat **setengah** luas segitiga (24 cm^2), dan titik sudutnya tepat di tengah sisi miring. Ini berlaku untuk semua segitiga siku-siku!

(a) Misalkan $a > 0$. Buktikan bahwa $ax^2 + bx + c \geq 0$ untuk semua x real jika dan hanya jika $b^2 - 4ac \leq 0$.

(b) Untuk bilangan real p_1, p_2, q_1, q_2 dengan p_1, p_2 tidak keduanya nol, perhatikan $g(t) = (p_1t + q_1)^2 + (p_2t + q_2)^2$. Dengan memakai (a), buktikan ketaksamaan Cauchy-Schwarz $(p_1q_1 + p_2q_2)^2 \leq (p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$.

(c) Kapan kesamaan terjadi?

Kunci/rubrik: (a) $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, sehingga nilai minimumnya $-\frac{D}{4a}$ (di $x = -\frac{b}{2a}$). Fungsi ≥ 0 untuk semua $x \Leftrightarrow$ nilai minimumnya $\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{D}{4a} \geq 0 \Leftrightarrow D \leq 0$, karena $4a > 0$. [3]

(b) $g(t) = (p_1^2 + p_2^2)t^2 + 2(p_1q_1 + p_2q_2)t + (q_1^2 + q_2^2) \geq 0$ untuk semua t , dan koefisien t^2 positif. Menurut (a), $D = 4(p_1q_1 + p_2q_2)^2 - 4(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2) \leq 0$, yang setara dengan ketaksamaan yang diminta. [3]

(c) Kesamaan $\Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow$ ada t_0 dengan $g(t_0) = 0 \Leftrightarrow p_1t_0 + q_1 = 0$ dan $p_2t_0 + q_2 = 0$, yaitu (q_1, q_2) kelipatan (p_1, p_2) . [2]

Pembahasan: Inilah "trik diskriminan" yang terkenal di olimpiade: kalau sebuah fungsi kuadrat tidak pernah negatif, diskriminannya tidak mungkin positif. Contoh angka: $p = (1, 2)$, $q = (3, 4)$: $(3 + 8)^2 = 121 \leq 5 \times 25 = 125 \checkmark$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mesin fungsi • 13-1-01

Mesin fungsi $f(x) = 3x - 2$ menerima input 4. Berapa outputnya?

- A. 10
B. 12
C. 14
D. 2

Kunci: A

Pembahasan: $f(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = 10$.

Mesin mengalikan 3 dulu, baru mengurangi 2. Angka 12 muncul kalau lupa mengurangi 2.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pengertian fungsi • 13-1-02

Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{p, q, r\}$. Himpunan pasangan berurutan manakah yang merupakan **fungsi** dari A ke B ?

- A. $\{(1, p), (1, q), (2, r), (3, r)\}$
B. $\{(1, q), (2, r)\}$
C. $\{(1, p), (2, p), (3, p)\}$
D. $\{(1, p), (2, q), (2, r), (3, p)\}$

Kunci: C

Pembahasan: Fungsi: **setiap** anggota A punya **tepat satu** pasangan.

Opsi pertama: 1 punya dua pasangan. Opsi kedua: 3 tidak punya pasangan. Opsi keempat: 2 punya dua pasangan.

Opsi ketiga sah: semua anggota A dipasangkan ke p . Beberapa input boleh berbagi output yang sama.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Komposisi • 13-1-03

Diketahui $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = 2x$. Hitung $(f \circ g)(3)$.

Jawaban:

Kunci: 37

Pembahasan: Kerjakan dari dalam: $g(3) = 6$.

Lalu $f(6) = 6^2 + 1 = 37$.

Hati-hati: $(g \circ f)(3) = g(10) = 20$, hasilnya berbeda.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Fungsi invers • 13-1-04

Mesin f menambahkan 5 pada setiap bilangan yang masuk. Apa yang dilakukan mesin inversnya, f^{-1} ?

- A. Membagi bilangan dengan 5.
B. Menambahkan 5 sekali lagi.
C. Mengalikan bilangan dengan -5 .
D. Mengurangi bilangan dengan 5.

Kunci: D

Pembahasan: Mesin invers membatalkan kerja mesin asli. Kebalikan dari "tambah 5" adalah "kurangi 5": $f(x) = x + 5$, $f^{-1}(x) = x - 5$.

Cek: $f^{-1}(f(7)) = f^{-1}(12) = 7$. ✓

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Domain • 13-2-01

Tentukan nilai x **terkecil** yang termasuk domain $f(x) = \sqrt{2x - 8}$.

Jawaban:

Kunci: 4**Pembahasan:** Isi akar tidak boleh negatif: $2x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$.Nilai terkecil $x = 4$, dan memang $f(4) = \sqrt{0} = 0$ terdefinisi.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Fungsi invers • 13-2-02

Diketahui $f(x) = 4x - 7$. Hitung $f^{-1}(13)$.

Jawaban:

Kunci: 5**Pembahasan:** $f^{-1}(13)$ adalah input yang menghasilkan 13: $4x - 7 = 13 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$.Atau pakai rumus $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$, jadi $f^{-1}(13) = \frac{20}{4} = 5$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Transformasi geser • 13-2-03

Grafik $y = x^2$ digeser 2 satuan ke **kiri**, lalu 5 satuan ke **bawah**. Persamaan grafik yang baru adalah...

A. $y = (x - 2)^2 - 5$

C. $y = (x + 2)^2 + 5$

B. $y = (x + 2)^2 - 5$

D. $y = x^2 - 3$

Kunci: B**Pembahasan:** Geser kiri 2: ganti x dengan $x + 2$ (isi kurung bekerja terbalik). Geser bawah 5: kurangi 5 di luar kurung.Hasilnya $y = (x + 2)^2 - 5$, dengan puncak $(-2, -5)$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Konversi suhu • 13-2-04

Resep kue dari luar negeri meminta oven bersuhu 356 °F. Dengan rumus $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, berapa derajat Celsius suhu oven itu?

Jawaban: °C

Kunci: 180 °C**Pembahasan:** $F - 32 = 356 - 32 = 324$.

$$C = \frac{5}{9} \times 324 = 5 \times 36 = 180 \text{ °C.}$$

Rumus ini adalah invers dari $F = \frac{9}{5}C + 32$.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Komposisi dalam belanja • 13-3-01

Harga sepatu Rp240.000. Toko memberi diskon 25% dan voucher potongan Rp30.000. Jika diskon dipakai lebih dulu, lalu voucher, harganya A . Jika voucher dipakai lebih dulu, lalu diskon, harganya B . Berapa rupiah $B - A$?

Jawaban: rupiah

Kunci: 7.500 rupiah

Pembahasan: $A = 240.000 \times 0,75 - 30.000 = 180.000 - 30.000 = 150.000$.

$B = (240.000 - 30.000) \times 0,75 = 210.000 \times 0,75 = 157.500$.

$B - A = 7.500$ rupiah, tepat 25% dari nilai voucher. Urutan mesin memang penting!

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Mencari fungsi dalam komposisi • 13-3-02

Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 6x - 5$. Fungsi $g(x)$ adalah...

A. $3x - 2$

C. $3x - 3$

B. $6x - 6$

D. $12x - 9$

Kunci: C

Pembahasan: $f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 6x - 5$.

$2g(x) = 6x - 6 \Rightarrow g(x) = 3x - 3$.

Cek: $f(3x - 3) = 2(3x - 3) + 1 = 6x - 5$. ✓

Pengecoh $12x - 9$ adalah $f(6x - 5)$, yaitu memasukkan komposisinya ke f sekali lagi.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Invers fungsi pecahan • 13-3-03

Diketahui $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, $x \neq 1$. Hitung $f^{-1}(5)$.

Jawaban:

Kunci: 3,5

Pembahasan: Selesaikan $\frac{3x+2}{x-1} = 5$: $3x+2 = 5x-5 \Rightarrow 7 = 2x \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Cek: $f(3,5) = \frac{12,5}{2,5} = 5$. ✓

(Rumus lengkapnya $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3}$.)

12. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Asimtot • 13-3-04

Asimtot tegak dan asimtot datar grafik $f(x) = \frac{4x-1}{2x+6}$ berturut-turut adalah...

A. $x = 3$ dan $y = 2$

C. $x = -6$ dan $y = -\frac{1}{6}$

B. $x = -3$ dan $y = 4$

D. $x = -3$ dan $y = 2$

Kunci: D

Pembahasan: Asimtot tegak: $2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$.

Asimtot datar: untuk x sangat besar, $f(x) \approx \frac{4x}{2x} = 2$, jadi $y = 2$.

Contoh: $f(1000) = \frac{3999}{2006} \approx 1,994$.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Komposisi • gaya IGCSE • 13-4-01

Diketahui $f(x) = 5 - 2x$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Dalam notasi IGCSE, $fg(x)$ berarti $f(g(x))$. **Hitung** $fg(-2)$.

Jawaban:

Kunci: -5

Pembahasan: $g(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$.

$f(5) = 5 - 2 \cdot 5 = -5$.

Jadi $fg(-2) = -5$. (Bandingkan $gf(-2) = g(9) = 82$.)

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Fungsi invers • gaya IGCSE • 13-4-02

Diketahui $f(x) = 3x - 4$. **Selesaikan** persamaan $f(x) = f^{-1}(x)$.

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: $y = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{3}$, jadi $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$.

$3x - 4 = \frac{x+4}{3} \Rightarrow 9x - 12 = x + 4 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$.

Cek: $f(2) = 2$ dan $f^{-1}(2) = 2$. Titik $(2, 2)$ ada di garis $y = x$, tempat grafik f dan cerminnya bertemu.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Transformasi titik • gaya IGCSE • 13-4-03

Titik $(4, -3)$ terletak pada grafik $y = f(x)$. Titik manakah yang **pasti** terletak pada grafik $y = 2f(x - 1) + 5$?

A. $(5, -1)$

C. $(5, 4)$

B. $(3, -1)$

D. $(5, 2)$

Kunci: A

Pembahasan: $f(x - 1)$: geser kanan 1, jadi x menjadi $4 + 1 = 5$.

$2f(\dots) + 5$: nilai y dikali 2 lalu ditambah 5: $2(-3) + 5 = -1$.

Titik baru $(5, -1)$. Cek: $2f(5 - 1) + 5 = 2f(4) + 5 = -6 + 5 = -1$. ✓

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Komposisi & invers • gaya IGCSE • 13-4-04

Diketahui $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$.

(a) **Tentukan** $gf(x)$ dalam bentuk paling sederhana.

(b) **Tentukan** $f^{-1}(x)$.

(c) **Selesaikan** $gf(x) = \frac{1}{5}$.

(d) **Jelaskan** mengapa $x = 1$ harus dikeluarkan dari domain gf .

Kunci/rubrik: (a) $gf(x) = g(2x - 3) = \frac{1}{2x - 3 + 1} = \frac{1}{2x - 2}$. [2]

(b) $y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$, jadi $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$. [2]

(c) $\frac{1}{2x - 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2x - 2 = 5 \Rightarrow x = 3,5$. [2]

(d) $f(1) = -1$, padahal g tidak menerima input -1 (penyebutnya menjadi nol). Jadi $gf(1)$ tidak terdefinisi. [1]

Pembahasan: Kunci komposisi: output mesin pertama harus termasuk domain mesin kedua. Cek (c): $gf(3,5) = g(4) = \frac{1}{5}$. ✓

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Asimtot invers • gaya IB • 13-5-01

Diketahui $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$, $x \neq 1$. Grafik $y = f^{-1}(x)$ mempunyai asimtot tegak $x = q$ dan asimtot datar $y = p$. Tentukan $p + q$.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: Asimtot f : tegak $x = 1$, datar $y = 2$.

Pencerminan terhadap $y = x$ menukar x dan y : asimtot f^{-1} adalah tegak $x = 2$ dan datar $y = 1$. Jadi $q = 2$, $p = 1$, dan $p + q = 3$.

Cek dengan rumus: $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{x-2}$.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Rangkaian transformasi • gaya IB • 13-5-02

Grafik $y = \sqrt{x}$ ditransformasikan berturut-turut: regang tegak dengan faktor 3, geser 4 satuan ke kanan, lalu geser 2 satuan ke bawah. Hasilnya grafik $y = g(x)$. Hitung $g(13)$.

Jawaban:

Kunci: 7

Pembahasan: Regang tegak 3: $y = 3\sqrt{x}$. Geser kanan 4: $y = 3\sqrt{x-4}$. Geser bawah 2: $g(x) = 3\sqrt{x-4} - 2$.

$g(13) = 3\sqrt{9} - 2 = 9 - 2 = 7$.

Domain g : $x \geq 4$; range: $y \geq -2$.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Domain komposisi • gaya IB • 13-5-03

Diketahui $f(x) = \sqrt{x-1}$ dan $g(x) = 5 - x^2$. Domain terbesar dari $(f \circ g)(x)$ adalah...

A. $x \geq 1$

C. $x \leq -2$ atau $x \geq 2$

B. $-2 \leq x \leq 2$

D. $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

Kunci: B

Pembahasan: $(f \circ g)(x) = \sqrt{(5 - x^2) - 1} = \sqrt{4 - x^2}$.

Syarat: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Pengecoh $x \geq 1$ adalah domain f saja. Pengecoh $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ hanya memastikan $g(x) \geq 0$, padahal f butuh input ≥ 1 .

Sebuah PDAM memakai tarif berjenjang (angka rekaan): biaya beban Rp10.000 per bulan; 10 m³ pertama Rp2.000/m³; pemakaian di atas 10 m³ sampai 20 m³ Rp3.500/m³; di atas 20 m³ Rp5.000/m³. Misalkan $T(v)$ adalah tagihan (rupiah) untuk pemakaian v m³.

(a) Hitung $T(8)$ dan $T(25)$.

(b) Tuliskan $T(v)$ sebagai fungsi sepotong-sepotong dan tunjukkan bahwa grafiknya tidak melompat di $v = 10$ dan $v = 20$.

(c) Jelaskan mengapa T mempunyai invers, lalu hitung $T^{-1}(67.500)$ dan tafsirkan artinya.

Kunci/rubrik: (a) $T(8) = 10.000 + 8 \times 2.000 = 26.000$; $T(25) = 10.000 + 20.000 + 35.000 + 5 \times 5.000 = 90.000$. [2]

(b) $T(v) = 10.000 + 2.000v$ untuk $0 \leq v \leq 10$; $T(v) = 30.000 + 3.500(v - 10)$ untuk $10 < v \leq 20$; $T(v) = 65.000 + 5.000(v - 20)$ untuk $v > 20$. Di $v = 10$ kedua rumus di sekitarnya memberi 30.000, dan di $v = 20$ keduanya memberi 65.000, jadi tidak ada lompatan. [3]

(c) Setiap potongan bergradien positif, jadi T selalu naik (satu-satu) dan punya invers. Karena $67.500 > 65.000$, pakai potongan ketiga: $65.000 + 5.000(v - 20) = 67.500 \Rightarrow v = 20,5$. Artinya keluarga yang membayar Rp67.500 memakai 20,5 m³ air sebulan. [3]

Pembahasan: Fungsi sepotong-sepotong yang selalu naik bisa dibalik potong demi potong. Langkah kuncinya: tentukan dulu potongan mana yang memuat nilai tagihan dengan membandingkannya dengan 30.000 dan 65.000.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Fungsi f memenuhi $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$ untuk setiap bilangan real x , dan $f(0) = 3$. Tentukan $f(10)$.

Jawaban:

Kunci: 103

Pembahasan: Jumlahkan secara teleskopik: $f(10) - f(0) = \sum_{x=0}^9 (2x + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 100$.
Jadi $f(10) = 3 + 100 = 103$.

Polanya: $f(n) = n^2 + 3$ untuk bilangan bulat $n \geq 0$, karena $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

Fungsi f memenuhi $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ untuk setiap $x \neq 0$. Tentukan $f(2)$.

Jawaban:

Kunci: -1

Pembahasan: $x = 2$: $f(2) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

$x = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) = \frac{3}{2}$.

Kalikan persamaan kedua dengan 2: $2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f(2) = 3$. Kurangkan persamaan pertama: $3f(2) = -3$, jadi $f(2) = -1$.

Secara umum, cara yang sama memberi $f(x) = \frac{2}{x} - x$. Cek: $f(2) = 1 - 2 = -1$. ✓

Diketahui $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Notasi $f^{[n]}$ berarti f dikomposisikan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali, misalnya $f^{[2]}(x) = f(f(x))$. Nilai $f^{[2026]}(2)$ adalah...

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. -1

D. -2026

Kunci: C

Pembahasan: Hitung beberapa langkah: $f(2) = -1$, $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$. Kembali ke 2! Polanya berulang setiap 3 langkah.

Memang secara umum $f(f(f(x))) = x$.

$2026 = 3 \times 675 + 1$, jadi $f^{[2026]}(2) = f(2) = -1$.

Fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut *involusi* jika $f(f(x)) = x$ untuk setiap x .

(a) Buktikan bahwa involusi selalu satu-satu dan $f^{-1} = f$.

(b) Buktikan bahwa grafik involusi simetris terhadap garis $y = x$.

(c) Buktikan bahwa satu-satunya involusi yang **naik** (jika $a < b$ maka $f(a) < f(b)$) adalah $f(x) = x$. Berikan pula satu contoh involusi lain.

Kunci/rubrik: (a) Jika $f(a) = f(b)$, terapkan f pada kedua ruas: $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$; jadi f satu-satu.

Setiap y adalah output, yaitu $y = f(f(y))$ dengan input $f(y)$. Karena f membatalkan dirinya sendiri, $f^{-1} = f$. [3]

(b) Jika (a, b) di grafik, $b = f(a)$, maka $f(b) = f(f(a)) = a$, jadi (b, a) juga di grafik. Titik (b, a) adalah cermin (a, b) terhadap $y = x$. [2]

(c) Andaikan ada x dengan $f(x) \neq x$. Jika $f(x) > x$, karena f naik, $f(f(x)) > f(x)$, yaitu $x > f(x)$: kontradiksi. Jika $f(x) < x$, dengan cara yang sama $x < f(x)$: kontradiksi. Jadi $f(x) = x$ untuk setiap x . Contoh involusi lain: $f(x) = -x$ atau $f(x) = 7 - x$. [3]

Pembahasan: Bagian (c) memakai bukti dengan kontradiksi: fungsi naik "menjaga urutan", sehingga tidak mungkin bolak-balik. Involusi terkenal lainnya adalah $f(x) = \frac{1}{x}$ pada $x \neq 0$ dan $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ pada $x \neq 1$, meskipun domainnya bukan seluruh $\mathbb{R}$.

14 Eksponen & Logaritma

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pertumbuhan eksponensial • 14-1-01

Sebuah bakteri membelah menjadi dua setiap jam. Jika mula-mula ada 1 bakteri, berapa banyak bakteri setelah 3 jam?

- A. 6
B. 8
C. 9
D. 4

Kunci: B

Pembahasan: Setiap jam jumlahnya **dikali** 2: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$.

Jadi setelah 3 jam ada $2^3 = 8$ bakteri. Jawaban 6 muncul jika kita keliru menghitung 3×2 .

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Arti pangkat • 14-1-02

Nilai 2^5 adalah...

- A. 10
B. 25
C. 7
D. 32

Kunci: D

Pembahasan: $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Hati-hati: 2^5 bukan $2 \times 5 = 10$, bukan $5^2 = 25$, dan bukan $2 + 5 = 7$.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Logaritma basis 10 • 14-1-03

Tentukan nilai $\log_{10} 1000$.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: Tanyakan: 10 dipangkatkan berapa supaya menjadi 1000?

Karena $10^3 = 1000$, maka $\log_{10} 1000 = 3$. Trik untuk basis 10: hitung banyaknya angka nol!

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Menyusut separuh • 14-1-04

Ayu memotong selembar kertas menjadi dua bagian sama besar, lalu memotong salah satu potongannya menjadi dua lagi, dan seterusnya. Setelah 3 kali memotong, potongan terkecil berukuran berapa bagian dari kertas semula?

- A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{1}{8}$
D. $\frac{1}{9}$

Kunci: C

Pembahasan: Setiap kali dipotong, ukurannya menjadi separuh: $1 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{8}$.

Setelah 3 kali: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Ini contoh peluruhan dengan faktor $\frac{1}{2}$.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Waktu paruh obat • 14-2-01

Seorang pasien menerima 200 mg obat. Waktu paruh obat itu di dalam tubuh 4 jam. Berapa mg obat yang tersisa setelah 12 jam, jika tidak ada dosis tambahan?

Jawaban: mg

Kunci: 25 mg**Pembahasan:** 12 jam = $12 : 4 = 3$ kali waktu paruh. $200 \rightarrow 100 \rightarrow 50 \rightarrow 25$ mg, atau dengan rumus $200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 25$ mg.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Logaritma bernilai negatif • 14-2-02

Nilai $\log_2 \frac{1}{8}$ adalah...

A. -3

C. $\frac{1}{3}$

B. 3

D. $-\frac{1}{3}$ **Kunci: A****Pembahasan:** $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$, jadi $\log_2 \frac{1}{8} = -3$.

Untuk basis lebih dari 1, numerus di antara 0 dan 1 selalu menghasilkan logaritma negatif.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Persamaan eksponen sederhana • 14-2-03

Tentukan nilai x yang memenuhi $3^x = 81$.

Jawaban:

Kunci: 4**Pembahasan:** $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$, jadi $3^x = 3^4$ dan $x = 4$.Dengan kata lain, $x = \log_3 81 = 4$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Bunga majemuk • 14-2-04

Ayu menabung Rp2.000.000 di bank dengan bunga majemuk 10% per tahun. Berapa rupiah saldonya setelah 2 tahun, tanpa penarikan dan tanpa potongan?

Jawaban: rupiah

Kunci: $2,42 \times 10^6$ rupiah**Pembahasan:** Setiap tahun saldo dikali 1,1.Tahun ke-1: $\text{Rp}2.000.000 \times 1,1 = \text{Rp}2.200.000$.Tahun ke-2: $\text{Rp}2.200.000 \times 1,1 = \text{Rp}2.420.000$.

Bunga tahun kedua (Rp220.000) lebih besar daripada bunga tahun pertama (Rp200.000), karena bunga tahun pertama ikut berbunga.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Sifat-sifat logaritma • 14-3-01

Hitung nilai $\log_2 24 + \log_2 6 - \log_2 9$.

Jawaban:

Kunci: 4**Pembahasan:** $\log_2 24 + \log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 \frac{24 \times 6}{9} = \log_2 \frac{144}{9} = \log_2 16 = 4$.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Model pertumbuhan penduduk • 14-3-02

Penduduk sebuah kota 500.000 jiwa dan bertambah 2% setiap tahun. Model yang tepat untuk banyak penduduk P setelah t tahun adalah...

A. $P = 500.000 \cdot (1,2)^t$

C. $P = 500.000 \cdot (0,98)^t$

B. $P = 500.000 + 0,02t$

D. $P = 500.000 \cdot (1,02)^t$

Kunci: D

Pembahasan: Bertambah 2% berarti setiap tahun dikali $1 + 0,02 = 1,02$, jadi $P = 500.000 \cdot 1,02^t$.

Faktor 1,2 berarti naik 20% per tahun, faktor 0,98 berarti turun 2% per tahun, dan model $500.000 + 0,02t$ hanya menambah 0,02 jiwa per tahun!

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Persamaan eksponen dengan substitusi • 14-3-03

Persamaan $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$ mempunyai dua penyelesaian. Berapa jumlah kedua penyelesaian itu?

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $9^x = (3^x)^2$ dan $4 \cdot 3^{x+1} = 12 \cdot 3^x$. Misalkan $u = 3^x$:

$$u^2 - 12u + 27 = 0 \Rightarrow (u - 3)(u - 9) = 0, \text{ jadi } u = 3 \text{ atau } u = 9.$$

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \text{ dan } 3^x = 9 \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Jumlahnya } 1 + 2 = 3. \text{ Cek } x = 2: 81 - 4 \cdot 27 + 27 = 0. \checkmark$$

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Penanggalan karbon-14 • 14-3-04

Waktu paruh karbon-14 sekitar 5.730 tahun. Sepotong kayu kuno mengandung 25% karbon-14 dibandingkan kayu yang masih hidup. Perkirakan umur kayu itu.

Jawaban: tahun

Kunci: 11.460 tahun

Pembahasan: $25\% = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, jadi sudah lewat 2 kali waktu paruh.

$$\text{Umur} \approx 2 \times 5.730 = 11.460 \text{ tahun.}$$

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Penyusutan nilai • gaya IGCSE • 14-4-01

Sebuah mobil dibeli seharga Rp200 juta. Nilainya turun 15% setiap tahun (*depreciation*). **Hitung** nilai mobil setelah 3 tahun, dalam juta rupiah.

Jawaban: juta rupiah

Kunci: 122,825 juta rupiah

Pembahasan: Turun 15% berarti setiap tahun dikali $1 - 0,15 = 0,85$.

$$200 \times 0,85^3 = 200 \times 0,614125 = 122,825.$$

Nilainya ±Rp122,8 juta, bukan $200 - 3 \times 30 = 110$ juta, karena persentase penurunan dihitung dari nilai yang terus mengecil.

Selesaikan persamaan $2^{x+3} = \frac{1}{4}$.

Jawaban:

Kunci: -5

Pembahasan: $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, jadi $2^{x+3} = 2^{-2}$.

Basis sama, maka pangkatnya sama: $x + 3 = -2$, sehingga $x = -5$.

Cek: $2^{-5+3} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. ✓

Grafik $y = 5 \cdot 2^x - 3$ mempunyai asimtot datar (*horizontal asymptote*)...

A. $y = 0$

C. $x = -3$

B. $y = -3$

D. $y = 5$

Kunci: B

Pembahasan: Jika x sangat negatif, 2^x mendekati 0, sehingga y mendekati $5 \cdot 0 - 3 = -3$ tetapi tidak pernah mencapainya.

Grafik $y = 5 \cdot 2^x$ (asimtot $y = 0$) digeser 3 satuan ke bawah, jadi asimtotnya $y = -3$.

Pada awal pengamatan, sebuah aplikasi belajar mempunyai 1.024 pengguna. Banyak pengguna bertambah 25% setiap bulan.

(a) **Tunjukkan** bahwa banyak pengguna setelah 3 bulan adalah 2.000.

(b) **Tuliskan** rumus banyak pengguna P setelah n bulan.

(c) **Tentukan** setelah berapa bulan banyak pengguna pertama kali melebihi 10.000.

Kunci/rubrik: (a) Bertambah 25% berarti dikali 1,25 setiap bulan: $1024 \times 1,25^3 = 1024 \times 1,953125 = 2000$. [2 poin: faktor 1,25 benar 1, hasil 1]

(b) $P = 1024 \times 1,25^n$. [1 poin]

(c) $1024 \times 1,25^n > 10.000 \Rightarrow 1,25^n > 9,765625 \Rightarrow n > \frac{\log 9,765625}{\log 1,25} \approx 10,2$. Cek: $n = 10$ memberi ± 9.537

pengguna dan $n = 11$ memberi ± 11.921 pengguna. Jadi setelah **11 bulan**. [3 poin: pertidaksamaan 1, memakai log atau coba-coba sistematis 1, jawaban bulat yang benar 1]

Pembahasan: Kata kuncinya "bertambah 25%": dikali 1,25 setiap bulan, bukan ditambah 256 pengguna tetap. Pada bagian (c) jawabannya harus bilangan bulat, jadi bulatkan **ke atas** lalu periksa dua bulan di sekitarnya.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Suhu teh (dalam °C) t menit setelah dituang dimodelkan oleh $T(t) = 25 + 65e^{-0,05t}$. Tentukan waktu yang dibutuhkan agar suhu teh turun menjadi 45°C. Bulatkan sampai 2 desimal.

Jawaban: menit

Kunci: 23,57 menit

Pembahasan: $25 + 65e^{-0,05t} = 45 \Rightarrow e^{-0,05t} = \frac{20}{65}$.

$-0,05t = \ln \frac{20}{65} \Rightarrow t = \frac{\ln(65/20)}{0,05} = \frac{\ln 3,25}{0,05} \approx 23,57$ menit.

Makna model: suhu awal $25 + 65 = 90^\circ\text{C}$, dan teh tidak pernah lebih dingin daripada 25°C (suhu ruangan), karena $65e^{-0,05t} > 0$.

Selesaikan $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 1$.

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: $\log_3[(x+1)(x-1)] = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 3^1 \Rightarrow x^2 = 4$, jadi $x = 2$ atau $x = -2$.

Syarat numerus: $x+1 > 0$ dan $x-1 > 0$, jadi $x > 1$. Hanya $x = 2$ yang memenuhi.

Cek: $\log_3 3 + \log_3 1 = 1 + 0 = 1$. ✓

Diketahui $\log_a 2 = p$ dan $\log_a 3 = q$. Bentuk $\log_a \frac{18}{a}$ dalam p dan q adalah...

A. $p + 2q - 1$

C. $p + 2q$

B. $2p + q - 1$

D. $2pq - 1$

Kunci: A

Pembahasan: $\log_a \frac{18}{a} = \log_a 18 - \log_a a = \log_a (2 \cdot 3^2) - 1 = \log_a 2 + 2 \log_a 3 - 1 = p + 2q - 1$.

Konsentrasi suatu obat di dalam darah (mg/L) dimodelkan oleh $C(t) = 40e^{-kt}$, dengan t dalam jam sejak obat diberikan. Setelah 3 jam, konsentrasinya 20 mg/L.

(a) Tunjukkan bahwa $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$.

(b) Hitung konsentrasi setelah 8 jam.

(c) Obat dianggap efektif selama $C \geq 5$ mg/L. Tentukan berapa jam obat itu efektif.

(d) Jelaskan arti waktu paruh dalam konteks ini.

Kunci/rubrik: (a) $40e^{-3k} = 20 \Rightarrow e^{-3k} = \frac{1}{2} \Rightarrow -3k = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$. [2]

(b) $C(8) = 40e^{-8 \ln 2 / 3} = 40 \cdot 2^{-8/3} \approx 6,30$ mg/L. [2]

(c) $40e^{-kt} = 5 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = \frac{\ln 8}{k} = \frac{3 \ln 2}{(\ln 2)/3} = 9$ jam. [2]

(d) Waktu paruhnya 3 jam: setiap 3 jam konsentrasi tinggal separuhnya ($40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5$ mg/L), berapa pun konsentrasi awalnya. [1]

Pembahasan: Bagian (c) bisa dicek tanpa kalkulator: $40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5$ butuh tiga kali waktu paruh, yaitu $3 \times 3 = 9$ jam. Model seperti ini membantu tenaga kesehatan memperkirakan jadwal dosis; dalam praktik, dokter juga mempertimbangkan banyak faktor lain.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Berapa banyak digit bilangan 5^{100} jika ditulis dalam basis sepuluh? Gunakan $\log 2 \approx 0,30103$.

Jawaban: digit

Kunci: 70 digit

Pembahasan: $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 \approx 0,69897$.

$\log 5^{100} = 100 \log 5 \approx 69,897$, jadi $10^{69} \leq 5^{100} < 10^{70}$.

Banyak digitnya $69 + 1 = 70$.

Bonus: 2^{100} punya 31 digit, dan $31 + 70 = 101$, tepat banyak digit $2^{100} \cdot 5^{100} = 10^{100}$. Kebetulan? Coba selidiki untuk 2^n dan 5^n yang lain!

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pola bilangan • 15-1-01

Tiga suku berikutnya dari barisan 2, 5, 8, 11, ... adalah...

- A. 13, 15, 17
B. 14, 17, 20
C. 14, 18, 22
D. 12, 13, 14

Kunci: B

Pembahasan: Setiap suku bertambah 3, jadi bedanya $b = 3$.
 $11 + 3 = 14$, lalu $14 + 3 = 17$, lalu $17 + 3 = 20$.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengenali barisan geometri • 15-1-02

Manakah yang merupakan barisan geometri?

- A. 2, 4, 6, 8, ...
B. 1, 4, 9, 16, ...
C. 3, 6, 12, 24, ...
D. 5, 10, 15, 20, ...

Kunci: C

Pembahasan: Pada barisan geometri, setiap suku diperoleh dengan **mengalikan** suku sebelumnya dengan bilangan yang sama.

3, 6, 12, 24: setiap suku dikali 2, jadi $r = 2$. ✓

2, 4, 6, 8 dan 5, 10, 15, 20 adalah barisan aritmetika (ditambah bilangan tetap), sedangkan 1, 4, 9, 16 adalah barisan bilangan kuadrat.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Celengan mingguan • 15-1-03

Pada minggu pertama Dimas memasukkan Rp2.000 ke celengan. Setiap minggu berikutnya ia memasukkan Rp1.000 lebih banyak daripada minggu sebelumnya. Berapa rupiah yang ia masukkan pada minggu ke-10?

Jawaban: rupiah

Kunci: 11.000 rupiah

Pembahasan: Setoran mingguan membentuk barisan aritmetika dengan $a = 2.000$ dan $b = 1.000$.

$$U_{10} = a + 9b = 2.000 + 9 \times 1.000 = 11.000.$$

Jadi pada minggu ke-10 Dimas memasukkan Rp11.000. Ingat, dari minggu ke-1 ke minggu ke-10 hanya ada 9 kenaikan.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Beda barisan • 15-1-04

Beda barisan 20, 17, 14, 11, ... adalah...

- A. 3
B. 14
C. -6
D. -3

Kunci: D

Pembahasan: Beda = suku kedua – suku pertama = $17 - 20 = -3$.

Cek: $14 - 17 = -3$ dan $11 - 14 = -3$. ✓

Tanda negatif berarti barisannya **turun**.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Pola korek api • 15-2-01

Pola korek api di bawah ini terdiri atas 1, 2, dan 3 persegi yang berjajar. Berapa batang korek api yang dibutuhkan untuk pola ke-10 (10 persegi berjajar)?



Jawaban: batang

Kunci: 31 batang

Pembahasan: Banyak batang: pola 1 = 4, pola 2 = 7, pola 3 = 10. Setiap persegi baru menambah 3 batang (atas, bawah, kanan), karena sisi kirinya dipakai bersama.

Barisan aritmetika dengan $a = 4$ dan $b = 3$: $U_{10} = 4 + 9 \times 3 = 31$.

Rumus umumnya $U_n = 3n + 1$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Deret 1 sampai n • 15-2-02

Pada hari ke-1 Ancil makan 1 butir kacang, pada hari ke-2 makan 2 butir, pada hari ke-3 makan 3 butir, dan seterusnya. Berapa butir kacang yang ia makan selama 60 hari?

Jawaban: butir

Kunci: 1.830 butir

Pembahasan: Ini deret $1 + 2 + 3 + \dots + 60$.

Trik Gauss: $S_{60} = \frac{60}{2}(1 + 60) = 30 \times 61 = 1.830$ butir.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Suku ke-n barisan geometri • 15-2-03

Suku ke-6 barisan geometri 3, 6, 12, ... adalah...

- A. 96
B. 48
C. 192
D. 18

Kunci: A

Pembahasan: $a = 3$ dan $r = 2$, jadi $U_6 = 3 \cdot 2^5 = 3 \times 32 = 96$.

48 adalah suku ke-5, 192 adalah suku ke-7, dan 18 adalah hasil jika barisannya dikira aritmetika (3, 6, 9, 12, 15, 18).

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Penyusutan harga • 15-2-04

Harga sebuah motor bekas Rp20 juta. Setiap tahun harganya turun 10% dari harga tahun sebelumnya. Berapa harganya setelah 3 tahun? Tulis dalam juta rupiah.

Jawaban: juta rupiah

Kunci: 14,58 juta rupiah

Pembahasan: Turun 10% berarti tersisa 90%, yaitu dikali 0,9. Harganya membentuk barisan geometri dengan $r = 0,9$.

Setelah 3 tahun: $20 \times 0,9^3 = 20 \times 0,729 = 14,58$ juta rupiah.

Bukan $20 - 3 \times 2 = 14$ juta, karena 10% dihitung dari harga yang terus mengecil.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kursi gedung pertunjukan • 15-3-01

Baris pertama sebuah gedung pertunjukan berisi 18 kursi. Setiap baris di belakangnya berisi 3 kursi lebih banyak daripada baris di depannya. Gedung itu memiliki 25 baris. Berapa banyak kursi seluruhnya?

Jawaban: kursi

Kunci: 1.350 kursi

Pembahasan: Barisan aritmetika $a = 18, b = 3, n = 25$.

Baris terakhir: $U_{25} = 18 + 24 \times 3 = 90$.

$S_{25} = \frac{25}{2}(18 + 90) = 25 \times 54 = 1.350$ kursi.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Jumlah kelipatan • 15-3-02

Hitunglah jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 200 yang habis dibagi 7.

Jawaban:

Kunci: 2.842

Pembahasan: Kelipatan 7: 7, 14, 21, ..., 196 (karena $7 \times 28 = 196$ dan $7 \times 29 = 203 > 200$). Banyak suku $n = 28$.

$S_{28} = \frac{28}{2}(7 + 196) = 14 \times 203 = 2.842$.

Cara lain: $7(1 + 2 + \dots + 28) = 7 \times 406 = 2.842$.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Dua suku barisan geometri • 15-3-03

Suku ke-2 sebuah barisan geometri adalah 6 dan suku ke-5 adalah 162. Suku ke-7 barisan itu adalah...

A. 486

C. 4374

B. 1458

D. 729

Kunci: B

Pembahasan: $\frac{U_5}{U_2} = r^3 = \frac{162}{6} = 27$, jadi $r = 3$.

$U_7 = U_5 \cdot r^2 = 162 \times 9 = 1.458$.

486 adalah suku ke-6, 4.374 suku ke-8, dan 729 adalah 3^6 tanpa dikali suku pertama $a = 2$.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Lintasan bola memantul • 15-3-04

Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 10 m. Setiap kali memantul, bola mencapai $\frac{3}{5}$ tinggi sebelumnya. Berapa panjang seluruh lintasan bola sampai berhenti?

Jawaban: m

Kunci: 40 m

Pembahasan: Jatuh pertama 10 m. Tinggi pantulan: 6; 3,6; 2,16; ... adalah deret geometri tak hingga dengan $a = 6$ dan $r = \frac{3}{5}$, jumlahnya $\frac{6}{1 - \frac{3}{5}} = 15$ m.

Setiap pantulan dihitung naik dan turun: $2 \times 15 = 30$ m.

Panjang lintasan = $10 + 30 = 40$ m. Cek dengan rumus $h \frac{1+r}{1-r} = 10 \times \frac{1,6}{0,4} = 40$. ✓

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Rumus suku ke- n • gaya IGCSE • 15-4-01

Barisan aritmetika 5, 9, 13, 17, ... memiliki suku ke- n berbentuk $U_n = pn + q$ (n th term). **Tentukan** rumus itu, lalu **hitung** nomor suku pertama yang nilainya lebih dari 200.

Jawaban:

Kunci: 50

Pembahasan: $U_n = 5 + (n - 1) \times 4 = 4n + 1$.

$4n + 1 > 200 \Rightarrow n > 49,75$. Karena n bilangan asli, $n = 50$.

Cek: $U_{49} = 197$ (belum) dan $U_{50} = 201$ (sudah lebih dari 200).

14. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Apakah termasuk suku? • gaya IGCSE • 15-4-02

Manakah bilangan berikut yang merupakan suku barisan 3, 7, 11, 15, ...?

A. 2026

C. 2027

B. 2028

D. 2029

Kunci: C

Pembahasan: $U_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$. Bilangan x adalah suku jika $\frac{x+1}{4}$ bilangan asli.

$2027 + 1 = 2028 = 4 \times 507$, jadi 2027 adalah suku ke-507. ✓

Untuk 2026, 2028, dan 2029, nilai $x + 1$ adalah 2027, 2029, dan 2030, yang tidak habis dibagi 4.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Barisan kuadratik • gaya IGCSE • 15-4-03

Perhatikan barisan 3, 8, 15, 24, 35, ...

Tunjukkan bahwa selisih kedua barisan ini tetap, lalu **tentukan** suku ke-20.

Jawaban:

Kunci: 440

Pembahasan: Selisih pertama: 5, 7, 9, 11. Selisih kedua: 2, 2, 2 (tetap), jadi rumusnya berderajat dua dengan koefisien n^2 sebesar $\frac{2}{2} = 1$.

Hitung $U_n - n^2$: $3 - 1 = 2$, $8 - 4 = 4$, $15 - 9 = 6$, yaitu $2n$. Jadi $U_n = n^2 + 2n = n(n + 2)$.

$U_{20} = 20 \times 22 = 440$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Deret geometri terbatas • gaya IGCSE • 15-4-04

Sebuah deret geometri memiliki suku pertama 80 dan rasio 0,5.

(a) **Tuliskan** empat suku pertamanya.

(b) **Hitung** jumlah enam suku pertama.

(c) **Tunjukkan** bahwa jumlah n suku pertama tidak pernah mencapai 160.

(d) **Tentukan** nilai n terkecil sehingga jumlah n suku pertama lebih dari 159.

Kunci/rubrik: (a) 80, 40, 20, 10. [1 poin]

(b) $S_6 = \frac{80(1 - 0,5^6)}{1 - 0,5} = 160 \times \frac{63}{64} = 157,5$. [2 poin]

(c) $S_n = \frac{80(1 - 0,5^n)}{0,5} = 160(1 - 0,5^n)$. Karena $0,5^n > 0$ untuk setiap n , maka $S_n < 160$. [2 poin]

(d) $160(1 - 0,5^n) > 159 \Rightarrow 0,5^n < \frac{1}{160} \Rightarrow 2^n > 160$. Karena $2^7 = 128$ dan $2^8 = 256$, maka $n = 8$. [2 poin]

Pembahasan: Jumlah parsial deret ini mendekati 160 tetapi tidak pernah mencapainya, karena 160 adalah jumlah tak hingganya: $S_\infty = \frac{80}{1 - 0,5} = 160$. Pada bagian (d), cek: $S_7 = 160 - 1,25 = 158,75$ dan $S_8 = 160 - 0,625 = 159,375$.

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Cicilan motor (anuitas) • gaya IB • 15-5-01

Pak Hasan meminjam Rp24 juta untuk membeli motor. Bunganya 1% per bulan (bunga efektif), dan pinjaman dilunasi dengan 24 angsuran bulanan yang sama besar, mulai sebulan setelah pinjaman diterima. Tentukan besar angsuran per bulan, dibulatkan ke ribuan rupiah terdekat.

Jawaban: rupiah

Kunci: $1,13 \times 10^6$ rupiah

Pembahasan: $1,01^{24} \approx 1,26973$, jadi $1,01^{-24} \approx 0,78757$ dan $1 - 0,78757 = 0,21243$.

$A \approx 240.000 : 0,21243 \approx 1.129.763$, dibulatkan menjadi **Rp1.130.000**.

Total pembayaran $\pm 24 \times 1.129.763 \approx \text{Rp}27,1$ juta, jadi total bunganya $\pm \text{Rp}3,1$ juta.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Suku dari rumus jumlah • gaya IB • 15-5-02

Jumlah n suku pertama suatu barisan adalah $S_n = 3n^2 + 2n$ untuk setiap bilangan asli n . Tentukan suku ke-10 barisan itu.

Jawaban:

Kunci: 59

Pembahasan: $U_{10} = S_{10} - S_9 = (300 + 20) - (243 + 18) = 320 - 261 = 59$.

Secara umum $U_n = 3n^2 + 2n - [3(n-1)^2 + 2(n-1)] = 6n - 1$, jadi barisannya aritmetika dengan $a = 5$ dan $b = 6$. Cek: $6 \times 10 - 1 = 59$. ✓

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Syarat konvergen • gaya IB • 15-5-03

Deret geometri tak hingga $1 + \frac{x-1}{2} + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \dots$ konvergen jika dan hanya jika...

A. $x < 3$

C. $-3 < x < 1$

B. $1 < x < 3$

D. $-1 < x < 3$

Kunci: D

Pembahasan: Rasionya $r = \frac{x-1}{2}$. Syarat konvergen: $-1 < \frac{x-1}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Pilihan $x < 3$ melupakan batas bawah: untuk $x = -2$, rasionya $-1,5$ dan deretnya divergen. Pilihan $1 < x < 3$ melupakan rasio negatif yang juga sah.

Seorang pasien meminum 200 mg obat setiap 8 jam. Dalam setiap selang 8 jam, tubuh membuang 60% obat yang ada, sehingga tersisa 40%.

- (a) Tunjukkan bahwa banyak obat dalam tubuh sesaat setelah dosis ke- n adalah $D_n = 200(1 + 0,4 + 0,4^2 + \dots + 0,4^{n-1})$.
- (b) Hitung D_5 .
- (c) Tentukan batas D_n untuk $n \rightarrow \infty$ dan jelaskan maknanya bagi pasien.
- (d) Setelah dosis ke berapa D_n pertama kali melebihi 99% dari batas itu?

Kunci/rubrik: (a) Dosis yang diminum k selang sebelumnya sudah melewati k kali pembuangan, jadi tersisa $200 \times 0,4^k$. Sesaat setelah dosis ke- n , sisa dosis terakhir, dosis sebelumnya, ..., dosis pertama adalah $200, 200(0,4), \dots, 200(0,4)^{n-1}$. Jumlahnya D_n . (Setara dengan $D_{n+1} = 0,4D_n + 200$.) [2 poin]

(b) $D_5 = \frac{200(1 - 0,4^5)}{1 - 0,4} = \frac{200 \times 0,98976}{0,6} \approx 329,9$ mg. [2 poin]

(c) $D_\infty = \frac{200}{1 - 0,4} \approx 333,3$ mg. Kadar obat sesaat setelah minum tidak naik terus, melainkan stabil mendekati ± 333 mg. [2 poin]

(d) $D_n > 0,99D_\infty \Leftrightarrow 1 - 0,4^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,4^n < 0,01$. Karena $0,4^5 = 0,01024$ (belum) dan $0,4^6 \approx 0,0041$ (sudah), jawabannya setelah dosis ke-6. [2 poin]

Pembahasan: Model ini adalah deret geometri dengan $a = 200$ dan $r = 0,4$. Bagian (d) juga bisa diselesaikan dengan logaritma: $n > \frac{\log 0,01}{\log 0,4} \approx 5,03$, jadi $n = 6$. Dokter memilih dosis dan selang waktu agar batas ini berada pada kadar yang efektif dan aman. Model farmakologi sungguhan lebih rumit, tetapi gagasan 'menumpuk menuju batas' inilah dasarnya.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Deret teleskopik • gaya olimpiade • 15-6-01

Hitunglah $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 51}$.

Jawaban:

Kunci: 0,4902

Pembahasan: Setiap suku dapat dipecah: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$.

Jumlahnya menjadi $\frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \right]$. Suku tengah saling menghapus (teleskopik).

Hasilnya $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{51}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{51} = \frac{25}{51} \approx 0,490$.

Barisan (a_n) didefinisikan dengan $a_1 = 3$ dan $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, sehingga $a_2 = 7$, $a_3 = 43$, dan seterusnya.

(a) Buktikan bahwa $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$.

(b) Buktikan bahwa $\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$.

(c) Buktikan bahwa $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2}$ untuk setiap n , dan bahwa jumlah tak hingganya tepat $\frac{1}{2}$.

Kunci/rubrik: (a) $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$. [1 poin]

(b) Dari (a), $\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$ (pecahan parsial). Pindahkan ruas: $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$. [2 poin]

(c) Jumlahkan (b) untuk $k = 1, \dots, n$. Deretnya teleskopik: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$. Karena $a_{k+1} - a_k = (a_k - 1)^2 > 0$, barisannya naik dan semua $a_k \geq 3$, sehingga $\frac{1}{a_{n+1} - 1} > 0$ dan jumlahnya kurang dari $\frac{1}{2}$. Selain itu $a_{k+1} - a_k \geq 4$, jadi a_n membesar tanpa batas, $\frac{1}{a_{n+1} - 1} \rightarrow 0$, dan jumlah tak hingganya tepat $\frac{1}{2}$. [3 poin]

Pembahasan: Contoh: $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = \frac{451}{903}$, dan memang $\frac{1}{2} - \frac{1}{1806} = \frac{902}{1806} = \frac{451}{903}$. Barisan ini tumbuh sangat cepat: $a_4 = 1.807$ dan $a_5 = 3.263.443$. Kuncinya adalah menulis setiap suku sebagai selisih dua bentuk yang berurutan, lalu membiarkan semuanya runtuh seperti teropong.

Bilangan 2025 dapat ditulis sebagai jumlah dua atau lebih bilangan asli berurutan dengan berbagai cara, misalnya $2025 = 1012 + 1013$. Ada berapa cara seluruhnya?

Jawaban: cara

Kunci: 14 cara

Pembahasan: Misalkan ada $k \geq 2$ suku berurutan mulai dari $m \geq 1$. Maka $2025 = \frac{k}{2}(2m + k - 1)$, jadi $4050 = k \cdot L$ dengan $L = 2m + k - 1$.

$L - k = 2m - 1$ ganjil, jadi k dan L berbeda paritas, dan $L > k$. Sebaliknya, setiap pasangan seperti itu memberi $m = \frac{L-k+1}{2}$ yang bulat positif.

$4050 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ punya $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ faktor, jadi ada 15 pasangan dengan $k < L$. Karena faktor 2 hanya muncul sekali, setiap pasangan otomatis berbeda paritas. Buang $k = 1$ (hanya satu suku): tersisa **14** cara.

Contoh: $k = 5$ memberi $403 + 404 + 405 + 406 + 407$, dan $k = 54$ memberi $11 + 12 + \dots + 64$.

Tentukan bilangan asli n terkecil sehingga $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ habis dibagi 2025.

Jawaban:

Kunci: 324

Pembahasan: Syaratnya $n(n+1)$ habis dibagi $2 \cdot 81 \cdot 25$. Faktor 2 selalu ada. Karena $\gcd(n, n+1) = 1$, 81 membagi n atau $n+1$, dan 25 membagi n atau $n+1$. Ada empat kemungkinan:

- $81 \mid n$ dan $25 \mid n$: terkecil $n = 2025$.
- $81 \mid n+1$ dan $25 \mid n+1$: terkecil $n = 2024$.
- $25 \mid n$ dan $81 \mid n+1$: terkecil $n = 1700$ (karena $1701 = 81 \times 21$).
- $81 \mid n$ dan $25 \mid n+1$: tulis $n = 81j$, maka $81j \equiv -1 \pmod{25}$, yaitu $6j \equiv 24$, sehingga $j \equiv 4 \pmod{25}$ dan $n = 324$.

Yang terkecil $n = 324$. Cek: $\frac{324 \times 325}{2} = 52.650 = 26 \times 2.025$. ✓

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Derajat • 16-1-01

Derajat polinomial $P(x) = 5 + 3x^2 - 2x^4 + x$ adalah...

- A. 5
B. -2
C. 4
D. 3

Kunci: C

Pembahasan: Derajat adalah pangkat tertinggi x . Suku-sukunya berpangkat 0, 2, 4, dan 1, jadi derajatnya **4**. Angka 5 adalah suku tetap, sedangkan -2 adalah koefisien utama (koefisien suku berpangkat tertinggi). Urutan penulisan suku tidak memengaruhi derajat.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengenali polinomial • 16-1-02

Manakah bentuk berikut yang **bukan** polinomial?

- A. $x^3 - 2x + 1$
B. $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}$
C. 7
D. $2x^2 + \frac{3}{x}$

Kunci: D

Pembahasan: Pangkat x pada polinomial harus bilangan cacah (0, 1, 2, ...). Suku $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ berpangkat -1, jadi $2x^2 + \frac{3}{x}$ bukan polinomial. Koefisien pecahan atau akar seperti $\frac{1}{2}$ dan $\sqrt{3}$ boleh saja. Bilangan 7 adalah polinomial berderajat 0.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Nilai polinomial • 16-1-03

Diketahui $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. Berapakah $P(2)$?

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: Ganti setiap x dengan 2:
 $P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 = 8 - 8 + 5 = 5$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Bilangan sebagai polinomial • 16-1-04

Bilangan 3.207 dapat ditulis sebagai $P(10)$. Polinomial $P(x)$ yang tepat adalah...

- A. $3x^3 + 2x^2 + 7$
B. $3x^4 + 2x^3 + 7x$
C. $3x^3 + 2x^2 + 7x$
D. $3x^2 + 2x + 7$

Kunci: A

Pembahasan: $3.207 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7$. Ganti 10 dengan x : $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7$ (suku x berkoefisien 0).
Cek pilihan lain: $3x^3 + 2x^2 + 7x$ di $x = 10$ bernilai 3.270, dan $3x^2 + 2x + 7$ bernilai 327.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Perkalian polinomial • 16-2-01

Jabarkan $(x + 3)(x^2 - 2x + 5)$. Berapakah koefisien x pada hasilnya?

Jawaban:

Kunci: -1**Pembahasan:** $(x + 3)(x^2 - 2x + 5) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3x^2 - 6x + 15 = x^3 + x^2 - x + 15$.Suku x : $5x - 6x = -x$, jadi koefisiennya **-1**.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Teorema sisa • 16-2-02

Sisa pembagian $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ oleh $(x - 1)$ adalah...

A. 8

C. 2

B. 4

D. 0

Kunci: B**Pembahasan:** Menurut teorema sisa, sisanya $P(1) = 1 + 4 - 3 + 2 = 4$ (sama dengan jumlah koefisien).Pengecoh: 8 adalah $P(-1)$, hasil keliru memasukkan $x = -1$; 2 adalah suku tetapnya.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Metode Horner • 16-2-03

Dengan metode Horner, bagilah $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ oleh $(x - 2)$. Berapakah koefisien x pada hasil baginya?

Jawaban:

Kunci: -3**Pembahasan:** Horner dengan $a = 2$:turunkan 1; $1 \times 2 = 2$, $-5 + 2 = -3$; $-3 \times 2 = -6$, $2 + (-6) = -4$; $-4 \times 2 = -8$, $8 + (-8) = 0$.Baris bawah 1, -3, -4 | 0: hasil bagi $x^2 - 3x - 4$, sisa 0. Koefisien x adalah **-3**.Bonus: $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, jadi $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x - 2)(x - 4)(x + 1)$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Teorema faktor • 16-2-04

Jika $(x + 2)$ adalah faktor dari $P(x)$, maka pasti...A. $P(2) = 0$ C. $P(0) = 2$ B. $P(0) = -2$ D. $P(-2) = 0$ **Kunci: D****Pembahasan:** Teorema faktor: $(x - a)$ faktor $P(x)$ jika dan hanya jika $P(a) = 0$. Karena $x + 2 = x - (-2)$, nilai $a = -2$, jadi $P(-2) = 0$.Pilihan $P(2) = 0$ adalah jebakan tanda yang paling sering terjadi.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Mencari koefisien • 16-3-01

Tentukan nilai k agar $(x - 3)$ merupakan faktor dari $P(x) = x^3 - 4x^2 + kx - 6$.

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: $P(3) = 27 - 36 + 3k - 6 = 3k - 15$.

$3k - 15 = 0 \Rightarrow k = 5$.

Cek dengan Horner: koefisien 1, -4, 5, -6 dan $a = 3$ menghasilkan 1, -1, 2 | 0. Jadi $P(x) = (x - 3)(x^2 - x + 2)$. ✓

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Volume kardus • 16-3-02

Dari karton berukuran 24 cm × 15 cm, dipotong persegi bersisi 3 cm di keempat pojoknya. Sisi-sisinya lalu dilipat menjadi kotak terbuka. Berapakah volume kotak itu?

Jawaban: cm³

Kunci: 486 cm³

Pembahasan: Alas kotak: $(24 - 6) \times (15 - 6) = 18 \times 9$ cm, tingginya 3 cm.

$V = 18 \times 9 \times 3 = 486$ cm³.

Dengan rumus $V(x) = x(24 - 2x)(15 - 2x)$: $V(3) = 3 \cdot 18 \cdot 9 = 486$. ✓

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Sisa oleh pembagi kuadrat • 16-3-03

Jika $P(x)$ dibagi $(x - 1)$ bersisa 5 dan dibagi $(x + 2)$ bersisa -4, maka sisa pembagian $P(x)$ oleh $x^2 + x - 2$ adalah...

A. $3x + 2$

C. $x + 4$

B. $2x + 3$

D. $-3x + 8$

Kunci: A

Pembahasan: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, jadi $P(x) = (x - 1)(x + 2)H(x) + px + q$.

$x = 1$: $p + q = 5$. $x = -2$: $-2p + q = -4$.

Kurangkan: $3p = 9$, jadi $p = 3$ dan $q = 2$. Sisanya $3x + 2$.

Cek: $3(1) + 2 = 5$ ✓ dan $3(-2) + 2 = -4$ ✓.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Berburu akar • 16-3-04

Tentukan akar **terbesar** dari persamaan $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: Jumlah koefisien $1 - 2 - 5 + 6 = 0$, jadi $x = 1$ adalah akar.

Horner dengan $a = 1$: 1, -2, -5, 6 → 1, -1, -6 | 0. Hasil baginya $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

Akar-akarnya 1, 3, dan -2. Yang terbesar adalah **3**.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Teorema faktor • gaya IGCSE • 16-4-01

Diketahui $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 7x + 6$ dan $(x + 2)$ adalah faktor dari $f(x)$. **Tentukan** nilai a .

Jawaban:

Kunci: -1

Pembahasan: $f(-2) = 2(-8) + a(4) - 7(-2) + 6 = -16 + 4a + 14 + 6 = 4a + 4$.

$4a + 4 = 0 \Rightarrow a = -1$.

Cek: $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x + 2)(2x^2 - 5x + 3) = (x + 2)(2x - 3)(x - 1)$. ✓

14. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Memfaktorkan kubik • gaya IGCSE • 16-4-02

Diketahui $f(x) = x^3 - 7x - 6$.

(a) **Tunjukkan** bahwa $(x + 1)$ adalah faktor dari $f(x)$.

(b) **Faktorkan** $f(x)$ sepenuhnya.

(c) **Selesaikan** persamaan $f(x) = 0$.

Kunci/rubrik: (a) $f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$, jadi menurut teorema faktor $(x + 1)$ adalah faktor. [2 poin: substitusi benar 1, kesimpulan dengan alasan 1]

(b) Horner dengan $a = -1$ pada koefisien 1, 0, -7, -6: 1, -1, -6 | 0. Hasil bagi $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Jadi $f(x) = (x + 1)(x - 3)(x + 2)$. [3 poin: koefisien 0 ditulis 1, hasil bagi benar 1, faktorisasi lengkap 1]

(c) $x = -1$, $x = 3$, atau $x = -2$. [1 poin]

Pembahasan: Jebakan utama ada di bagian (b): suku x^2 tidak tertulis, jadi koefisiennya 0 wajib dimasukkan ke tabel Horner. Cek akhir: jumlah akar $-1 + 3 - 2 = 0$, cocok dengan Vieta karena koefisien x^2 bernilai 0.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Teorema sisa ($ax - b$) • gaya IGCSE • 16-4-03

Hitung sisa pembagian $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ oleh $(2x - 1)$.

Jawaban:

Kunci: -3,5

Pembahasan: Sisa = $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 - 5 = -\frac{7}{2}$.

Jadi sisanya $-\frac{7}{2} = -3,5$.

16. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Akar kembar pada grafik • gaya IGCSE • 16-4-04

Grafik $y = (x - 1)^2(x + 3)$ dan sumbu- x ...

A. memotong di $x = 1$, menyinggung di $x = -3$

B. memotong di $x = -1$ dan $x = 3$

C. menyinggung di $x = 1$, memotong di $x = -3$

D. menyinggung di $x = -1$, memotong di $x = 3$

Kunci: C

Pembahasan: Akar-akarnya: $x = 1$ (kelipatan 2, karena faktor $(x - 1)$ muncul dua kali) dan $x = -3$ (kelipatan 1).

Akar berkelipatan genap membuat grafik **menyinggung** sumbu- x lalu memantul, karena $(x - 1)^2 \geq 0$. Akar berkelipatan ganjil membuat grafik **memotong** sumbu- x .

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Model volume kotak • gaya IB • 16-5-01

Sebuah kotak terbuka dibuat dari karton $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ dengan memotong persegi bersisi $x \text{ cm}$ di keempat pojoknya.

- Tunjukkan bahwa volumenya $V(x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$.
- Tentukan domain x yang masuk akal dan jelaskan alasannya.
- Hitung $V(4)$, $V(5)$, dan $V(6)$. Ukuran potongan mana yang terbaik di antara ketiganya?
- Jelaskan mengapa $V(x)$ mendekati 0 di kedua ujung domain.

Kunci/rubrik: (a) Alas $(40 - 2x)(25 - 2x) = 1000 - 130x + 4x^2$, tinggi x , jadi $V(x) = x(1000 - 130x + 4x^2) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$. [2]

(b) $0 < x < 12,5$: panjang potongan harus positif, dan lebar alas $25 - 2x$ harus positif. [2]

(c) $V(4) = 4 \cdot 32 \cdot 17 = 2.176$; $V(5) = 5 \cdot 30 \cdot 15 = 2.250$; $V(6) = 6 \cdot 28 \cdot 13 = 2.184 \text{ (cm}^3\text{)}$. Potongan 5 cm terbaik. [3]

(d) Saat $x \rightarrow 0$ kotaknya hampir tanpa tinggi; saat $x \rightarrow 12,5$ lebar alasnya hampir nol. Keduanya membuat volume mendekati 0. Ini juga tampak dari akar $V(x) = 0$ di $x = 0$ dan $x = 12,5$. [2]

Pembahasan: Dengan turunan (Bab 29) dapat dibuktikan bahwa $V'(x) = 12x^2 - 260x + 1000 = 4(3x - 50)(x - 5)$, sehingga volume maksimum tepat terjadi di $x = 5$ dengan $V = 2.250 \text{ cm}^3$. Nilai $V(4)$ dan $V(6)$ yang mengapit $V(5)$ sudah memberi petunjuk kuat.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Dua syarat, dua koefisien • gaya IB • 16-5-02

Polinomial $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ mempunyai faktor $(x - 2)$ dan bersisa -12 jika dibagi $(x + 1)$. Tentukan nilai b .

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $p(2) = 8 + 4a + 2b - 6 = 0 \Rightarrow 2a + b = -1$.

$p(-1) = -1 + a - b - 6 = -12 \Rightarrow a - b = -5$.

Jumlahkan: $3a = -6$, jadi $a = -2$ dan $b = a + 5 = 3$.

Cek: $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x - 2)(x^2 + 3)$. ✓

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Rumus Vieta • gaya IB • 16-5-03

Akar-akar persamaan $2x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ adalah α , β , dan γ . Nilai $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ adalah...

A. -5

C. $\frac{5}{2}$

B. 5

D. 3

Kunci: B

Pembahasan: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$.

Vieta: $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$ dan $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = \frac{1}{2}$.

Hasilnya $\frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5$.

20. Lv 5 • IB DP • Isian • Kubik dari grafiknya • gaya IB • 16-5-04

Grafik fungsi kubik $y = f(x)$ memotong sumbu- x di -2 , 1 , dan 4 , serta memotong sumbu- y di $(0, 16)$. Tentukan $f(3)$.

Jawaban:

Kunci: -20

Pembahasan: $f(x) = k(x+2)(x-1)(x-4)$. Di $x = 0$: $k \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-4) = 8k = 16$, jadi $k = 2$.
 $f(3) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-1) = -20$.

Cek kewajaran: $x = 3$ berada di antara akar 1 dan 4 , dan karena $k > 0$ grafiknya berada di bawah sumbu- x pada selang itu. Nilai negatif memang masuk akal.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Sisa pangkat besar • gaya olimpiade • 16-6-01

Sisa pembagian $x^{2026} + 2x^{2025} - 3$ oleh $x^2 - 1$ adalah...

- A. $-2x + 2$ C. $\emptyset$
B. $2x + 2$ D. $2x - 2$

Kunci: D

Pembahasan: Tulis $x^{2026} + 2x^{2025} - 3 = (x-1)(x+1)H(x) + px + q$.

$x = 1$: $1 + 2 - 3 = 0 = p + q$.

$x = -1$: $1 - 2 - 3 = -4 = -p + q$ (ingat $(-1)^{2026} = 1$ dan $(-1)^{2025} = -1$).

Jumlahkan: $2q = -4$, jadi $q = -2$ dan $p = 2$. Sisanya $2x - 2$.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Akar barisan geometri • gaya olimpiade • 16-6-02

Ketiga akar persamaan $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ adalah bilangan real yang membentuk barisan geometri. Tentukan k .

Jawaban:

Kunci: 56

Pembahasan: Misalkan akar-akarnya $\frac{u}{r}$, u , ur . Hasil kali akar $= u^3 = -\frac{-64}{1} = 64$, jadi $u = 4$ dan $x = 4$ pasti akar.
 $P(4) = 64 - 224 + 4k - 64 = 0 \Rightarrow 4k = 224 \Rightarrow k = 56$.

Cek: $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = (x-4)(x^2 - 10x + 16) = (x-2)(x-4)(x-8)$. Akar $2, 4, 8$ memang barisan geometri dengan rasio 2 . ✓

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Polinomial yang hampir identitas • gaya olimpiade • 16-6-03

$P(x)$ adalah polinomial berderajat 3 dengan $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$, dan $P(4) = 5$. Tentukan $P(5)$.

Jawaban:

Kunci: 9

Pembahasan: Misalkan $Q(x) = P(x) - x$. Karena $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ dan Q berderajat 3, maka $Q(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$.

$Q(4) = P(4) - 4 = 1 = c \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, jadi $c = \frac{1}{6}$.

$P(5) = 5 + Q(5) = 5 + \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5 + 4 = 9$.

Pelajarannya: tiga nilai yang "terlalu rapi" adalah petunjuk untuk mengurangi polinomial sederhana lalu memakai teorema faktor.

$P(x)$ adalah polinomial berkoefisien bulat dengan $P(0)$ dan $P(1)$ keduanya ganjil.

(a) Buktikan bahwa untuk bilangan bulat m dan n , selisih $P(m) - P(n)$ habis dibagi $m - n$.

(b) Buktikan bahwa $P(x)$ tidak mempunyai akar bulat.

Kunci/rubrik: (a) Untuk setiap $k \geq 1$, $m^k - n^k = (m - n)(m^{k-1} + m^{k-2}n + \dots + n^{k-1})$, jadi $(m - n) \mid m^k - n^k$. Jika $P(x) = \sum a_k x^k$ dengan a_k bulat, maka $P(m) - P(n) = \sum a_k (m^k - n^k)$, dan setiap sukunya habis dibagi $m - n$. [3]

(b) Ambil bilangan bulat sembarang t . Jika t genap, menurut (a) $P(t) - P(0)$ habis dibagi t yang genap (untuk $t = 0$ selisihnya 0), sehingga $P(t) - P(0)$ genap dan $P(t)$ berparitas sama dengan $P(0)$, yaitu ganjil. Jika t ganjil, $t - 1$ genap sehingga $P(t) \equiv P(1) \pmod{2}$, juga ganjil. Jadi $P(t)$ selalu ganjil dan tidak mungkin 0. [3]

Pembahasan: Lema di (a) adalah 'teorema faktor versi bilangan bulat' dan sangat sering dipakai di olimpiade.

Contoh: $P(x) = x^2 + x + 1$ memenuhi $P(0) = 1$ dan $P(1) = 3$, keduanya ganjil, dan memang tidak punya akar bulat.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Jenis sudut • 17-1-01

Sudut yang besarnya 135° termasuk sudut...

- A. lancip
B. siku-siku
C. tumpul
D. refleks

Kunci: C

Pembahasan: Sudut tumpul besarnya di antara 90° dan 180° . Karena $90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$, sudut 135° termasuk sudut tumpul.

Sudut lancip kurang dari 90° , dan sudut refleks lebih dari 180° .

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Sudut ketiga segitiga • 17-1-02

Dua sudut sebuah segitiga besarnya 50° dan 75° . Berapa derajat sudut ketiganya?

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 55°

Pembahasan: Jumlah ketiga sudut segitiga 180° .

Sudut ketiga = $180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Sudut berpelurus • 17-1-03

Dua sudut saling berpelurus. Jika salah satunya 65° , sudut yang lain besarnya...

- A. 25°
B. 115°
C. 295°
D. 65°

Kunci: B

Pembahasan: Sudut berpelurus berjumlah 180° (ingat: pe-lurus = garis lurus).

$180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

Pilihan 25° adalah penyikunya (jumlahnya 90°), bukan pelurusnya.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Sudut jarum jam • 17-1-04

Pada pukul 3.00, besar sudut terkecil antara jarum jam dan jarum menit adalah...

- A. 30°
B. 45°
C. 180°
D. 90°

Kunci: D

Pembahasan: Jarum menit menunjuk angka 12 dan jarum jam menunjuk angka 3.

Antara dua angka berurutan ada $360^\circ : 12 = 30^\circ$, jadi sudutnya $3 \times 30^\circ = 90^\circ$, sudut siku-siku.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Sudut bertolak belakang • 17-2-01

Dua garis berpotongan. Dua sudut yang saling bertolak belakang besarnya $(5x - 18)^\circ$ dan $(3x + 12)^\circ$. Tentukan nilai x .

Jawaban:

Kunci: 15

Pembahasan: Sudut bertolak belakang sama besar: $5x - 18 = 3x + 12$.

$$5x - 3x = 12 + 18 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15.$$

Cek: $5(15) - 18 = 57$ dan $3(15) + 12 = 57$. Kedua sudutnya 57° .

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Ketaksamaan segitiga • 17-2-02

Manakah tiga panjang lidi berikut yang **dapat** dirangkai menjadi sebuah segitiga?

A. 3 cm, 4 cm, 8 cm

C. 6 cm, 7 cm, 12 cm

B. 5 cm, 5 cm, 10 cm

D. 2 cm, 9 cm, 6 cm

Kunci: C

Pembahasan: Cek apakah dua sisi terpendek berjumlah **lebih dari** sisi terpanjang:

$$3 + 4 = 7 < 8 \times$$

$$5 + 5 = 10, \text{ tidak lebih dari } 10 \text{ (gepeng)} \times$$

$$6 + 7 = 13 > 12 \checkmark$$

$$2 + 6 = 8 < 9 \times$$

Jadi hanya 6 cm, 7 cm, 12 cm yang bisa.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Jumlah sudut poligon • 17-2-03

Berapa jumlah besar semua sudut dalam sebuah segi delapan?

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 1.080 $^\circ$

Pembahasan: Segi delapan dapat dipotong menjadi $8 - 2 = 6$ segitiga dari satu titik sudut.

$$\text{Jumlah sudut dalam} = 6 \times 180^\circ = 1.080^\circ.$$

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Segitiga sama kaki • 17-2-04

Sebuah segitiga sama kaki memiliki sudut puncak 40° . Besar setiap sudut alasnya adalah...

A. 70°

C. 140°

B. 40°

D. 35°

Kunci: A

Pembahasan: Dua sudut alas segitiga sama kaki sama besar, misalkan x .

$$x + x + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 140^\circ \Rightarrow x = 70^\circ.$$

Pilihan 140° adalah jumlah kedua sudut alas, belum dibagi dua.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kuda-kuda atap • 17-3-01

Kuda-kuda (rangka atap) sebuah rumah berbentuk segitiga sama kaki. Kemiringan atapnya, yaitu setiap sudut alas, 32° . Berapa besar sudut di puncak atap?

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 116°

Pembahasan: Kedua sudut alas masing-masing 32° .

Sudut puncak $= 180^\circ - 2 \times 32^\circ = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$.

Atap yang landai (sudut alas kecil) membuat sudut puncaknya tumpul.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Sudut luar segitiga • 17-3-02

Pada segitiga ABC , sisi BC diperpanjang melewati C sampai titik D . Jika $\angle BAC = 48^\circ$ dan $\angle ACD = 115^\circ$, berapa besar $\angle ABC$?

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 67°

Pembahasan: $\angle ACD$ adalah sudut luar di C , jadi $\angle ACD = \angle A + \angle B$.

$115^\circ = 48^\circ + \angle B \Rightarrow \angle B = 67^\circ$.

Cek: $\angle ACB = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$, dan $48^\circ + 67^\circ + 65^\circ = 180^\circ$. ✓

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Poligon beraturan • 17-3-03

Setiap sudut dalam sebuah poligon beraturan besarnya 140° . Berapa banyak sisinya?

Jawaban: sisi

Kunci: 9 sisi

Pembahasan: Sudut luar $= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Jumlah semua sudut luar 360° , jadi $n = 360^\circ : 40^\circ = 9$.

Cek: $(9 - 2) \times 180^\circ = 1.260^\circ = 9 \times 140^\circ$. ✓

12. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Sudut jarum jam • 17-3-04

Pada pukul 4.30, besar sudut terkecil antara jarum jam dan jarum menit adalah...

A. 45°

C. 30°

B. 60°

D. 75°

Kunci: A

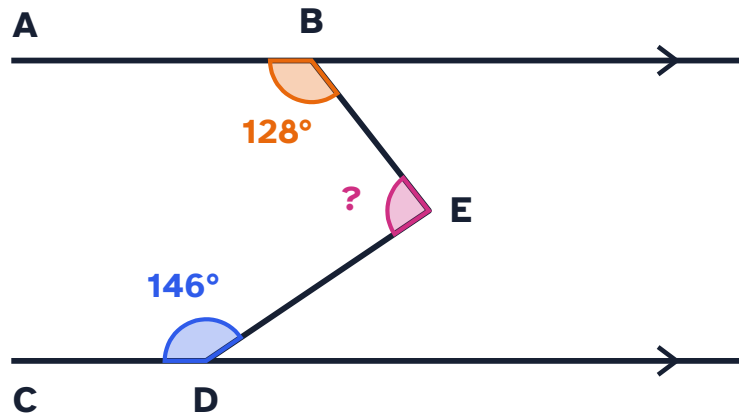
Pembahasan: Diukur dari angka 12: jarum menit di angka 6, yaitu 180° . Jarum jam berada di $4 \times 30^\circ + 30 \times 0,5^\circ = 135^\circ$, tepat di tengah angka 4 dan 5.

Selisihnya $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Dengan rumus: $|30 \times 4 - 5,5 \times 30| = |120 - 165| = 45^\circ$.

Jawaban 60° muncul kalau lupa bahwa jarum jam ikut bergerak.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Garis sejajar • gaya IGCSE • 17-4-01

Pada gambar (tidak berskala), AB sejajar CD . Titik E terletak di antara kedua garis, $\angle ABE = 128^\circ$, dan $\angle CDE = 146^\circ$. **Hitung** $\angle BED$.



Jawaban: $^\circ$

Kunci: 86°

Pembahasan: Tarik garis EF melalui E , sejajar AB dan CD , dengan F di sebelah kiri E .

$\angle ABE$ dan $\angle BEF$ adalah sudut dalam sepihak: $\angle BEF = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$.

$\angle CDE$ dan $\angle DEF$ juga sepihak: $\angle DEF = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$.

$\angle BED = 52^\circ + 34^\circ = 86^\circ$.

Cek cepat: $128^\circ + 146^\circ + 86^\circ = 360^\circ$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Poligon beraturan • gaya IGCSE • 17-4-02

Setiap sudut dalam sebuah poligon beraturan besarnya 5 kali sudut luarnya. **Tentukan** banyak sisi poligon itu.

Jawaban: sisi

Kunci: 12 sisi

Pembahasan: Misalkan sudut luar x , maka sudut dalam $5x$.

$5x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$.

$n = 360^\circ : 30^\circ = 12$. Setiap sudut dalamnya $150^\circ = 5 \times 30^\circ$. ✓

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Sudut dalam bentuk aljabar • gaya IGCSE • 17-4-03

Sudut-sudut sebuah segitiga adalah x° , $2x^\circ$, dan $3x^\circ$. Segitiga itu adalah segitiga...

- | | |
|-----------|--------------|
| A. lancip | C. sama sisi |
| B. tumpul | D. siku-siku |

Kunci: D

Pembahasan: $x + 2x + 3x = 180 \Rightarrow 6x = 180 \Rightarrow x = 30$.

Sudut-sudutnya 30° , 60° , 90° . Ada sudut 90° , jadi segitiga siku-siku.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Sudut segi lima • gaya IGCSE • 17-4-04

Sebuah segi lima memiliki sudut-sudut dalam x° , $(x + 20)^\circ$, $(x + 40)^\circ$, $2x^\circ$, dan $(2x - 10)^\circ$.

(a) **Tunjukkan** bahwa jumlah sudut dalam segi lima adalah 540° .

(b) **Hitung** nilai x .

(c) **Tentukan** sudut terbesarnya, lalu **jelaskan** apakah segi lima itu cembung (semua sudut dalamnya kurang dari 180°).

Kunci/rubrik: (a) Dari satu titik sudut ditarik 2 diagonal sehingga segi lima terbagi menjadi 3 segitiga; jumlahnya $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ (atau $(5 - 2) \times 180^\circ$). [1 poin]

(b) $x + (x + 20) + (x + 40) + 2x + (2x - 10) = 7x + 50 = 540 \Rightarrow 7x = 490 \Rightarrow x = 70$. [2 poin: persamaan 1, penyelesaian 1]

(c) Sudut-sudutnya 70° , 90° , 110° , 140° , 130° . Sudut terbesar 140° . Semua sudut kurang dari 180° , jadi segi lima itu cembung. [2 poin]

Pembahasan: Kunci soal seperti ini: tulis persamaan "jumlah semua sudut = jumlah yang seharusnya". Cek akhir: $70 + 90 + 110 + 140 + 130 = 540$. ✓

Lv 5 • IB DP • gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Jarum jam berimpit • gaya IB • 17-5-01

Diukur dari angka 12, posisi jarum jam pada m menit setelah pukul 3.00 adalah $H(m) = 90 + 0,5m$ derajat, sedangkan posisi jarum menit $M(m) = 6m$ derajat. Tentukan berapa menit setelah pukul 3.00 kedua jarum **pertama kali** berimpit. Berikan jawaban eksak atau dibulatkan dua desimal.

Jawaban: menit

Kunci: 16,3636 menit

Pembahasan: Berimpit: $6m = 90 + 0,5m \Rightarrow 5,5m = 90 \Rightarrow m = \frac{90}{5,5} = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11} \approx 16,36$ menit.

Jadi kedua jarum berimpit sekitar pukul 3.16 lewat 22 detik ($\frac{4}{11}$ menit $\approx 21,8$ detik).

Interpretasi: jarum menit "mengejar" jarum jam dengan kecepatan relatif $5,5^\circ$ per menit, dan jarak awalnya 90° .

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Pola ubin • gaya IB • 17-5-02

Pada sebuah pola ubin, di setiap titik pertemuan bertemu tepat satu persegi, satu segi enam beraturan, dan satu segi- n beraturan, tanpa celah dan tanpa tumpang tindih. Tentukan n .

Jawaban:

Kunci: 12

Pembahasan: Sudut persegi 90° , sudut segi enam beraturan 120° .

Sudut segi- n : $360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ$.

Sudut luarnya 30° , jadi $n = 360^\circ : 30^\circ = 12$.

Pola persegi-segi enam-segi dua belas ini benar-benar ada dan sering dipakai pada lantai dan ornamen.

Misalkan $S(n) = 180(n - 2)$ menyatakan jumlah sudut dalam segi- n (dalam derajat), $n \geq 3$. Pernyataan manakah yang **benar**?

- A. $S(2n) = 2S(n)$ untuk setiap $n \geq 3$
- B. Ada poligon yang jumlah sudut dalamnya 1.000°
- C. $S(3), S(4), S(5), \dots$ membentuk barisan aritmetika dengan beda 180
- D. Setiap sudut dalam segi- n beraturan makin kecil jika n makin besar

Kunci: C

Pembahasan: (A) Salah: $S(2n) = 360n - 360$, sedangkan $2S(n) = 360n - 720$.

(B) Salah: $180(n - 2) = 1.000$ memberi $n = 7, \bar{5}$, bukan bilangan asli.

(C) Benar: $S(n + 1) - S(n) = 180$ untuk setiap n .

(D) Salah: $180 - \frac{360}{n}$ justru makin besar dan mendekati 180° .

Lantai sebuah masjid akan ditutup dengan ubin segi- n beraturan yang semuanya sama, bertemu di titik-titik sudutnya tanpa celah.

- (a) Tunjukkan bahwa besar sudut dalam segi- n beraturan adalah $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.
- (b) Jika k ubin bertemu di satu titik, tunjukkan bahwa $k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$.
- (c) Simpulkan semua nilai n yang mungkin dan banyak ubin yang bertemu di setiap titik.

Kunci/rubrik: (a) Jumlah sudut luar 360° ; karena beraturan, setiap sudut luar $\frac{360^\circ}{n}$, dan sudut dalam adalah pelurusnya: $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. [2 poin]

(b) $k \left(180 - \frac{360}{n} \right) = 360 \Rightarrow k \cdot \frac{180(n-2)}{n} = 360 \Rightarrow k = \frac{2n}{n-2}$. Karena $2n = 2(n-2) + 4$, $k = 2 + \frac{4}{n-2}$. [2 poin]

(c) k bilangan bulat, jadi $n-2$ membagi 4: $n-2 \in \{1, 2, 4\}$, sehingga $n \in \{3, 4, 6\}$ dengan $k = 6, 4, 3$. Hanya segitiga sama sisi, persegi, dan segi enam beraturan yang bisa. [2 poin]

Pembahasan: Inilah alasan ubin lantai biasanya persegi dan sel sarang lebah berbentuk segi enam. Segi lima beraturan (108°) tidak bisa, karena $360 : 108$ bukan bilangan bulat.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Sisi-sisi sebuah segi tujuh cembung diperpanjang sehingga terbentuk bintang bersudut tujuh: setiap ujung bintang dibentuk oleh perpanjangan dua sisi yang mengapit satu sisi segi tujuh. Berapa jumlah ketujuh sudut ujung bintang itu?

Jawaban:°

Kunci: 540°

Pembahasan: Misalkan sudut luar segi tujuh di titik-titik sudutnya $e_1, e_2, \dots, e_7$, dengan $e_1 + \dots + e_7 = 360^\circ$.

Ujung bintang di atas sisi $V_i V_{i+1}$ adalah puncak segitiga yang sudut alasnya e_i dan e_{i+1} , jadi besarnya $180^\circ - e_i - e_{i+1}$.

Jumlah ketujuh ujung = $7 \times 180^\circ - 2(e_1 + \dots + e_7) = 1.260^\circ - 720^\circ = 540^\circ$.

Rumus umumnya $180^\circ(n-4)$; untuk $n=5$ hasilnya 180° , cocok dengan bintang lima di bab ini.

Paling banyak berapa sudut dalam yang **lancip** dapat dimiliki sebuah poligon cembung?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. tak terbatas, asalkan sisinya cukup banyak

Kunci: B

Pembahasan: Jika sudut dalam lancip ($< 90^\circ$), sudut luarnya $> 90^\circ$.

Jumlah semua sudut luar poligon cembung tepat 360° . Empat sudut luar yang masing-masing $> 90^\circ$ sudah berjumlah $> 360^\circ$: mustahil.

Tiga bisa dicapai, misalnya segitiga lancip, atau segi empat dengan sudut $80^\circ, 80^\circ, 80^\circ, 120^\circ$. Jadi paling banyak **3**.

Pada segitiga ABC , $AB = AC$. Titik D terletak pada sisi AC sehingga $AD = BD = BC$. Tentukan besar $\angle BAC$.

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 36°

Pembahasan: Misalkan $\angle BAC = x$.

$AD = BD \Rightarrow \angle ABD = \angle BAD = x$.

$\angle BDC$ adalah sudut luar segitiga ABD : $\angle BDC = x + x = 2x$.

$BD = BC \Rightarrow \angle BCD = \angle BDC = 2x$.

$AB = AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 2x$.

Pada segitiga ABC : $x + 2x + 2x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$.

Segitiga $36^\circ-72^\circ-72^\circ$ ini disebut *segitiga emas*; ia muncul di dalam bintang lima beraturan.

- (a) Dua garis sejajar dipotong sebuah garis transversal. Buktikan bahwa garis bagi dua sudut dalam sepihak saling tegak lurus.
- (b) Pada segitiga ABC , garis bagi $\angle B$ dan $\angle C$ berpotongan di titik I . Buktikan bahwa $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.
- (c) Gunakan (b) untuk menjelaskan mengapa $\angle BIC$ selalu tumpul.

Kunci/rubrik: (a) Misalkan sudut dalam sepihaknya α dan β ; karena garisnya sejajar, $\alpha + \beta = 180^\circ$. Kedua garis bagi dan ruas transversal di antara kedua garis membentuk segitiga dengan dua sudut $\frac{\alpha}{2}$ dan $\frac{\beta}{2}$. Sudut ketiganya $180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. [2 poin]

(b) Pada segitiga BIC : $\angle IBC = \frac{1}{2}\angle B$ dan $\angle ICB = \frac{1}{2}\angle C$. Jadi $\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$. [3 poin]

(c) Karena $0^\circ < \angle A < 180^\circ$, maka $90^\circ < \angle BIC < 180^\circ$: selalu tumpul. [1 poin]

Pembahasan: Kedua bagian memakai ide yang sama: jumlah sudut segitiga 180° dan "separuh dari 180° adalah 90° ". Titik I ini adalah pusat lingkaran dalam segitiga.

18 Teorema Pythagoras

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Hipotenusa • 18-1-01

Pada segitiga siku-siku, sisi yang berhadapan dengan sudut siku-siku disebut...

- A. kaki segitiga
- B. sisi alas
- C. hipotenusa
- D. garis tinggi

Kunci: C

Pembahasan: Sisi di depan sudut 90° disebut **hipotenusa** atau sisi miring. Hipotenusa selalu menjadi sisi terpanjang.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Tripel Pythagoras • 18-1-02

Manakah kelompok bilangan berikut yang merupakan tripel Pythagoras?

- A. 2, 3, 4
- B. 5, 12, 13
- C. 4, 5, 6
- D. 6, 7, 8

Kunci: B

Pembahasan: Cek $a^2 + b^2 = c^2$ untuk sisi terpanjang c :

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2. \checkmark$$

Untuk 2, 3, 4: $4 + 9 = 13 \neq 16$. Untuk 4, 5, 6: $41 \neq 36$. Untuk 6, 7, 8: $85 \neq 64$.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Menghitung hipotenusa • 18-1-03

Sebuah segitiga siku-siku memiliki kaki 6 cm dan 8 cm. Berapa panjang hipotenusanya?

Jawaban: cm

Kunci: 10 cm

Pembahasan: $c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, jadi $c = \sqrt{100} = 10$ cm. Ini tripel 3-4-5 yang dikalikan 2.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Makna teorema • 18-1-04

Pada segitiga siku-siku, persegi digambar pada kaki 3 cm, kaki 4 cm, dan hipotenusa 5 cm. Luas persegi pada hipotenusa sama dengan...

- A. luas persegi pada kaki 3 cm
- B. selisih luas kedua persegi kecil
- C. jumlah luas dua persegi pada kedua kaki
- D. dua kali luas persegi pada kaki 4 cm

Kunci: C

Pembahasan: Inilah isi Teorema Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$. Luas persegi besar $25 = 9 + 16$.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Tangga & tembok • 18-2-01

Tangga sepanjang 5 m bersandar pada tembok tegak. Kaki tangga berada 3 m dari tembok. Berapa tinggi ujung atas tangga dari lantai?

Jawaban: m

Kunci: 4 m

Pembahasan: Tangga = hipotenusa (5 m), jarak ke tembok = kaki (3 m).

$$t^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16, \text{ jadi } t = 4 \text{ m.}$$

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Diagonal layar • 18-2-02

Layar sebuah ponsel berukuran 9 cm × 12 cm. Berapa panjang diagonal layarnya?

Jawaban: cm

Kunci: 15 cm

Pembahasan: Diagonal membagi layar menjadi dua segitiga siku-siku dengan kaki 9 dan 12.

$$d = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm.}$$

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Kebalikan teorema • 18-2-03

Segitiga dengan panjang sisi 7 cm, 24 cm, dan 25 cm adalah segitiga...

A. lancip

C. tumpul

B. siku-siku

D. sama kaki

Kunci: B

Pembahasan: Sisi terpanjang 25. $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Karena sama persis, segitiga itu siku-siku.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Jarak dua titik • 18-2-04

Berapa jarak antara titik $A(1, 2)$ dan $B(7, 10)$?

Jawaban: satuan

Kunci: 10 satuan

Pembahasan: $\Delta x = 7 - 1 = 6$, $\Delta y = 10 - 2 = 8$.

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Diagonal ruang • 18-3-01

Sebuah kardus berukuran 120 cm × 30 cm × 40 cm. Berapa panjang tongkat terpanjang yang dapat dimasukkan lurus ke dalam kardus itu?

Jawaban: cm

Kunci: 130 cm

Pembahasan: $d = \sqrt{120^2 + 30^2 + 40^2} = \sqrt{14400 + 900 + 1600} = \sqrt{16900} = 130 \text{ cm.}$

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Jenis segitiga • 18-3-02

Segitiga dengan sisi 8 cm, 10 cm, dan 13 cm termasuk segitiga...

- A. lancip
B. siku-siku
C. tumpul
D. tidak dapat dibentuk

Kunci: C

Pembahasan: Sisi terpanjang 13. Bandingkan $8^2 + 10^2 = 164$ dengan $13^2 = 169$.

Karena $164 < 169$, sudut di depan sisi 13 lebih dari 90° : segitiga tumpul. (Segitiga bisa dibentuk karena $8 + 10 > 13$.)

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Keliling & diagonal • 18-3-03

Sebuah persegi panjang memiliki keliling 34 cm dan diagonal 13 cm. Berapa luasnya?

Jawaban: cm^2

Kunci: 60 cm^2

Pembahasan: Keliling 34 $\Rightarrow p + l = 17$. Diagonal 13 $\Rightarrow p^2 + l^2 = 169$.

$(p + l)^2 = p^2 + 2pl + l^2 \Rightarrow 289 = 169 + 2pl \Rightarrow pl = 60$.

Luas = 60 cm^2 . (Sisinya ternyata 5 dan 12.)

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Tali penyangga • 18-3-04

Tiang bendera setinggi 12 m ditopang dua tali dari puncak tiang ke dua patok di tanah. Setiap patok berjarak 5 m dari kaki tiang. Berapa total panjang kedua tali?

Jawaban: m

Kunci: 26 m

Pembahasan: Satu tali = hipotenusa dengan kaki 12 dan 5: $\sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$.

Dua tali: $2 \times 13 = 26 \text{ m}$.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Navigasi kapal • gaya IGCSE • 18-4-01

Sebuah kapal berlayar 7 km ke utara, lalu 24 km ke timur. **Hitung** jarak terpendek kapal dari titik awal.

Jawaban: km

Kunci: 25 km

Pembahasan: Arah utara dan timur saling tegak lurus, jadi lintasan dan garis lurus ke titik awal membentuk segitiga siku-siku.

$d = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \text{ km}$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Koordinat • gaya IGCSE • 18-4-02

Titik P berkoordinat $(-3, 4)$ dan titik Q berkoordinat $(5, -2)$. **Hitung** panjang ruas garis PQ .

Jawaban: satuan

Kunci: 10 satuan

Pembahasan: $\Delta x = 5 - (-3) = 8$ dan $\Delta y = -2 - 4 = -6$.

$PQ = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$. Tanda negatif hilang karena dikuadratkan.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Tinggi segitiga sama sisi • gaya IGCSE • 18-4-03

Sebuah segitiga sama sisi memiliki panjang sisi 10 cm. **Hitung** tingginya. Tuliskan jawaban dalam bentuk akar atau dibulatkan 3 angka penting.

Jawaban: cm

Kunci: 8,66 cm

Pembahasan: Garis tinggi membagi alas 10 cm menjadi 5 cm dan 5 cm.

$$t^2 = 10^2 - 5^2 = 75, \text{ jadi } t = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ cm.}$$

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Membuktikan siku-siku • gaya IGCSE • 18-4-04

Untuk setiap bilangan bulat $n > 1$, sebuah segitiga memiliki sisi $n^2 - 1$, $2n$, dan $n^2 + 1$.

(a) **Tunjukkan** bahwa segitiga itu selalu siku-siku.

(b) **Tuliskan** sisi-sisinya untuk $n = 2$ dan $n = 3$.

Kunci/rubrik: (a) $(n^2 - 1)^2 + (2n)^2 = n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2$. Karena jumlah kuadrat dua sisi sama dengan kuadrat sisi ketiga (yang terpanjang), menurut kebalikan Teorema Pythagoras segitiga itu siku-siku. [2 poin: ekspansi benar 1, kesimpulan dengan alasan 1]

(b) $n = 2$: 3, 4, 5. $n = 3$: 8, 6, 10 (yaitu 6, 8, 10). [1 poin]

Pembahasan: Kuncinya mengekspansi kedua ruas lalu membandingkannya. Perhatikan bahwa $n^2 + 1$ selalu sisi terpanjang karena $n^2 + 1 > n^2 - 1$ dan $n^2 + 1 - 2n = (n - 1)^2 > 0$.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Kerucut tumpeng • gaya IB • 18-5-01

Sebuah tumpeng berbentuk kerucut memiliki jari-jari alas 9 cm dan panjang garis pelukis (dari puncak ke tepi alas) 15 cm. Tentukan tinggi tumpeng.

Jawaban: cm

Kunci: 12 cm

Pembahasan: Tinggi, jari-jari, dan garis pelukis membentuk segitiga siku-siku dengan garis pelukis sebagai hipotenusa.

$$t = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Titik pada lingkaran • gaya IB • 18-5-02

Sebuah lingkaran berpusat di $(2, -1)$ dengan jari-jari 5. Titik $(5, k)$ terletak pada lingkaran itu dan $k > 0$. Tentukan k .

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $(5 - 2)^2 + (k - (-1))^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + (k + 1)^2 = 25 \Rightarrow (k + 1)^2 = 16$.

$k + 1 = 4$ atau $k + 1 = -4$, jadi $k = 3$ atau $k = -5$. Karena $k > 0$, $k = 3$.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Jarak 3D • gaya IB • 18-5-03

Jarak antara titik $A(1, 2, 3)$ dan $B(4, 6, 15)$ di ruang adalah...

A. 13

B. 12

C. $\sqrt{109}$

D. 15

Kunci: A

Pembahasan: Rumus jarak tiga dimensi: $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

$\Delta x = 3, \Delta y = 4, \Delta z = 12$. $d = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

20. Lv 5 • IB DP • Uraian • Lintasan semut • gaya IB • 18-5-04

Ruang kelas berbentuk balok $8 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. Seekor semut berada di pojok lantai A dan ingin menuju pojok langit-langit G yang berseberangan.

(a) Hitung panjang diagonal ruang AG .

(b) Semut hanya boleh berjalan di permukaan dinding, lantai, dan langit-langit. Dengan membuka balok menjadi jaring-jaring, tentukan panjang lintasan terpendek semut.

(c) Jelaskan mengapa garis lurus pada jaring-jaring menghasilkan lintasan terpendek di permukaan balok.

Kunci/rubrik: (a) $AG = \sqrt{8^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{109} \approx 10,4 \text{ m}$. [1]

(b) Tiga kemungkinan jaring-jaring: $\sqrt{(8+6)^2 + 3^2} = \sqrt{205} \approx 14,3$; $\sqrt{(8+3)^2 + 6^2} = \sqrt{157} \approx 12,5$; $\sqrt{(6+3)^2 + 8^2} = \sqrt{145} \approx 12,0$. Terpendek $\sqrt{145} \approx 12,0 \text{ m}$. [3: tiap kemungkinan 1]

(c) Membuka jaring-jaring tidak mengubah panjang lintasan di permukaan, dan pada bidang datar jarak terpendek antara dua titik adalah garis lurus. [1]

Pembahasan: Trik jaring-jaring mengubah masalah tiga dimensi menjadi masalah dua dimensi. Lintasan terpendek di permukaan selalu lebih panjang daripada diagonal ruang, karena diagonal ruang menembus udara.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Menghitung tripel • gaya olimpiade • 18-6-01

Ada berapa banyak segitiga siku-siku berbeda dengan panjang sisi bilangan asli yang salah satu **kakinya** 12?

Jawaban: segitiga

Kunci: 4 segitiga

Pembahasan: $144 = (c-b)(c+b)$ dengan $c-b < c+b$. Karena $c-b$ dan $c+b$ berselisih $2b$ (genap), keduanya sama paritas; hasil kalinya genap, jadi keduanya genap.

Pasangan genap: $(2, 72), (4, 36), (6, 24), (8, 18)$. Pasangan $(12, 12)$ memberi $b = 0$, tidak sah.

Hasilnya: $(b, c) = (35, 37), (16, 20), (9, 15), (5, 13)$. Jadi ada **4** segitiga.

22. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Keliling & luas • gaya olimpiade • 18-6-02

Sebuah segitiga siku-siku memiliki keliling 30 dan luas 30. Panjang hipotenusanya adalah...

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

Kunci: B

Pembahasan: Misalkan kaki a, b dan hipotenusa c . Luas $30 \Rightarrow ab = 60$. Keliling $\Rightarrow a + b = 30 - c$.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow (30-c)^2 = c^2 + 120 \Rightarrow 900 - 60c = 120 \Rightarrow c = 13$.

Ternyata segitiganya 5-12-13.

Persegi $ABCD$ memiliki sisi 10. Titik P di dalam persegi memenuhi $PA = PB$, dan jarak P ke sisi CD sama dengan PA . Tentukan PA .

Jawaban:

Kunci: 6,25

Pembahasan: Misalkan $P(5, y)$. Jarak ke CD (garis $y = 10$) adalah $10 - y$, dan $PA = \sqrt{25 + y^2}$.

$$25 + y^2 = (10 - y)^2 = 100 - 20y + y^2 \Rightarrow 20y = 75 \Rightarrow y = 3,75.$$

$$PA = 10 - 3,75 = 6,25.$$

Tripel Pythagoras (a, b, c) disebut primitif jika $\gcd(a, b, c) = 1$.

(a) Buktikan bahwa untuk bilangan asli $m > n$, bilangan $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ membentuk tripel Pythagoras.

(b) Buktikan bahwa jika $\gcd(m, n) = 1$ dan $m - n$ ganjil, tripel tersebut primitif.

(c) Simpulkan bahwa ada tak hingga banyak tripel Pythagoras primitif.

Kunci/rubrik: (a) $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$. [1]

(b) Misalkan prima p membagi $m^2 - n^2$ dan $m^2 + n^2$. Maka p membagi jumlah $2m^2$ dan selisih $2n^2$. Karena $m - n$ ganjil, tepat satu dari m, n genap, sehingga $m^2 + n^2$ ganjil dan $p \neq 2$. Jadi $p \mid m^2$ dan $p \mid n^2$, sehingga $p \mid m$ dan $p \mid n$, bertentangan dengan $\gcd(m, n) = 1$. [3]

(c) Pasangan $(m, n) = (k + 1, k)$ untuk setiap $k \geq 1$ memenuhi syarat (b) dan menghasilkan sisi miring $2k^2 + 2k + 1$ yang berbeda-beda, jadi tripel primitif ada tak hingga banyaknya. [1]

Pembahasan: Bagian (b) memakai teknik standar olimpiade: misalkan ada faktor prima persekutuan, lalu turunkan kontradiksi. Contoh: $(2, 1) \rightarrow (3, 4, 5)$, $(3, 2) \rightarrow (5, 12, 13)$, $(4, 3) \rightarrow (7, 24, 25)$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Keliling atau luas? • 19-1-01

Pak Darto ingin memasang pagar bambu di sekeliling kebunnya. Ukuran yang ia perlukan untuk menghitung panjang pagar adalah...

- A. luas kebun
B. keliling kebun
C. diagonal kebun
D. volume tanah kebun

Kunci: B

Pembahasan: Pagar mengikuti **batas** kebun, jadi yang dihitung adalah panjang seluruh batasnya, yaitu keliling. Luas dipakai kalau kita ingin menutupi permukaan, misalnya menebar pupuk atau menanam rumput.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Luas persegi panjang • 19-1-02

Lantai kamar Dimas berbentuk persegi panjang dengan panjang 4 m dan lebar 3 m. Berapa luas lantai kamar itu?

Jawaban: m²

Kunci: 12 m²

Pembahasan: $L = p \times l = 4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$.

Bayangkan lantai dibagi menjadi petak 1 m × 1 m: ada 3 baris yang masing-masing berisi 4 petak, jadi 12 petak.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Keliling persegi • 19-1-03

Sebuah ubin berbentuk persegi dengan sisi 7 cm. Berapa kelilingnya?

- A. 14 cm
B. 49 cm
C. 28 cm
D. 21 cm

Kunci: C

Pembahasan: Persegi punya 4 sisi yang sama panjang: $K = 4 \times 7 = 28 \text{ cm}$.

Angka 49 adalah luasnya ($7 \times 7 = 49 \text{ cm}^2$), bukan kelilingnya.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Luas segitiga • 19-1-04

Sebuah segitiga memiliki alas 10 cm dan tinggi 6 cm. Luasnya adalah...

- A. 30 cm²
B. 60 cm²
C. 16 cm²
D. 30 cm

Kunci: A

Pembahasan: $L = \frac{1}{2} \times a \times t = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30 \text{ cm}^2$.

Pilihan 60 cm² lupa membagi dua (itu luas persegi panjang 10 × 6). Pilihan 30 cm memakai satuan panjang, padahal luas bersatuan persegi.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Luas jajargenjang • 19-2-01

Sebuah jajargenjang memiliki alas 12 cm, tinggi 5 cm, dan sisi miring 7 cm. Berapa luasnya?

Jawaban: cm²

Kunci: 60 cm²

Pembahasan: Luas jajargenjang = alas × tinggi = $12 \times 5 = 60$ cm².

Sisi miring 7 cm tidak dipakai untuk luas, tetapi dipakai untuk keliling: $2 \times (12 + 7) = 38$ cm.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Luas trapesium • 19-2-02

Penampang saluran irigasi berbentuk trapesium dengan lebar dasar 8 dm, lebar permukaan 14 dm, dan kedalaman 6 dm. Berapa luas penampangnya?

Jawaban: dm²

Kunci: 66 dm²

Pembahasan: Kedalaman saluran adalah tinggi trapesium, sedangkan lebar dasar dan lebar permukaan adalah kedua sisi sejajarnya.

$$L = \frac{1}{2} \times (8 + 14) \times 6 = \frac{1}{2} \times 22 \times 6 = 66 \text{ dm}^2.$$

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Luas layang-layang • 19-2-03

Kerangka layangan Ayu terdiri atas dua bilah bambu yang bersilangan tegak lurus, panjangnya 30 cm dan 48 cm. Berapa luas kertas yang menutupi layangan itu (tanpa lebihan lem)?

A. 1.440 cm²

C. 360 cm²

B. 78 cm²

D. 720 cm²

Kunci: D

Pembahasan: Kedua bilah bambu adalah diagonal layang-layang.

$$L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 48 = 720 \text{ cm}^2.$$

Pilihan 1.440 cm² lupa membagi dua: itu luas persegi panjang pembungkusnya.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Ubin lantai • 19-2-04

Teras rumah berukuran 5 m × 4 m akan dipasang ubin persegi bersisi 50 cm. Berapa banyak ubin yang dibutuhkan?

Jawaban: ubin

Kunci: 80 ubin

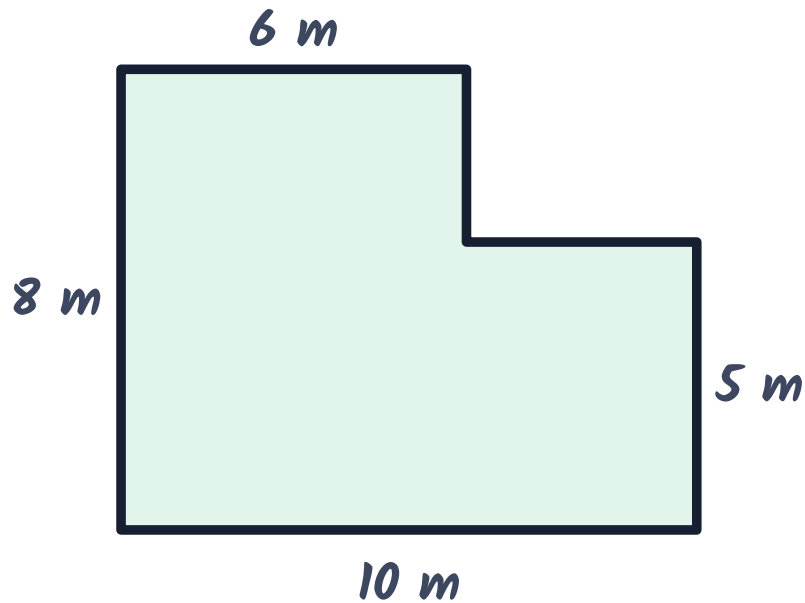
Pembahasan: Samakan satuan: 50 cm = 0,5 m.

Sepanjang 5 m muat $5 : 0,5 = 10$ ubin, sepanjang 4 m muat $4 : 0,5 = 8$ ubin. Jadi $10 \times 8 = 80$ ubin.

Cara lain: $20 \text{ m}^2 : 0,25 \text{ m}^2 = 80$.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Keliling bangun gabungan • 19-3-01

Denah lantai di bawah ini berbentuk huruf L dan semua pojoknya siku-siku. Dua sisi lekukannya tidak diberi ukuran. Berapa keliling lantai itu?



Jawaban: m

Kunci: 36 m

Pembahasan: Sisi lekukan mendatar = $10 - 6 = 4$ m, sisi lekukan tegak = $8 - 5 = 3$ m.

$K = 10 + 5 + 4 + 3 + 6 + 8 = 36$ m.

Trik cepat: geser kedua sisi lekukan ke luar sehingga terbentuk persegi panjang 10×8 . Kelilingnya $2 \times (10 + 8) = 36$ m. Lekukan di pojok tidak mengubah keliling!

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Rumus Heron • 19-3-02

Sebidang tanah berbentuk segitiga dengan sisi 17 m, 25 m, dan 28 m. Hitunglah luasnya.

Jawaban: m²

Kunci: 210 m²

Pembahasan: $s = \frac{17 + 25 + 28}{2} = 35$.

$L = \sqrt{35 \times 18 \times 10 \times 7} = \sqrt{44100} = 210$ m².

Cek: tinggi ke sisi 28 adalah 15 (segitiga ini gabungan segitiga 8-15-17 dan 20-15-25), dan $\frac{1}{2} \times 28 \times 15 = 210$. ✓

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Persegi panjang dari keliling • 19-3-03

Keliling sebuah persegi panjang 30 cm, dan panjangnya dua kali lebarnya. Luasnya adalah...

A. 50 cm²

C. 56,25 cm²

B. 200 cm²

D. 100 cm²

Kunci: A

Pembahasan: $2(p + l) = 30 \Rightarrow p + l = 15$. Dengan $p = 2l$: $3l = 15 \Rightarrow l = 5$ dan $p = 10$.

$L = 10 \times 5 = 50$ cm².

Pilihan 200 cm² muncul jika keliling dikira sama dengan $p + l$; 56,25 cm² adalah luas persegi berkeliling 30 cm.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Belah ketupat & Pythagoras • 19-3-04

Sebuah belah ketupat memiliki sisi 13 cm dan salah satu diagonalnya 24 cm. Berapa luasnya?

Jawaban: cm²

Kunci: 120 cm²

Pembahasan: Setengah diagonal yang diketahui = 12 cm. Sisi 13 cm adalah hipotenusa segitiga siku-siku di pusat, jadi setengah diagonal lainnya = $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Diagonal lainnya 10 cm.

$$L = \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120 \text{ cm}^2.$$

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Trapesium sama kaki • gaya IGCSE • 19-4-01

Trapesium sama kaki $ABCD$ memiliki $AB \parallel DC$, $AB = 22$ cm, $DC = 12$ cm, dan $AD = BC = 13$ cm.

Hitung luas trapesium itu.

Jawaban: cm²

Kunci: 204 cm²

Pembahasan: Kelebihan alas di tiap ujung = $(22 - 12) : 2 = 5$ cm.

$$\text{Tinggi } t = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

$$L = \frac{1}{2} \times (22 + 12) \times 12 = 17 \times 12 = 204 \text{ cm}^2.$$

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Jalan di sekeliling taman • gaya IGCSE • 19-4-02

Sebuah taman persegi panjang berukuran 20 m × 12 m dikelilingi jalan setapak selebar 2 m di sebelah luarnya. **Hitung** luas jalan setapak itu.

Jawaban: m²

Kunci: 144 m²

Pembahasan: Ukuran luar: $(20 + 4) \times (12 + 4) = 24 \times 16 = 384$ m². Luas taman $20 \times 12 = 240$ m².

$$\text{Luas jalan} = 384 - 240 = 144 \text{ m}^2.$$

Jebakan umum: menambahkan 2 m hanya pada satu sisi. Jalan ada di kedua sisi, jadi tiap ukuran bertambah 4 m.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Luas dari koordinat • gaya IGCSE • 19-4-03

Segitiga PQR memiliki titik sudut $P(1, 1)$, $Q(7, 2)$, dan $R(3, 6)$. Luas segitiga PQR adalah...

A. 24 satuan²

C. 14 satuan²

B. 28 satuan²

D. 12 satuan²

Kunci: C

Pembahasan: Cara kotak pembungkus: kotak dari $x = 1$ sampai 7 dan $y = 1$ sampai 6 berukuran $6 \times 5 = 30$.

Kurangi tiga segitiga siku-siku di luar PQR : $\frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 3$ (di bawah PQ), $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ (di kanan atas QR), dan $\frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$ (di kiri PR).

$$\text{Luas} = 30 - 3 - 8 - 5 = 14 \text{ satuan}^2. \text{ (Pilihan 28 lupa membagi dua pada rumus tali sepatu.)}$$

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Keliling, luas, dan diagonal • gaya IGCSE • 19-4-04

Sebuah persegi panjang memiliki keliling 28 cm dan luas 48 cm². Misalkan panjangnya x cm.

(a) **Tunjukkan** bahwa $x^2 - 14x + 48 = 0$.

(b) **Hitung** panjang dan lebarnya.

(c) **Hitung** panjang diagonalnya.

Kunci/rubrik: (a) Keliling 28 $\Rightarrow p + l = 14 \Rightarrow \text{lebar} = 14 - x$. Luas: $x(14 - x) = 48 \Rightarrow 14x - x^2 = 48 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$. [2 poin: lebar dalam x 1, persamaan 1]

(b) $(x - 6)(x - 8) = 0 \Rightarrow x = 6$ atau $x = 8$. Panjang 8 cm dan lebar 6 cm. [2 poin]

(c) $d = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ cm. [1 poin]

Pembahasan: Dua akar 6 dan 8 sebenarnya menggambarkan persegi panjang yang sama, hanya diputar 90°. Diagonal dihitung dengan Teorema Pythagoras dari Bab 18.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Optimasi kandang menempel tembok • gaya IB • 19-5-01

Pak Darto punya 60 m kawat untuk memagari kandang bebek berbentuk persegi panjang. Satu sisi kandang menempel pada tembok sehingga tidak perlu dipagari. Misalkan kedua sisi yang tegak lurus tembok masing-masing x m.

(a) Tunjukkan bahwa luas kandang $L(x) = 60x - 2x^2$.

(b) Tentukan nilai x yang membuat luas maksimum, beserta luas maksimumnya.

(c) Bandingkan dengan kandang persegi yang keempat sisinya dipagari 60 m kawat (tanpa tembok). Mana yang lebih luas, dan berapa selisihnya?

Kunci/rubrik: (a) Kawat dipakai untuk dua sisi x dan satu sisi sejajar tembok, jadi sisi sejajar tembok $= 60 - 2x$. $L = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$. [2 poin]

(b) Parabola terbuka ke bawah dengan puncak di $x = -\frac{60}{2(-2)} = 15$. Sisi sejajar tembok $= 60 - 30 = 30$ m.

$L_{maks} = 15 \times 30 = 450$ m². [3 poin]

(c) Persegi tanpa tembok bersisi 15 m, luasnya 225 m². Kandang yang menempel tembok lebih luas $450 - 225 = 225$ m², dua kali lipatnya. [2 poin]

Pembahasan: Tembok bekerja sebagai pagar gratis. Perhatikan bahwa bentuk terbaiknya bukan persegi, melainkan 15×30 : sisi sejajar tembok dua kali sisi lainnya. Kalau dicerminkan terhadap tembok, kandang dan bayangannya membentuk persegi 30×30 berpagar 120 m, persis jawaban "persegi juara" di subbab 19.2!

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Heron dengan bentuk akar • gaya IB • 19-5-02

Sebuah lahan segitiga memiliki sisi 7 m, 8 m, dan 9 m. Tentukan luasnya dalam bentuk akar sederhana atau tepat sampai 3 angka penting.

Jawaban: m²

Kunci: 26,833 m²

Pembahasan: $s = \frac{7 + 8 + 9}{2} = 12$.

$L = \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{720} = \sqrt{144 \times 5} = 12\sqrt{5} \approx 26,8$ m².

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Aturan trapesium • gaya IB • 19-5-03

Untuk menaksir luas kolam ikan yang tepinya melengkung, Ayu membentangkan tali lurus sepanjang 25 m di sepanjang kolam. Setiap 5 m ia mengukur lebar kolam tegak lurus tali: 0, 6, 8, 7, 4, dan 0 (dalam meter). Dengan membagi kolam menjadi pias-pias trapesium selebar 5 m, taksirlah luas kolam.

Jawaban: m²

Kunci: 125 m²

Pembahasan: Lima pias trapesium bertinggi 5 m:

$$L \approx 5 \times \left[\frac{0+6}{2} + \frac{6+8}{2} + \frac{8+7}{2} + \frac{7+4}{2} + \frac{4+0}{2} \right] = 5 \times (3 + 7 + 7,5 + 5,5 + 2) = 5 \times 25 = 125 \text{ m}^2.$$

Bentuk ringkasnya: $L \approx h \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_5) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \right]$. Inilah *aturan trapesium* yang akan muncul lagi di Bab 30 (integral).

20. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Rumus tali sepatu • gaya IB • 19-5-04

Sebidang tanah berbentuk segi empat dengan titik sudut (0, 0), (8, 0), (10, 6), dan (2, 9), dengan satuan panjang meter. Luas tanah itu adalah...

A. 126 m²

C. 54 m²

B. 72 m²

D. 63 m²

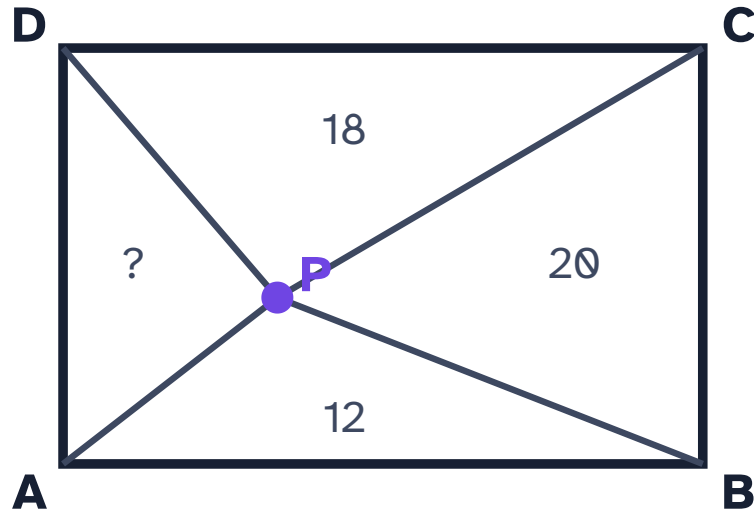
Kunci: D

Pembahasan: Rumus tali sepatu: $2L = |(0 \cdot 0 - 8 \cdot 0) + (8 \cdot 6 - 10 \cdot 0) + (10 \cdot 9 - 2 \cdot 6) + (2 \cdot 0 - 0 \cdot 9)| = |0 + 48 + 78 + 0| = 126$, jadi $L = 63 \text{ m}^2$.

Cek dengan kotak pembungkus $10 \times 9 = 90$ dikurangi tiga segitiga siku-siku di luarnya: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 = 6 + 12 + 9 = 27$. Hasilnya $90 - 27 = 63$. ✓

21. Lv 6 · Olimpiade · Isian · Titik di dalam persegi panjang · gaya olimpiade · 19-6-01

Titik P terletak di dalam persegi panjang $ABCD$. Luas segitiga PAB , PBC , dan PCD berturut-turut 12 cm^2 , 20 cm^2 , dan 18 cm^2 . Berapa luas segitiga PDA ?



Jawaban: cm²

Kunci: 10 cm²

Pembahasan: Segitiga PAB dan PCD beralas sama, $AB = CD = p$, dan tinggi keduanya berjumlah lebar l . Jadi $L_{PAB} + L_{PCD} = \frac{1}{2}pl$, setengah persegi panjang. Dengan cara yang sama, $L_{PBC} + L_{PDA} = \frac{1}{2}pl$. Maka $12 + 18 = 20 + L_{PDA}$, sehingga $L_{PDA} = 10 \text{ cm}^2$. (Luas persegi panjangnya 60 cm^2 .)

22. Lv 6 · Olimpiade · Isian · Pick terbalik · gaya olimpiade · 19-6-02

Berapa banyak titik letis (titik dengan kedua koordinat bilangan bulat) yang terletak **di dalam** segitiga dengan titik sudut $(0, 0)$, $(20, 0)$, dan $(0, 15)$, tidak termasuk titik pada sisi-sisinya?

Jawaban: titik

Kunci: 131 titik

Pembahasan: $L = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 = 150$.

Titik di tepi: sisi mendatar memuat 20 ruas satuan, sisi tegak 15 ruas, dan sisi miring dari $(20, 0)$ ke $(0, 15)$ memuat $FPB(20, 15) = 5$ ruas, dengan titik letis $(16, 3), (12, 6), (8, 9), (4, 12)$ di antaranya. Jadi $B = 20 + 15 + 5 = 40$.

Pick: $150 = I + \frac{40}{2} - 1 \Rightarrow I = 131$.

23. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Segitiga di dalam segitiga • gaya olimpiade • 19-6-03

Segitiga ABC luasnya 63 cm^2 . Titik D , E , dan F berturut-turut terletak pada BC , CA , dan AB sehingga $BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 2$. Luas segitiga DEF adalah...

- A. 7 cm^2
B. 21 cm^2
C. 28 cm^2
D. 42 cm^2

Kunci: B

Pembahasan: Lihat segitiga pojok AFE : $AF = \frac{1}{3}AB$, dan jarak E ke AB sama dengan $\frac{2}{3}$ jarak C ke AB (karena $AE = \frac{2}{3}AC$). Jadi $L_{AFE} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times L_{ABC} = \frac{2}{9} \times 63 = 14$.

Dengan cara yang sama $L_{BDF} = L_{CED} = 14$.

$L_{DEF} = 63 - 3 \times 14 = 21 \text{ cm}^2$, tepat sepertiga segitiga semula.

- (a) Buktikan bahwa di antara semua persegi panjang dengan keliling K , persegi memiliki luas terbesar.
- (b) Buktikan pula bahwa di antara semua persegi panjang dengan luas L , persegi memiliki keliling terkecil.
- (c) Sebidang sawah persegi panjang luasnya 900 m^2 . Berapa panjang pematang keliling terpendek yang mungkin?

Kunci/rubrik: (a) Misalkan sisinya p dan l dengan $p + l = \frac{K}{2}$. Tulis $pl = \left(\frac{p+l}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-l}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{16} - \left(\frac{p-l}{2}\right)^2 \leq \frac{K^2}{16}$.

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $p = l$, yaitu persegi. [3 poin]

(b) Dari $(\sqrt{p} - \sqrt{l})^2 \geq 0$ diperoleh $p + l \geq 2\sqrt{pl} = 2\sqrt{L}$, jadi $K = 2(p + l) \geq 4\sqrt{L}$, dengan kesamaan jika dan hanya jika $p = l$. [2 poin]

(c) $K \geq 4\sqrt{900} = 120 \text{ m}$, tercapai oleh persegi $30 \text{ m} \times 30 \text{ m}$. [1 poin]

Pembahasan: Identitas di bagian (a) punya makna geometri: persegi panjang $p \times l$ selalu "kekurangan" sebuah persegi kecil bersisi $\frac{p-l}{2}$ dibandingkan persegi bersisi rata-ratanya. Ketaksamaan di bagian (b) adalah ketaksamaan AM-GM yang akan kamu temui lagi di Bab 39.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Unsur lingkaran • 20-1-01

Ruas garis dari pusat lingkaran ke sebuah titik pada lingkaran disebut...

- A. diameter
B. jari-jari
C. tali busur
D. busur

Kunci: B

Pembahasan: Ruas garis dari pusat ke tepi lingkaran adalah **jari-jari** (r). Diameter menghubungkan dua titik pada lingkaran melalui pusat, jadi panjangnya dua kali jari-jari.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Juring • 20-1-02

Daerah di dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua jari-jari dan sebuah busur disebut...

- A. juring
B. tembereng
C. apotema
D. tali busur

Kunci: A

Pembahasan: Dua jari-jari + busur membentuk **juring**, seperti sepotong martabak yang ujungnya di pusat. Tembereng dibatasi tali busur dan busur, sedangkan apotema dan tali busur berupa ruas garis, bukan daerah.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Jari-jari & diameter • 20-1-03

Garis tengah (diameter) sebuah tutup panci 24 cm. Berapa panjang jari-jarinya?

Jawaban: cm

Kunci: 12 cm

Pembahasan: Diameter = $2 \times$ jari-jari, jadi $r = d : 2 = 24 : 2 = 12$ cm.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Keliling • 20-1-04

Keliling roda sepeda yang berdiameter 70 cm adalah... ($\pi = \frac{22}{7}$)

- A. 110 cm
B. 440 cm
C. 3.850 cm
D. 220 cm

Kunci: D

Pembahasan: $K = \pi d = \frac{22}{7} \times 70 = 220$ cm.

Pengecoh: 110 cm memakai jari-jari (πr), 440 cm menggandakan diameter dua kali, dan 3.850 adalah luasnya ($\frac{22}{7} \times 35^2$) dengan satuan cm^2 .

5. Lv 2 · Penjelajah · Isian · Luas lingkaran · 20-2-01

Sebuah tampah berbentuk lingkaran bergaris tengah 56 cm. Berapa luas permukaannya? ($\pi = \frac{22}{7}$)

Jawaban: cm²

Kunci: 2.464 cm²

Pembahasan: $r = 56 : 2 = 28$ cm.

$$L = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 28 \times 28 = 22 \times 4 \times 28 = 2.464 \text{ cm}^2.$$

6. Lv 2 · Penjelajah · Isian · Panjang busur · 20-2-02

Jarum menit sebuah jam panjangnya 14 cm. Berapa panjang lintasan ujung jarum menit selama 15 menit? ($\pi = \frac{22}{7}$)

Jawaban: _____ cm

Kunci: 22 cm

Pembahasan: 15 menit = $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ putaran = 90° .

$$\text{Panjang busur} = \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = \frac{1}{4} \times 88 = 22 \text{ cm.}$$

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Sudut keliling • 20-2-03

Pada lingkaran berpusat O , sudut pusat $\angle AOB = 110^\circ$. Titik C terletak pada busur besar AB . Besar $\angle ACB$ adalah...

- A. 110°
B. 220°
C. 55°
D. 125°

Kunci: C

Pembahasan: Sudut keliling = setengah sudut pusat yang menghadap busur yang sama: $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$.

Pengecoh 125° adalah $180^\circ - 55^\circ$, yaitu sudut keliling jika C berada di busur kecil.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Keliling ke jari-jari • 20-2-04

Seutas kawat sepanjang 88 cm dibentuk menjadi sebuah lingkaran utuh. Berapa jari-jari lingkaran itu? ($\pi = \frac{22}{7}$)

Jawaban: _____ cm

Kunci: 14 cm

Pembahasan: Panjang kawat = keliling: $2\pi r = 88$.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 88 \Rightarrow \frac{44}{7}r = 88 \Rightarrow r = 88 \times \frac{7}{44} = 14 \text{ cm.}$$

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Putaran roda • 20-3-01

Roda sebuah motor berdiameter 60 cm berputar 2.000 kali tanpa selip. Berapa kilometer jarak yang ditempuh motor itu? ($\pi = 3,14$)

Jawaban: km

Kunci: 3,768 km

Pembahasan: Keliling roda = $3,14 \times 60 = 188,4$ cm.

$$\text{Jarak} = 2.000 \times 188,4 = 376.800 \text{ cm} = 3.768 \text{ m} = 3,768 \text{ km}.$$

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Luas gelang lingkaran • 20-3-02

Sebuah lapangan berbentuk lingkaran bergaris tengah 40 m. Di sekeliling luar lapangan dibuat lintasan lari selebar 3 m. Berapa luas lintasan itu? ($\pi = 3,14$)

Jawaban: m²

Kunci: 405,06 m²

Pembahasan: Jari-jari lapangan 20 m, jari-jari luar lintasan $20 + 3 = 23$ m.

$$L = \pi(23^2 - 20^2) = 3,14 \times (529 - 400) = 3,14 \times 129 = 405,06 \text{ m}^2.$$

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Luas tembereng • 20-3-03

Sebuah juring dari lingkaran berjari-jari 21 cm memiliki sudut pusat 90°. Berapa luas tembereng yang dibatasi tali busur juring itu dan busurnya? ($\pi = \frac{22}{7}$)

Jawaban: cm²

Kunci: 126 cm²

Pembahasan: Luas juring = $\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 21^2 = \frac{1}{4} \times 1.386 = 346,5 \text{ cm}^2$.

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \times 21 \times 21 = 220,5 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Luas tembereng} = 346,5 - 220,5 = 126 \text{ cm}^2.$$

12. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Teorema Thales • 20-3-04

Titik A , B , dan C terletak pada sebuah lingkaran, dengan AB diameter. Jika $AC = 6$ cm dan $BC = 8$ cm, keliling lingkaran itu adalah...

A. 5π cm

C. 14π cm

B. 10π cm

D. 25π cm

Kunci: B

Pembahasan: Karena AB diameter, $\angle ACB = 90^\circ$ (teorema Thales).

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm, jadi } K = \pi d = 10\pi \text{ cm} \approx 31,4 \text{ cm.}$$

Pengecoh: 14π menjumlahkan 6 + 8, 5π memakai jari-jari, 25π adalah luasnya.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Keliling juring • gaya IGCSE • 20-4-01

Sebuah juring (sector) dari lingkaran berjari-jari 9 cm memiliki sudut pusat 80°. **Hitung** keliling juring itu. Berikan jawaban dalam bentuk eksak atau dibulatkan 3 angka penting.

Jawaban: cm

Kunci: 30,566 cm

Pembahasan: Panjang busur = $\frac{80}{360} \times 2\pi \times 9 = \frac{2}{9} \times 18\pi = 4\pi$ cm.

$$\text{Keliling juring} = 9 + 9 + 4\pi = 18 + 4\pi \approx 30,6 \text{ cm.}$$

Kesalahan umum: lupa menambahkan kedua jari-jari.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Garis singgung • gaya IGCSE • 20-4-02

Garis TA dan TB menyinggung lingkaran berpusat O di titik A dan B . Jari-jari lingkaran 5 cm dan $OT = 13$ cm. **Hitung** luas segi empat $OATB$.

Jawaban: cm^2

Kunci: 60 cm^2

Pembahasan: $\angle OAT = 90^\circ$, jadi $TA = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Luas $\triangle OAT = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \text{ cm}^2$. Segitiga OBT kongruen dengannya.

Luas $OATB = 2 \times 30 = 60 \text{ cm}^2$.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Segi empat tali busur • gaya IGCSE • 20-4-03

$ABCD$ adalah segi empat tali busur (*cyclic quadrilateral*) dengan $\angle ABC = (3x + 10)^\circ$ dan $\angle ADC = (2x - 5)^\circ$. **Tentukan** besar $\angle ADC$.

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 65 $^\circ$

Pembahasan: Sudut berhadapan pada segi empat tali busur berjumlah 180° :

$(3x + 10) + (2x - 5) = 180 \Rightarrow 5x + 5 = 180 \Rightarrow x = 35$.

$\angle ADC = 2(35) - 5 = 65^\circ$. (Cek: $\angle ABC = 115^\circ$, dan $115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$.)

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Juring menjadi kerucut • gaya IGCSE • 20-4-04

Sebuah juring kertas memiliki jari-jari 10 cm dan sudut pusat 72° .

(a) **Tunjukkan** bahwa panjang busurnya 4π cm.

(b) **Hitung** luas juring dalam bentuk π .

(c) Kedua jari-jari juring direkatkan sehingga membentuk selimut kerucut tanpa tumpang tindih. **Hitung** jari-jari alas kerucut itu.

Kunci/rubrik: (a) Busur $= \frac{72}{360} \times 2\pi \times 10 = \frac{1}{5} \times 20\pi = 4\pi$ cm. [2 poin: pecahan sudut 1, hasil 1]

(b) Luas $= \frac{72}{360} \times \pi \times 10^2 = \frac{1}{5} \times 100\pi = 20\pi \text{ cm}^2$. [1 poin]

(c) Busur juring menjadi keliling alas kerucut: $2\pi R = 4\pi$, jadi $R = 2$ cm. [2 poin: gagasan busur = keliling alas 1, hasil 1]

Pembahasan: Kunci bagian (c): saat juring digulung, **busurnya** menjadi lingkaran alas kerucut, sedangkan jari-jari juring menjadi garis pelukis kerucut. Tinggi kerucutnya bisa dihitung dengan Pythagoras: $\sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} \approx 9,8$ cm. Bab 21 membahas kerucut lebih lanjut.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Juring dalam radian • gaya IB • 20-5-01

Sebuah juring berjari-jari r cm memiliki sudut pusat θ radian, dengan $0 < \theta < 2\pi$. Keliling juring itu 20 cm dan luasnya 16 cm^2 . Tentukan θ .

Jawaban: rad

Kunci: 0,5 rad

Pembahasan: Keliling: $2r + r\theta = 20 \Rightarrow r\theta = 20 - 2r$.

Luas: $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r(r\theta) = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = 16 \Rightarrow r^2 - 10r + 16 = 0 \Rightarrow r = 2$ atau $r = 8$.

$r = 2$: $\theta = \frac{20-4}{2} = 8 \text{ rad} > 2\pi$, ditolak.

$r = 8$: $\theta = \frac{20-16}{8} = 0,5 \text{ rad}$. $\checkmark$ (Cek luas: $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 0,5 = 16$.)

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Kecepatan sudut • gaya IB • 20-5-02

Sebuah roda berjari-jari 0,3 m berputar dengan laju tetap 600 putaran per menit. Tentukan kelajuan sebuah titik di tepi roda dalam m/s. Berikan jawaban eksak atau 3 angka penting.

Jawaban: m/s

Kunci: 18,85 m/s

Pembahasan: 600 putaran per menit = 10 putaran per detik.

$$\omega = 10 \times 2\pi = 20\pi \text{ rad/s.}$$

$$v = \omega r = 20\pi \times 0,3 = 6\pi \approx 18,8 \text{ m/s (sekitar 68 km/jam).}$$

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Tembereng (radian) • gaya IB • 20-5-03

Pada lingkaran berjari-jari 6 cm, sebuah tali busur menghadap sudut pusat $\frac{\pi}{3}$ radian. Luas tembereng kecil yang dibatasi tali busur itu adalah...

- A. $6\pi \text{ cm}^2$ C. $6\pi - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$
B. $12\pi - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D. $6\pi - 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Kunci: C

Pembahasan: Luas tembereng = $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} \cdot 36 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6\pi - 9\sqrt{3} \approx 3,26 \text{ cm}^2$.

Pengecoh: 6π hanya luas juring; $12\pi - 9\sqrt{3}$ lupa faktor $\frac{1}{2}$ pada juring; $6\pi - 18\sqrt{3}$ bernilai negatif karena lupa $\frac{1}{2}$ pada segitiga.

20. Lv 5 • IB DP • Uraian • Wiper kaca mobil • gaya IB • 20-5-04

Lengan wiper kaca depan mobil panjangnya 50 cm dan berputar pada porosnya sejauh $\frac{2\pi}{3}$ radian setiap sapuan. Karet wiper terpasang dari jarak 20 cm sampai 50 cm dari poros.

- (a) Hitung panjang lintasan ujung lengan wiper dalam satu sapuan.
(b) Tunjukkan bahwa luas kaca yang disapu dalam satu sapuan adalah $700\pi \text{ cm}^2$.
(c) Wiper menyapu 45 kali per menit. Tentukan kelajuan rata-rata ujung lengan dalam m/s.

Kunci/rubrik: (a) $s = r\theta = 50 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{100\pi}{3} \approx 104,7 \text{ cm. [1]}$

(b) Daerah yang disapu = juring besar – juring kecil = $\frac{1}{2}\theta(R^2 - r^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}(50^2 - 20^2) = \frac{\pi}{3} \times 2.100 = 700\pi \text{ cm}^2$.

[3: rumus juring radian 1, selisih dua juring 1, hasil 1]

(c) Jarak per menit = $45 \times \frac{100\pi}{3} = 1.500\pi \text{ cm} = 15\pi \text{ m}$. Kelajuan = $\frac{15\pi}{60} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 \text{ m/s. [2]}$

Pembahasan: Daerah sapuan wiper berbentuk "juring gelang" (sektor annulus). Dalam radian, rumusnya ringkas: $\frac{1}{2}\theta(R^2 - r^2)$. Jawaban (b) $\approx 2.199 \text{ cm}^2$, sekitar seluas tiga setengah lembar kertas A4.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Lingkaran dalam • gaya olimpiade • 20-6-01

Sebuah segitiga siku-siku memiliki kaki 20 dan 21. Tentukan jari-jari lingkaran dalamnya (lingkaran yang menyinggung ketiga sisi).

Jawaban:

Kunci: 6

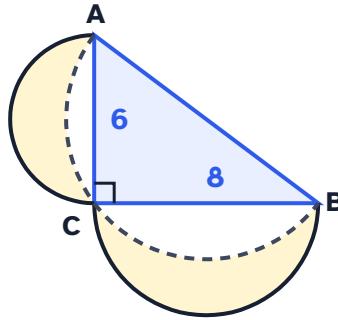
Pembahasan: Hipotenusa = $\sqrt{400 + 441} = 29$.

Di pojok siku-siku, kedua ruas singgung panjangnya r (membentuk persegi bersama pusat). Sisa kaki: $20 - r$ dan $21 - r$, dan ini adalah ruas-ruas singgung dari dua pojok lancip.

Ruas singgung pada hipotenusa juga $20 - r$ dan $21 - r$, jadi $(20 - r) + (21 - r) = 29 \Rightarrow r = 6$.

Rumus umum: $r = \frac{a+b-c}{2}$. (Cek dengan luas: $r \cdot s = \frac{70}{2} \cdot 6 = 210 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21$. ✓)

Segitiga ABC siku-siku di C dengan $AC = 6$ dan $BC = 8$. Setengah lingkaran digambar ke luar segitiga pada sisi AC dan BC , lalu setengah lingkaran dengan diameter AB digambar pada sisi yang memuat C (garis putus-putus). Tentukan jumlah luas kedua daerah berbentuk bulan sabit (kuning).



Jawaban:

Kunci: 24

Pembahasan: Setengah lingkaran pada AC : $\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$. Pada BC : $\frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi$. Pada $AB = 10$: $\frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 = \frac{25}{2}\pi$. Setengah lingkaran besar melewati C (Thales) dan memuat segitiga. Bulan sabit = dua setengah lingkaran kecil + segitiga – setengah lingkaran besar:

$$\frac{9}{2}\pi + 8\pi + 24 - \frac{25}{2}\pi = 24.$$

Semua π saling menghapus karena $3^2 + 4^2 = 5^2$ (Pythagoras!). Luas bulan sabit tepat sama dengan luas segitiga. Hippocrates dari Khios (± 440 SM) menemukannya.

Tiga lingkaran berjari-jari 1 saling bersinggungan luar satu sama lain. Tentukan luas daerah kecil yang dikurung ketiga lingkaran itu (di antara ketiganya).

Jawaban:

Kunci: 0,1613

Pembahasan: Pusat-pusatnya membentuk segitiga sama sisi bersisi $1 + 1 = 2$, dengan luas $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$.

Di setiap pojok, segitiga memuat juring 60° dari satu lingkaran: luasnya $\frac{1}{6}\pi$. Tiga juring: $\frac{1}{2}\pi$.

Daerah yang dikurung $= \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \approx 1,7321 - 1,5708 = 0,1613$.

Dua tali busur AB dan CD sebuah lingkaran berpotongan di titik P di dalam lingkaran.

(a) Buktikan bahwa $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

(b) Lingkaran itu berpusat O dan berjari-jari r , dengan $OP = d$. Buktikan bahwa $PA \cdot PB = r^2 - d^2$ untuk setiap tali busur AB yang melalui P .

Kunci/rubrik: (a) Perhatikan $\triangle PAC$ dan $\triangle PDB$. $\angle CAB = \angle CDB$ karena keduanya sudut keliling yang menghadap busur CB . $\angle APC = \angle DPB$ (bertolak belakang). Jadi $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (sd-sd), sehingga $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, atau $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. [3 poin: sudut keliling 1, kesebangunan 1, perbandingan 1]

(b) Menurut (a), hasil kali itu sama untuk semua tali busur melalui P . Pilih tali busur yang melalui O (diameter): ujung-ujungnya berjarak $r - d$ dan $r + d$ dari P . Jadi $PA \cdot PB = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2$. (Jika $P = O$, hasilnya $r \cdot r = r^2$, juga cocok.) [2 poin]

Pembahasan: Bilangan $r^2 - d^2$ (atau $d^2 - r^2$ untuk titik di luar) disebut **kuasa titik** P . Teknik "pilih kasus khusus yang mudah setelah membuktikan nilainya tetap" sangat sering dipakai di olimpiade.

21 Bangun Ruang: Luas Permukaan & Volume

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Jaring-jaring kubus • 21-1-01

Jaring-jaring sebuah kubus terdiri atas berapa persegi?

- A. 4 C. 8
B. 6 D. 12

Kunci: B

Pembahasan: Kubus punya 6 sisi berbentuk persegi, jadi jaring-jaringnya terdiri atas **6 persegi**. Angka 8 adalah banyak titik sudut, dan 12 adalah banyak rusuk.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Volume kubus • 21-1-02

Sebuah dadu besar berbentuk kubus dengan panjang rusuk 5 cm. Berapa volumenya?

Jawaban: cm^3

Kunci: 125 cm^3

Pembahasan: $V = s^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ cm}^3$. Bayangkan 5 lapis, setiap lapis berisi $5 \times 5 = 25$ kubus satuan.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mengenal bangun ruang • 21-1-03

Bangun ruang yang alasnya lingkaran dan memiliki satu titik puncak, seperti tumpeng, disebut...

- A. tabung C. kerucut
B. bola D. limas segi empat

Kunci: C

Pembahasan: Alas lingkaran + satu titik puncak = **kerucut**. Tabung punya dua lingkaran (alas dan tutup), bola tidak punya alas, dan limas segi empat beralas persegi.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Unsur balok • 21-1-04

Banyak rusuk sebuah balok (misalnya kardus mi instan) adalah...

- A. 6 C. 10
B. 8 D. 12

Kunci: D

Pembahasan: Balok punya 4 rusuk di alas, 4 rusuk di tutup, dan 4 rusuk tegak: $4 + 4 + 4 = 12$ rusuk. Angka 6 adalah banyak sisi dan 8 banyak titik sudut.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Luas permukaan balok • 21-2-01

Sebuah kotak pensil berbentuk balok berukuran $8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Berapa luas permukaannya?

Jawaban: cm^2

Kunci: 158 cm^2

Pembahasan: $L = 2(pl + pt + lt) = 2(8 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = 2(40 + 24 + 15) = 2 \times 79 = 158 \text{ cm}^2$.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Faktor skala volume • 21-3-03

Dua galon air berbentuk sebangun. Tinggi galon besar 2 kali tinggi galon kecil. Galon kecil memuat 3 liter. Galon besar memuat...

- A. 6 liter
B. 24 liter
C. 12 liter
D. 9 liter

Kunci: B

Pembahasan: $k = 2$, jadi volume dikali $k^3 = 8$: $3 \times 8 = 24$ liter.
6 liter berasal dari mengalikan k saja, 12 liter dari k^2 (itu untuk luas).

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kenaikan permukaan air • 21-3-04

Sebuah tangki berbentuk tabung dengan jari-jari 50 cm berisi air. Sebuah bola besi berjari-jari 15 cm dimasukkan dan tenggelam seluruhnya (air tidak tumpah). Berapa cm permukaan air naik?

Jawaban: cm

Kunci: 1,8 cm

Pembahasan: Volume bola = $\frac{4}{3}\pi \times 3.375 = 4.500\pi \text{ cm}^3$.
Kenaikan h memenuhi $\pi \times 2.500 \times h = 4.500\pi$, jadi $h = 4.500 : 2.500 = 1,8$ cm.
Faktor π saling meniadakan, jadi hitungannya bisa tepat.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Luas permukaan prisma • gaya IGCSE • 21-4-01

Sebuah prisma tegak beralas segitiga siku-siku dengan kaki 6 cm dan 8 cm. Panjang prisma 15 cm. **Hitung** luas permukaan prisma.

Jawaban: cm^2

Kunci: 408 cm^2

Pembahasan: Sisi miring alas = $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm.
Dua segitiga: $2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 48 \text{ cm}^2$.
Tiga persegi panjang: $(6 + 8 + 10) \times 15 = 360 \text{ cm}^2$.
Total = $48 + 360 = 408 \text{ cm}^2$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Melebur & mencetak ulang • gaya IGCSE • 21-4-02

Sebuah bola logam padat berjari-jari 6 cm dilebur, lalu seluruh logamnya dicetak menjadi kerucut-kerucut kecil yang berjari-jari alas 3 cm dan tinggi 4 cm. **Hitung** banyak kerucut yang dapat dibuat.

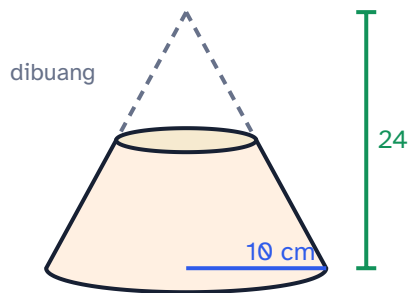
Jawaban: kerucut

Kunci: 24 kerucut

Pembahasan: Volume bola = $\frac{4}{3}\pi \times 216 = 288\pi \text{ cm}^3$.
Volume satu kerucut = $\frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi \text{ cm}^3$.
Banyak kerucut = $288\pi : 12\pi = 24$.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Kerucut terpancung • gaya IGCSE • 21-4-03

Sebuah kerucut berjari-jari alas 10 cm dan tinggi 24 cm dipotong sejajar alasnya tepat di tengah tingginya. Kerucut kecil di bagian atas dibuang, dan sisanya dipakai sebagai pot bunga (lihat gambar). **Hitung** volume pot. Boleh dijawab dalam π .



Jawaban: cm^3

Kunci: 2.199,115 cm^3

Pembahasan: Kerucut besar: $\frac{1}{3}\pi \times 100 \times 24 = 800\pi \text{ cm}^3$.

Kerucut kecil: tinggi 12 cm dan jari-jari 5 cm ($k = \frac{1}{2}$), volumenya $800\pi \times (\frac{1}{2})^3 = 100\pi \text{ cm}^3$.

Pot = $800\pi - 100\pi = 700\pi \approx 2.199 \text{ cm}^3$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Kaleng sebangun • gaya IGCSE • 21-4-04

Dua kaleng biskuit berbentuk tabung saling sebangun. Perbandingan luas permukaannya 9 : 16.

- Tentukan** perbandingan tinggi kedua kaleng.
- Tentukan** perbandingan volumenya.
- Volume kaleng kecil 540 cm^3 . **Hitung** volume kaleng besar.

Kunci/rubrik: (a) Perbandingan luas = k^2 , jadi perbandingan panjang = $\sqrt{9} : \sqrt{16} = 3 : 4$. [1 poin]

(b) Perbandingan volume = $3^3 : 4^3 = 27 : 64$. [1 poin]

(c) $V = 540 \times \frac{64}{27} = 20 \times 64 = 1.280 \text{ cm}^3$. [2 poin: rasio benar 1, hasil 1]

Pembahasan: Kunci soal sebangun: dari luas ke panjang ambil akar kuadrat, dari panjang ke volume pangkatkan tiga. Jangan memakai 9 : 16 langsung untuk volume!

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Optimasi kaleng • gaya IB • 21-5-01

Sebuah kaleng tertutup berbentuk tabung harus bervolume 500 cm^3 . Jari-jari alasnya r cm dan tingginya h cm.

- (a) Tunjukkan bahwa luas permukaannya $A = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$.
 (b) Tentukan nilai r yang membuat A minimum, dan buktikan bahwa nilai itu memang minimum.
 (c) Tunjukkan bahwa pada ukuran optimum $h = 2r$, lalu hitung luas minimumnya.

Kunci/rubrik: (a) $\pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$. Maka $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$. [2]
 (b) $A'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{250}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{250/\pi} \approx 4,30 \text{ cm}$. $A''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3} > 0$, jadi minimum. [3]
 (c) $h = \frac{500}{\pi r^2} = \frac{500 r}{\pi r^3} = \frac{500 r}{250} = 2r$. $A_{\min} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r} \approx 116,2 + 232,5 \approx 348,7 \text{ cm}^2$. [2]

Pembahasan: Strategi pemodelan IB: nyatakan besaran yang dioptimalkan dalam satu variabel memakai kendala (volume tetap), turunkan, lalu periksa jenis titik stasioner. Hasil $h = 2r$ berarti tinggi kaleng sama dengan diameternya.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Laju terkait • gaya IB • 21-5-02

Air dituang ke dalam corong berbentuk kerucut terbalik (puncak di bawah) berjari-jari 6 cm dan tinggi 12 cm dengan laju $10 \text{ cm}^3/\text{detik}$. Seberapa cepat permukaan air naik ketika kedalamannya 8 cm? Jawab dalam cm/detik (3 angka penting).

Jawaban: cm/detik

Kunci: 0,199 cm/detik

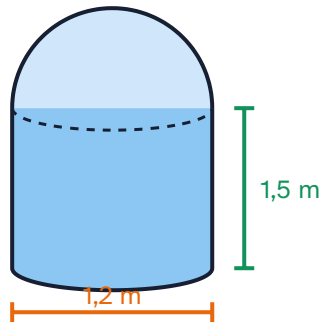
Pembahasan: Karena $r : h = 6 : 12$, $r = \frac{h}{2}$ dan $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \cdot \frac{dh}{dt}. \text{ Pada } h = 8: 10 = 16\pi \cdot \frac{dh}{dt}.$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{16\pi} = \frac{5}{8\pi} \approx 0,199 \text{ cm/detik. Makin dalam airnya, makin lambat permukaan naik, karena corong makin lebar.}$$

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Pemodelan tandon • gaya IB • 21-5-03

Sebuah tandon dimodelkan sebagai tabung berdiameter 1,2 m dan tinggi 1,5 m dengan tutup berbentuk setengah bola berdiameter sama (lihat gambar). Hitung kapasitas tandon dalam liter, dibulatkan ke liter terdekat.



Jawaban: liter

Kunci: 2.149 liter

Pembahasan: Tabung: $\pi(0,6)^2(1,5) = 0,54\pi \text{ m}^3$.

Setengah bola: $\frac{2}{3}\pi(0,6)^3 = 0,144\pi \text{ m}^3$.

Total = $0,684\pi \approx 2,149 \text{ m}^3 \approx 2.149 \text{ liter}$.

Cek kewajaran: tandon setinggi orang dewasa memang biasanya berkapasitas ribuan liter.

20. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Persentase & skala • gaya IB • 21-5-04

Sebuah balon berbentuk bola ditiup sehingga luas permukaannya bertambah 44%. Volumennya bertambah...

A. 44%

C. 72,8%

B. 66%

D. 88%

Kunci: C

Pembahasan: Luas dikali $1,44 = k^2$, jadi $k = 1,2$.

Volume dikali $k^3 = 1,2^3 = 1,728$, artinya bertambah 72,8%.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Kubus dicat • gaya olimpiade • 21-6-01

Sebuah kubus kayu berukuran $10 \times 10 \times 10$ dicat merah di seluruh permukaannya, lalu dipotong menjadi 1.000 kubus satuan. Berapa banyak kubus satuan yang tepat **satu** sisinya bercat?

Jawaban: kubus

Kunci: 384 kubus

Pembahasan: Pada setiap sisi besar, buang baris dan kolom tepi (yang menyentuh rusuk): tersisa $8 \times 8 = 64$ kubus. Ada 6 sisi: $6 \times 64 = 384$.

Cek total: pojok 8, rusuk $12 \times 8 = 96$, satu sisi 384, tanpa cat $8^3 = 512$. Jumlah $8 + 96 + 384 + 512 = 1.000$. ✓

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Kubus dicat (kebalikan) • gaya olimpiade • 21-6-02

Kubus $n \times n \times n$ (dengan $n > 2$) dicat seluruh permukaannya lalu dipotong menjadi kubus satuan. Ternyata banyak kubus satuan yang tidak bercat sama dengan banyak kubus satuan yang tepat satu sisinya bercat. Tentukan n .

Jawaban:

Kunci: 8

Pembahasan: $(n - 2)^3 = 6(n - 2)^2$. Karena $n > 2$, bagi kedua ruas dengan $(n - 2)^2 \neq 0$: $n - 2 = 6$, jadi $n = 8$.
Cek: $6^3 = 216$ dan $6 \times 36 = 216$. ✓

23. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Euler & ketaksamaan • gaya olimpiade • 21-6-03

Buktikan bahwa tidak ada polihedron konveks yang memiliki tepat 7 rusuk.

Kunci/rubrik: Misalkan ada polihedron dengan $R = 7$. Setiap sisi minimal segitiga dan setiap rusuk dimiliki tepat dua sisi, jadi $3S \leq 2R = 14$, sehingga $S \leq 4$. [2]

Di setiap titik sudut bertemu minimal 3 rusuk dan setiap rusuk punya dua ujung, jadi $3T \leq 2R = 14$, sehingga $T \leq 4$. [2]

Menurut rumus Euler $T + S = R + 2 = 9$, padahal $T + S \leq 8$. Kontradiksi, jadi polihedron seperti itu tidak ada. [2]

Pembahasan: Teknik *menghitung ganda*: menghitung pasangan (sisi, rusuk) dan (titik sudut, rusuk) dengan dua cara. Dengan cara yang sama kamu bisa membuktikan bahwa setiap polihedron punya $R \geq 6$ (dicapai tetrahedron) dan bahwa $R = 7$ adalah satu-satunya bilangan ≥ 6 yang mustahil.

24. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Tetrahedron dalam kubus • gaya olimpiade • 21-6-04

Dari sebuah kubus kayu bersisi 6 cm, empat pojok yang tidak bersebelahan dipotong. Setiap potongan adalah limas segitiga yang ketiga rusuk tegak lurus sepanjang 6 cm. Sisanya adalah tetrahedron beraturan. Berapa volume tetrahedron itu?

Jawaban: cm^3

Kunci: 72 cm^3

Pembahasan: Satu potongan pojok: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^3$.

Tetrahedron = $216 - 4 \times 36 = 72 \text{ cm}^3$, tepat $\frac{1}{3}$ volume kubus!

Rusuk tetrahedron adalah diagonal sisi kubus, $6\sqrt{2}$ cm, jadi ini juga bukti bahwa tetrahedron beraturan bersisi a bervolume $\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kongruen • 22-1-01

Dua bangun yang bentuk **dan** ukurannya sama persis disebut...

- | | |
|-------------|-------------|
| A. sebangun | C. simetris |
| B. kongruen | D. sejajar |

Kunci: B

Pembahasan: Bangun yang bentuk dan ukurannya sama persis disebut **kongruen** (lambang $\cong$). Kalau hanya bentuknya yang sama sedangkan ukurannya boleh berbeda, kedua bangun itu **sebangun** (lambang $\sim$). Jadi setiap pasangan bangun kongruen pasti sebangun (dengan faktor skala 1), tetapi tidak sebaliknya.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Faktor skala • 22-1-02

Pas foto berukuran 3 cm $\times$ 4 cm diperbesar dengan faktor skala 2. Berapa ukuran foto hasil perbesaran?

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| A. 5 cm $\times$ 6 cm | C. 6 cm $\times$ 8 cm |
| B. 6 cm $\times$ 4 cm | D. 9 cm $\times$ 16 cm |

Kunci: C

Pembahasan: Faktor skala 2 berarti **setiap** panjang dikali 2: $3 \times 2 = 6$ cm dan $4 \times 2 = 8$ cm. Pilihan 5 cm $\times$ 6 cm keliru karena menambah 2, bukan mengali 2. Pilihan 6 cm $\times$ 4 cm hanya memperbesar satu sisi sehingga fotonya melar. Pilihan 9 cm $\times$ 16 cm keliru karena dikuadratkan.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Tinggi dari bayangan • 22-1-03

Pada suatu siang, tongkat setinggi 1 m memiliki bayangan sepanjang 2 m. Pada saat yang sama, bayangan sebuah tiang sepanjang 10 m. Berapa tinggi tiang itu?

Jawaban: m

Kunci: 5 m

Pembahasan: Sinar matahari datang sejajar, jadi segitiga tongkat-bayangan dan segitiga tiang-bayangan sebangun. Bayangan tiang $10 : 2 = 5$ kali bayangan tongkat, jadi tinggi tiang juga 5 kali tinggi tongkat: $5 \times 1 = 5$ m.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Refleksi • 22-1-04

Bayangan titik $P(3, -2)$ oleh pencerminan terhadap sumbu- y adalah...

- | | |
|---------------|--------------|
| A. $(-3, -2)$ | C. $(-3, 2)$ |
| B. $(3, 2)$ | D. $(-2, 3)$ |

Kunci: A

Pembahasan: Pencerminan terhadap sumbu- y hanya membalik tanda koordinat- x : $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Jadi $P(3, -2) \mapsto P'(-3, -2)$. Titik $(3, 2)$ adalah hasil pencerminan terhadap sumbu- x , dan $(-3, 2)$ hasil rotasi 180° .

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Sisi bersesuaian • 22-2-01

 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ dengan $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, dan $PQ = 9$ cm. Berapa panjang QR ?

Jawaban: cm

Kunci: 12 cm**Pembahasan:** Urutan huruf menunjukkan pasangan: $AB \leftrightarrow PQ$ dan $BC \leftrightarrow QR$.

$$\text{Faktor skala } k = \frac{PQ}{AB} = \frac{9}{6} = 1,5.$$

$$QR = 1,5 \times 8 = 12 \text{ cm.}$$

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Rotasi 90° • 22-2-02Titik $A(4, 1)$ dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O(0, 0)$. Bayangannya adalah...A. $(1, -4)$ C. $(1, 4)$ B. $(-4, -1)$ D. $(-1, 4)$ **Kunci: D****Pembahasan:** Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O: (x, y) \mapsto (-y, x)$.

$$A(4, 1) \mapsto A'(-1, 4).$$

Cek dengan gambar: A di kuadran I dekat sumbu- x ; setelah diputar seperempat putaran berlawanan arah jarum jam, ia pindah ke kuadran II dekat sumbu- y . Titik $(1, -4)$ adalah hasil putaran searah jarum jam, dan $(-4, -1)$ hasil putaran 180° .

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Luas bangun sebangun • 22-2-03

Sebuah persegi panjang berukuran $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ dilatasi dengan faktor skala 1,5. Berapa luas bayangannya?Jawaban: cm^2 **Kunci: 54 cm^2** **Pembahasan:** Sisi bayangan: $4 \times 1,5 = 6 \text{ cm}$ dan $6 \times 1,5 = 9 \text{ cm}$, jadi luasnya $6 \times 9 = 54 \text{ cm}^2$.

Cara cepat: luas asli 24 cm^2 dikali $k^2 = 2,25$, yaitu $24 \times 2,25 = 54 \text{ cm}^2$. Luasnya bukan menjadi 1,5 kali, melainkan 2,25 kali!

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Persegi panjang sebangun • 22-2-04

Pasangan persegi panjang manakah yang sebangun?

A. $2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ dan $4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ C. $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ dan $5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ B. $3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ dan $6 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ D. $1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ dan $2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ **Kunci: B****Pembahasan:** Dua persegi panjang sebangun jika perbandingan lebar : panjang keduanya sama.

$$3 : 5 = 0,6 \text{ dan } 6 : 10 = 0,6. \checkmark \text{ Semua sisi dikali 2.}$$

Yang lain: $2 : 3 \neq 4 : 5$, $4 : 6 \neq 5 : 7$, $1 : 2 \neq 2 : 3$. Menambahkan angka yang sama pada setiap sisi tidak menghasilkan bangun yang sebangun.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Garis sejajar sisi • 22-3-01

Pada $\triangle ABC$, titik D terletak pada AB dan titik E pada AC sehingga $DE \parallel BC$. Diketahui $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm, dan $DE = 6$ cm. Berapa panjang BC ?

Jawaban: cm

Kunci: 15 cm

Pembahasan: Karena $DE \parallel BC$, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (sudut A dimiliki bersama dan sudut-sudut sehadap sama besar).

$$AB = AD + DB = 10 \text{ cm, sehingga } \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

$$BC = 6 \times 2,5 = 15 \text{ cm. (Jebakan: } \frac{6}{4} \times 6 = 9 \text{ cm keliru karena memakai } DB, \text{ bukan } AB.)$$

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Metode cermin • 22-3-02

Ayu meletakkan cermin kecil mendatar di tanah. Ia berdiri sehingga cermin berada 2 m di depan kakinya, dan tepat pada posisi itu ia melihat puncak sebuah pohon di cermin. Mata Ayu 1,5 m di atas tanah, dan jarak cermin ke pangkal pohon 10 m. Berapa tinggi pohon?

Jawaban: m

Kunci: 7,5 m

Pembahasan: Segitiga (mata Ayu, kaki Ayu, cermin) dan segitiga (puncak pohon, pangkal pohon, cermin) sama-sama siku-siku, dan sudut di cermin sama besar (sudut datang = sudut pantul). Jadi keduanya sebangun.

$$\frac{T}{10} = \frac{1,5}{2} \Rightarrow T = 10 \times 0,75 = 7,5 \text{ m.}$$

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Komposisi transformasi • 22-3-03

Titik $P(2, -3)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, lalu hasilnya ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bayangan akhirnya adalah...

A. $(-2, 6)$

C. $(4, 2)$

B. $(1, 3)$

D. $(-3, 2)$

Kunci: A

Pembahasan: Kerjakan sesuai urutan.

1) Cermin $y = x$ menukar koordinat: $(2, -3) \mapsto (-3, 2)$.

2) Translasi: $(-3 + 1, 2 + 4) = (-2, 6)$.

Jika urutannya dibalik (translasi dulu), hasilnya $(1, 3)$. Urutan komposisi itu penting!

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Skala denah & luas • 22-3-04

Denah rumah digambar dengan skala 1 : 200. Luas kamar tidur pada denah 12 cm^2 . Berapa luas kamar sebenarnya dalam m^2 ?

Jawaban: m^2

Kunci: 48 m^2

Pembahasan: Faktor skala panjang $k = 200$, maka luas dikali $k^2 = 40.000$.

Luas sebenarnya $12 \times 40.000 = 480.000 \text{ cm}^2 = 480.000 : 10.000 = 48 \text{ m}^2$.

Cek kewajaran: kamar $6 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ memang 48 m^2 ; pada denah ukurannya $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$. ✓

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Volume bangun sebangun • gaya IGCSE • 22-4-01

Dua botol kecap berbentuk sebangun. Tinggi botol kecil 12 cm dan tinggi botol besar 18 cm. Volume botol kecil 320 ml. **Hitung** volume botol besar.

Jawaban: ml

Kunci: 1.080 ml

Pembahasan: $k = \frac{18}{12} = 1,5$, sehingga faktor volume $k^3 = 3,375$.

$V = 320 \times 3,375 = 1080$ ml. (Bukan $320 \times 1,5 = 480$ ml: botol besar lebih tinggi, lebih lebar, dan lebih tebal.)

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Rotasi dengan pusat lain • gaya IGCSE • 22-4-02

Titik $P(4, 3)$ dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $C(1, 2)$, menghasilkan $P'(a, b)$. **Tentukan** nilai $a + b$.

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: 1) Vektor dari pusat: $P - C = (4 - 1, 3 - 2) = (3, 1)$.

2) Putar 90° : $(3, 1) \mapsto (-1, 3)$.

3) Kembalikan: $P' = C + (-1, 3) = (0, 5)$.

Jadi $a + b = 0 + 5 = 5$. Cek: $CP = CP' = \sqrt{10}$. ✓

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Menjelaskan transformasi • gaya IGCSE • 22-4-03

Segitiga A dengan titik sudut $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$ dipetakan ke segitiga B dengan titik sudut $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(-2, 1)$ (berurutan). **Jelaskan** selengkapnya transformasi tunggal yang memetakan A ke B .

- A. pencerminan terhadap sumbu- y
- B. rotasi 90° searah jarum jam dengan pusat O
- C. rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O
- D. pencerminan terhadap garis $y = -x$

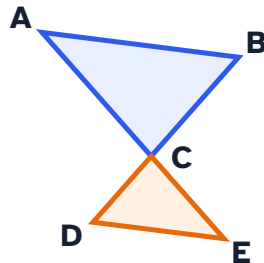
Kunci: C

Pembahasan: Uji aturan $(x, y) \mapsto (-y, x)$: $(1, 1) \mapsto (-1, 1)$ ✓, $(3, 1) \mapsto (-1, 3)$ ✓, $(1, 2) \mapsto (-2, 1)$ ✓.

Pencerminan terhadap sumbu- y hanya cocok untuk titik pertama, sebab $(3, 1) \mapsto (-3, 1)$, bukan $(-1, 3)$. Pada soal gaya IGCSE, jawaban lengkap menyebut **jenis**, **pusat**, **sudut**, dan **arah** putaran.

Pada gambar, ruas AE dan BD berpotongan di C , dengan $AB \parallel DE$. Diketahui $AB = 9$ cm, $DE = 6$ cm, $AC = 7,5$ cm, dan $CD = 4$ cm.

- Tunjukkan bahwa $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.
- Hitung CE .
- Hitung BC .
- Tuliskan perbandingan luas $\triangle EDC$ terhadap $\triangle ABC$.



Kunci/rubrik: (a) $\angle ACB = \angle ECD$ (sudut bertolak belakang) dan $\angle BAC = \angle DEC$ (sudut dalam berseberangan, karena $AB \parallel DE$). Dua pasang sudut sama besar $\Rightarrow$ sebangun (Sd-Sd). [2 poin]

(b) $k = \frac{DE}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. $CE = \frac{2}{3} \times AC = \frac{2}{3} \times 7,5 = 5$ cm. [2 poin]

(c) CD bersesuaian dengan CB : $BC = CD : \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ cm. [2 poin]

(d) $k^2 = \frac{4}{9}$, jadi luas $\triangle EDC : \triangle ABC = 4 : 9$. [1 poin]

Pembahasan: Kunci soal bentuk X: pasangan titik ditentukan oleh sudut, bukan oleh posisi gambar. A berpasangan dengan E (sudut dalam berseberangan), B dengan D , dan C dengan dirinya sendiri. Hati-hati: CD berpasangan dengan CB , bukan dengan CA .

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Lampu jalan berada di puncak tiang setinggi 6 m. Dimas (tinggi 1,5 m) berdiri d meter dari kaki tiang, dan bayangannya di tanah sepanjang s meter.

- Tunjukkan bahwa $s = \frac{d}{3}$.
- Dimas berjalan menjauhi tiang dengan kecepatan 1,2 m/s. Seberapa cepat bayangannya memanjang? Seberapa cepat ujung bayangannya bergerak?
- Pada jarak berapa dari tiang bayangan Dimas sepanjang 2 m?

Kunci/rubrik: (a) Segitiga besar (puncak tiang, kaki tiang, ujung bayangan) sebangun dengan segitiga kecil (kepala Dimas, kaki Dimas, ujung bayangan): keduanya siku-siku dan memiliki sudut yang sama di ujung bayangan. $\frac{6}{d+s} = \frac{1,5}{s} \Rightarrow 6s = 1,5d + 1,5s \Rightarrow 4,5s = 1,5d \Rightarrow s = \frac{d}{3}$. [3 poin]

(b) s selalu sepertiga d , jadi bayangan memanjang $1,2 : 3 = 0,4$ m/s. Ujung bayangan berjarak $d + s = \frac{4d}{3}$ dari tiang, jadi bergerak $\frac{4}{3} \times 1,2 = 1,6$ m/s. [2 poin]

(c) $s = 2 \Rightarrow d = 6$ m. [1 poin]

Pembahasan: Model ini linear: setiap meter yang ditempuh Dimas menambah panjang bayangan sepertiga meter. Menariknya, ujung bayangan selalu bergerak lebih cepat daripada Dimas sendiri (1,6 m/s > 1,2 m/s).

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Dilatasi dengan pusat P • gaya IB • 22-5-02

Titik $A(5, 3)$ didilatasi dengan pusat $P(2, 1)$ dan faktor skala $k = -2$, menghasilkan A' . Tentukan panjang AA' . Tuliskan dalam bentuk akar atau desimal tiga angka penting.

Jawaban: satuan

Kunci: 10,817 satuan

Pembahasan: $A - P = (3, 2)$, sehingga $A' = P + (-2)(3, 2) = (2 - 6, 1 - 4) = (-4, -3)$.

$AA' = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \approx 10,8$.

Cara cepat: $PA = \sqrt{13}$ dan $PA' = 2\sqrt{13}$ ke arah berlawanan, jadi $AA' = 3\sqrt{13}$.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Matriks transformasi • gaya IB • 22-5-03

Transformasi $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dikerjakan lebih dulu, kemudian dilanjutkan dengan $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Komposisinya sama dengan...

- A. rotasi 90° searah jarum jam dengan pusat O
- B. pencerminan terhadap garis $y = -x$
- C. rotasi 180° dengan pusat O
- D. rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O

Kunci: D

Pembahasan: Komposisi " M_1 lalu M_2 " ditulis M_2M_1 (yang dikerjakan lebih dulu ditulis paling kanan):

$M_2M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, yaitu $(x, y) \mapsto (-y, x)$: rotasi 90° berlawanan arah jarum jam.

Secara geometri: cermin $y = x$ lalu cermin sumbu- y . Kedua cermin berpotongan di O dengan sudut 45° , jadi hasilnya rotasi $2 \times 45^\circ = 90^\circ$. Jika urutannya dibalik (M_1M_2), hasilnya rotasi 90° searah jarum jam.

20. Lv 5 • IB DP • Isian • Kamera lubang jarum • gaya IB • 22-5-04

Sebuah kamera lubang jarum berupa kotak sepanjang 20 cm: lubang kecil di satu sisi, layar di sisi seberangnya. Kamera diarahkan ke pohon setinggi 6 m yang berjarak 15 m dari lubang. Berapa tinggi bayangan pohon pada layar (dalam cm)?

Jawaban: cm

Kunci: 8 cm

Pembahasan: Sinar dari puncak dan pangkal pohon menyilang di lubang (bentuk X), sehingga bayangan terbentuk oleh dilatasi berpusat di lubang dengan faktor $k = -\frac{20}{1500} = -\frac{1}{75}$. Tanda negatif berarti bayangan terbalik.

Tinggi bayangan $= 600 \times \frac{1}{75} = 8$ cm, dengan puncak pohon tampak di bawah.

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Trapesium & diagonal • gaya olimpiade • 22-6-01

Trapesium $ABCD$ memiliki $AB \parallel DC$, $AB = 12$ cm, dan $DC = 4$ cm. Diagonal AC dan BD berpotongan di O . Luas $\triangle COD = 3$ cm². Berapa luas trapesium?

Jawaban: cm²

Kunci: 48 cm²

Pembahasan: 1) $\triangle COD \sim \triangle AOB$ (bentuk X) dengan $k = \frac{12}{4} = 3$, jadi $[AOB] = 3^2 \times 3 = 27$ cm².

2) $\triangle AOD$ dan $\triangle COD$ berpuncak sama di D dengan alas AO dan OC pada satu garis. Karena $AO : OC = 3 : 1$, $[AOD] = 3 \times 3 = 9$ cm². Dengan cara serupa (puncak C , alas BO dan OD), $[BOC] = 9$ cm².

3) Luas trapesium = $3 + 27 + 9 + 9 = 48$ cm².

Rumus elegan: luas = $(\sqrt{3} + \sqrt{27})^2 = (4\sqrt{3})^2 = 48$.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Lintasan terpendek • gaya olimpiade • 22-6-02

Titik P bergerak pada garis $y = x$. Diketahui $A(1, 4)$ dan $B(3, 7)$. Berapa nilai minimum $PA + PB$?

Jawaban:

Kunci: 6,083

Pembahasan: A dan B berada di sisi yang sama dari garis $y = x$ (keduanya memenuhi $y > x$). Cerminkan B terhadap garis itu: $B'(7, 3)$. Untuk setiap P pada garis, $PB = PB'$, sehingga $PA + PB = PA + PB' \geq AB'$ (ketaksamaan segitiga).

$$AB' = \sqrt{(7-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{37} \approx 6,08.$$

Nilai minimum tercapai di perpotongan AB' dengan $y = x$, yaitu $P\left(\frac{25}{7}, \frac{25}{7}\right)$.

23. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Dua cermin berpotongan • gaya olimpiade • 22-6-03

Garis ℓ_1 dan ℓ_2 berpotongan di O dan membentuk sudut θ (diukur dari ℓ_1 ke ℓ_2 , berlawanan arah jarum jam).

(a) Buktikan bahwa pencerminan terhadap ℓ_1 dilanjutkan pencerminan terhadap ℓ_2 sama dengan rotasi berpusat O sebesar 2θ .

(b) Apa hasilnya jika urutan kedua pencerminan dibalik?

(c) Jelaskan mengapa kaleidoskop dengan dua cermin bersudut 60° menampilkan pola bersimetri putar orde 3.

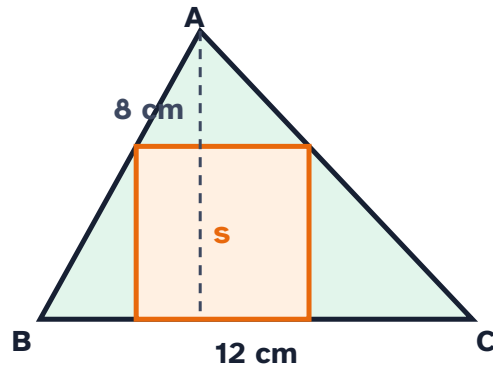
Kunci/rubrik: (a) Pakai koordinat kutub berpusat O dengan ℓ_1 sebagai arah 0° , sehingga ℓ_2 berarah θ . Pencerminan terhadap garis berarah β memetakan titik berjarak r dan bersudut α ke titik berjarak r dan bersudut $2\beta - \alpha$ (jarak ke O tetap, sudut terhadap cermin berbalik tanda). [2 poin] Cermin ℓ_1 ($\beta = 0$): $\alpha \mapsto -\alpha$. Cermin ℓ_2 ($\beta = \theta$): $-\alpha \mapsto 2\theta - (-\alpha) = \alpha + 2\theta$. [2 poin] Setiap titik tetap berjarak r dari O dan sudutnya bertambah 2θ : itulah rotasi berpusat O sebesar 2θ . [1 poin]

(b) Urutan terbalik: $\alpha \mapsto 2\theta - \alpha \mapsto -(2\theta - \alpha) = \alpha - 2\theta$, yaitu rotasi 2θ searah jarum jam. [1 poin]

(c) Dua cermin bersudut 60° menghasilkan rotasi 120° . Setiap motif berulang tiap 120° , yaitu 3 kali dalam satu putaran (bersama bayangan cerminnya, terbentuk 6 juring). [1 poin]

Pembahasan: Ide kuncinya: dua pencerminan saling membatalkan efek membalik, sehingga yang tersisa adalah gerak memutar. Untuk dua cermin sejajar yang berjarak d , argumen serupa menghasilkan translasi sejauh $2d$ tegak lurus cermin.

Segitiga ABC memiliki alas $BC = 12$ cm dan tinggi 8 cm. Sebuah persegi diletakkan di dalam segitiga dengan satu sisi pada BC , sedangkan dua titik sudut lainnya masing-masing pada AB dan AC . Berapa panjang sisi persegi?



Jawaban: cm

Kunci: 4,8 cm

Pembahasan: Misalkan sisi persegi s . Sisi atas persegi sejajar BC dan berada pada ketinggian s , sehingga memotong segitiga kecil di puncak A dengan alas s dan tinggi $8 - s$.

Segitiga kecil $\sim \triangle ABC$: $\frac{s}{12} = \frac{8-s}{8} \Rightarrow 8s = 96 - 12s \Rightarrow s = 4,8$ cm.

Rumus umum: $s = \frac{ah}{a+h}$, yaitu setengah rata-rata harmonik alas dan tinggi.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Titik tengah • 23-1-01

Titik tengah ruas garis yang menghubungkan $A(2, 4)$ dan $B(8, 10)$ adalah...

- A. $(6, 6)$ C. $(10, 14)$
B. $(5, 7)$ D. $(3, 3)$

Kunci: B

Pembahasan: Titik tengah = rata-rata koordinat:

$$M = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{4+10}{2} \right) = (5, 7).$$

Pilihan $(10, 14)$ lupa membagi dua, sedangkan $(6, 6)$ adalah selisih koordinat.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Vektor dari dua titik • 23-1-02

Diketahui $A(1, 2)$ dan $B(4, 7)$. Vektor $\vec{AB}$ adalah...

- A. $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Kunci: A

Pembahasan: Ujung dikurangi pangkal: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ adalah $\vec{BA}$ (arahnya terbalik), dan $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ berasal dari menjumlahkan koordinat.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Skalar dan vektor • 23-1-03

Manakah yang merupakan besaran **vektor**?

- A. massa sekarung beras 25 kg
B. suhu udara Bandung 22 °C
C. angin berkecepatan 20 km/jam ke arah timur laut
D. lama perjalanan Jakarta-Bogor 2 jam

Kunci: C

Pembahasan: Vektor mempunyai besar **dan** arah. Angin 20 km/jam ke arah timur laut menyebutkan keduanya. Massa, suhu, dan waktu cukup dinyatakan dengan satu bilangan, jadi termasuk skalar.

4. Lv 1 • Pemula • Isian • Panjang vektor • 23-1-04

Berapa panjang vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$?

Jawaban:

Kunci: 10

Pembahasan: $|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Ini tripel 3-4-5 yang dikali 2.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Operasi vektor • 23-2-01

Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, maka $2\vec{a} - \vec{b}$ adalah...

A. $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$

Kunci: D

Pembahasan: $2\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$2\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 - (-1) \\ -4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Kesalahan umum: $6 - (-1)$ dihitung 5, atau $\vec{b}$ dijumlahkan, bukan dikurangkan.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Titik pada lingkaran • 23-2-02

Titik $(k, 3)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ dan $k > 0$. Tentukan k .

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: Substitusi: $k^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$ atau $k = -4$.

Karena $k > 0$, $k = 4$. (Titik $(4, 3)$ berjarak 5 dari pusat O .)

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Hasil kali titik • 23-2-03

Hitung $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: Kalikan komponen yang sepasang, lalu jumlahkan: $2 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3$. Hasilnya bilangan (skalar), bukan vektor.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Resultan kecepatan • 23-2-04

Perahu bergerak 8 km/jam ke utara terhadap air, sedangkan arus sungai mengalir 6 km/jam ke timur. Kelajuan perahu terhadap tepi sungai adalah...

- A. 14 km/jam
B. 2 km/jam
C. 10 km/jam
D. 48 km/jam

Kunci: C

Pembahasan: Kecepatan terhadap tepi = $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Kelajuannya $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ km/jam. Angka 14 muncul jika kelajuan dijumlahkan begitu saja, padahal arahnya saling tegak lurus.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Ujung ruas dari titik tengah • 23-3-01

Titik $M(3, -1)$ adalah titik tengah ruas garis AB , dengan $A(-2, 4)$. Jika $B(p, q)$, hitung $p + q$.

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: $\frac{-2+p}{2} = 3 \Rightarrow p = 8$, dan $\frac{4+q}{2} = -1 \Rightarrow q = -6$.

Cara cepat: $B = 2M - A = (6 + 2, -2 - 4) = (8, -6)$.

Jadi $p + q = 8 + (-6) = 2$.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Bentuk umum lingkaran • 23-3-02

Tentukan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$.

Jawaban: satuan

Kunci: 6 satuan

Pembahasan: $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = 11 + 16 + 9$

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$.

Pusat $(4, -3)$ dan jari-jari $\sqrt{36} = 6$.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Vektor tegak lurus • 23-3-03

Vektor $\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$ tegak lurus vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. Nilai k adalah...

- A. -4,5
B. 2
C. -2
D. 0

Kunci: B

Pembahasan: $6k + 3(-4) = 0 \Rightarrow 6k = 12 \Rightarrow k = 2$.

Pilihan -4,5 adalah syarat sejajar ($\frac{k}{6} = \frac{3}{-4}$), bukan tegak lurus.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Sudut antarvektor • 23-3-04

Tentukan besar sudut (dalam derajat) antara $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jawaban: °

Kunci: 135 °

Pembahasan: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3(-1) + (-1)(2) = -5$, $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$.

$$\cos \theta = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Jadi $\theta = 135^\circ$. Masuk akal: hasil kali titik negatif berarti sudutnya tumpul.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Vektor posisi titik tengah • gaya IGCSE • 23-4-01

Diketahui $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. M adalah titik tengah AB . **Hitung** $|\vec{OM}|$. Berikan jawaban dalam bentuk akar atau tiga angka penting.

Jawaban: satuan

Kunci: 5,385 satuan

Pembahasan: $\vec{OM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+8 \\ 5+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 $|\vec{OM}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$.

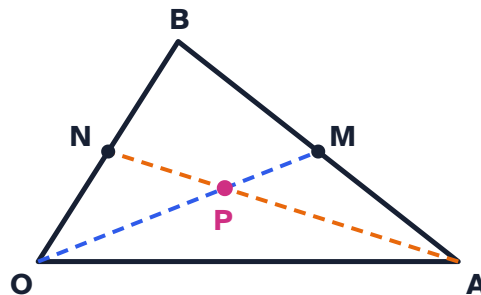
14. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Vektor dalam segitiga • gaya IGCSE • 23-4-02

Dalam segitiga OAB , $\vec{OA} = \mathbf{a}$ dan $\vec{OB} = \mathbf{b}$. M adalah titik tengah AB , N adalah titik tengah OB , dan P terletak pada OM dengan $OP : PM = 2 : 1$.

(a) **Nyatakan** $\vec{AB}$ dan $\vec{OM}$ dalam $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$.

(b) **Tunjukkan** bahwa $\vec{OP} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

(c) **Tunjukkan** bahwa A, P, N segaris, lalu **tentukan** $AP : PN$.



Kunci/rubrik: (a) $\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$; $\vec{OM} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. [2 poin]

(b) $\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{OM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. [2 poin]

(c) $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = -\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ dan $\vec{AN} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ternyata $\vec{AP} = \frac{2}{3}(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) = \frac{2}{3}\vec{AN}$, jadi $\vec{AP}$ kelipatan $\vec{AN}$ dengan titik A bersama: A, P, N segaris. Karena $AP = \frac{2}{3}AN$, $AP : PN = 2 : 1$. [3 poin]

Pembahasan: Kunci bagian (c): dua vektor yang berpangkal di titik yang sama dan saling berkelipatan pasti terletak pada satu garis. Titik P ternyata adalah titik berat segitiga OAB , tempat ketiga garis berat bertemu dan membagi masing-masing dengan perbandingan 2 : 1.

Ruas garis AB dengan $A(-1, 2)$ dan $B(7, 8)$ adalah diameter sebuah lingkaran. Persamaan lingkaran itu adalah...

A. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

C. $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$

B. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 100$

D. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Kunci: A

Pembahasan: Pusat = titik tengah diameter: $(\frac{-1+7}{2}, \frac{2+8}{2}) = (3, 5)$.

Panjang diameter $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, jadi $r = 5$ dan $r^2 = 25$.

Persamaan: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. Pilihan dengan 100 memakai diameter sebagai jari-jari; $(4, 3)$ adalah setengah selisih, bukan titik tengah.

Kapal nelayan dari Pelabuhan Ratu berpindah sejauh $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ km, kemudian $\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$ km. **Hitung** jarak kapal dari pelabuhan.

Jawaban: km

Kunci: 17 km

Pembahasan: Perpindahan total = resultan: $\begin{pmatrix} 12 + (-4) \\ 5 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Jaraknya $\sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ km (tripel 8-15-17). Bandingkan dengan panjang lintasan yang ditempuh: $13 + \sqrt{116} \approx 23,8$ km.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Sebuah feri menyeberangi selat selebar 24 km dari dermaga P di pantai selatan menuju dermaga Q yang tepat berseberangan di utara. Kelajuan feri terhadap air 25 km/jam, dan arus mengalir ke timur dengan kelajuan 7 km/jam. Ambil sumbu x ke timur dan sumbu y ke utara.

(a) Feri mengarahkan haluan tegak lurus ke utara. Tentukan kelajuan resultannya, waktu menyeberang, dan seberapa jauh ia mendarat dari Q .

(b) Tentukan vektor kecepatan feri terhadap air agar feri tiba tepat di Q , serta waktu menyeberangnya.

(c) Bandingkan kedua strategi dan jelaskan mengapa strategi (a) lebih cepat walaupun meleset.

Kunci/rubrik: (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \end{pmatrix}$, kelajuan $\sqrt{674} \approx 26,0$ km/jam. Waktu = $24 \div 25 = 0,96$ jam = 57,6 menit. Meleset $7 \times 0,96 = 6,72$ km ke timur dari Q . [3 poin]

(b) Misalkan kecepatan terhadap air $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dengan $p^2 + q^2 = 25^2$. Agar resultan tepat ke utara: $p + 7 = 0$, jadi $p = -7$ dan $q = \sqrt{625 - 49} = 24$. Kecepatan terhadap air $\begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$ km/jam, resultan $\begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix}$, waktu $24 \div 24 = 1$ jam. [3 poin]

(c) Waktu menyeberang hanya ditentukan oleh komponen kecepatan ke utara. Pada (a) komponen itu 25 km/jam (seluruh tenaga feri), pada (b) hanya 24 km/jam karena sebagian dipakai melawan arus. Jadi (a) lebih cepat 2,4 menit, tetapi mendarat 6,72 km dari tujuan. [2 poin]

Pembahasan: Pola penting: uraikan kecepatan menjadi komponen searah tujuan dan komponen menyamping. Arus tidak memperlambat penyeberangan; ia hanya menggeser tempat pendaratan. Coba bandingkan dengan Lab Mini "Feri menyeberangi Selat Sunda" di subbab 23.4.

Sebuah mercusuar berada di titik asal O . Posisi kapal setelah t jam adalah $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ km. Tentukan jarak terdekat kapal ke mercusuar.

Jawaban: km

Kunci: 1,4 km

Pembahasan: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -3 + 4t \\ 4 - 3t \end{pmatrix}$. Syarat terdekat: $4(-3 + 4t) - 3(4 - 3t) = 0 \Rightarrow 25t - 24 = 0 \Rightarrow t = 0,96$ jam.

$\vec{r}(0,96) = \begin{pmatrix} 0,84 \\ 1,12 \end{pmatrix}$, jaraknya $\sqrt{0,84^2 + 1,12^2} = \sqrt{1,96} = 1,4$ km.

Cek: kuadrat jarak $|\vec{r}(t)|^2 = 25t^2 - 48t + 25$ adalah fungsi kuadrat yang minimum di $t = \frac{48}{50} = 0,96$ (Bab 12).

Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$ saling tegak lurus. Nilai k dan $|\vec{a}|$ berturut-turut adalah...

- A. -1 dan 3 C. -1 dan $\sqrt{5}$
B. 1 dan 9 D. 1 dan 3

Kunci: D

Pembahasan: Tegak lurus: $1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot k = 0 \Rightarrow 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 1$.

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Pengecoh: $k = -1$ muncul dari salah tanda; 9 adalah $|\vec{a}|^2$, bukan $|\vec{a}|$.

Dari titik $P(8, 7)$ ditarik garis singgung ke lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Tentukan panjang ruas garis singgung dari P ke titik singgung.

Jawaban: satuan

Kunci: 8,66 satuan

Pembahasan: Lengkapi kuadrat: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20 + 4 + 1 = 25$. Pusat $C(2, -1)$, $r = 5$.

$CP^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.

Segitiga CTP siku-siku di titik singgung T : $PT = \sqrt{CP^2 - r^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

$ABCD$ adalah sebarang segi empat (tidak harus beraturan). K, L, M, N berturut-turut titik tengah AB, BC, CD, DA . Buktikan dengan vektor bahwa $KLMN$ selalu jajargenjang, lalu tunjukkan bahwa kelilingnya sama dengan $AC + BD$.

Kunci/rubrik: Pakai vektor posisi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Maka $\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{l} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$, $\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a})$. [1]

$\vec{KL} = \vec{l} - \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$ dan $\vec{NM} = \vec{m} - \vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$. Jadi $\vec{KL} = \vec{NM}$: sisi KL dan NM sejajar dan sama panjang, sehingga $KLMN$ jajargenjang. [3]

Dengan cara sama $\vec{LM} = \vec{KN} = \frac{1}{2}\vec{BD}$. Keliling $= 2 \cdot \frac{1}{2}AC + 2 \cdot \frac{1}{2}BD = AC + BD$. [2]

Pembahasan: Bukti vektor tidak memerlukan gambar yang tepat dan tetap berlaku untuk segi empat cekung sekalipun. Kuncinya: selisih dua titik tengah selalu "setengah diagonal". Hasil ini dikenal sebagai Teorema Varignon (sekitar 1731).

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Titik letis pada lingkaran • gaya olimpiade • 23-6-02

Ada berapa titik (x, y) dengan x dan y bilangan bulat yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 65$?

Jawaban: titik

Kunci: 16 titik

Pembahasan: Kuadrat yang ≤ 65 : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64. Pasangan yang berjumlah 65: 1 + 64 dan 16 + 49 (65 bukan kuadrat, jadi tidak ada pasangan dengan 0).

Dari $\{1, 8\}$: $(\pm 1, \pm 8)$ dan $(\pm 8, \pm 1) \rightarrow 8$ titik.

Dari $\{4, 7\}$: $(\pm 4, \pm 7)$ dan $(\pm 7, \pm 4) \rightarrow 8$ titik.

Total **16** titik. (Fakta indah: $65 = 5 \times 13$, dan kedua prima itu masing-masing jumlah dua kuadrat.)

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Minimum jumlah kuadrat jarak • gaya olimpiade • 23-6-03

Diketahui $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, dan $C(0, 9)$. Untuk titik P di bidang, tentukan nilai terkecil dari $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

Jawaban:

Kunci: 78

Pembahasan: Misalkan $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (2, 3)$. Untuk setiap titik sudut X :

$$|\vec{p} - \vec{x}|^2 = |\vec{p} - \vec{g}|^2 + 2(\vec{p} - \vec{g}) \cdot (\vec{g} - \vec{x}) + |\vec{g} - \vec{x}|^2.$$

Jumlahkan untuk $X = A, B, C$: suku tengah lenyap karena $(\vec{g} - \vec{a}) + (\vec{g} - \vec{b}) + (\vec{g} - \vec{c}) = 3\vec{g} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$. Jadi $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$, minimum saat $P = G$.

$$GA^2 = 4 + 9 = 13, GB^2 = 16 + 9 = 25, GC^2 = 4 + 36 = 40. \text{ Nilai terkecilnya } 13 + 25 + 40 = 78.$$

24. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Tiga vektor satuan • gaya olimpiade • 23-6-04

Vektor satuan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ memenuhi $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Hitung $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

Jawaban:

Kunci: -1,5

$$\textbf{Pembahasan: } 0 = |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}) = 3 + 2S.$$

$$\text{Jadi } S = -\frac{3}{2}.$$

Makna geometrinya: ketiga panah satuan yang "saling menghapus" membentuk segitiga sama sisi bila disambung ujung ke pangkal, sehingga sudut antara setiap dua di antaranya (dari pangkal yang sama) 120° , dan $3 \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}$.

24 Trigonometri Segitiga Siku-siku

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Nama perbandingan • 24-1-01

Pada segitiga siku-siku, perbandingan **sisi depan** sudut θ terhadap **sisi miring** disebut...

A. $\cos \theta$

C. $\sin \theta$

B. $\tan \theta$

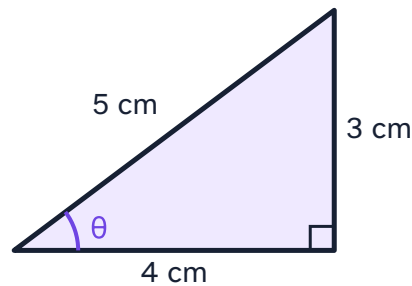
D. $\frac{1}{\tan \theta}$

Kunci: C

Pembahasan: Ingat mantra **SINDEMI**: $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$.
KOSAMI: $\cos \theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$. TANDESA: $\tan \theta = \frac{\text{depan}}{\text{samping}}$.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Membaca segitiga 3-4-5 • 24-1-02

Segitiga siku-siku pada gambar memiliki sisi 3 cm, 4 cm, dan 5 cm. Sudut θ berhadapan dengan sisi 3 cm. Nilai $\sin \theta$ adalah...



A. $\frac{3}{5}$
B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{4}$
D. $\frac{5}{3}$

Kunci: A

Pembahasan: Sisi miring adalah sisi terpanjang, yaitu 5 cm. Sisi depan θ adalah 3 cm.

$$\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{3}{5}. \text{ (Pilihan } \frac{4}{5} \text{ adalah } \cos \theta, \text{ dan } \frac{3}{4} \text{ adalah } \tan \theta.)$$

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Sudut istimewa • 24-1-03

Berapakah nilai $\tan 45^\circ$?

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: Setengah perseg bersisi 1 adalah segitiga $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ yang kedua kakinya sama panjang.

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Sudut elevasi • 24-1-04

Dimas berdiri di lapangan dan menatap puncak tiang bendera. Sudut antara garis mendatar dan garis pandangnya yang mengarah **ke atas** disebut...

- A. sudut depresi
- B. sudut elevasi
- C. sudut siku-siku
- D. sudut refleksi

Kunci: B

Pembahasan: Melihat ke atas dari garis mendatar membentuk sudut **elevasi**. Melihat ke bawah dari garis mendatar membentuk sudut **depresi**. Keduanya diukur dari garis mendatar.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Tali layangan • 24-2-01

Tali layangan sepanjang 40 m terentang lurus dan membentuk sudut 30° dengan garis mendatar. Berapa tinggi layangan di atas tangan Ayu?

Jawaban: m

Kunci: 20 m

Pembahasan: Tali adalah sisi miring (40 m) dan tinggi layangan adalah sisi depan sudut 30° , jadi pakai sinus.
 $t = 40 \sin 30^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20$ m.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Trik 45° • 24-2-02

Ancil mundur dari pohon kelapa sampai puncaknya terlihat dengan sudut elevasi 45° . Saat itu jaraknya ke pohon 12 m dan tinggi matanya 1,5 m dari tanah. Berapa tinggi pohon kelapa?

Jawaban: m

Kunci: 13,5 m

Pembahasan: Bagian pohon di atas mata: $12 \tan 45^\circ = 12 \times 1 = 12$ m.
 Tambahkan tinggi mata: $12 + 1,5 = 13,5$ m.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Nilai eksak • 24-2-03

Nilai $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ adalah...

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 1

Kunci: D

Pembahasan: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ dan $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Pada setengah segitiga sama sisi, sisi depan sudut 30° sama dengan sisi samping sudut 60° .
 Jumlahnya $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Sudut ram • 24-2-04

Sebuah ram kursi roda naik setinggi 0,5 m sepanjang jarak mendatar 6 m. Berapa besar sudut kemiringannya terhadap tanah? Tulis dalam derajat, dibulatkan 1 desimal.

Jawaban: °

Kunci: 4,76 °

Pembahasan: Tinggi adalah sisi depan dan jarak mendatar adalah sisi samping, jadi pakai tangen.

$$\tan \theta = \frac{0,5}{6} \approx 0,0833 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0,0833) \approx 4,8^\circ.$$

Ram ini cukup landai untuk kursi roda (pedoman menyarankan tidak lebih dari sekitar 6° di luar gedung).

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Dua sudut elevasi • 24-3-01

Dari titik A , puncak sebuah menara terlihat dengan sudut elevasi 30° . Ayu berjalan 60 m lurus mendekati menara sampai titik B , dan sudut elevasinya menjadi 60° . Jika tinggi mata diabaikan, berapa tinggi menara?

Jawaban: m

Kunci: 51,96 m

Pembahasan: Dari B : $t = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$. Dari A : $t = (x + 60) \tan 30^\circ = \frac{x + 60}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Samakan: } x\sqrt{3} = \frac{x + 60}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3x = x + 60 \Rightarrow x = 30.$$

$$t = 30\sqrt{3} \approx 51,96 \text{ m.}$$

Cara cerdik: sudut di puncak segitiga A - B -puncak adalah $60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, jadi segitiga itu sama kaki dan jarak B ke puncak = 60 m. Maka $t = 60 \sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Dari sin ke tan • 24-3-02

Diketahui θ sudut lancip dan $\sin \theta = \frac{5}{13}$. Nilai $\tan \theta$ adalah...

- A. $\frac{5}{12}$
B. $\frac{12}{13}$

- C. $\frac{12}{5}$
D. $\frac{13}{5}$

Kunci: A

Pembahasan: Gambar segitiga siku-siku dengan sisi depan 5 dan sisi miring 13.

$$\text{Sisi samping} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12.$$

$$\tan \theta = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{5}{12}. \text{ (Pilihan } \frac{12}{13} \text{ adalah } \cos \theta.)$$

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Sudut depresi • 24-3-03

Dari puncak mercusuar setinggi 45 m di atas permukaan laut, penjaga melihat sebuah perahu nelayan dengan sudut depresi 30° . Berapa jarak perahu dari kaki mercusuar?

Jawaban: m

Kunci: 77,94 m

Pembahasan: Sudut elevasi dari perahu ke puncak = 30° (sudut dalam berseberangan).

$$\tan 30^\circ = \frac{45}{x} \Rightarrow x = \frac{45}{\tan 30^\circ} = 45\sqrt{3} \approx 77,9 \text{ m.}$$

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Memakai identitas • 24-3-04

Diketahui θ sudut lancip dengan $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$. Tentukan nilai $\sin \theta \cos \theta$.

Jawaban:

Kunci: 0,48

Pembahasan: $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$.

Jadi $\frac{49}{25} = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$.

Cek: segitiga 3-4-5 memberi $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$ dan $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$. ✓

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Menghitung sisi • gaya IGCSE • 24-4-01

Pada segitiga ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 7,2$ cm, dan $\angle ACB = 38^\circ$. **Hitung** panjang BC . Bulatkan sampai 3 angka penting.

Jawaban: cm

Kunci: 9,22 cm

Pembahasan: Dari sudut C : AB sisi depan, BC sisi samping. Pakai tangen (TANDESA):

$$\tan 38^\circ = \frac{7,2}{BC} \Rightarrow BC = \frac{7,2}{\tan 38^\circ} \approx \frac{7,2}{0,7813} \approx 9,22 \text{ cm.}$$

Cek wajar: sudut 38° kurang dari 45° , jadi sisi depan harus lebih pendek daripada sisi samping. ✓

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Menghitung sudut • gaya IGCSE • 24-4-02

Sebuah tangga sepanjang 6,5 m bersandar pada tembok tegak. Kaki tangga berjarak 1,8 m dari tembok. **Hitung** sudut antara tangga dan lantai, dalam derajat dengan 1 desimal.

Jawaban: °

Kunci: 73,9 °

Pembahasan: Diketahui sisi samping (1,8 m) dan sisi miring (6,5 m), jadi pakai kosinus (KOSAMI).

$$\cos \theta = \frac{1,8}{6,5} \approx 0,2769 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0,2769) \approx 73,9^\circ \text{ (inverse cosine).}$$

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Nilai eksak • gaya IGCSE • 24-4-03

Tentukan nilai eksak $\tan 60^\circ - \sin 60^\circ$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Kunci: D

Pembahasan: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ dan $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Ram kursi roda • gaya IGCSE • 24-4-04

Sebuah ram kursi roda naik 0,75 m sepanjang jarak mendatar 9 m.

(a) **Hitung** sudut kemiringan ram terhadap tanah.

(b) **Hitung** panjang permukaan ram.

(c) Pedoman menyarankan kemiringan ram di luar gedung tidak lebih dari sekitar 6° . **Jelaskan** apakah ram ini memenuhi pedoman tersebut.

Kunci/rubrik: (a) $\tan \theta = \frac{0,75}{9} \approx 0,0833$, jadi $\theta \approx 4,76^\circ$. [2: memilih tangen 1, hasil 1]

(b) $\sqrt{9^2 + 0,75^2} = \sqrt{81,5625} \approx 9,03$ m (atau $\frac{0,75}{\sin 4,76^\circ} \approx 9,03$ m). [2]

(c) $4,76^\circ < 6^\circ$, jadi ram memenuhi pedoman. [1]

Pembahasan: Pada soal ram, yang biasanya diketahui adalah tinggi (sisi depan) dan jarak mendatar (sisi samping), sehingga perbandingan yang tepat adalah tangen. Panjang permukaan ram hanya sedikit lebih panjang daripada jarak mendatarnya karena sudutnya kecil.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Jalur luncur pesawat • gaya IB • 24-5-01

Sebuah pesawat turun menuju titik sentuh di landasan mengikuti jalur lurus dengan sudut luncur 3° terhadap tanah. Saat ketinggiannya 300 m, berapa km jarak mendatar pesawat ke titik sentuh? Berikan jawaban sampai 3 angka penting.

Jawaban: km

Kunci: 5,72 km

Pembahasan: $\tan 3^\circ = \frac{300}{x} \Rightarrow x = \frac{300}{\tan 3^\circ} \approx \frac{300}{0,05241} \approx 5724$ m $\approx 5,72$ km.

Makna: pesawat sudah turun perlahan dari jarak hampir 6 km. Sudut 3° berarti turun sekitar 52 m untuk setiap 1 km mendatar.

18. Lv 5 • IB DP • Uraian • Pohon di seberang sungai • gaya IB • 24-5-02

Ayu ingin mengukur tinggi pohon di seberang sungai tanpa menyeberang. Dari titik P di tepi sungai, puncak pohon terlihat dengan sudut elevasi 40° . Ia mundur 20 m menjauhi sungai (segaris dengan pohon) ke titik Q , dan sudut elevasinya menjadi 28° . Abaikan tinggi mata.

(a) Misalkan tinggi pohon h dan jarak P ke kaki pohon x . Tuliskan dua persamaan yang menghubungkan h dan x .

(b) **Tunjukkan** bahwa $h = \frac{20 \tan 40^\circ \tan 28^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 28^\circ}$, lalu hitung h .

(c) Hitung lebar sungai x , lalu berikan satu alasan mengapa hasil pengukuran nyata bisa berbeda.

Kunci/rubrik: (a) $h = x \tan 40^\circ$ dan $h = (x + 20) \tan 28^\circ$. [2]

(b) Dari persamaan pertama $x = \frac{h}{\tan 40^\circ}$. Substitusi: $h = \left(\frac{h}{\tan 40^\circ} + 20 \right) \tan 28^\circ \Rightarrow h \tan 40^\circ = h \tan 28^\circ + 20 \tan 40^\circ \tan 28^\circ \Rightarrow h = \frac{20 \tan 40^\circ \tan 28^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 28^\circ} \approx \frac{20(0,8391)(0,5317)}{0,3074} \approx 29,0$ m. [3]

(c) $x = \frac{h}{\tan 40^\circ} \approx \frac{29,0}{0,8391} \approx 34,6$ m. Alasan perbedaan: tinggi mata diabaikan, tanah tidak datar, salah baca sudut, atau P , Q , dan pohon tidak benar-benar segaris. [2]

Pembahasan: Teknik dua sudut elevasi ini dipakai juru ukur ketika kaki benda tidak bisa dicapai. Kuncinya: tulis dua persamaan tangen yang memuat jarak tak diketahui yang sama, lalu eliminasi jarak itu.

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Bagi dengan kosinus • gaya IB • 24-5-03

Diketahui θ sudut lancip dengan $\tan \theta = \frac{2}{3}$. Tentukan nilai $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$.

Jawaban:

Kunci: -5

Pembahasan: Bagi pembilang dan penyebut dengan $\cos \theta$ (boleh, karena $\cos \theta \neq 0$):

$$\frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} = -5.$$

Hasil negatif masuk akal: karena $\tan \theta < 1$, sudutnya kurang dari 45° , sehingga $\sin \theta < \cos \theta$ dan penyebutnya negatif.

20. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Menyederhanakan bentuk • gaya IB • 24-5-04

Untuk $0^\circ < \theta < 90^\circ$, bentuk $(1 - \cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta)$ sama dengan...

A. 1

C. $\tan^2 \theta$

B. $\sin^2 \theta$

D. $\cos^2 \theta$

Kunci: C

Pembahasan: $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ dan $1 + \tan^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$.

Hasil kalinya $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Sudut 15° tanpa kalkulator • gaya olimpiade • 24-6-01

Segitiga ABC siku-siku di C dengan $\angle A = 15^\circ$ dan sisi miring $AB = 8$. Tentukan luas segitiga ABC tanpa kalkulator.

Jawaban: satuan luas

Kunci: 8 satuan luas

Pembahasan: Titik tengah sisi miring M berjarak sama ke ketiga titik sudut, jadi $MA = MB = MC = 4$.

Segitiga AMC sama kaki ($MA = MC$), sehingga $\angle MCA = 15^\circ$ dan sudut luar $\angle CMB = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.

Tinggi dari C ke AB adalah $CM \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

Luas $= \frac{1}{2} \times AB \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$.

Pada segitiga ABC siku-siku di C dengan $AC = BC = 1$, perpanjang CA melewati A sampai titik D sehingga $AD = AB$.

- (a) Buktikan bahwa $\angle BDC = 22,5^\circ$.
 (b) Buktikan bahwa $\tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.
 (c) Tunjukkan bahwa $\tan 67,5^\circ = \sqrt{2} + 1$.

Kunci/rubrik: (a) $AB = \sqrt{2}$ (Pythagoras) dan $\angle BAC = 45^\circ$. Segitiga ABD sama kaki ($AD = AB$), jadi $\angle ADB = \angle ABD$. Sudut luar $\angle BAC = \angle ADB + \angle ABD = 2\angle ADB$, sehingga $\angle BDC = \angle ADB = 22,5^\circ$. [2]

(b) Pada segitiga siku-siku BCD : $BC = 1$ dan $DC = DA + AC = \sqrt{2} + 1$. Maka $\tan 22,5^\circ = \frac{BC}{DC} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1$. [2]

(c) Pada segitiga BCD , $\angle DBC = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$, sehingga $\tan 67,5^\circ = \frac{DC}{BC} = \sqrt{2} + 1$. (Atau: $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ dan $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.) [2]

Pembahasan: Trik "perpanjang sisi sejauh sisi miring" selalu membelah sudut menjadi dua karena membentuk segitiga sama kaki. Dengan trik ini kamu bisa mendapatkan nilai eksak untuk $22,5^\circ$ dan 15° tanpa rumus sudut paruh. Cek numerik: $\sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = \tan 22,5^\circ$.

Tentukan nilai $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$.

Jawaban:

Kunci: 44,5

Pembahasan: Karena $\sin(90^\circ - k^\circ) = \cos k^\circ$, setiap pasangan $\sin^2 k^\circ + \sin^2(90 - k)^\circ = \sin^2 k^\circ + \cos^2 k^\circ = 1$.

Pasangan $(1, 89), (2, 88), \dots, (44, 46)$ ada 44 buah dan menyumbang 44. Suku tengah $\sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ tidak berpasangan.

Jumlahnya $44 + \frac{1}{2} = 44,5$.

Persegi $ABCD$ bersisi 1. Titik E terletak di dalam persegi sehingga segitiga ABE sama sisi. Tentukan nilai eksak $\tan \angle ECD$.

Jawaban:

Kunci: 0,268

Pembahasan: Dengan koordinat, $E = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Dari $C(1, 1)$, garis CD mendatar ke kiri. Selisih mendatar C ke E adalah $\frac{1}{2}$ dan selisih tegaknya $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\tan \angle ECD = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268.$$

Bonus: $BE = BC = 1$ dan $\angle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, jadi $\angle BCE = 75^\circ$ dan $\angle ECD = 15^\circ$. Kita baru saja membuktikan $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ dengan cara kedua!

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 · Pemula · Pilihan ganda · Nama sisi dan sudut · 25-1-01

Pada segitiga ABC , sisi a adalah sisi yang...

- A. menghubungkan titik A dan B
B. berhadapan dengan sudut A
C. berhadapan dengan sudut C
D. selalu paling panjang

Kunci: B

Pembahasan: Menurut kesepakatan, sisi a berhadapan dengan sudut A , jadi $a = BC$. Sisi yang menghubungkan A dan B adalah c . Sisi a tidak harus paling panjang; yang terpanjang adalah sisi di depan sudut terbesar.

2. Lv 1 · Pemula · Pilihan ganda · Bearing · 25-1-02

Arah tenggara (tepat di tengah-tengah antara timur dan selatan) dinyatakan sebagai bearing...

- A. 045° C. 135°
B. 225° D. 315°

Kunci: C

Pembahasan: Bearing diukur dari utara searah jarum jam. Timur = 090° , selatan = 180° , jadi tenggara = $(090^\circ + 180^\circ) : 2 = 135^\circ$.

045° adalah timur laut, 225° barat daya, dan 315° barat laut.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Luas $\frac{1}{2}ab \sin C$ • 25-1-03

Dua sisi sebuah segitiga panjangnya 6 cm dan 10 cm, dan sudut yang diapit kedua sisi itu 30° . Berapa luas segitiga tersebut? ($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$)

Jawaban: cm²

Kunci: 15 cm²

Pembahasan: $L = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin 30^\circ = 30 \times \frac{1}{2} = 15 \text{ cm}^2$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kosinus & Pythagoras • 25-1-04

Jika sudut $C = 90^\circ$, aturan kosinus $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ berubah menjadi...

- A. $c^2 = a^2 + b^2$
B. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
C. $c = a + b$
D. $c^2 = a^2 - b^2$

Kunci: A

Pembahasan: $\cos 90^\circ = 0$, sehingga suku $2ab \cos C$ bernilai nol dan tersisa $c^2 = a^2 + b^2$. Itulah Teorema Pythagoras: kasus khusus aturan kosinus.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Aturan sinus • 25-2-01

Pada segitiga ABC , $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, dan $a = 10$ cm. Hitung panjang b . Tuliskan dalam bentuk akar atau desimal.

Jawaban: cm

Kunci: 14,142 cm

Pembahasan: $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{2} \approx 14,14$ cm.

Wajar: $B = 45^\circ$ lebih besar daripada $A = 30^\circ$, jadi b lebih panjang daripada a .

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Aturan kosinus • 25-2-02

Pada segitiga ABC , $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, dan sudut apit $C = 60^\circ$. Berapa panjang c ?

Jawaban: cm

Kunci: 7 cm

Pembahasan: $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ = 25 + 64 - 80 \times \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49$, jadi $c = 7$ cm.

Bandingkan dengan Pythagoras yang keliru: $\sqrt{89} \approx 9,43$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Bearing balik • 25-2-03

Bearing kota B dari kota A adalah 070° . Bearing kota A dari kota B adalah...

- | | |
|----------------|----------------|
| A. 110° | C. 290° |
| B. 160° | D. 250° |

Kunci: D

Pembahasan: Arah balik selalu berlawanan, jadi tambahkan 180° : $070^\circ + 180^\circ = 250^\circ$.

$110^\circ (= 180^\circ - 70^\circ)$ dan $290^\circ (= 360^\circ - 70^\circ)$ adalah jebakan umum.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Memilih aturan • 25-2-04

Diketahui dua sisi sebuah segitiga dan sudut yang diapit kedua sisi itu. Untuk menghitung sisi ketiga, alat yang paling tepat adalah...

- | | |
|-------------------|--------------------------|
| A. aturan sinus | C. Teorema Pythagoras |
| B. aturan kosinus | D. tidak bisa ditentukan |

Kunci: B

Pembahasan: Data sisi-sudut-sisi tidak memuat pasangan sisi-sudut yang berhadapan, jadi aturan sinus belum bisa dipakai. Aturan kosinus $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ langsung memberi sisi ketiga. Pythagoras hanya berlaku jika sudutnya 90° .

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Navigasi kapal • 25-3-01

Sebuah kapal berlayar 15 km dari pelabuhan P pada bearing 040° ke titik Q , lalu 8 km pada bearing 160° ke titik R . Berapa jarak R dari pelabuhan?

Jawaban: km

Kunci: 13 km

Pembahasan: Bearing balik $Q \rightarrow P = 220^\circ$, arah $Q \rightarrow R = 160^\circ$, jadi $\angle PQR = 220^\circ - 160^\circ = 60^\circ$.

$PR^2 = 15^2 + 8^2 - 2 \cdot 15 \cdot 8 \cos 60^\circ = 225 + 64 - 120 = 169$, jadi $PR = 13$ km.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kasus ambigu • 25-3-02

Pada segitiga ABC , $\angle A = 40^\circ$, $b = 12$ cm, dan $a = 9$ cm. Ternyata ada dua segitiga yang memenuhi. Tentukan besar $\angle B$ pada segitiga yang sudut B -nya tumpul (dalam derajat, 2 desimal).

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 121,01 $^\circ$

Pembahasan: Cek: $b \sin A = 12 \sin 40^\circ \approx 7,71 < 9 < 12$, jadi memang ada dua segitiga.

$\sin B = \frac{12 \sin 40^\circ}{9} \approx 0,8570$, sehingga $B_1 \approx 58,99^\circ$.

Sudut tumpulnya $B_2 = 180^\circ - 58,99^\circ = 121,01^\circ$. Cek: $40^\circ + 121,01^\circ < 180^\circ$, jadi sah.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Luas dari tiga sisi • 25-3-03

Sebidang lahan berbentuk segitiga dengan sisi 9 m, 10 m, dan 17 m. Hitung luas lahan itu.

Jawaban: m^2

Kunci: 36 m^2

Pembahasan: Sudut C di depan sisi 17 m: $\cos C = \frac{9^2 + 10^2 - 17^2}{2 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{81 + 100 - 289}{180} = -0,6$ (tumpul).

$\sin C = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$ (sinus sudut tumpul tetap positif).

$L = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 0,8 = 36 m^2$.

Cek dengan rumus Heron: $s = 18$, $L = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt{1296} = 36$. $\checkmark$

12. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Sudut terbesar • 25-3-04

Sudut terbesar pada segitiga dengan sisi 7 cm, 8 cm, dan 13 cm adalah...

A. 90°

C. 120°

B. 100°

D. 150°

Kunci: C

Pembahasan: Sudut terbesar berhadapan dengan sisi terpanjang (13 cm).

$\cos C = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{49 + 64 - 169}{112} = \frac{-56}{112} = -\frac{1}{2}$, jadi $C = 120^\circ$.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Aturan sinus: mencari sudut • gaya IGCSE • 25-4-01

Pada segitiga PQR , $PQ = 9$ cm, $QR = 7$ cm, dan $\angle PRQ = 72^\circ$. **Hitung** besar $\angle QPR$. Berikan jawaban dalam derajat, 1 desimal.

Jawaban:°

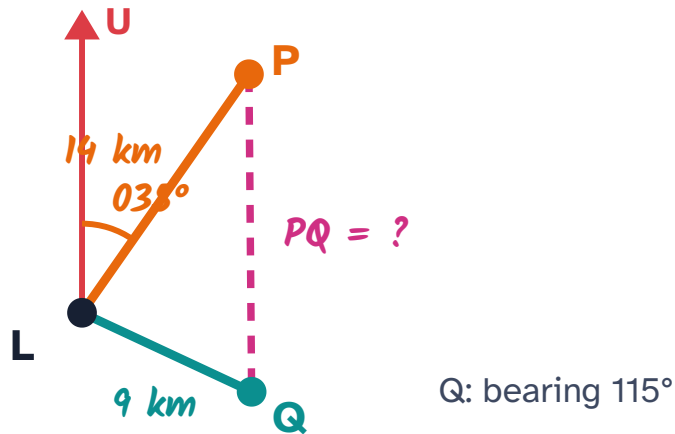
Kunci: 47,7°

Pembahasan: $\frac{\sin P}{QR} = \frac{\sin R}{PQ} \Rightarrow \sin P = \frac{7 \sin 72^\circ}{9} \approx 0,7397 \Rightarrow P \approx 47,7^\circ$.

Tidak ada jawaban kedua: $QR < PQ$, jadi $\angle P$ harus lebih kecil daripada $\angle R = 72^\circ$. Sudut $180^\circ - 47,7^\circ = 132,3^\circ$ jelas terlalu besar.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Bearing & aturan kosinus • gaya IGCSE • 25-4-02

Dari sebuah mercusuar L , pulau P berjarak 14 km pada bearing 035° , dan pulau Q berjarak 9 km pada bearing 115° . **Hitung** jarak antara kedua pulau, dibulatkan 2 desimal.



Jawaban: km

Kunci: 15,27 km

Pembahasan: $\angle PLQ = 115^\circ - 35^\circ = 80^\circ$.

$$PQ^2 = 14^2 + 9^2 - 2 \cdot 14 \cdot 9 \cos 80^\circ = 277 - 252 \times 0,1736 \approx 233,24.$$

$$PQ \approx 15,27 \text{ km}.$$

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Luas dengan sudut tumpul • gaya IGCSE • 25-4-03

Sebidang tanah berbentuk segitiga. Dua sisinya 45 m dan 32 m, dan sudut di antara kedua sisi itu 128° .

Hitung luas tanah tersebut, dibulatkan ke m^2 terdekat.

Jawaban: m^2

Kunci: 567 m^2

Pembahasan: $L = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 32 \cdot \sin 128^\circ = 720 \times 0,7880 \approx 567,4$, dibulatkan menjadi 567 m^2 .

Ingat $\sin 128^\circ = \sin 52^\circ$, dan sinus sudut tumpul tetap positif.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Segitiga 5-7-8 • gaya IGCSE • 25-4-04

Segitiga ABC memiliki $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, dan $AC = 5$ cm.

- Tunjukkan bahwa $\angle BAC = 60^\circ$.
- Hitung luas segitiga ABC dalam bentuk akar.
- Hitung jarak titik C ke garis AB .

Kunci/rubrik: (a) Sudut A berhadapan dengan $BC = 7$: $\cos A = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$, jadi $A = 60^\circ$. [2 poin: substitusi benar 1, kesimpulan 1]

(b) $L = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17,3 \text{ cm}^2$. [2 poin]

(c) $L = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot t \Rightarrow t = \frac{2 \times 10\sqrt{3}}{8} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \approx 4,33 \text{ cm}$. [2 poin]

Pembahasan: Kata perintah **tunjukkan** berarti semua langkah harus tertulis, termasuk nilai $\cos A = \frac{1}{2}$. Bagian (c) memakai luas dari dua sudut pandang: sekali dengan sinus, sekali dengan alas dan tinggi. Cek: $t = AC \sin A = 5 \sin 60^\circ = \frac{5}{2}\sqrt{3}$. ✓

Lv 5 • IB DP • gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Kasus ambigu dengan aljabar • gaya IB • 25-5-01

Pada segitiga ABC , $AB = 10$ cm dan $\angle ABC = 30^\circ$. Panjang $AC = x$ cm dan panjang $BC = y$ cm.

- Tunjukkan bahwa untuk $x = 8$ ada dua segitiga berbeda yang memenuhi.
- Untuk $x = 8$, tunjukkan bahwa $y^2 - 10\sqrt{3}y + 36 = 0$, lalu tentukan kedua nilai y dalam bentuk eksak.
- Hitung selisih luas kedua segitiga tersebut.
- Tentukan semua nilai x yang menghasilkan tepat dua segitiga.

Kunci/rubrik: (a) Jarak A ke garis BC adalah $10 \sin 30^\circ = 5$. Karena $5 < 8 < 10$, sisi AC memotong sinar BC di dua titik. [2]

(b) Aturan kosinus di B : $8^2 = 10^2 + y^2 - 2 \cdot 10 \cdot y \cos 30^\circ \Rightarrow 64 = 100 + y^2 - 10\sqrt{3}y \Rightarrow y^2 - 10\sqrt{3}y + 36 = 0$.

Rumus abc: $y = 5\sqrt{3} \pm \sqrt{75 - 36} = 5\sqrt{3} \pm \sqrt{39}$, yaitu $y \approx 14,91$ atau $y \approx 2,42$. [3]

(c) $L = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot y \sin 30^\circ = 2,5y$. Selisih $= 2,5(y_1 - y_2) = 2,5 \cdot 2\sqrt{39} = 5\sqrt{39} \approx 31,2 \text{ cm}^2$. [2]

(d) Dua segitiga terjadi tepat jika $10 \sin 30^\circ < x < 10$, yaitu $5 < x < 10$. [2]

Pembahasan: Bagian (b) menunjukkan sisi lain kasus ambigu: aturan kosinus untuk sisi yang tidak diketahui menghasilkan **persamaan kuadrat**, dan dua akar positifnya adalah dua segitiga. Diskriminannya $300 - 144 = 156 > 0$. Perhatikan juga bahwa hasil kali kedua akar $= 36 > 0$ dan jumlahnya positif, jadi keduanya positif (sah sebagai panjang).

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Soal 3D: tinggi antenna • gaya IB • 25-5-02

Sebuah tiang antenna berdiri tegak di titik T pada tanah datar. Titik A dan B di tanah berjarak 60 m.

Diketahui $\angle TAB = 48^\circ$, $\angle TBA = 64^\circ$, dan sudut elevasi puncak antenna dari A adalah 25° . Tentukan tinggi antenna, dibulatkan 1 desimal.

Jawaban: m

Kunci: 27,1 m

Pembahasan: Segitiga datar: $\angle ATB = 180^\circ - 48^\circ - 64^\circ = 68^\circ$.

Aturan sinus: $AT = \frac{60 \sin 64^\circ}{\sin 68^\circ} \approx \frac{60 \times 0,8988}{0,9272} \approx 58,16 \text{ m}$.

Segitiga tegak: $h = AT \tan 25^\circ \approx 58,16 \times 0,4663 \approx 27,1 \text{ m}$.

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Pemodelan Luas • gaya IB • 25-5-03

Petani membuat kandang segitiga dari dua sisi pagar sepanjang 30 m dan 40 m, dengan sudut θ di antara keduanya (sisi ketiga berupa tembok). Luas kandang harus 420 m². Jika θ tumpul, tentukan θ dalam derajat, 2 desimal.

Jawaban: °

Kunci: 135,57 °

Pembahasan: $600 \sin \theta = 420 \Rightarrow \sin \theta = 0,7$.

Sudut lancipnya $\theta_1 \approx 44,43^\circ$; sudut tumpulnya $\theta_2 = 180^\circ - 44,43^\circ \approx 135,57^\circ$.

Interpretasi: kedua sudut memberi luas yang sama, tetapi tembok yang dibutuhkan berbeda panjang ($\approx 28,0$ m untuk sudut lancip dan $\approx 64,9$ m untuk sudut tumpul).

20. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Lingkaran luar • gaya IB • 25-5-04

Sebuah segitiga memiliki sisi $a = 12$ cm dan sudut di depannya $A = 30^\circ$. Jari-jari lingkaran luar segitiga itu adalah...

A. 12 cm

C. 24 cm

B. 6 cm

D. $6\sqrt{3}$ cm

Kunci: A

Pembahasan: Aturan sinus yang diperluas: $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

$2R = \frac{12}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{0,5} = 24$, jadi $R = 12$ cm. Pilihan 24 cm adalah diameternya, bukan jari-jari.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Panjang garis berat (Apollonius) • gaya olimpiade • 25-6-01

Pada segitiga ABC , titik M adalah titik tengah BC , dan $m = AM$ adalah garis berat dari A .

(a) Buktikan bahwa $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2$.

(b) Gunakan hasil itu untuk menghitung panjang garis berat dari A pada segitiga dengan $a = 10$, $b = 8$, dan $c = 6$. Jelaskan mengapa hasilnya masuk akal.

Kunci/rubrik: (a) Misalkan $\angle AMB = \theta$, maka $\angle AMC = 180^\circ - \theta$ dan $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$. Aturan kosinus di segitiga AMB : $c^2 = m^2 + \frac{1}{4}a^2 - am \cos \theta$. Di segitiga AMC : $b^2 = m^2 + \frac{1}{4}a^2 + am \cos \theta$. Jumlahkan: $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2$. ■ [4 poin: dua aturan kosinus 2, tanda kosinus 1, penjumlahan 1]

(b) $64 + 36 = 2m^2 + 50 \Rightarrow m^2 = 25 \Rightarrow m = 5$. Masuk akal karena $6^2 + 8^2 = 10^2$: segitiganya siku-siku di A , dan garis berat ke hipotenusa sama dengan setengah hipotenusa (M adalah pusat lingkaran luar). [2 poin]

Pembahasan: Trik kuncinya: dua sudut yang saling berpelurus memiliki kosinus yang berlawanan tanda, sehingga suku $am \cos \theta$ saling menghapus saat dijumlahkan. Hasil ini dikenal sebagai teorema Apollonius dan sering dipakai di soal olimpiade geometri.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Titik di dalam segitiga sama sisi • gaya olimpiade • 25-6-02

Titik P terletak di dalam segitiga sama sisi ABC sehingga $PA = 5$, $PB = 12$, dan $PC = 13$. Tentukan panjang sisi segitiga itu (2 desimal).

Jawaban:

Kunci: 16,52

Pembahasan: Rotasi 60° terhadap B yang membawa A ke C membawa P ke P' dengan $BP' = BP = 12$ dan $CP' = AP = 5$.

Karena $BP = BP'$ dan $\angle PBP' = 60^\circ$, segitiga BPP' sama sisi: $PP' = 12$ dan $\angle BP'P = 60^\circ$.

Segitiga $PP'C$ bersisi 12, 5, 13, dan $12^2 + 5^2 = 13^2$, jadi siku-siku di P' . Maka $\angle BP'C = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.

Aturan kosinus di segitiga $BP'C$: $BC^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 \cos 150^\circ = 169 + 60\sqrt{3}$.

$BC = \sqrt{169 + 60\sqrt{3}} \approx 16,52$.

23. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Dua kemungkinan dari luas • gaya olimpiade • 25-6-03

Sebuah segitiga memiliki dua sisi 10 dan 6, serta luas 24. Panjang sisi ketiga yang mungkin adalah...

A. hanya 8

C. tidak ada segitiga seperti itu

B. hanya $4\sqrt{13}$

D. 8 atau $4\sqrt{13}$

Kunci: D

Pembahasan: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \sin C = 24 \Rightarrow \sin C = 0,8$, sehingga $\cos C = 0,6$ (lancip) atau $\cos C = -0,6$ (tumpul).
 $c^2 = 100 + 36 - 120 \cos C$ memberi $136 - 72 = 64$ atau $136 + 72 = 208$.

Jadi $c = 8$ atau $c = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$. Keduanya sah. Yang pertama ternyata segitiga siku-siku 6-8-10!

24. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Identitas sisi • gaya olimpiade • 25-6-04

Pada segitiga ABC berlaku $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$. Tentukan besar sudut C dalam derajat.

Jawaban: $^\circ$

Kunci: 60°

Pembahasan: $(a + b)^2 - c^2 = 3ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

Bandingkan dengan aturan kosinus $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$: $2ab \cos C = ab \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ$.

Contoh: segitiga 3-8-7 memenuhi $(18)(4) = 72 = 3 \cdot 3 \cdot 8$. ✓

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Lingkaran satuan • 26-1-01

Titik P terletak pada lingkaran satuan (berpusat di O , jari-jari 1). Ruas OP membentuk sudut θ dengan sumbu- x positif. Koordinat x titik P sama dengan...

- A. $\sin \theta$ C. $\cos \theta$
B. $\tan \theta$ D. θ

Kunci: C

Pembahasan: Pada lingkaran satuan, $P = (\cos \theta, \sin \theta)$. Koordinat mendatar adalah kosinus dan koordinat tegak adalah sinus. Urutannya sama seperti pasangan (x, y) : kosinus dulu, baru sinus.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Derajat & radian • 26-1-02

Setengah putaran (180°) sama dengan berapa radian?

- A. 1 C. 2π
B. π D. $\frac{\pi}{2}$

Kunci: B

Pembahasan: Satu putaran penuh $= 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, jadi setengah putaran $= \pi \text{ rad} = 180^\circ$. Pilihan 2π adalah satu putaran penuh, sedangkan $\frac{\pi}{2}$ adalah seperempat putaran (90°).

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Grafik sinus • 26-1-03

Tinggi kabin bianglala digambarkan oleh grafik $y = \sin x$. Berapa nilai **terbesar** dari $\sin x$?

- A. 1 C. 90
B. π D. tidak ada batasnya

Kunci: A

Pembahasan: $\sin x$ adalah koordinat y titik pada lingkaran berjari-jari 1, jadi nilainya tidak pernah lebih dari 1 atau kurang dari -1 .

Nilai terbesar 1 tercapai saat $x = 90^\circ$ ($\frac{\pi}{2}$ rad), ketika kabin berada di puncak.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kuadran • 26-1-04

Sudut 300° terletak di kuadran...

- A. I C. III
B. II D. IV

Kunci: D

Pembahasan: Kuadran I: 0° – 90° , II: 90° – 180° , III: 180° – 270° , IV: 270° – 360° .

Karena $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$, sudut 300° berada di kuadran IV. Di sana hanya kosinus yang positif.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Derajat ke radian • 26-2-01

Ubah 150° ke dalam radian. (Kamu boleh menulis jawaban dengan π , misalnya $2\pi/3$.)

Jawaban: rad

Kunci: 2,618 rad**Pembahasan:** Kalikan dengan $\frac{\pi}{180^\circ}$:

$$150^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,618 \text{ rad.}$$

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Sudut acuan • 26-2-02

Nilai $\sin 210^\circ$ adalah...

A. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Kunci: B**Pembahasan:** 210° berada di kuadran III dengan sudut acuan $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$.Di kuadran III sinus negatif, jadi $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Periode • 26-2-03

Berapa derajat periode grafik $y = \sin 3x$ (dengan x dalam derajat)?

Jawaban: °

Kunci: 120 °**Pembahasan:** Grafik $\sin x$ berulang setiap 360° . Pada $\sin 3x$, sudut di dalam bergerak 3 kali lebih cepat, sehingga satu gelombang selesai saat $3x = 360^\circ$, yaitu $x = 120^\circ$.

$$\text{Periode} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Panjang busur • 26-2-04

Roda gerobak bakso berjari-jari 30 cm berputar sebesar 2 radian. Berapa cm jarak yang ditempuh sebuah titik di tepi roda?

Jawaban: cm

Kunci: 60 cm**Pembahasan:** Panjang busur $s = r\theta$ dengan θ dalam radian:

$$s = 30 \times 2 = 60 \text{ cm. Inilah kehebatan radian: tidak perlu membawa-bawa } \frac{\theta}{360^\circ}.$$

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Model pasang surut • 26-3-01

Tinggi air laut di sebuah dermaga dimodelkan dengan $h(t) = 1,5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 3$ meter, dengan t jam setelah pukul 00.00. Berapa tinggi air pada pukul 01.00?

Jawaban: m

Kunci: 3,75 m

$$\text{Pembahasan: } h(1) = 1,5 \sin \frac{\pi}{6} + 3 = 1,5 \times \frac{1}{2} + 3 = 3,75 \text{ m.}$$

Cek kewajaran: tinggi air harus di antara $3 - 1,5 = 1,5$ m dan $3 + 1,5 = 4,5$ m. ✓

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Identitas Pythagoras • 26-3-02

Diketahui $\sin \theta = \frac{3}{5}$ dan θ sudut tumpul (kuadran II). Nilai $\cos \theta$ adalah...

- A. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$
B. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

Kunci: C

Pembahasan: $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, jadi $\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$.

Di kuadran II kosinus negatif, maka $\cos \theta = -\frac{4}{5}$. (Pengecoh $-\frac{3}{4}$ adalah nilai $\tan \theta$.)

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Banyak penyelesaian • 26-3-03

Berapa banyak penyelesaian persamaan $2 \sin x = 1$ untuk $0^\circ \leq x \leq 720^\circ$?

Jawaban: penyelesaian

Kunci: 4 penyelesaian

Pembahasan: $\sin x = \frac{1}{2}$. Pada putaran pertama: $x = 30^\circ$ dan $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Tambahkan 360° untuk putaran kedua: 390° dan 510° .

Total **4** penyelesaian: $30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Jumlah sudut • 26-3-04

Nilai eksak $\cos 75^\circ$ dapat dihitung sebagai $\cos(45^\circ + 30^\circ)$. Hitung nilainya (boleh dalam bentuk akar).

Jawaban:

Kunci: 0,2588

Pembahasan: $\cos 75^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,2588$.

Cek: $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$, bilangan positif yang kecil. ✓

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Persamaan trigonometri • gaya IGCSE • 26-4-01

Selesaikan persamaan $2 \cos x + 1 = 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Tuliskan penyelesaian yang **terbesar**.

Jawaban:°

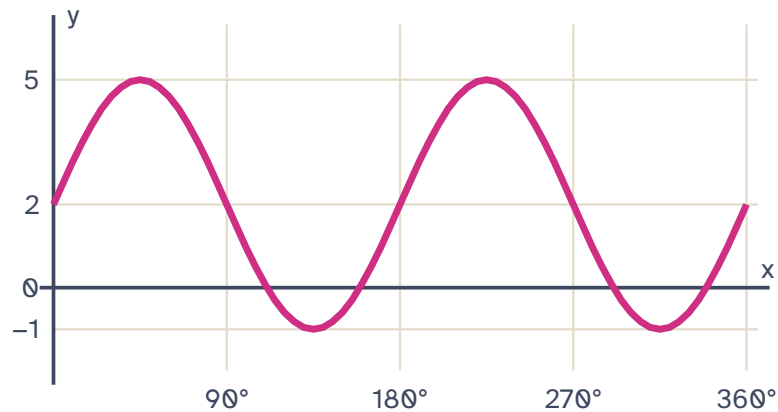
Kunci: 240°

Pembahasan: $\cos x = -\frac{1}{2}$. Sudut acuannya 60° karena $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Kosinus negatif di kuadran II dan III: $x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ dan $x = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.

Penyelesaian terbesar: **240°**.

Gambar menunjukkan grafik $y = a \sin(bx) + c$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Tentukan nilai a , b , dan c .



A. $a = 3, b = 2, c = 2$

C. $a = 3, b = \frac{1}{2}, c = 2$

B. $a = 6, b = 2, c = 2$

D. $a = 3, b = 2, c = -1$

Kunci: A

Pembahasan: Dari grafik: maksimum 5 dan minimum -1 .

Sumbu tengah $c = \frac{5+(-1)}{2} = 2$; amplitudo $a = \frac{5-(-1)}{2} = 3$.

Dalam 360° ada dua gelombang penuh, jadi periodenya 180° dan $b = \frac{360^\circ}{180^\circ} = 2$.

Jadi $a = 3, b = 2, c = 2$. (Pengecoh $a = 6$ adalah jarak puncak ke lembah, bukan amplitudo.)

Kipas lipat berbentuk juring lingkaran berjari-jari 25 cm dengan sudut pusat 2,4 radian. Hitung luas kipas itu.

Jawaban: cm^2

Kunci: 750 cm^2

Pembahasan: $L = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 25^2 \times 2,4 = \frac{1}{2} \times 625 \times 2,4 = 750 \text{ cm}^2$.

Cek: 2,4 rad adalah $\frac{2,4}{2\pi} \approx 38\%$ putaran, dan $38\% \times \pi \times 25^2 \approx 750$. ✓

(a) Tunjukkan bahwa $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.

(b) Dengan hasil (a), selesaikan $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{2}$ untuk $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

Kunci/rubrik: (a) $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$.

[2 poin: penjabaran 1, memakai $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dan $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 1]

(b) $1 + \sin 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$. Karena $0^\circ \leq 2x \leq 360^\circ$: $2x = 30^\circ$ atau $2x = 150^\circ$, jadi $x = 15^\circ$ atau $x = 75^\circ$. [3 poin: persamaan $\sin 2x = \frac{1}{2}$ 1, rentang $2x$ diperlebar 1, kedua jawaban 1]

Pembahasan: Perhatikan rentangnya: karena $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, sudut $2x$ berada di antara 0° dan 360° . Lupa memperlebar rentang adalah kesalahan paling umum, sehingga jawaban 75° sering terlewat.

Cek $x = 15^\circ$: $(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 \approx (0,259 + 0,966)^2 \approx 1,5$. ✓

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Model bianglala • gaya IB • 26-5-01

Sebuah bianglala berdiameter 30 m. Porosnya berada 17 m di atas tanah, dan roda berputar satu kali dalam 80 detik. Dimas naik dari titik terendah pada $t = 0$.

- (a) Tunjukkan bahwa tinggi Dimas dapat dimodelkan oleh $h(t) = 17 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{40}\right)$.
 (b) Hitung tinggi Dimas setelah 20 detik.
 (c) Dalam satu putaran, berapa detik Dimas berada lebih dari 24,5 m di atas tanah?

Kunci/rubrik: (a) Jari-jari 15 m menjadi amplitudo, dan tinggi poros 17 m menjadi sumbu tengah. Periode 80 s, jadi $B = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40}$. Pada $t = 0$, $h(0) = 17 - 15 = 2$ m, yaitu titik terendah, cocok dengan bentuk $-\cos$ yang dimulai dari minimum. [2]

(b) $h(20) = 17 - 15 \cos \frac{\pi}{2} = 17 - 0 = 17$ m (seperempat putaran, setinggi poros). [1]

(c) $17 - 15 \cos \frac{\pi t}{40} > 24,5 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{40} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi t}{40} < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{80}{3} < t < \frac{160}{3}$. Lamanya $\frac{80}{3} \approx 26,7$ detik. [3: pertidaksamaan 1, selang sudut 1, durasi 1]

Pembahasan: Bagian (c) bisa dicek dengan simetri lingkaran: $\cos \theta < -\frac{1}{2}$ terjadi pada sepertiga lingkaran (dari 120° sampai 240°). Jadi Dimas berada di atas 24,5 m selama sepertiga putaran: $\frac{1}{3} \times 80 \approx 26,7$ detik.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Membangun model • gaya IB • 26-5-02

Di sebuah pelabuhan, pasang tertinggi 4,2 m terjadi pukul 05.00 dan surut terendah 0,6 m terjadi pukul 11.00. Tinggi air dimodelkan dengan $h(t) = A \sin(B(t - C)) + D$, dengan t jam setelah pukul 00.00, $A > 0$, dan $0 \leq C < 12$. Tentukan tinggi air pada pukul 07.00 menurut model ini.

Jawaban: m

Kunci: 3,3 m

Pembahasan: $D = \frac{4,2+0,6}{2} = 2,4$ dan $A = \frac{4,2-0,6}{2} = 1,8$.

Dari puncak ke lembah 6 jam = setengah periode, jadi periodenya 12 jam dan $B = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Sinus mencapai puncak seperempat periode (3 jam) setelah melewati sumbu tengah sambil naik, jadi $C = 5 - 3 = 2$.

$h(7) = 1,8 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 5\right) + 2,4 = 1,8 \times \frac{1}{2} + 2,4 = 3,3$ m.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Persamaan sudut rangkap • gaya IB • 26-5-03

Banyak penyelesaian persamaan $\sin 2x = \sin x$ untuk $0 \leq x < 2\pi$ adalah...

- A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4

Kunci: D

Pembahasan: $2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$.

$\sin x = 0$: $x = 0$ atau $x = \pi$.

$\cos x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{3}$ atau $x = \frac{5\pi}{3}$.

Total 4 penyelesaian. Jebakan: membagi kedua ruas dengan $\sin x$ menghilangkan $x = 0$ dan $x = \pi$, sehingga jawabannya keliru menjadi 2.

20. Lv 5 • IB DP • Isian • Bentuk $R \sin(x + \varphi)$ • gaya IB • 26-5-04

Tentukan nilai maksimum $f(x) = 5 \sin x + 12 \cos x$.

Jawaban:

Kunci: 13

Pembahasan: Tulis $5 \sin x + 12 \cos x = R \sin(x + \varphi)$ dengan $R \cos \varphi = 5$ dan $R \sin \varphi = 12$.

$R = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Karena nilai terbesar $\sin(x + \varphi)$ adalah 1, maksimum f adalah **13**, tercapai saat $x + \varphi = 90^\circ$.
(Bukan $5 + 12 = 17$: kedua gelombang tidak memuncak pada saat yang sama.)

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • $\cos 36^\circ$ dan $\cos 72^\circ$ • gaya olimpiade • 26-6-01

Hitung nilai eksak $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$.

Jawaban:

Kunci: 0,5

Pembahasan: Misalkan $a = \cos 36^\circ$ dan $b = \cos 72^\circ$. Dari sudut rangkap: $b = 2a^2 - 1$ dan $\cos 144^\circ = 2b^2 - 1$.
Karena $\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ = -a$, diperoleh $-a = 2b^2 - 1$.

Kurangkan kedua persamaan: $b + a = 2a^2 - 2b^2 = 2(a - b)(a + b)$.

Karena $a + b > 0$, bagi dengan $a + b$: $a - b = \frac{1}{2}$. Indah, tanpa akar sama sekali!

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Jumlah kuadrat sinus • gaya olimpiade • 26-6-02

Hitung $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$.

Jawaban:

Kunci: 44,5

Pembahasan: $\sin(90^\circ - k) = \cos k$, jadi $\sin^2 k + \sin^2(90^\circ - k) = \sin^2 k + \cos^2 k = 1$.

Pasangan $(1^\circ, 89^\circ), (2^\circ, 88^\circ), \dots, (44^\circ, 46^\circ)$ ada 44 pasang, masing-masing bernilai 1. Sisanya suku tengah $\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$.

Jumlah $= 44 + \frac{1}{2} = 44,5$.

23. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Hasil kali kosinus • gaya olimpiade • 26-6-03

Nilai $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ adalah...

A. $\frac{1}{8}$
B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$
D. $\frac{1}{16}$

Kunci: A

Pembahasan: Misalkan $P = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$. Kalikan dengan $\sin 20^\circ$ dan pakai $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ berulang kali:

$P \sin 20^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{4} \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \sin 160^\circ$.

Karena $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ \neq 0$, diperoleh $P = \frac{1}{8}$. Trik "kalikan dengan sinus sudut terkecil" membuat sudut rangkap menggelinging.

Buktikan bahwa $\tan 1^\circ$ adalah bilangan irasional.

(Petunjuk: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.)

Kunci/rubrik: Andaikan $\tan 1^\circ = r$ rasional. [1]

Untuk $k = 1, 2, \dots, 29$: $\tan(k+1)^\circ = \frac{\tan k^\circ + r}{1 - r \tan k^\circ}$. Penyebutnya tidak nol, sebab $1 - \tan k^\circ \tan 1^\circ = \frac{\cos(k+1)^\circ}{\cos k^\circ \cos 1^\circ}$

dan $\cos(k+1)^\circ \neq 0$ untuk $k+1 \leq 30$. Hasil jumlah, selisih, kali, dan bagi bilangan rasional tetap rasional, jadi dengan induksi $\tan k^\circ$ rasional untuk $k = 1, 2, \dots, 30$. [3]

Khususnya $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ rasional, sehingga $\sqrt{3} = 3 \tan 30^\circ$ juga rasional. Padahal $\sqrt{3}$ irasional. Kontradiksi, jadi $\tan 1^\circ$ irasional. [2]

Pembahasan: Ini bukti dengan kontradiksi dan induksi. Ide kuncinya: rumus penjumlahan tangen "mengawetkan" kerasionalan. Pertanyaan lanjutan: bisakah $\tan 45^\circ$ dipakai sebagai pengganti $\tan 30^\circ$? Tidak, karena $\tan 45^\circ = 1$ memang rasional, jadi tidak muncul kontradiksi.

27 Limit: Seni Mendekati

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Tabel mendekat • 27-1-01

Perhatikan tabel nilai fungsi f berikut.

x	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,8	5,98	5,998	6,002	6,02	6,2

Jika x mendekati 3, nilai $f(x)$ mendekati...

- A. 3
- B. 5,9
- C. 6
- D. tidak dapat ditentukan, karena x tidak pernah sama dengan 3

Kunci: C

Pembahasan: Dari kiri ($2,9 \rightarrow 2,999$) nilai f naik $5,8 \rightarrow 5,998$. Dari kanan ($3,1 \rightarrow 3,001$) nilai f turun $6,2 \rightarrow 6,002$. Kedua arah menuju 6, jadi $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$. (Polanya $f(x) = 2x$.) Limit justru tidak memerlukan $x = 3$ itu sendiri.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Mendekati tanpa menyentuh • 27-1-02

Ancil si Kancil ingin menyeberangi sungai selebar 8 m dengan melompat di punggung para buaya. Setiap lompatan menempuh **setengah** sisa jarak ke seberang: 4 m, lalu 2 m, lalu 1 m, dan seterusnya. Jika ia terus melompat, total jarak yang ditempuhnya mendekati...

- A. 7,5 m
- B. 8 m
- C. 16 m
- D. tidak mendekati bilangan apa pun

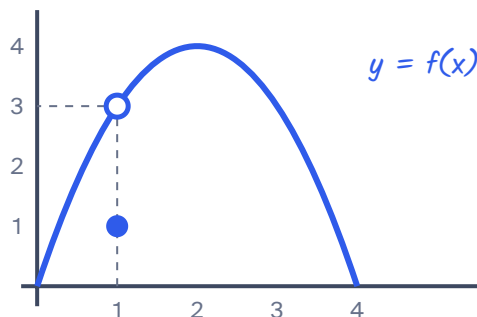
Kunci: B

Pembahasan: Jarak tempuh setelah 1, 2, 3, 4 lompatan: 4; 6; 7; 7,5 m. Sisa jaraknya 4; 2; 1; 0,5 m, selalu menjadi setengahnya.

Sisa itu bisa dibuat sekecil apa pun, jadi total jarak mendekati 8 m (limitnya 8 m). Angka 7,5 m hanyalah posisi setelah lompatan ke-4.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Limit dari grafik • 27-1-03

Grafik fungsi f ditunjukkan di bawah. Ada titik kosong di $(1, 3)$ dan titik penuh di $(1, 1)$. Berapakah $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?



- A. 3
- B. 1
- C. 2
- D. tidak ada, karena grafiknya terputus

Kunci: A

Pembahasan: Ikuti kurva dari kiri dan dari kanan menuju $x = 1$: keduanya menuju ketinggian 3, yaitu titik kosong. Jadi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.
Titik penuh $(1, 1)$ hanya menyatakan $f(1) = 1$. Nilai fungsi tepat di titik itu tidak memengaruhi limit.

4. Lv 1 • Pemula • Isian • Substitusi langsung • 27-1-04

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1)$.

Jawaban:

Kunci: 7

Pembahasan: $2x + 1$ adalah polinomial (grafiknya garis lurus tanpa lubang), jadi limitnya cukup dihitung dengan substitusi: $2(3) + 1 = 7$.
Cek dengan tabel: $x = 2,99$ memberi 6,98 dan $x = 3,01$ memberi 7,02. ✓

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Faktorisasi • 27-2-01

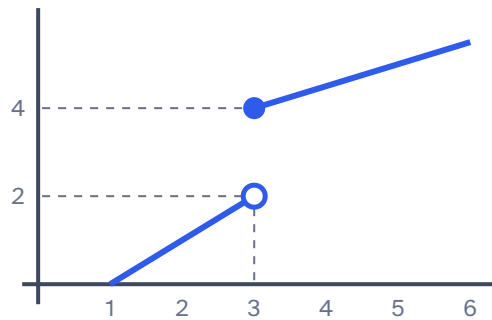
Tentukan $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$.

Jawaban:

Kunci: 10

Pembahasan: Substitusi memberi $\frac{0}{0}$, bentuk tak tentu. Faktorkan: $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.
Untuk $x \neq 5$: $\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x + 5$.
 $\lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$. Sesuai pola $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$.

Grafik fungsi f ditunjukkan di bawah: ada titik kosong di $(3, 2)$ dan titik penuh di $(3, 4)$. Pernyataan yang benar adalah...



A. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

B. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

C. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$

D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ tidak ada

Kunci: D

Pembahasan: Dari kiri, kurva menuju titik kosong $(3, 2)$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$.

Dari kanan, kurva menuju $(3, 4)$: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$.

Karena limit kiri $\neq$ limit kanan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ tidak ada, walaupun $f(3) = 4$ terdefinisi. Pilihan 3 adalah jebakan "rata-ratakan saja".

Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 1}{2x - 5}$.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: Bagi pembilang dan penyebut dengan x : $\frac{6 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{5}{x}}$.

Saat $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ dan $\frac{5}{x} \rightarrow 0$, jadi limitnya $\frac{6}{2} = 3$.

Cek: $x = 1000$ memberi $\frac{6001}{1995} \approx 3,008$.

Dengan kalkulator (mode radian), Ayu membuat tabel berikut. Untuk x negatif, hasilnya sama.

x	0,1	0,01	0,001
$\frac{\sin x}{x}$	0,99833	0,99998	0,9999998

Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ adalah...

- A. 1
- B. 0
- C. 0,99
- D. tidak ada, karena hasilnya $\frac{0}{0}$

Kunci: A

Pembahasan: Nilai tabel makin dekat ke 1 dari bawah: selisihnya kira-kira 0,0017; 0,000017; 0,00000017. Jadi limitnya 1.

Bentuk $\frac{0}{0}$ hanya muncul jika kita langsung memasukkan $x = 0$; limit justru menanyakan perilaku di *sekitar* 0. Untuk x negatif, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, sehingga nilainya sama.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

Jawaban:

Kunci: 0,1667

Pembahasan: Substitusi: $\frac{9-15+6}{9-9} = \frac{0}{0}$.

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ dan $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

Untuk $x \neq 3$: $\frac{x-2}{x+3}$, sehingga limitnya $\frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$.

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

Jawaban:

Kunci: 0,25

Pembahasan: $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ untuk $x \neq 4$.

Limitnya $\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$. Cek: $x = 4,01$ memberi $\approx 0,24984$.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Limit trigonometri • 27-3-03

Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$ adalah...

- A. 1
B. $\frac{5}{2}$
C. $\frac{2}{5}$
D. 0

Kunci: B

Pembahasan: Tulis $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$.

Misalkan $u = 5x$; saat $x \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$ dan $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$.

Jadi limitnya $\frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$. Pilihan 1 adalah jebakan "semua limit sinus hasilnya 1".

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kontinuitas • 27-3-04

Fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 2 \\ 3x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$ kontinu di $x = 2$. Tentukan a .

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: $f(2) = 3(2) - 1 = 5$, dan limit kanannya juga 5.

Limit kiri: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + a) = 4 + a$.

Kontinu $\Rightarrow 4 + a = 5 \Rightarrow a = 1$.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Biaya rata-rata • gaya IGCSE • 27-4-01

Sebuah pabrik tahu mengeluarkan biaya tetap Rp2.000.000 per hari dan biaya bahan Rp1.500 per potong.

Biaya rata-rata per potong jika membuat n potong adalah $A(n) = \frac{2.000.000 + 1.500n}{n}$ rupiah.

Hitung banyak potong tahu yang harus dibuat per hari agar biaya rata-ratanya tepat Rp1.600.

Jawaban: potong

Kunci: 20.000 potong

Pembahasan: $\frac{2.000.000}{n} + 1.500 = 1.600 \Rightarrow \frac{2.000.000}{n} = 100 \Rightarrow n = 20.000$ potong.

Catatan: $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = 1.500$. Biaya rata-rata bisa mendekati Rp1.500, tetapi tidak pernah mencapainya: garis $A = 1.500$ adalah asimtot datar.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Asimtot • gaya IGCSE • 27-4-02

Diketahui $f(x) = \frac{3x - 6}{x + 2}$, $x \neq -2$.

(a) **Tuliskan** persamaan asimtot tegak dan asimtot datar grafik f .

(b) Kedua asimtot berpotongan di titik (p, q) . **Hitung** $p + q$.

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: Asimtot tegak: penyebut nol di $x = -2$, dan pembilangnya di sana $-12 \neq 0$, jadi benar-benar asimtot (bukan lubang): $x = -2$.

Asimtot datar: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-6}{x+2} = \frac{3}{1} = 3$, jadi $y = 3$.

Titik potongnya $(-2, 3)$, sehingga $p + q = 1$.

Manakah fungsi yang **kontinu** di $x = 0$?

A. $f(x) = \frac{1}{x}$
 B. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

C. $f(x) = x^2 + |x|$
 D. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Kunci: C

Pembahasan: Pilihan 1, 2, dan 4 tidak terdefinisi di $x = 0$ (penyebutnya nol), jadi syarat pertama kontinuitas gagal. Pada pilihan 4 limitnya ada ($= 1$), tetapi $f(0)$ tidak ada: diskontinuitas lubang. Pilihan 2 bahkan melompat dari -1 ke 1 .

Pilihan 3: $f(0) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 0}(x^2 + |x|) = 0$, jadi kontinu.

Diberikan $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$.

- (a) **Tunjukkan** bahwa $g(2)$ tidak terdefinisi.
 (b) **Salin dan lengkapi** tabel nilai $g(x)$ untuk $x = 1,9; 1,99; 2,01; 2,1$.
 (c) **Tentukan** $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ secara aljabar.
 (d) **Jelaskan** bentuk grafik $y = g(x)$ di sekitar $x = 2$.

Kunci/rubrik: (a) $g(2) = \frac{4+2-6}{2-2} = \frac{0}{0}$: pembagian dengan nol, jadi tidak terdefinisi. [1]

(b) 4,9; 4,99; 5,01; 5,1. [2: semua benar 2, dua atau tiga benar 1]

(c) $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, jadi untuk $x \neq 2$, $g(x) = x + 3$ dan $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$. [2]

(d) Grafiknya garis lurus $y = x + 3$ dengan lubang (titik kosong) di $(2, 5)$. [1]

Pembahasan: Tabel (b) sudah memberi petunjuk kuat bahwa limitnya 5 (pendekatan numerik); bagian (c) memastikannya secara aljabar. Pada ujian, tuliskan faktorisasinya, jangan hanya menulis angka 5.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Tentukan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$. Berikan jawaban eksak atau 4 angka penting.

Jawaban:

Kunci: 7,389

Pembahasan: Dengan $n = 2m$: $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^2 \rightarrow e^2 \approx 7,389$.

Cek numerik: $n = 10^6$ memberi 7,38904... Secara umum $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \rightarrow e^k$.

Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 12x} - 2x)$.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $\sqrt{4x^2 + 12x} - 2x = \frac{(4x^2 + 12x) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 12x} + 2x} = \frac{12x}{\sqrt{4x^2 + 12x} + 2x} = \frac{12}{\sqrt{4 + \frac{12}{x}} + 2}$ (untuk $x > 0$).

Saat $x \rightarrow \infty$: $\frac{12}{2+2} = 3$. Bukan 0, walaupun bentuknya $\infty - \infty$!

Cek: $x = 10.000$ memberi $\approx 2,9998$.

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Jawaban:

Kunci: 0,5

Pembahasan: $\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$.

Saat $x \rightarrow 0$: $1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Akibatnya, untuk x kecil, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Segelas teh panas mendingin menurut model $T(t) = 27 + 63 \cdot 2^{-t/10}$, dengan T dalam °C dan t dalam menit.

- Tentukan suhu awal teh.
- Tentukan $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ dan jelaskan maknanya dalam konteks ini.
- Tentukan waktu yang diperlukan hingga suhu teh 34 °C.
- Menurut model, apakah teh pernah tepat mencapai suhu limit di (b)? Jelaskan.

Kunci/rubrik: (a) $T(0) = 27 + 63 \cdot 1 = 90$ °C. [1]

(b) $2^{-t/10} \rightarrow 0$, jadi $T(t) \rightarrow 27$ °C, yaitu suhu ruangan; garis $T = 27$ adalah asimtot datar. [2]

(c) $63 \cdot 2^{-t/10} = 7 \Rightarrow 2^{-t/10} = \frac{1}{9} \Rightarrow t = 10 \log_2 9 \approx 31,7$ menit. [2]

(d) Tidak: $63 \cdot 2^{-t/10} > 0$ untuk semua t , jadi selalu $T(t) > 27$. Dalam kenyataan, setelah beberapa jam selisihnya terlalu kecil untuk terukur termometer. [1]

Pembahasan: Model eksponensial seperti ini juga muncul pada kadar obat dalam darah dan pengisian baterai. Limitnya menggambarkan keadaan setimbang jangka panjang, sedangkan asimtot datar menunjukkan bahwa keadaan itu didekati tetapi tidak pernah tepat dicapai.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Tentukan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: Setiap suku dapat dipecah: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Jumlahnya teleskopik (saling menghapus):

$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Saat $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, jadi limitnya 1. Mirip 0,999... = 1: jumlah parsialnya selalu kurang dari 1, tetapi limitnya tepat 1.

28 Turunan: Laju Perubahan

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Laju harga • 28-1-01

Harga cabai rawit di sebuah pasar Rp40.000/kg pada hari Senin dan Rp52.000/kg pada hari Kamis. Berapa laju kenaikan rata-rata harganya per hari?

- A. Rp12.000 per hari
B. Rp4.000 per hari
C. Rp3.000 per hari
D. Rp13.000 per hari

Kunci: B

Pembahasan: Perubahan harga: $\text{Rp}52.000 - \text{Rp}40.000 = \text{Rp}12.000$.

Dari Senin ke Kamis ada 3 hari (Senin → Selasa → Rabu → Kamis), bukan 4.

Laju rata-rata = $12.000 \div 3 = \text{Rp}4.000$ per hari.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kemiringan garis • 28-1-02

Sebuah garis lurus melalui titik (0, 1) dan (2, 7). Berapa kemiringannya?

- A. 2
B. 6
C. 7
D. 3

Kunci: D

Pembahasan: Kemiringan = naik ÷ maju = $\frac{7 - 1}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3$.

Angka 6 hanya "naik"-nya saja, belum dibagi "maju" (2).

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Kecepatan rata-rata • 28-1-03

Ayah Ayu mengendarai motor dan menempuh 45 km dalam 1,5 jam. Berapa kecepatan rata-ratanya?

Jawaban: km/jam

Kunci: 30 km/jam

Pembahasan: Kecepatan rata-rata = jarak ÷ waktu = $\frac{45}{1,5} = 30$ km/jam.

Selama perjalanan jarum speedometer mungkin naik-turun, tetapi rata-ratanya 30 km/jam.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Makna speedometer • 28-1-04

Angka yang ditunjuk jarum speedometer motor menyatakan...

- A. jarak total yang sudah ditempuh
B. kecepatan rata-rata sejak berangkat
C. kecepatan sesaat, pada saat itu juga
D. lama perjalanan

Kunci: C

Pembahasan: Speedometer mengukur seberapa cepat motor bergerak *pada saat itu*, yaitu kecepatan sesaat. Jarak total ditunjukkan oleh odometer.

Kecepatan sesaat adalah limit kecepatan rata-rata ketika selang waktunya mendekati nol; dalam bahasa kalkulus, turunan jarak terhadap waktu.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Laju penduduk • 28-2-01

Penduduk sebuah kota tercatat 1.200.000 jiwa pada tahun 2020 dan 1.320.000 jiwa pada tahun 2025. Berapa laju pertambahan penduduk rata-rata per tahun?

Jawaban: jiwa/tahun

Kunci: 24.000 jiwa/tahun

Pembahasan: Pertambahan: $1.320.000 - 1.200.000 = 120.000$ jiwa.

Selang waktu: $2025 - 2020 = 5$ tahun.

Laju rata-rata = $120.000 \div 5 = 24.000$ jiwa per tahun.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Kemiringan tali busur • 28-2-02

Untuk $f(x) = x^2$, laju perubahan rata-rata f dari $x = 1$ sampai $x = 3$ adalah...

A. 4

C. 2

B. 8

D. 6

Kunci: A

Pembahasan: $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$.

Ini kemiringan tali busur dari $(1, 1)$ ke $(3, 9)$. Angka 8 lupa dibagi 2, sedangkan 6 adalah kemiringan garis singgung di $x = 3$, bukan rata-ratanya.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Kelapa jatuh • 28-2-03

Sebutir kelapa jatuh dari pohon. Jarak jatuhnya $s(t) = 5t^2$ meter setelah t detik (hambatan udara diabaikan). Berapa kecepatan rata-rata kelapa antara $t = 1$ dan $t = 2$ detik?

Jawaban: m/s

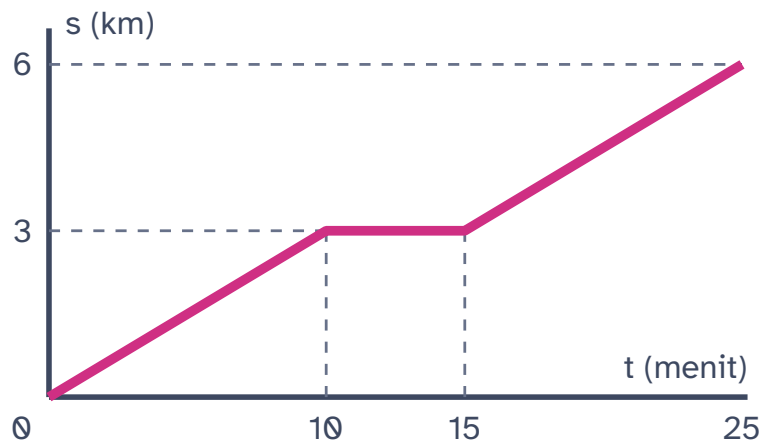
Kunci: 15 m/s

Pembahasan: $s(2) = 5 \cdot 4 = 20$ m dan $s(1) = 5$ m.

Kecepatan rata-rata = $\frac{20 - 5}{2 - 1} = 15$ m/s.

Kecepatan sesaatnya terus bertambah, $v(t) = 10t$: 10 m/s pada detik ke-1 dan 20 m/s pada detik ke-2.

Grafik berikut menunjukkan jarak tempuh sebuah ojek terhadap waktu. Apa yang terjadi antara menit ke-10 dan menit ke-15?



- A. Ojek melaju dengan kecepatan tinggi
- B. Ojek berbalik arah menuju pangkalan
- C. Ojek berhenti; kecepatannya nol
- D. Ojek terus menambah kecepatan

Kunci: C

Pembahasan: Antara menit ke-10 dan ke-15 grafiknya mendatar: jaraknya tetap 3 km.

Kemiringan grafik jarak-waktu adalah kecepatan, dan kemiringan garis mendatar adalah 0. Jadi ojek berhenti, misalnya menunggu penumpang. Kalau ojek berbalik arah, jarak dari titik awal akan *berkurang* sehingga grafiknya turun.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Aturan pangkat • 28-3-01

Diketahui $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$. Tentukan $f'(1)$.

Jawaban:

Kunci: 13

Pembahasan: $f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$.

$f'(1) = 12 - 4 + 5 = 13$.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Aturan rantai • 28-3-02

Turunan $y = (2x + 1)^5$ adalah...

- A. $5(2x + 1)^4$
- B. $10(2x + 1)^5$
- C. $5(2x + 1)^4 \cdot 2x$
- D. $10(2x + 1)^4$

Kunci: D

Pembahasan: Aturan rantai: lapisan luar u^5 dengan lapisan dalam $u = 2x + 1$.

$y' = 5u^4 \cdot u' = 5(2x + 1)^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$.

Opsi pertama lupa mengalikan turunan lapisan dalam (yaitu 2). Opsi ketiga keliru mengira turunan $2x + 1$ adalah $2x$.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Garis singgung • 28-3-03

Garis singgung kurva $y = x^3 - 4x$ di titik yang absisnya 2 memotong sumbu- y di titik $(0, c)$. Tentukan c .

Jawaban:

Kunci: -16

Pembahasan: Titik singgung: $y(2) = 8 - 8 = 0$, jadi $(2, 0)$.

Kemiringan: $y' = 3x^2 - 4$, sehingga $m = 12 - 4 = 8$.

Garis singgung: $y = 0 + 8(x - 2) = 8x - 16$.

Untuk $x = 0$: $y = -16$. Jadi $c = -16$.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Laju harga cabai • 28-3-04

Menjelang hari raya, harga cabai dimodelkan dengan $H(t) = 30 + 4t - 0,2t^2$ ribu rupiah per kg, dengan t dalam hari ($0 \leq t \leq 10$). Berapa laju perubahan harga tepat pada hari ke-5?

Jawaban: ribu rupiah/kg per hari

Kunci: 2 ribu rupiah/kg per hari

Pembahasan: $H'(t) = 4 - 0,4t$.

$H'(5) = 4 - 2 = 2$.

Pada hari ke-5 harga masih naik dengan laju Rp2.000 per kg per hari. Lajunya makin kecil: $H'(10) = 0$, artinya pada hari ke-10 harga berhenti naik.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Gradien kurva • gaya IGCSE • 28-4-01

Sebuah kurva memiliki persamaan $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$. **Hitung** gradien kurva (*gradient of the curve*) di titik yang absisnya $x = 2$.

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x$.

Di $x = 2$: $6 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 24 - 20 = 4$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Mencari titik dari gradien • gaya IGCSE • 28-4-02

Diketahui kurva $y = x^2 - 6x + 11$. **Tentukan** absis titik pada kurva yang gradien garis singgungnya 4.

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: $\frac{dy}{dx} = 2x - 6$. Samakan dengan 4: $2x - 6 = 4 \Rightarrow x = 5$.

Titiknya $(5, 6)$, karena $25 - 30 + 11 = 6$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Pangkat negatif • gaya IGCSE • 28-4-03

Jika $y = \frac{4}{x^2}$, maka $\frac{dy}{dx}$ adalah...

- A. $\frac{8}{x^3}$
B. $-\frac{8}{x^3}$

- C. $-\frac{8}{x}$
D. $\frac{2}{x}$

Kunci: B

Pembahasan: Tulis sebagai pangkat: $y = 4x^{-2}$.

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot (-2)x^{-3} = -8x^{-3} = -\frac{8}{x^3}.$$

Tanda minus muncul dari pangkat negatif. Opsi $\frac{2}{x}$ berasal dari kesalahan "menurunkan penyebutnya saja": $\frac{4}{2x}$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Garis singgung berstruktur • gaya IGCSE • 28-4-04

Kurva C memiliki persamaan $y = x^3 - 3x + 2$.

- (a) **Tunjukkan** bahwa persamaan garis singgung C di titik $(2, 4)$ adalah $y = 9x - 14$.
(b) Garis singgung C di titik Q yang lain sejajar dengan garis pada (a). **Tentukan** koordinat Q .
(c) **Tentukan** koordinat titik-titik pada C yang garis singgungnya mendatar.

Kunci/rubrik: (a) Titik $(2, 4)$ terletak pada kurva karena $8 - 6 + 2 = 4$. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$, di $x = 2$ bernilai $12 - 3 = 9$.

Garis: $y - 4 = 9(x - 2) \Rightarrow y = 9x - 14$. [3 poin: turunan 1, gradien 1, persamaan 1]

(b) $3x^2 - 3 = 9 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ (selain $x = 2$). $y = -8 + 6 + 2 = 0$, jadi $Q(-2, 0)$. [2 poin]

(c) $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Titiknya $(1, 0)$ dan $(-1, 4)$. [2 poin]

Pembahasan: Soal garis singgung selalu butuh dua bahan: titik dan gradien. Pada (b) dan (c) arahnya dibalik: gradien diketahui, lalu titiknya dicari dengan menyelesaikan $\frac{dy}{dx} = m$. Titik-titik pada (c) adalah puncak dan lembah kurva, bahan utama Bab 29.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Aturan hasil kali • gaya IB • 28-5-01

Diketahui $f(x) = x^2 e^x$. Tentukan nilai eksak $f'(1)$.

Jawaban:

Kunci: 8,155

Pembahasan: $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x)e^x$.

$$f'(1) = (1 + 2)e = 3e \approx 8,155.$$

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Rantai dengan logaritma • gaya IB • 28-5-02

Diketahui $g(x) = \ln(3x^2 + 1)$. Tentukan $g'(1)$.

Jawaban:

Kunci: 1,5

Pembahasan: Dengan $u = 3x^2 + 1$, $u' = 6x$.

$$g'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1}, \text{ sehingga } g'(1) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Turunan $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ adalah...

A. $\frac{7}{(x+3)^2}$

B. 2

C. $\frac{4x+5}{(x+3)^2}$

D. $-\frac{7}{(x+3)^2}$

Kunci: A

Pembahasan: Aturan hasil bagi dengan $u = 2x - 1$, $v = x + 3$, $u' = 2$, $v' = 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x-1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

Opsi $\frac{4x+5}{(x+3)^2}$ muncul jika pembilangnya dijumlahkan, bukan dikurangkan; opsi 2 muncul dari $\frac{u'}{v'}$; opsi bertanda minus muncul jika urutan pengurangnya terbalik.

Penduduk sebuah negara dimodelkan dengan $P(t) = 280 e^{0,011t}$ juta jiwa, dengan t dalam tahun sejak awal 2024. (Model ini hanya untuk latihan, bukan proyeksi resmi.)

(a) Tentukan $P'(t)$.

(b) Hitung $P'(0)$ dan jelaskan maknanya dalam konteks soal, lengkap dengan satuannya.

(c) Tunjukkan bahwa $\frac{P'(t)}{P(t)}$ bernilai tetap, lalu tafsirkan nilai itu.

(d) Menurut model ini, kapan laju pertumbuhan penduduk mencapai 3,5 juta jiwa per tahun?

Kunci/rubrik: (a) $P'(t) = 280 \cdot 0,011 e^{0,011t} = 3,08 e^{0,011t}$. [1]

(b) $P'(0) = 3,08$ juta jiwa per tahun: pada awal 2024 penduduk bertambah sekitar 3,08 juta jiwa per tahun (± 8.400 jiwa per hari). [2]

(c) $\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{0,011 \cdot 280 e^{0,011t}}{280 e^{0,011t}} = 0,011$: laju pertumbuhan relatif tetap 1,1% per tahun. [2]

(d) $3,08 e^{0,011t} = 3,5 \Rightarrow t = \frac{\ln(3,5/3,08)}{0,011} \approx 11,6$ tahun, yaitu sekitar tahun 2035. [2]

Pembahasan: Model eksponensial punya ciri khas: turunannya sebanding dengan fungsinya sendiri, $P' = 0,011 P$. Karena itu laju pertumbuhan absolut (jiwa per tahun) terus naik walaupun laju relatifnya (persen per tahun) tetap. Pada (d): $e^{0,011t} \approx 1,1364$, jadi $0,011t \approx 0,1278$ dan $t \approx 11,6$.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

(a) Buktikan bahwa $e^x \geq 1 + x$ untuk semua bilangan real x , dengan kesamaan hanya ketika $x = 0$.

(b) Simpulkan bahwa $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ untuk setiap bilangan asli n .

(c) Gunakan (a) untuk membuktikan bahwa $\ln x \leq x - 1$ untuk semua $x > 0$.

Kunci/rubrik: (a) Misalkan $g(x) = e^x - 1 - x$, maka $g'(x) = e^x - 1$. Untuk $x < 0$, $g'(x) < 0$ sehingga g turun; untuk $x > 0$, $g'(x) > 0$ sehingga g naik. Jadi nilai terkecil g adalah $g(0) = 0$, dan $g(x) > 0$ untuk $x \neq 0$. [3]

(b) Ambil $x = \frac{1}{n} \neq 0$: $e^{1/n} > 1 + \frac{1}{n} > 0$. Pangkatkan kedua ruas dengan n (pemetaan $t \mapsto t^n$ naik untuk $t > 0$): $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. [2]

(c) Untuk $x > 0$, substitusikan $\ln x$ ke (a): $e^{\ln x} \geq 1 + \ln x$, yaitu $x \geq 1 + \ln x$, sehingga $\ln x \leq x - 1$. [2]

Pembahasan: Ide kuncinya: untuk membuktikan $A \geq B$, pelajari selisih $g = A - B$ dan cari nilai terkecilnya dengan turunan. Ketaksamaan $e^x \geq 1 + x$ adalah senjata favorit di olimpiade. Secara geometris, garis $y = 1 + x$ adalah garis singgung $y = e^x$ di $x = 0$, dan kurva e^x selalu berada di atas garis singgung itu.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Turunan hasil kali panjang • gaya olimpiade • 28-6-02

Misalkan $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$. Tentukan $f'(0)$.

Jawaban:

Kunci: $3,6288 \times 10^6$

Pembahasan: Dengan $f(x) = x g(x)$: $f'(x) = g(x) + x g'(x)$.

Di $x = 0$ suku kedua lenyap: $f'(0) = g(0) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-10) = (-1)^{10} \cdot 10! = 3.628.800$.

Kita sama sekali tidak perlu menjabarkan polinomial berderajat sebelas itu.

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Dua garis singgung dari satu titik • gaya olimpiade • 28-6-03

Dari titik $(1, -3)$ dapat ditarik dua garis singgung ke parabola $y = x^2$. Berapa jumlah kemiringan kedua garis singgung itu?

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: Garis singgung di (a, a^2) : $y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$.

Melalui $(1, -3)$: $-3 = 2a - a^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$.

Jadi $a = 3$ atau $a = -1$; kemiringannya $2a = 6$ dan -2 . Jumlahnya **4**.

Cara kilat (Vieta): jumlah akar $a_1 + a_2 = 2$, sehingga jumlah kemiringan $2(a_1 + a_2) = 4$ tanpa mencari akarnya.

24. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Limit sebagai turunan • gaya olimpiade • 28-6-04

Hitunglah $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^{10} - 1024}{h}$.

Jawaban:

Kunci: 5.120

Pembahasan: Karena $1024 = 2^{10}$, limit tersebut sama dengan $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$ untuk $f(x) = x^{10}$.
 $f'(x) = 10x^9$, jadi $f'(2) = 10 \cdot 512 = 5120$.

Menjabarkan $(2+h)^{10}$ dengan binomial juga bisa, tetapi jauh lebih panjang.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Naik dan turun • 29-1-01

Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x pada suatu interval, grafik f pada interval itu...

- A. turun
B. naik
C. mendatar
D. selalu memotong sumbu- x

Kunci: B

Pembahasan: Turunan adalah kemiringan garis singgung. Kemiringan positif berarti grafik menanjak dari kiri ke kanan, jadi f **naik**.

Ingat jalan raya: turunan positif = tanjakan, turunan negatif = jalan menurun.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Titik stasioner • 29-1-02

Titik stasioner sebuah fungsi f adalah titik ketika...

- A. $f(x) = 0$
B. $x = 0$
C. $f''(x) > 0$
D. $f'(x) = 0$

Kunci: D

Pembahasan: Di titik stasioner garis singgung mendatar, jadi kemiringannya nol: $f'(x) = 0$.

Syarat $f(x) = 0$ menunjukkan titik potong dengan sumbu- x , hal yang berbeda.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Titik stasioner parabola • 29-1-03

Fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 5$ mempunyai satu titik stasioner. Tentukan nilai x titik itu.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $f'(x) = 2x - 6$. Samakan dengan nol: $2x - 6 = 0$, jadi $x = 3$.

Nilainya $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Karena parabolanya terbuka ke atas, $(3, -4)$ adalah titik minimum.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kotak dari karton • 29-1-04

Kotak tanpa tutup dibuat dari karton $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ dengan menggunting persegi bersisi 5 cm di setiap pojoknya, lalu melipat sisi-sisinya ke atas. Volume kotak itu adalah...

- A. 4.500 cm^3
B. 1.000 cm^3
C. 2.000 cm^3
D. 2.500 cm^3

Kunci: C

Pembahasan: Tinggi kotak = potongan = 5 cm. Setiap sisi alas berkurang dua kali potongan: $30 - 2 \times 5 = 20 \text{ cm}$.
 $V = 20 \times 20 \times 5 = 2.000 \text{ cm}^3$. Inilah volume terbesar yang mungkin dari karton itu.

Opsi 4.500 cm^3 muncul jika lupa mengurangi potongan ($30 \times 30 \times 5$).

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Nilai maksimum • 29-2-01

Tentukan nilai maksimum fungsi $f(x) = -x^2 + 8x - 7$.

Jawaban:

Kunci: 9**Pembahasan:** $f'(x) = -2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4$. $f''(x) = -2 < 0$, jadi titik ini maksimum. $f(4) = -16 + 32 - 7 = 9$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Interval turun • 29-2-02

Fungsi $f(x) = x^3 - 3x$ turun pada interval...A. $-1 < x < 1$ C. $x > 1$ B. $x < -1$ D. $x < -1$ atau $x > 1$ **Kunci: A****Pembahasan:** $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.Fungsi turun saat $f'(x) < 0$, yaitu di antara kedua akar: $-1 < x < 1$.Opsi terakhir adalah interval tempat f **naik**.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Kebun berpagar • 29-2-03

Pak Darto punya 60 m kawat untuk memagari kebun berbentuk persegi panjang. Satu sisi kebun menempel pada tembok sehingga tidak perlu dipagar. Berapa luas terbesar kebun yang dapat ia buat?

Jawaban: m²**Kunci: 450 m²****Pembahasan:** Misalkan lebar kebun (tegak lurus tembok) x m. Panjang sisi yang sejajar tembok $60 - 2x$ m. $L(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$, sehingga $L'(x) = 60 - 4x = 0 \Rightarrow x = 15$.Panjang $60 - 30 = 30$ m dan luas $15 \times 30 = 450$ m². (Cocok dengan rumus umum $K^2/8 = 3600/8 = 450$.)

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Kecepatan sesaat • 29-2-04

Posisi sebuah mobil-mobilan pada lintasan lurus adalah $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$ meter, dengan t dalam detik. Tentukan kecepatannya pada $t = 2$ detik.

Jawaban: m/s

Kunci: -12 m/s**Pembahasan:** $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 30t + 24$. $v(2) = 24 - 60 + 24 = -12$ m/s.Tanda negatif berarti mobil-mobilan sedang bergerak **mundur** dengan laju 12 m/s.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kotak dari karton • 29-3-01

Karton berukuran 40 cm × 25 cm digunting persegi bersisi x cm di keempat pojoknya, lalu dilipat menjadi kotak tanpa tutup. Tentukan volume maksimum kotak itu.

Jawaban: cm³

Kunci: 2.250 cm³

Pembahasan: $V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$, dengan $0 < x < 12,5$.

$V'(x) = 12x^2 - 260x + 1000 = 4(3x - 50)(x - 5)$.

$x = 5$ atau $x = \frac{50}{3} \approx 16,7$ (di luar daerah asal). $V''(5) = 24(5) - 260 = -140 < 0$: maksimum.

$V(5) = 5 \times 30 \times 15 = 2.250$ cm³.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Uji turunan kedua • 29-3-02

Pernyataan yang benar tentang $f(x) = x^3 - 12x + 1$ adalah...

- A. f mempunyai minimum lokal 17 di $x = -2$
- B. f mempunyai maksimum lokal -15 di $x = 2$
- C. f tidak mempunyai titik ekstrem
- D. f mempunyai maksimum lokal 17 di $x = -2$

Kunci: D

Pembahasan: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, dan $f''(x) = 6x$.

$x = -2$: $f''(-2) = -12 < 0$, jadi maksimum lokal $f(-2) = -8 + 24 + 1 = 17$.

$x = 2$: $f''(2) = 12 > 0$, jadi minimum lokal $f(2) = 8 - 24 + 1 = -15$.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Laju terkait: balon • 29-3-03

Untuk lomba Agustusan, sebuah balon berbentuk bola dipompa sehingga volumenya bertambah 100 cm³/s. Seberapa cepat jari-jarinya bertambah saat jari-jari balon 5 cm?

Jawaban: cm/s

Kunci: 0,3183 cm/s

Pembahasan: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

$100 = 4\pi(25) \frac{dr}{dt} = 100\pi \frac{dr}{dt}$, jadi $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0,318$ cm/s.

Makin besar balonnya, makin lambat jari-jarinya bertambah, karena udara yang sama menyebar ke permukaan yang makin luas.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Untung maksimum • 29-3-04

Bu Sri menjual es dawet dengan modal Rp4.000 per gelas. Jika harga jualnya x ribu rupiah per gelas, banyaknya gelas yang terjual sehari adalah $200 - 20x$ (untuk $4 \leq x \leq 10$). Berapa untung maksimum Bu Sri dalam sehari? Tuliskan dalam ribu rupiah.

Jawaban: ribu rupiah

Kunci: 180 ribu rupiah

Pembahasan: $U(x) = (x - 4)(200 - 20x) = -20x^2 + 280x - 800$.

$U'(x) = -40x + 280 = 0 \Rightarrow x = 7$, dan $U''(x) = -40 < 0$: maksimum.

Dengan harga Rp7.000, terjual $200 - 140 = 60$ gelas dan untungnya $3 \times 60 = 180$ ribu rupiah, yaitu Rp180.000 sehari.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Titik stasioner kubik • gaya IGCSE • 29-4-01

Kurva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ mempunyai dua titik stasioner. **Hitung** nilai y pada titik minimumnya.

Jawaban:

Kunci: -15

Pembahasan: $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$, jadi $x = 2$ atau $x = -1$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 6$; di $x = 2$ bernilai $18 > 0$ (minimum), di $x = -1$ bernilai $-18 < 0$ (maksimum).
 $y(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$. Titik minimum $(2, -15)$ dan titik maksimum $(-1, 12)$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Jarak dan perpindahan • gaya IGCSE • 29-4-02

Sebuah partikel bergerak pada garis lurus dengan posisi $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ meter, t dalam detik. **Hitung** jarak total yang ditempuh partikel dari $t = 0$ sampai $t = 5$.

Jawaban: m

Kunci: 28 m

Pembahasan: $v = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4)$: partikel berbalik arah di $t = 2$ dan $t = 4$.

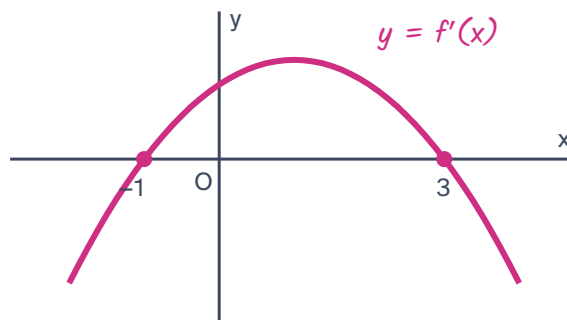
$s(0) = 0, s(2) = 20, s(4) = 16, s(5) = 20$.

Jarak = $|20 - 0| + |16 - 20| + |20 - 16| = 20 + 4 + 4 = 28$ m.

Bandingkan: perpindahannya hanya $s(5) - s(0) = 20$ m.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Membaca grafik turunan • gaya IGCSE • 29-4-03

Gambar berikut adalah grafik **turunan** $y = f'(x)$, yang memotong sumbu- x di $x = -1$ dan $x = 3$. Pernyataan yang benar tentang f adalah...



- A. f mempunyai maksimum lokal di $x = -1$ dan minimum lokal di $x = 3$
- B. f naik untuk $x > 3$
- C. f mempunyai minimum lokal di $x = -1$ dan maksimum lokal di $x = 3$
- D. f mempunyai maksimum lokal di $x = 1$

Kunci: C

Pembahasan: Yang digambar adalah f' , bukan f ! Baca tandanya: $f' < 0$ untuk $x < -1$, $f' > 0$ untuk $-1 < x < 3$, dan $f' < 0$ untuk $x > 3$.

Di $x = -1$ tanda berubah dari $-$ ke $+$: minimum lokal. Di $x = 3$ tanda berubah dari $+$ ke $-$: maksimum lokal.

Puncak grafik f' di $x = 1$ adalah tempat f naik paling curam (titik belok f), bukan maksimum f .

Sebuah kebun persegi panjang dibagi menjadi dua petak oleh satu pagar sekat yang sejajar dengan lebarnya. Total pagar yang tersedia (keliling ditambah sekat) adalah 120 m. Misalkan panjang kebun x m dan lebarnya y m.

(a) **Tunjukkan** bahwa luas kebun $L = 60y - \frac{3}{2}y^2$.

(b) **Hitung** ukuran kebun yang memberi luas terbesar, beserta luas terbesar itu.

(c) **Jelaskan** mengapa nilai itu maksimum, bukan minimum.

Kunci/rubrik: (a) Pagar terdiri atas dua sisi panjang dan tiga ruas lebar (dua tepi dan satu sekat): $2x + 3y = 120$, jadi $x = 60 - \frac{3}{2}y$. Luas $L = xy = 60y - \frac{3}{2}y^2$. [2 poin]

(b) $\frac{dL}{dy} = 60 - 3y = 0 \Rightarrow y = 20$ m, sehingga $x = 60 - 30 = 30$ m. Luas terbesar $30 \times 20 = 600$ m². [3 poin]

(c) $\frac{d^2L}{dy^2} = -3 < 0$, jadi titik stasioner itu maksimum. [1 poin]

Pembahasan: Kuncinya menuliskan kendala pagar dengan benar: sekat yang sejajar lebar menambah satu ruas lebar lagi.

Menariknya, kawat untuk sisi panjang ($2 \times 30 = 60$ m) sama dengan kawat untuk ruas lebar ($3 \times 20 = 60$ m): pada ukuran optimal, kawat terbagi rata antara kedua arah.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Sebuah kaleng tertutup berbentuk tabung bervolume 500 cm³. Pelat untuk tutup dan alas lebih tebal sehingga harga per cm²-nya dua kali harga pelat badan. Misalkan jari-jari kaleng r cm dan tingginya h cm, dan biaya C dinyatakan dalam satuan harga pelat badan per cm².

(a) Nyatakan h dalam r .

(b) Tunjukkan bahwa $C = 4\pi r^2 + \frac{1000}{r}$.

(c) Tentukan r yang meminimumkan biaya, lalu tunjukkan bahwa pada saat itu $h = 4r$. Tafsirkan hasilnya.

Kunci/rubrik: (a) $\pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$. [1]

(b) Tutup dan alas: $2 \times 2 \times \pi r^2 = 4\pi r^2$. Badan: $2\pi r h = 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = \frac{1000}{r}$. Jadi $C = 4\pi r^2 + \frac{1000}{r}$. [2]

(c) $C'(r) = 8\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{125}{\pi} \Rightarrow r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 3,41$ cm. $C''(r) = 8\pi + \frac{2000}{r^3} > 0$, jadi minimum. Karena

$500 = 4\pi r^3$, maka $h = \frac{500}{\pi r^2} = \frac{4\pi r^3}{\pi r^2} = 4r \approx 13,66$ cm. [3]

Tafsiran: karena tutup lebih mahal, kaleng termurah lebih langsing (tinggi = dua kali diameter) daripada kaleng dengan bahan paling sedikit (tinggi = diameter). [1]

Pembahasan: Bandingkan dengan contoh kaleng 400 mL di subbab 29.4: tanpa perbedaan harga, $h = 2r$.

Mahalnya tutup mendorong desain ke arah kaleng yang lebih ramping.

Secara umum, jika tutup dan alas k kali lebih mahal daripada badan, kaleng termurah memenuhi $h = 2kr$.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Laju terkait: corong • gaya IB • 29-5-02

Air dituang ke dalam corong berbentuk kerucut terbalik dengan jari-jari mulut 6 cm dan tinggi 12 cm, dengan laju $10 \text{ cm}^3/\text{s}$. Tentukan laju naiknya permukaan air saat kedalaman air 4 cm.

Jawaban: cm/s

Kunci: 0,7958 cm/s

Pembahasan: Kesebangunan: $\frac{r}{h} = \frac{6}{12}$, jadi $r = \frac{h}{2}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h = \frac{\pi h^3}{12}.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt}, \text{ sehingga } 10 = \frac{\pi(16)}{4} \frac{dh}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt}.$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{4\pi} = \frac{5}{2\pi} \approx 0,796 \text{ cm/s}.$$

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Jarak terdekat ke parabola • gaya IB • 29-5-03

Tentukan jarak terdekat dari titik $(0, 3)$ ke parabola $y = x^2$.

Jawaban:

Kunci: 1,6583

Pembahasan: Titik pada parabola (x, x^2) . Kuadrat jaraknya $D = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9$.

$$D'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } x^2 = \frac{5}{2}.$$

$$D(0) = 9 \text{ (maksimum lokal)}, \text{ sedangkan } D = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9 = \frac{11}{4} \text{ saat } x^2 = \frac{5}{2}.$$

Jarak terdekat $\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1,658$, dicapai di titik $(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2})$. Perhatikan: titik puncak parabola $(0, 0)$ justru bukan yang terdekat!

20. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Titik belok datar • gaya IB • 29-5-04

Untuk $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$, pernyataan yang benar adalah...

- A. $(0, 10)$ adalah titik belok datar dan f mempunyai minimum -17 di $x = 3$
- B. $(0, 10)$ adalah maksimum lokal
- C. f mempunyai dua minimum lokal
- D. $f''(3) = 0$, sehingga uji turunan kedua gagal di $x = 3$

Kunci: A

Pembahasan: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$: stasioner di $x = 0$ dan $x = 3$.

Di sekitar $x = 0$, faktor $4x^2 \geq 0$ dan $x - 3 < 0$, jadi $f' \leq 0$ di kiri maupun kanan: tanda tidak berubah, sehingga $(0, 10)$ adalah titik belok datar.

$$f''(x) = 12x^2 - 24x, \text{ dan } f''(3) = 108 - 72 = 36 > 0: \text{ minimum } f(3) = 81 - 108 + 10 = -17.$$

Uji turunan kedua memang gagal di $x = 0$ (karena $f''(0) = 0$), bukan di $x = 3$.

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Minimum dengan AM-GM • gaya olimpiade • 29-6-01

Tentukan nilai minimum $x^2 + \frac{16}{x}$ untuk bilangan real $x > 0$.

Jawaban:

Kunci: 12

Pembahasan: Cara kalkulus: $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$, dan $f''(x) = 2 + \frac{32}{x^3} > 0$. Minimumnya $f(2) = 4 + 8 = 12$.

Cara olimpiade: $x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 3\sqrt[3]{64} = 12$, dengan kesamaan saat $x^2 = \frac{8}{x}$, yaitu $x = 2$.

Memecah suku agar hasil kalinya konstan adalah jurus andalan AM-GM.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Akar pangkat n yang terbesar • gaya olimpiade • 29-6-02

Perhatikan bilangan-bilangan $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$, yaitu $\sqrt[n]{n}$ untuk bilangan asli $n \geq 2$. Untuk n berapakah bilangan itu paling besar?

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $\sqrt[n]{n} = e^{(\ln n)/n}$, jadi cukup memaksimumkan $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$: positif untuk $x < e$ dan negatif untuk $x > e$. Jadi g naik sampai $x = e \approx 2,718$, lalu turun.

Calon bilangan bulatnya $n = 2$ atau $n = 3$. Bandingkan $\sqrt{2}$ dan $\sqrt[3]{3}$ dengan mengangkat keduanya dengan 6: $2^3 = 8 < 9 = 3^2$.

Jadi $\sqrt[3]{3} \approx 1,442$ yang terbesar: $n = 3$. (Bonus: $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.)

23. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Persegi panjang dalam setengah lingkaran • gaya olimpiade • 29-6-03

Sebuah persegi panjang dilukis di dalam setengah lingkaran berjari-jari 10 sehingga satu sisinya terletak pada diameter dan dua titik sudut lainnya terletak pada busur. Luas terbesar persegi panjang itu adalah...

A. 50

C. $50\sqrt{3}$

B. 100

D. 200

Kunci: B

Pembahasan: Letakkan pusat lingkaran di titik asal. Titik sudut pada busur (x, y) memenuhi $x^2 + y^2 = 100$, dan luas persegi panjang $L = 2xy$.

Tanpa kalkulus: $2xy \leq x^2 + y^2 = 100$, karena $(x - y)^2 \geq 0$. Kesamaan terjadi saat $x = y = 5\sqrt{2}$.

Luas terbesar 100, dengan ukuran $10\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$. (Dengan kalkulus, maksimumkan $L = 2x\sqrt{100 - x^2}$; hasilnya sama.)

- (a) Buktikan bahwa $\ln x \leq x - 1$ untuk semua $x > 0$, dengan kesamaan hanya saat $x = 1$.
- (b) Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ bilangan positif dengan rata-rata $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$. Dengan memasukkan $x = \frac{a_i}{A}$ ke (a) lalu menjumlahkan, buktikan ketaksamaan AM-GM: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq A$.
- (c) Kapan kesamaan terjadi?

Kunci/rubrik: (a) Misalkan $g(x) = x - 1 - \ln x$ untuk $x > 0$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ negatif untuk $0 < x < 1$ dan positif untuk $x > 1$. Jadi g turun lalu naik, dengan minimum global $g(1) = 0$. Maka $g(x) \geq 0$, yaitu $\ln x \leq x - 1$, dengan kesamaan hanya di $x = 1$. [3 poin]

(b) Untuk setiap i : $\ln \frac{a_i}{A} \leq \frac{a_i}{A} - 1$. Jumlahkan untuk $i = 1, \dots, n$: $\sum \ln \frac{a_i}{A} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{A} - n = n - n = 0$. Ruas kiri sama dengan $\ln \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{A^n}$, jadi $\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{A^n} \leq 1$, atau $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq A$. [3 poin]

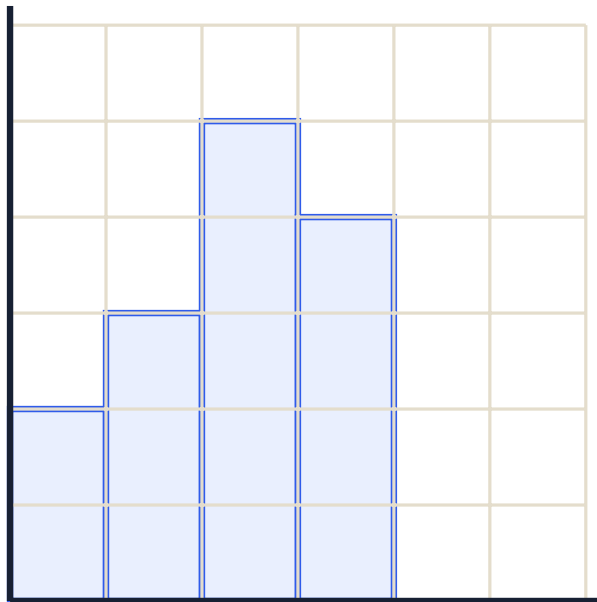
(c) Kesamaan di (b) memerlukan kesamaan di setiap suku, yaitu $\frac{a_i}{A} = 1$ untuk semua i : semua bilangan sama besar. [1 poin]

Pembahasan: Bukti indah ini dikaitkan dengan matematikawan George Pólya. Ketaksamaan sederhana $\ln x \leq x - 1$ berarti garis singgung $y = x - 1$ di titik $(1, 0)$ selalu berada di atas kurva $y = \ln x$. Dari satu fakta tentang turunan itu, ketaksamaan AM-GM untuk berapa pun banyaknya bilangan langsung terbukti.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Menghitung kotak • 30-1-01

Grafik batang di bawah digambar pada kertas berpetak. Setiap kotak luasnya 1 cm^2 . Berapa luas seluruh daerah yang berwarna?

A. 4 cm^2 B. 5 cm^2 C. 14 cm^2 D. 20 cm^2 **Kunci: C**

Pembahasan: Hitung kotak pada setiap batang: $2 + 3 + 5 + 4 = 14$ kotak, jadi luasnya 14 cm^2 .

Pengecoh: 4 adalah banyak batang, 5 adalah tinggi batang tertinggi, dan 20 adalah luas persegi panjang 4×5 yang membungkus semua batang.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Makna luas di bawah grafik • 30-1-02

Ayu mengamati grafik kecepatan-waktu sebuah angkot. Luas daerah di bawah grafik itu menyatakan...

A. percepatan angkot

B. jarak yang ditempuh angkot

C. lama perjalanan angkot

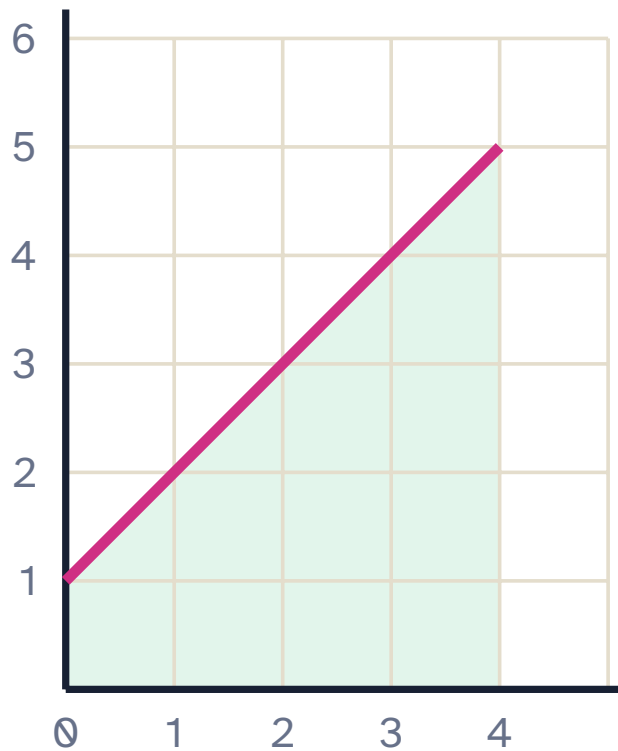
D. kecepatan tertinggi angkot

Kunci: B

Pembahasan: Luas = tinggi $\times$ lebar = kecepatan $\times$ waktu = **jarak**. Misalnya angkot melaju 10 m/s selama 30 s : daerahnya persegi panjang seluas $10 \times 30 = 300$, yaitu 300 m .

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Kotak penuh dan setengah kotak • 30-1-03

Daerah berwarna di bawah garis pada kertas berpetak berikut terdiri atas kotak penuh dan setengah kotak. Setiap kotak bernilai 1 satuan luas. Berapa luas daerah berwarna?



Jawaban: satuan luas

Kunci: 12 satuan luas

Pembahasan: Kolom pertama berisi 1 kotak penuh dan setengah kotak, kolom kedua 2 kotak penuh dan setengah kotak, kolom ketiga $3 + \frac{1}{2}$, kolom keempat $4 + \frac{1}{2}$.

Kotak penuh: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Setengah kotak: 4 buah, sama dengan 2 kotak penuh.

Luas = $10 + 2 = 12$. Cek dengan rumus trapesium: $\frac{1+5}{2} \times 4 = 12 \checkmark$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kotak makin kecil • 30-1-04

Ayu menaksir luas sehelai daun dengan kertas berpetak. Taksiran bawah = banyak kotak penuh, taksiran atas = kotak penuh + kotak yang tersentuh tepi daun. Jika ukuran kotaknya diperkecil, apa yang terjadi pada selisih kedua taksiran?

- A. Selisihnya mengecil, taksiran makin tepat
- B. Selisihnya membesar
- C. Selisihnya tidak berubah
- D. Taksiran bawah menjadi lebih besar daripada taksiran atas

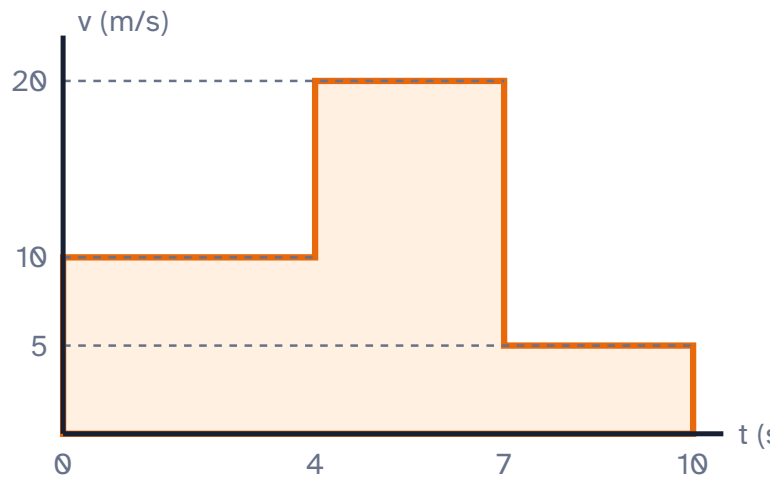
Kunci: A

Pembahasan: Kotak yang tersentuh tepi hanya berada di sepanjang tepi daun. Jika sisi kotak dibuat setengahnya, luas tiap kotak menjadi seperempatnya, sedangkan banyak kotak tepi kira-kira hanya dua kali lipat. Jadi luas total kotak tepi, yaitu selisih kedua taksiran, kira-kira tinggal separuh.

Inilah ide integral: kotak makin kecil, jepitan makin rapat.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Jarak dari grafik bertangga • 30-2-01

Grafik di bawah menunjukkan kecepatan motor Dimas selama 10 detik pertama. Berapa jarak yang ditempuh?



Jawaban: m

Kunci: 115 m

Pembahasan: Daerah di bawah grafik terdiri atas tiga persegi panjang:

$10 \times 4 = 40$ m, $20 \times 3 = 60$ m, dan $5 \times 3 = 15$ m.

Jarak total = $40 + 60 + 15 = 115$ m.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Jumlah Riemann kanan • 30-2-02

Taksir luas daerah di bawah $f(x) = x^2$ dari $x = 0$ sampai $x = 4$ dengan 4 persegi panjang selebar 1 yang tingginya diambil di **ujung kanan** setiap persegi panjang.

Jawaban: satuan luas

Kunci: 30 satuan luas

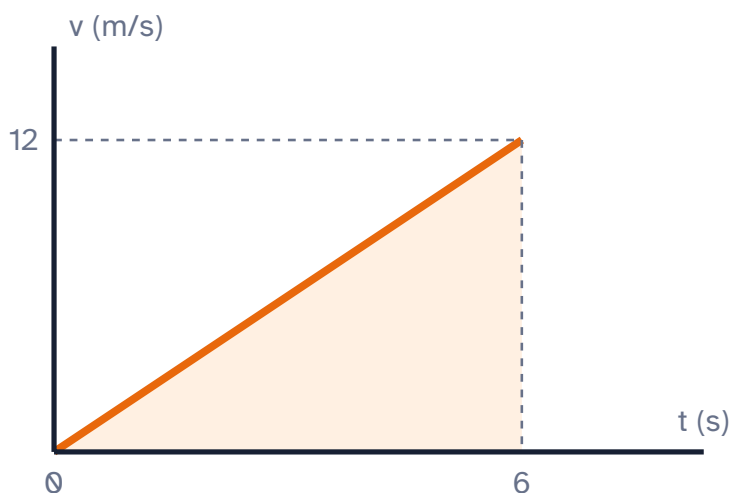
Pembahasan: Tinggi: $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$.

Jumlah luas = $(1 + 4 + 9 + 16) \times 1 = 30$.

Nilai eksaknya $\int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3} \approx 21,3$. Taksiran kanan kebesaran karena kurvanya naik.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Luas segitiga di bawah grafik • 30-2-03

Motor mulai dari diam saat lampu hijau menyala. Kecepatannya naik teratur sampai 12 m/s dalam 6 detik, seperti pada grafik. Jarak yang ditempuh dalam 6 detik itu adalah...



- A. 2 m
B. 6 m
C. 72 m
D. 36 m

Kunci: D

Pembahasan: Daerah di bawah grafik berbentuk segitiga dengan alas 6 s dan tinggi 12 m/s.

Jarak = $\frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36 \text{ m}$.

Pengecoh: 72 m lupa $\frac{1}{2}$; 2 adalah percepatan ($12 \div 6 \text{ m/s}^2$); 6 adalah kecepatan rata-ratanya dalam m/s.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Luas danau dari peta • 30-2-04

Pada peta berskala 1 : 50.000, Ayu menggambar petak-petak berukuran 2 cm $\times$ 2 cm. Sebuah danau menutupi 9 petak penuh dan 10 petak terpotong. Dengan aturan "petak terpotong dihitung setengah", berapa taksiran luas danau yang sebenarnya?

Jawaban: km²

Kunci: 14 km²

Pembahasan: 2 cm di peta = $2 \times 50.000 = 100.000 \text{ cm} = 1 \text{ km}$. Jadi satu petak mewakili $1 \text{ km} \times 1 \text{ km} = 1 \text{ km}^2$.

Taksiran = $9 + \frac{1}{2} \times 10 = 14$ petak, yaitu 14 km².

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Integral tentu • 30-3-01

Hitung $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1) dx$.

Jawaban:

Kunci: 20

Pembahasan: $F(x) = x^3 - x^2 + x$.

$F(3) = 27 - 9 + 3 = 21$ dan $F(1) = 1 - 1 + 1 = 1$.

$\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1) dx = 21 - 1 = 20$.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Luas antara parabola dan garis • 30-3-02

Hitung luas daerah yang dibatasi parabola $y = x^2$ dan garis $y = x + 6$.

Jawaban: satuan luas

Kunci: 20,8333 satuan luas

Pembahasan: Titik potong: $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$, jadi $x = -2$ dan $x = 3$.

$$L = \int_{-2}^3 (x + 6 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 = \left(\frac{9}{2} + 18 - 9 \right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3} \right) = \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = \frac{125}{6} \approx 20,83.$$

Cek dengan rumus cepat: $D = 1 + 24 = 25$, $L = \frac{D\sqrt{D}}{6} = \frac{25 \cdot 5}{6} = \frac{125}{6} \checkmark$.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Antiturunan dengan syarat • 30-3-03

Diketahui $F'(x) = 6x^2 - 4x$ dan $F(1) = 5$. Nilai $F(2)$ adalah...

- A. 5
B. 8
C. 13
D. 35

Kunci: C

Pembahasan: $F(x) = \int (6x^2 - 4x) dx = 2x^3 - 2x^2 + C$.

$$F(1) = 2 - 2 + C = C = 5.$$

$$F(2) = 16 - 8 + 5 = 13.$$

Pengecoh: 8 lupa C ; 35 berasal dari $6x^3 - 4x^2 + C$ (lupa membagi dengan pangkat baru).

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Jarak dari fungsi kecepatan • 30-3-04

Sebuah motor berangkat dari lampu merah dan berhenti lagi di lampu merah berikutnya. Kecepatannya $v(t) = 3t - 0,25t^2$ m/s untuk $0 \leq t \leq 12$ detik. Berapa jarak antara kedua lampu merah itu?

Jawaban: m

Kunci: 72 m

Pembahasan: Pada $0 \leq t \leq 12$, $v(t) = t(3 - 0,25t) \geq 0$, jadi jarak = integral kecepatan.

$$\int_0^{12} (3t - 0,25t^2) dt = \left[1,5t^2 - \frac{t^3}{12} \right]_0^{12} = 216 - 144 = 72 \text{ m.}$$

Cek kewajaran: kecepatan maksimum 9 m/s (saat $t = 6$), dan $72 \div 12 = 6$ m/s sebagai rata-rata masuk akal.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Luas di bawah parabola • gaya IGCSE • 30-4-01

Kurva $y = 4 - x^2$ memotong sumbu- x di dua titik. **Hitung** luas daerah yang dibatasi kurva dan sumbu- x .

Jawaban: satuan luas

Kunci: 10,6667 satuan luas

Pembahasan: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -2$ atau $x = 2$. Di antara keduanya kurva di atas sumbu- x .

$$L = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \approx 10,67.$$

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Aturan trapesium • gaya IGCSE • 30-4-02

Lebar sebuah danau diukur setiap 100 m dari ujung barat ke ujung timur. Hasilnya 0, 120, 150, 90, dan 0 m.

Gunakan aturan trapesium (*trapezium rule*) untuk menaksir luas danau.

Jawaban: m²

Kunci: 36.000 m²

Pembahasan: $\Delta x = 100$, $y_0 = 0$, $y_1 = 120$, $y_2 = 150$, $y_3 = 90$, $y_4 = 0$.

$L \approx \frac{100}{2} [0 + 2(120 + 150 + 90) + 0] = 50 \times 720 = 36.000 \text{ m}^2 \text{ (3,6 ha)}.$

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Sifat integral tentu • gaya IGCSE • 30-4-03

Diketahui $\int_1^4 f(x) dx = 7$ dan $\int_1^4 g(x) dx = 3$. Nilai $\int_1^4 (2f(x) - 3g(x) + 1) dx$ adalah...

A. 5

C. 9

B. 6

D. 8

Kunci: D

Pembahasan: Pakai sifat linear: $2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 + \int_1^4 1 dx = 14 - 9 + (4 - 1) = 8$.

Pengecoh: 5 lupa suku +1; 6 menganggap $\int_1^4 1 dx = 1$; 9 menganggap $\int_1^4 1 dx = 4$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Integral vs Luas • gaya IGCSE • 30-4-04

Diketahui $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

(a) **Tunjukkan** bahwa grafik f memotong sumbu- x di $x = 0$, $x = 2$, dan $x = 4$.

(b) **Hitung** $\int_0^4 f(x) dx$.

(c) **Hitung** luas total daerah antara grafik dan sumbu- x untuk $0 \leq x \leq 4$, lalu **jelaskan** mengapa hasilnya berbeda dengan (b).

Kunci/rubrik: (a) $f(x) = x(x^2 - 6x + 8) = x(x - 2)(x - 4)$, jadi $f(x) = 0$ untuk $x = 0, 2, 4$. [1 poin]

(b) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$. $F(4) - F(0) = 64 - 128 + 64 - 0 = 0$. [2 poin]

(c) $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 4 - 16 + 16 = 4$; $\int_2^4 f(x) dx = 0 - 4 = -4$. Luas = $4 + |-4| = 8$ satuan luas. [2 poin] Integral tentu menjumlahkan luas bertanda: bagian di bawah sumbu- x (pada $2 < x < 4$) bernilai negatif sehingga menghapus bagian di atas sumbu. [1 poin]

Pembahasan: Grafik kubik ini simetris terhadap titik $(2, 0)$, jadi kedua "bukit" dan "lembah" sama luas. Pelajaran pentingnya: untuk **luas**, pecah integral di titik potong sumbu- x .

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Volume tumpeng • gaya IB • 30-5-01

Daerah di bawah garis $y = \frac{x}{2}$ untuk $0 \leq x \leq 30$ (dalam cm) diputar 360° mengelilingi sumbu- x sehingga terbentuk model tumpeng yang berbaring.

- (a) Tunjukkan bahwa benda yang terbentuk adalah kerucut berjari-jari alas 15 cm dan tinggi 30 cm, lalu tuliskan integral volumenya.
- (b) Hitung volumenya dalam bentuk eksak dan dalam cm^3 (dibulatkan).
- (c) Pucuk tumpeng dipotong tegak lurus sumbu sehingga volume potongan pucuk tepat setengah volume tumpeng. Tentukan jarak bidang potong dari puncak dan dari alas.

Kunci/rubrik: (a) Garis melalui titik asal (puncak), dan di $x = 30$ nilai $y = 15$, jadi diputar menghasilkan kerucut berjari-jari 15 cm dan tinggi 30 cm. $V = \pi \int_0^{30} \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx$. [1 poin]

(b) $V = \frac{\pi}{4} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{30} = \frac{\pi}{4} \cdot 9000 = 2250\pi \approx 7069 \text{ cm}^3$. [2 poin]

(c) Volume pucuk sepanjang k dari puncak: $\pi \int_0^k \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi k^3}{12}$. Syarat $\frac{\pi k^3}{12} = 1125\pi$ memberi $k^3 = 13500$, $k = \sqrt[3]{13500} \approx 23,8$ cm dari puncak, atau $30 - 23,8 \approx 6,2$ cm dari alas. [3 poin] Interpretasi: setengah nasi ada di lapisan bawah setebal ± 6 cm. [1 poin]

Pembahasan: Perhatikan $k = 30 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$: volume kerucut sebangun sebanding dengan pangkat tiga tingginya. Jadi "potong di tengah tinggi" hanya memberi pucuk $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ volume!

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Nilai rata-rata fungsi • gaya IB • 30-5-02

Suhu udara sebuah kota antara pukul 06.00 dan 18.00 dimodelkan oleh $T(t) = 27 + 4 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)^\circ\text{C}$, dengan t jam setelah pukul 06.00. Tentukan suhu rata-rata selama 12 jam itu (dua desimal).

Jawaban: $^\circ\text{C}$

Kunci: 29,5465 $^\circ\text{C}$

Pembahasan: $\bar{T} = \frac{1}{12} \int_0^{12} (27 + 4 \sin \frac{\pi t}{12}) dt = 27 + \frac{4}{12} \left[-\frac{12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} \right]_0^{12}$.

$\left[-\frac{12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} \right]_0^{12} = -\frac{12}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{24}{\pi}$.

$\bar{T} = 27 + \frac{4}{12} \cdot \frac{24}{\pi} = 27 + \frac{8}{\pi} \approx 29,55^\circ\text{C}$.

Wajar: di antara suhu terendah 27°C dan tertinggi 31°C (pukul 12.00).

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Laju aliran ke embung • gaya IB • 30-5-03

Setelah hujan deras, air mengalir masuk ke sebuah embung desa dengan laju $r(t) = 200e^{-0,1t} \text{ m}^3$ per jam, dengan t dalam jam. Tentukan volume air yang masuk selama 10 jam pertama.

Jawaban: m^3

Kunci: 1.264,2411 m^3

Pembahasan: $\int_0^{10} 200e^{-0,1t} dt = \left[-2000e^{-0,1t} \right]_0^{10} = -2000e^{-1} + 2000 = 2000(1 - e^{-1}) \approx 1264,2 \text{ m}^3$.

Cek kewajaran: laju awal $200 \text{ m}^3/\text{jam}$ selama 10 jam memberi paling banyak 2000 m^3 , dan lajunya terus menurun.

Seorang perajin batik membuat motif daun yang dibatasi kurva $y = \sqrt{x}$ dan garis $y = \frac{x}{2}$. Tentukan luas motif itu (satuan dalam cm).

Jawaban: cm²

Kunci: 1,3333 cm²

Pembahasan: $\sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x = 0$ atau $x = 4$. Di antaranya $\sqrt{x} \geq \frac{x}{2}$ (cek $x = 1: 1 > 0,5$).

$$L = \int_0^4 \left(x^{1/2} - \frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{4}\right]_0^4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} \text{ cm}^2.$$

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Hitung $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2026} x}{\sin^{2026} x + \cos^{2026} x} dx$.

Jawaban:

Kunci: 0,7854

Pembahasan: Sebut integralnya I . Dengan sifat $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ dan $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2026} x}{\cos^{2026} x + \sin^{2026} x} dx.$$

Jumlahkan kedua bentuk: $2I = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, jadi $I = \frac{\pi}{4}$.

Pangkat 2026 hanyalah pengalih perhatian: jawabannya $\frac{\pi}{4}$ untuk pangkat positif berapa pun.

Tentukan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Jawaban:

Kunci: 0,6667

Pembahasan: $\frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$, yaitu jumlah Riemann kanan untuk $f(x) = \sqrt{x}$ pada $[0, 1]$ dengan $\Delta x = \frac{1}{n}$.

Limitnya $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Fungsi f kontinu disebut ganjil jika $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x .

(a) Buktikan bahwa untuk fungsi ganjil berlaku $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(b) Hitung $\int_{-1}^1 (x^7 e^{x^2} + 3x^2 + 1) dx$.

Kunci/rubrik: (a) Bagi $[-a, a]$ menjadi $2n$ bagian sama lebar $\Delta x = \frac{a}{n}$ dan pakai titik tengah. Titik tengah membentuk pasangan x_i dan $-x_i$ yang simetris terhadap 0. Setiap pasangan menyumbang $f(x_i)\Delta x + f(-x_i)\Delta x = f(x_i)\Delta x - f(x_i)\Delta x = 0$, jadi setiap jumlah Riemann bernilai 0. Karena f kontinu, integralnya adalah limit jumlah-jumlah ini, yaitu 0. [3 poin]

(b) $g(x) = x^7 e^{x^2}$ ganjil karena $(-x)^7 e^{(-x)^2} = -x^7 e^{x^2}$, jadi integralnya 0 menurut (a). Sisanya $\int_{-1}^1 (3x^2 + 1) dx = \left[x^3 + x\right]_{-1}^1 = 2 - (-2) = 4$. Hasil akhir: 4. [3 poin]

Pembahasan: Kunci (b): $x^7 e^{x^2}$ tidak punya antiturunan dalam bentuk fungsi elementer, tetapi simetri membuatnya lenyap! Bukti (a) juga bisa memakai substitusi $x = -u$ pada $\int_{-a}^0 f(x) dx$.

Hitung $\int_0^1 x(1-x)^9 dx$.

Jawaban:

Kunci: 0,0091

Pembahasan: Ganti x dengan $1-x$: $\int_0^1 x(1-x)^9 dx = \int_0^1 (1-x)x^9 dx$.

$$= \int_0^1 (x^9 - x^{10}) dx = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}.$$

Cek kewajaran: integrannya kecil (paling besar $\frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^9 \approx 0,039$ di $x = 0,1$), jadi hasil $\approx 0,009$ masuk akal.

31 Statistika: Bercerita dengan Data

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Modus • 31-1-01

Hasil survei jajanan favorit 7 siswa: cilok, risol, cilok, bakwan, cilok, risol, onde-onde. Modus data itu adalah...

- A. risol
- B. cilok
- C. bakwan
- D. onde-onde

Kunci: B

Pembahasan: Modus adalah data yang **paling sering** muncul.

Cilok muncul 3 kali, risol 2 kali, bakwan dan onde-onde masing-masing 1 kali. Jadi modusnya **cilok**.

Untuk data kategorik seperti ini, modus adalah satu-satunya ukuran pemusatan yang masuk akal: kita tidak bisa menjumlahkan cilok dan risol!

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Rata-rata • 31-1-02

Dimas mencatat banyak buku yang ia baca setiap bulan selama 5 bulan: 6, 8, 7, 9, 10. Berapa rata-rata buku yang ia baca per bulan?

Jawaban: buku

Kunci: 8 buku

Pembahasan: Rata-rata = jumlah data : banyak data.

$$\bar{x} = \frac{6 + 8 + 7 + 9 + 10}{5} = \frac{40}{5} = 8 \text{ buku per bulan.}$$

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Median • 31-1-03

Median dari data 7, 3, 9, 5, 4 adalah...

- A. 9
- B. 5,6
- C. 5
- D. 4

Kunci: C

Pembahasan: Urutkan dulu: 3, 4, **5**, 7, 9. Data ke-3 dari 5 data adalah median, yaitu **5**.

Jebakan: 9 adalah angka di tengah daftar *sebelum* diurutkan, sedangkan 5,6 adalah rata-ratanya (28 : 5).

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Memilih diagram • 31-1-04

Ayu ingin menunjukkan **bagian dari keseluruhan**: berapa persen siswa yang berangkat ke sekolah dengan berjalan kaki, bersepeda, naik angkot, dan diantar motor. Diagram yang paling cocok adalah...

- A. diagram pencar
- B. histogram
- C. diagram garis
- D. diagram lingkaran

Kunci: D

Pembahasan: Diagram lingkaran menunjukkan setiap kategori sebagai bagian dari satu lingkaran utuh (100%).

Diagram pencar untuk pasangan data, histogram untuk data kontinu yang dikelompokkan, dan diagram garis untuk perubahan dari waktu ke waktu.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Rata-rata tabel frekuensi • 31-2-01

Tabel nilai kuis 20 siswa:

Nilai	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	8	4

Hitung rata-rata nilai kuis itu.

Jawaban:

Kunci: 7,65**Pembahasan:** $\sum f_i x_i = 6 \times 3 + 7 \times 5 + 8 \times 8 + 9 \times 4 = 18 + 35 + 64 + 36 = 153$. $\sum f_i = 20$, jadi $\bar{x} = \frac{153}{20} = 7,65$.

Cek kewajaran: rata-ratanya di antara 7 dan 8, dekat ke 8 karena nilai 8 paling banyak.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Data yang hilang • 31-2-02

Nilai empat ulangan Dimas: 80, 72, 75, 85. Agar rata-rata lima ulangannya tepat 80, berapa nilai ulangan kelima yang harus ia dapat?

Jawaban:

Kunci: 88**Pembahasan:** Jumlah lima nilai harus $5 \times 80 = 400$.Jumlah empat nilai yang sudah ada: $80 + 72 + 75 + 85 = 312$.Nilai kelima: $400 - 312 = 88$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Sudut juring • 31-2-03

Dari 40 siswa yang disurvei, 12 orang memilih cilok. Pada diagram lingkaran, besar sudut juring cilok adalah...

A. 108° C. 30° B. 12° D. 120° **Kunci: A****Pembahasan:** Sudut juring = $\frac{12}{40} \times 360^\circ = 0,3 \times 360^\circ = 108^\circ$.

Jebakan: 30 adalah persentasenya (30%), bukan sudutnya.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Membaca diagram pencar • 31-2-04

Diagram pencar "lama bermain gim per hari" (sumbu mendatar) dan "nilai ulangan" (sumbu tegak) menunjukkan titik-titik yang turun dari kiri atas ke kanan bawah. Pernyataan yang paling tepat adalah...

- A. korelasinya positif
- B. tidak ada korelasi
- C. korelasinya negatif
- D. bermain gim pasti menyebabkan nilai turun

Kunci: C

Pembahasan: Ketika x naik, y cenderung turun: itulah **korelasi negatif**.

Namun korelasi saja tidak membuktikan sebab-akibat. Mungkin ada faktor lain, misalnya waktu tidur atau waktu belajar yang berkurang.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Rata-rata gabungan • 31-3-01

Kelas A terdiri atas 30 siswa dengan rata-rata nilai 74. Setelah digabung dengan kelas B yang berisi 20 siswa, rata-rata seluruh 50 siswa menjadi 77. Berapa rata-rata nilai kelas B?

Jawaban:

Kunci: 81,5

Pembahasan: Jumlah nilai seluruh siswa: $50 \times 77 = 3850$.

Jumlah nilai kelas A: $30 \times 74 = 2220$.

Jumlah nilai kelas B: $3850 - 2220 = 1630$, jadi rata-ratanya $1630 : 20 = 81,5$.

Cek: 77 berada di antara 74 dan 81,5, lebih dekat ke 74 karena kelas A lebih besar.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Transformasi data • 31-3-02

Nilai ujian sebuah kelas memiliki rata-rata 60 dan simpangan baku 8. Guru mengubah setiap nilai dengan aturan "nilai baru = $1,5 \times$ nilai lama + 10". Rata-rata dan simpangan baku nilai baru adalah...

- A. rata-rata 100, simpangan baku 22
- B. rata-rata 100, simpangan baku 12
- C. rata-rata 90, simpangan baku 12
- D. rata-rata 100, simpangan baku 8

Kunci: B

Pembahasan: Rata-rata ikut aturan yang sama: $1,5 \times 60 + 10 = 100$.

Simpangan baku hanya terpengaruh pengali: $|1,5| \times 8 = 12$. Penambahan 10 menggeser semua data bersama-sama, jadi jaraknya ke rata-rata tidak berubah.

Jebakan 22: menerapkan +10 pada simpangan baku.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Pencilan • 31-3-03

Waktu tempuh 11 siswa ke sekolah (menit): 5, 7, 8, 10, 12, 12, 14, 15, 18, 20, 45. Dengan aturan pencilan $Q_3 + 1,5 \times \text{IQR}$, tentukan batas atas pencilan.

Jawaban: menit

Kunci: 33 menit

Pembahasan: Data sudah terurut, $n = 11$. Median = data ke-6 = 12.

Q_1 = median dari 5, 7, 8, 10, 12 = 8. Q_3 = median dari 14, 15, 18, 20, 45 = 18.

$\text{IQR} = 18 - 8 = 10$. Batas atas = $18 + 1,5 \times 10 = 33$ menit.

Jadi 45 menit adalah pencilan (mungkin siswa itu tinggal jauh atau terjebak macet).

12. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Grafik menyesatkan • 31-3-04

Sebuah iklan menampilkan grafik batang: Kantin A 92 porsi, Kantin B 96 porsi. Sumbu tegaknya dimulai dari 90, sehingga batang B tampak 3 kali lebih tinggi daripada batang A. Sebenarnya penjualan Kantin B lebih banyak daripada Kantin A sekitar...

- A. 200%
B. 300%
C. 40%
D. 4%

Kunci: D

Pembahasan: Selisih sebenarnya: $\frac{96 - 92}{92} \times 100\% \approx 4,3\% \approx 4\%$.

Di grafik, tinggi batang hanya dihitung dari 90: A setinggi 2 satuan dan B 6 satuan, sehingga B *tampak* 3 kali A (atau 200% lebih tinggi). Itulah tipuan sumbu terpotong.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Taksiran rata-rata data berkelompok • gaya IGCSE • 31-4-01

Tabel berikut menunjukkan tinggi badan 40 siswa.

Tinggi h (cm)	Frekuensi
$140 \leq h < 150$	6
$150 \leq h < 160$	14
$160 \leq h < 170$	15
$170 \leq h < 180$	5

Hitung taksiran rata-rata tinggi badan siswa.

Jawaban: cm

Kunci: 159,75 cm

Pembahasan: Titik tengah kelas: 145, 155, 165, 175.

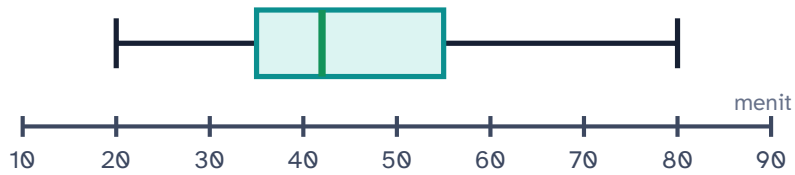
$$\sum fx = 145(6) + 155(14) + 165(15) + 175(5) = 870 + 2170 + 2475 + 875 = 6390.$$

Taksiran rata-rata = $6390 : 40 = 159,75$ cm.

Disebut *taksiran* karena kita tidak tahu tinggi persis tiap siswa di dalam kelasnya.

14. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Membaca box plot • gaya IGCSE • 31-4-02

Box plot berikut menunjukkan waktu (menit) yang dihabiskan sekelompok siswa untuk mengerjakan PR. **Tentukan** jangkauan antarkuartilnya (*interquartile range*).



- A. 20
B. 60
C. 42
D. 13

Kunci: A

Pembahasan: Dari gambar: $Q_1 = 35$ (tepi kiri kotak) dan $Q_3 = 55$ (tepi kanan kotak).

$IQR = Q_3 - Q_1 = 55 - 35 = 20$ menit.

Pengecoh: 60 adalah jangkauan ($80 - 20$), 42 adalah median, dan 13 adalah $Q_3 - \text{median}$.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Simpangan baku • gaya IGCSE • 31-4-03

Massa 6 buah mangga (gram): 210, 230, 250, 240, 220, 290. **Hitung** simpangan baku massa mangga tersebut dengan pembagi n . Bulatkan sampai 2 tempat desimal.

Jawaban: gram

Kunci: 25,82 gram

Pembahasan: Rata-rata: $1440 : 6 = 240$ gram.

Simpangan: $-30, -10, 10, 0, -20, 50$. Kuadratnya: 900, 100, 100, 0, 400, 2500, jumlahnya 4000.

$\sigma^2 = 4000 : 6 \approx 666,67$, jadi $\sigma = \sqrt{666,67} \approx 25,82$ gram.

(Dengan pembagi $n - 1$ hasilnya $\sqrt{800} \approx 28,28$ gram; baca selalu konvensi yang diminta.)

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Membandingkan dua kelompok • gaya IGCSE • 31-4-04

Waktu (menit) yang diperlukan 11 siswa kelas 8A untuk menyelesaikan sebuah teka-teki: 4, 6, 7, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 20.

(a) **Tentukan** median, kuartil bawah, dan kuartil atas.

(b) **Hitung** jangkauan antarkuartil.

(c) Untuk kelas 8B, median waktunya 12 menit dan jangkauan antarkuartilnya 4 menit. **Bandungkan** kedua kelas dengan memakai satu ukuran pemusatan dan satu ukuran sebaran.

Kunci/rubrik: (a) Median = data ke-6 = 10 menit; Q_1 = median dari 4, 6, 7, 7, 9 = 7 menit; Q_3 = median dari 11, 12, 14, 15, 20 = 14 menit. [3 poin: 1 per nilai]

(b) $IQR = 14 - 7 = 7$ menit. [1 poin]

(c) Median 8A (10 menit) lebih kecil daripada 8B (12 menit), jadi pada umumnya siswa 8A lebih cepat. IQR 8A (7 menit) lebih besar daripada 8B (4 menit), jadi waktu siswa 8B lebih seragam/konsisten. [2 poin: 1 per perbandingan yang dikaitkan dengan konteks]

Pembahasan: Pada perbandingan gaya IGCSE, nilai penuh hanya diberikan bila kamu menyebut **ukuran** yang dipakai, **membandingkan** angkanya, dan **menafsirkannya** dalam konteks (lebih cepat, lebih konsisten). Kalimat "8A lebih besar" saja belum cukup.

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Regresi linear • gaya IB • 31-5-01

Data suhu maksimum harian x ($^{\circ}\text{C}$) dan banyak gelas es teh y yang terjual di kantin selama 7 hari (data ilustratif):

x	27	28	29	30	31	32	33
y	52	55	61	66	68	74	79

- (a) Tentukan persamaan garis regresi y atas x .
 (b) Tafsirkan gradien garis itu dalam konteks soal.
 (c) Taksir penjualan pada hari bersuhu $29,5^{\circ}\text{C}$.
 (d) Koefisien korelasinya $r \approx 0,996$. Jelaskan apakah garis ini layak dipakai untuk menaksir penjualan pada hari bersuhu 40°C .

Kunci/rubrik: (a) $\bar{x} = 30$, $\bar{y} = 455 : 7 = 65$. $S_{xx} = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 28$; $S_{xy} = (-3)(-13) + (-2)(-10) + (-1)(-4) + 0 + (1)(3) + (2)(9) + (3)(14) = 126$. $b = 126 : 28 = 4,5$, $a = 65 - 4,5 \times 30 = -70$. Jadi $\hat{y} = 4,5x - 70$. [3 poin]

(b) Setiap kenaikan suhu 1°C berkaitan dengan bertambahnya penjualan sekitar 4,5 gelas. [1 poin]

(c) $\hat{y} = 4,5(29,5) - 70 = 62,75 \approx 63$ gelas. [1 poin]

(d) Tidak layak: 40°C jauh di luar rentang data ($27-33^{\circ}\text{C}$), sehingga ini ekstrapolasi. Korelasi yang kuat hanya menjamin kecocokan di dalam rentang data. [1 poin]

Pembahasan: Di ujian IB, (a) biasanya dikerjakan dengan kalkulator grafik (GDC); hitungan tangan di atas menunjukkan asal-usul angkanya. Perhatikan bahwa garis melalui $(\bar{x}, \bar{y}) = (30, 65)$: $4,5 \times 30 - 70 = 65$. ✓ Titik potong -70 tidak bermakna dalam konteks (penjualan negatif pada suhu 0°C), contoh lain bahaya ekstrapolasi.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Simpangan baku gabungan • gaya IB • 31-5-02

Kelompok P berisi 10 data dengan rata-rata 20 dan simpangan baku 3. Kelompok Q berisi 15 data dengan rata-rata 25 dan simpangan baku 4. Keduanya simpangan baku populasi (pembagi n). Tentukan simpangan baku gabungan ke-25 data itu (3 angka penting).

Jawaban:

Kunci: 4,382

Pembahasan: $\sum x^2$ untuk P: $10(9 + 400) = 4090$. Untuk Q: $15(16 + 625) = 9615$. Totalnya 13705.

Rata-rata gabungan: $\frac{10(20) + 15(25)}{25} = \frac{575}{25} = 23$.

$\sigma^2 = \frac{13705}{25} - 23^2 = 548,2 - 529 = 19,2$, jadi $\sigma = \sqrt{19,2} \approx 4,38$.

Hasilnya lebih besar daripada 3 maupun 4, karena kedua kelompok punya pusat yang berbeda sehingga gabungannya lebih menyebar.

Suhu maksimum harian sebuah kota selama sebulan memiliki rata-rata 30°C dan simpangan baku 2°C . Semua data diubah ke Fahrenheit dengan $F = 1,8C + 32$. Rata-rata dan simpangan baku dalam $^\circ\text{F}$ adalah...

- A. rata-rata 86°F ; simpangan baku $35,6^\circ\text{F}$
- B. rata-rata 54°F ; simpangan baku $3,6^\circ\text{F}$
- C. rata-rata 86°F ; simpangan baku $3,6^\circ\text{F}$
- D. rata-rata 86°F ; simpangan baku 2°F

Kunci: C

Pembahasan: Rata-rata: $1,8 \times 30 + 32 = 86^\circ\text{F}$.

Simpangan baku: $|1,8| \times 2 = 3,6^\circ\text{F}$. Penambahan 32 tidak mengubah sebaran.

Pengecoh: 35,6 menerapkan $+32$ pada simpangan baku; 54 lupa menambah 32 pada rata-rata; 2 lupa mengalikan dengan 1,8.

Lima kantong beras diambil secara acak dari gudang sebagai **sampel**. Kelebihan massanya dari 5 kg (gram): 12, 15, 9, 18, 16. Tentukan simpangan baku sampel s (pembagi $n - 1$) sebagai taksiran simpangan baku seluruh kantong di gudang.

Jawaban: gram

Kunci: 3,536 gram

Pembahasan: $\bar{x} = 70 : 5 = 14$. Simpangan: $-2, 1, -5, 4, 2$; kuadratnya 4, 1, 25, 16, 4, jumlahnya 50.

$s^2 = 50 : 4 = 12,5$, jadi $s = \sqrt{12,5} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$ gram.

Bandingkan dengan pembagi n : $\sigma = \sqrt{10} \approx 3,16$. Karena datanya sampel dan kita menaksir sebaran seluruh gudang, pembagi $n - 1$ yang tepat.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Untuk data $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ didefinisikan $S(c) = |x_1 - c| + |x_2 - c| + \dots + |x_n - c|$.

- (a) Untuk data 1, 3, 8, hitung $S(3)$ dan $S(4)$.
- (b) Buktikan bahwa $S(c)$ mencapai nilai terkecil ketika c adalah median data.
- (c) Jelaskan mengapa rata-rata tidak selalu meminimumkan $S(c)$.

Kunci/rubrik: (a) $S(3) = 2 + 0 + 5 = 7$; $S(4) = 3 + 1 + 4 = 8$. [1 poin]

(b) Pasangkan $(x_1, x_n), (x_2, x_{n-1}), \dots$ Untuk setiap pasangan $x_i \leq x_{n+1-i}$, ketaksamaan segitiga memberi $|x_i - c| + |x_{n+1-i} - c| \geq x_{n+1-i} - x_i$, dengan kesamaan tepat ketika $x_i \leq c \leq x_{n+1-i}$. Jika n ganjil, data tengah $x_{(n+1)/2}$ menyumbang $|x_{(n+1)/2} - c| \geq 0$. Jadi $S(c) \geq \sum_{i \leq n/2} (x_{n+1-i} - x_i)$, sebuah batas bawah yang tidak bergantung pada c . Median terletak di antara setiap pasangan (dan sama dengan data tengah bila n ganjil), sehingga semua kesamaan terjadi bersamaan dan $S(\text{median})$ sama dengan batas bawah itu. [4 poin]

(c) Untuk data (a), rata-ratanya 4 tetapi $S(4) = 8 > 7 = S(3)$. Rata-rata meminimumkan jumlah *kuadrat* simpangan, bukan jumlah simpangan mutlak. [1 poin]

Pembahasan: Ide pemasangan (*pairing*) adalah senjata olimpiade yang sering dipakai. Bila n genap, setiap c di antara dua data tengah sama-sama minimum, sehingga minimumnya tidak tunggal. Penerapan nyata: letak terbaik sebuah halte di jalan lurus, agar jumlah jarak berjalan semua penumpang sekecil mungkin, adalah di median rumah-rumah mereka.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Rata-rata, median, modus • gaya olimpiade • 31-6-02

Tujuh bilangan asli memiliki rata-rata 12, median 10, dan modus tunggal 15 (15 muncul lebih sering daripada bilangan lain mana pun). Berapa nilai terbesar yang mungkin bagi bilangan terbesar di antara ketujuh bilangan itu?

Jawaban:

Kunci: 38

Pembahasan: Urutkan $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7$. Median 10 berarti $a_4 = 10$, dan jumlah semuanya $7 \times 12 = 84$.

Karena $15 > 10$, angka 15 hanya bisa menempati a_5, a_6, a_7 , minimal dua kali. Agar $a_7 > 15$, haruslah $a_5 = a_6 = 15$, sehingga 15 muncul tepat dua kali. Maka setiap bilangan lain hanya boleh muncul sekali: a_1, a_2, a_3 berbeda dan kurang dari 10 (jika $a_3 = 10$, angka 10 muncul dua kali dan modulusnya tidak tunggal).

Jumlah terkecil $a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, sehingga $a_7 = 84 - 6 - 10 - 30 = 38$.

Cek: 1, 2, 3, 10, 15, 15, 38 $\rightarrow$ jumlah 84, median 10, modus tunggal 15. $\checkmark$

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Menambah dan membuang data • gaya olimpiade • 31-6-03

Rata-rata sekumpulan bilangan adalah 20, dan salah satu bilangannya adalah 50. Jika bilangan 50 itu dibuang, rata-rata sisanya menjadi 18. Jika 50 tidak dibuang tetapi ditambahkan satu bilangan baru x , rata-ratanya menjadi 21. Tentukan x .

Jawaban:

Kunci: 37

Pembahasan: Misalkan ada n bilangan; jumlahnya $20n$.

Setelah 50 dibuang: $20n - 50 = 18(n - 1)$, jadi $2n = 32$ dan $n = 16$. Jumlah semula = 320.

Setelah x ditambahkan: $\frac{320 + x}{17} = 21$, jadi $x = 357 - 320 = 37$.

Cek kewajaran: menambah 37 yang lebih besar daripada rata-rata 20 memang menaikkan rata-rata.

24. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Varians tidak negatif • gaya olimpiade • 31-6-04

Lima bilangan real a, b, c, d, e memenuhi $a + b + c + d + e = 20$ dan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 100$. Tentukan nilai terbesar yang mungkin bagi e .

Jawaban:

Kunci: 8

Pembahasan: Untuk a, b, c, d : jumlahnya $20 - e$ dan jumlah kuadratnya $100 - e^2$. Varians tidak negatif:

$$\frac{100 - e^2}{4} - \left(\frac{20 - e}{4} \right)^2 \geq 0 \iff 4(100 - e^2) \geq (20 - e)^2 \iff 400 - 4e^2 \geq 400 - 40e + e^2 \iff 5e^2 - 40e \leq 0.$$

Jadi $0 \leq e \leq 8$. Nilai $e = 8$ tercapai ketika variansnya 0, yaitu $a = b = c = d = 3$.

Cek: $3 \cdot 4 + 8 = 20$ dan $9 \cdot 4 + 64 = 100$. $\checkmark$ Ide "varians ≥ 0 " sama dengan ketaksamaan QM-AM.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Aturan perkalian • 32-1-01

Kantin sekolah menjual 3 jenis nasi (putih, kuning, uduk) dan 4 jenis lauk. Dimas membeli 1 nasi dan 1 lauk. Banyak pilihan paket yang mungkin adalah...

- A. 7
B. 12
C. 64
D. 81

Kunci: B

Pembahasan: Dimas memilih nasi **dan** lauk, jadi kalikan: $3 \times 4 = 12$.

Angka 7 ($3 + 4$) adalah jebakan menjumlahkan, sedangkan 64 dan 81 adalah jebakan mengangkat.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Faktorial • 32-1-02

Hitunglah $5!$.

Jawaban:

Kunci: 120

Pembahasan: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Artinya ada 120 cara menyusun 5 orang dalam satu antrian.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Permutasi atau kombinasi • 32-1-03

Manakah situasi berikut yang memperhatikan **urutan** (permutasi)?

- A. Memilih 3 siswa untuk ikut lomba cerdas cermat
B. Memilih 2 buah dari keranjang buah
C. Memilih ketua dan wakil ketua kelas dari 5 calon
D. Memilih 4 lauk untuk nasi campur

Kunci: C

Pembahasan: Uji tukar: jika ketua dan wakil bertukar, hasilnya berbeda (Dimas ketua–Ayu wakil $\neq$ Ayu ketua–Dimas wakil). Jadi urutan penting: permutasi.

Pada tiga situasi lain, menukar urutan tidak mengubah apa pun: itu kombinasi.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Aturan penjumlahan • 32-1-04

Perpustakaan punya 6 buku komik dan 4 buku cerita rakyat yang berbeda. Ayu hanya boleh meminjam **satu** buku, komik atau cerita rakyat. Banyak pilihan Ayu adalah...

- A. 10
B. 24
C. 6
D. 2

Kunci: A

Pembahasan: Ayu memilih salah satu: komik **atau** cerita rakyat. Kedua kelompok tidak tumpang tindih, jadi jumlahkan: $6 + 4 = 10$.

Angka 24 (6×4) akan benar jika Ayu meminjam satu komik **dan** satu cerita rakyat.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • PIN tanpa angka kembar • 32-2-01

Sebuah PIN terdiri atas 4 angka (0–9) dan angka-angkanya tidak boleh berulang. Berapa banyak PIN yang mungkin?

Jawaban: PIN

Kunci: 5.040 PIN

Pembahasan: Isi kotak satu per satu: kotak pertama 10 pilihan, kedua 9, ketiga 8, keempat 7.

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040 = P(10, 4).$$

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Pengurus OSIS • 32-2-02

Dari 7 calon akan dipilih ketua, sekretaris, dan bendahara OSIS (satu orang satu jabatan). Berapa banyak susunan pengurus yang mungkin?

Jawaban: susunan

Kunci: 210 susunan

Pembahasan: Jabatannya berbeda, jadi urutan penting: $P(7, 3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Kombinasi • 32-2-03

Dari 8 anggota tim futsal, pelatih memilih 2 orang untuk mengikuti pelatihan wasit. Berapa banyak cara memilihnya?

Jawaban: cara

Kunci: 28 cara

Pembahasan: Kedua orang terpilih mengikuti pelatihan yang sama, jadi urutan tidak penting: $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2!} = 28$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Mencoret faktorial • 32-2-04

Nilai dari $\frac{8!}{6!}$ adalah...

A. $\frac{4}{3}$

C. 336

B. 2

D. 56

Kunci: D

Pembahasan: Coret dulu: $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$.

Jebakan: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ (tanda seru diabaikan) dan $8 \times 7 \times 6 = 336$ (mencoret terlalu sedikit).

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Unsur yang sama • 32-3-01

Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat dibuat dari semua huruf kata **MATEMATIKA**?

Jawaban: susunan

Kunci: 151.200 susunan

Pembahasan: Ada 10 huruf: A tiga kali, M dua kali, T dua kali, dan E, I, K masing-masing sekali.

$$\frac{10!}{3! 2! 2!} = \frac{3.628.800}{24} = 151.200.$$

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Permutasi siklis • 32-3-02

Enam sahabat, termasuk Dimas dan Ayu, duduk mengelilingi meja bundar. Susunan yang hanya berbeda putaran dianggap sama. Berapa banyak susunan duduk jika Dimas dan Ayu harus duduk berdampingan?

Jawaban: susunan

Kunci: 48 susunan

Pembahasan: Anggap Dimas–Ayu satu paket. Sekarang ada 5 unit yang duduk melingkar: $(5 - 1)! = 24$ cara. Di dalam paket, Dimas dan Ayu bisa bertukar tempat: $2! = 2$ cara. Total $24 \times 2 = 48$.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Pengisian tempat bersyarat • 32-3-03

Dari angka 1, 2, 3, 5, 7, 8 akan dibentuk bilangan 4 angka dengan angka-angka berbeda. Berapa banyak bilangan yang lebih dari 5.000?

Jawaban: bilangan

Kunci: 180 bilangan

Pembahasan: Agar lebih dari 5.000, angka ribuan harus 5, 7, atau 8: 3 pilihan. Tiga kotak sisanya diisi dari 5 angka yang tersisa tanpa berulang: $5 \times 4 \times 3 = 60$. Total $3 \times 60 = 180$. (Bilangan 5.000 sendiri tidak dapat dibentuk, jadi tidak perlu dikurangi.)

12. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Kombinasi bersyarat • 32-3-04

Tim cerdas cermat 4 orang dipilih dari 5 siswa putra dan 4 siswi putri. Tim harus berisi tepat 2 putri. Banyak tim yang mungkin adalah...

- | | |
|--------|--------|
| A. 126 | C. 120 |
| B. 16 | D. 60 |

Kunci: D

Pembahasan: Pilih 2 putri dari 4: $\binom{4}{2} = 6$. Pilih 2 putra dari 5: $\binom{5}{2} = 10$. Keduanya dilakukan, jadi kalikan: $6 \times 10 = 60$. Jebakan: $126 = \binom{9}{4}$ (syarat diabaikan), $16 = 6 + 10$ (dijumlahkan).

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Kata sandi • gaya IGCSE • 32-4-01

Sebuah kata sandi terdiri atas 2 huruf (A–Z) diikuti 3 angka (0–9). Huruf boleh berulang, tetapi ketiga angka harus berbeda. **Hitung** banyaknya kata sandi yang mungkin.

Jawaban: kata sandi

Kunci: 486.720 kata sandi

Pembahasan: Huruf (boleh berulang): $26 \times 26 = 676$. Angka (berbeda): $10 \times 9 \times 8 = 720$. Total $676 \times 720 = 486.720$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Koefisien binomial • gaya IGCSE • 32-4-02

Tentukan koefisien x^3 pada penjabaran $(2 + x)^6$.

Jawaban:

Kunci: 160

Pembahasan: Suku umum: $\binom{6}{k} 2^{6-k} x^k$. Untuk x^3 , $k = 3$.
 $\binom{6}{3} \cdot 2^3 = 20 \times 8 = 160$.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Unsur berdampingan • gaya IGCSE • 32-4-03

Tiga buku matematika yang berbeda dan empat novel yang berbeda disusun berjajar di rak. **Hitung** banyak susunan jika ketiga buku matematika harus selalu berdampingan.

Jawaban: susunan

Kunci: 720 susunan

Pembahasan: Anggap tiga buku matematika satu blok. Blok itu dan 4 novel adalah 5 unit: $5! = 120$ susunan. Di dalam blok, buku matematika dapat diurutkan $3! = 6$ cara.
Total $120 \times 6 = 720$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Menyusun huruf SEPATU • gaya IGCSE • 32-4-04

Semua huruf kata **SEPATU** akan disusun ulang.

- (a) **Hitung** banyak susunan yang mungkin.
- (b) **Hitung** banyak susunan yang diawali huruf vokal.
- (c) **Hitung** banyak susunan dengan ketiga huruf vokal (E, A, U) berdampingan.
- (d) **Tunjukkan** bahwa ada 480 susunan dengan huruf S dan P tidak berdampingan.

Kunci/rubrik: (a) Enam huruf berbeda: $6! = 720$. [1]

(b) Huruf pertama vokal: 3 pilihan, sisanya $5! = 120$: $3 \times 120 = 360$. [1]

(c) Blok vokal + S, P, T = 4 unit: $4! = 24$; urutan di dalam blok $3! = 6$: $24 \times 6 = 144$. [2]

(d) S dan P berdampingan: blok SP/PS (2 cara) + 4 huruf lain = 5 unit, $2 \times 5! = 240$. Tidak berdampingan: $720 - 240 = 480$. [2]

Pembahasan: Pada (d) lebih mudah menghitung **komplemen**: semua susunan dikurangi susunan yang dilarang. Trik "ikat menjadi blok" dipakai di (c) dan (d).

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Minimal dua siswa • gaya IB • 32-5-01

Sebuah delegasi 5 orang dipilih dari 6 guru dan 4 siswa. Delegasi harus berisi minimal 2 siswa. Tentukan banyaknya delegasi yang mungkin.

Jawaban: delegasi

Kunci: 186 delegasi

Pembahasan: Semua delegasi: $\binom{10}{5} = 252$.

Tanpa siswa: $\binom{6}{5} = 6$. Tepat 1 siswa: $\binom{4}{1} \binom{6}{4} = 4 \times 15 = 60$.

Minimal 2 siswa: $252 - 6 - 60 = 186$.

Cek langsung: $\binom{4}{2} \binom{6}{3} + \binom{4}{3} \binom{6}{2} + \binom{4}{4} \binom{6}{1} = 120 + 60 + 6 = 186$. ✓

Tentukan suku yang tidak memuat x (suku konstanta) pada penjabaran $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$.

Jawaban:

Kunci: 240

Pembahasan: Suku umum: $\binom{6}{k}(x^2)^{6-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = \binom{6}{k}(-2)^k x^{12-3k}$.

Konstanta jika $12 - 3k = 0$, jadi $k = 4$.

$$\binom{6}{4}(-2)^4 = 15 \times 16 = 240.$$

Ada 10 calon pengurus OSIS: 6 putri dan 4 putra.

(a) Tentukan banyak cara memilih ketua, wakil ketua, dan sekretaris (satu orang satu jabatan).

(b) Tentukan banyak cara memilih tim inti 4 orang tanpa jabatan yang memuat minimal 1 putra.

(c) Ketua harus putri dan wakil ketua harus putra, sedangkan sekretaris boleh siapa saja dari calon yang tersisa. Tentukan banyak susunannya.

Kunci/rubrik: (a) $P(10, 3) = 10 \times 9 \times 8 = 720$. [1]

(b) Komplemen: semua tim $\binom{10}{4} = 210$ dikurangi tim tanpa putra $\binom{6}{4} = 15$: $210 - 15 = 195$. [2]

(c) Ketua putri: 6 pilihan; wakil putra: 4 pilihan; sekretaris dari 8 orang sisanya: 8 pilihan. $6 \times 4 \times 8 = 192$. [2]

Pembahasan: Bagian (a) dan (c) memakai jabatan (permutasi/pengisian tempat), sedangkan (b) memilih tim (kombinasi). Kata "minimal 1" hampir selalu lebih mudah dihitung lewat komplemen.

Di kota berjalan berpetak, Ayu berjalan dari titik A ke titik B yang terletak 5 blok ke timur dan 3 blok ke utara, selalu ke timur atau ke utara. Persimpangan P terletak 2 blok ke timur dan 1 blok ke utara dari A. Banyak rute terpendek dari A ke B yang **melalui** P adalah...

A. 56

C. 26

B. 30

D. 15

Kunci: B

Pembahasan: Rute A $\rightarrow$ P: susun 2 T dan 1 U: $\binom{3}{1} = 3$.

Rute P $\rightarrow$ B: masih 3 T dan 2 U: $\binom{5}{2} = 10$.

Melalui P: $3 \times 10 = 30$.

Jebakan: $56 = \binom{8}{3}$ adalah semua rute, dan $26 = 56 - 30$ adalah rute yang *tidak* melalui P.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Ibu membagikan 12 onde-onde identik kepada 4 anak sehingga setiap anak mendapat **minimal 2** onde-onde. Ada berapa cara membaginya?

Jawaban: cara

Kunci: 35 cara

Pembahasan: Berikan dulu masing-masing 2 onde-onde: tersisa $12 - 8 = 4$ onde-onde yang dibagi bebas kepada 4 anak.

Bintang dan sekat: 4 bintang dan 3 sekat, $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$.

Dengan kata lain, banyak penyelesaian $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4$ dengan $y_i \geq 0$, di mana $y_i = x_i - 2$.

Berapa banyak bilangan bulat dari 1 sampai 1.000 yang **tidak** habis dibagi 2, 3, maupun 5?

Jawaban: bilangan

Kunci: 266 bilangan

Pembahasan: Misalkan A, B, C = kelipatan 2, 3, 5. $|A| = 500$, $|B| = 333$, $|C| = 200$; $|A \cap B| = 166$ (kelipatan 6), $|A \cap C| = 100$ (kelipatan 10), $|B \cap C| = 66$ (kelipatan 15); $|A \cap B \cap C| = 33$ (kelipatan 30).

$|A \cup B \cup C| = 1033 - 332 + 33 = 734$.

Yang tidak habis dibagi: $1000 - 734 = 266$.

Empat sahabat masing-masing membawa satu kado, lalu kado-kado itu dibagikan ulang secara acak, satu kado per orang. Ada berapa cara pembagian sehingga **tidak ada** yang menerima kadonya sendiri?

Jawaban: cara

Kunci: 9 cara

Pembahasan: Semua pembagian: $4! = 24$. Misalkan A_i = orang ke- i menerima kadonya sendiri.

$\sum |A_i| = \binom{4}{1} 3! = 24$, $\sum |A_i \cap A_j| = \binom{4}{2} 2! = 12$, irisan tiga $\binom{4}{3} 1! = 4$, irisan empat 1.

Pembagian buruk: $24 - 12 + 4 - 1 = 15$. Pembagian baik: $24 - 15 = 9$.

Rumus umum (derangemen): $D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$.

(a) Buktikan dengan argumen mencacah (tanpa menjabarkan rumus faktorial) bahwa untuk setiap bilangan asli n ,

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(b) Periksa kebenarannya untuk $n = 4$.

Kunci/rubrik: (a) Ruas kanan menghitung banyak cara memilih n orang dari kelompok berisi n putra dan n putri. [1] Kelompokkan pilihan menurut banyak putri yang terpilih, misalnya k putri ($0 \leq k \leq n$): pilih k putri dalam $\binom{n}{k}$ cara dan $n - k$ putra dalam $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ cara, jadi ada $\binom{n}{k}^2$ cara. [2] Kasus-kasus untuk k yang berbeda tidak tumpang tindih dan mencakup semua pilihan, sehingga menurut aturan penjumlahan totalnya $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. Kedua ruas menghitung hal yang sama, jadi sama. [2]

(b) $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = \binom{8}{4}$. [1]

Pembahasan: Inilah teknik **hitung dua kali** (*double counting*): satu himpunan dihitung dengan dua cara berbeda, lalu kedua hasilnya disamakan. Kuncinya adalah sifat simetri $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Peluang klasik • 33-1-01

Sebuah dadu bermata 1 sampai 6 dilempar sekali. Peluang muncul mata dadu 4 adalah...

- A. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{4}{6}$
B. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

Kunci: B

Pembahasan: Ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jadi $n(S) = 6$. Kejadian "muncul mata 4" hanya berisi satu titik sampel.

$P = \frac{1}{6}$. Pilihan $\frac{4}{6}$ keliru karena angka 4 adalah nama mata dadunya, bukan banyaknya hasil.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Kejadian mustahil • 33-1-02

Manakah kejadian berikut yang peluangnya 0 (kejadian mustahil)?

- A. Muncul mata dadu genap pada pelemparan satu dadu
B. Muncul Gambar pada pelemparan sebuah koin
C. Terambil kelereng merah dari kantong berisi 3 kelereng merah dan 1 biru
D. Muncul mata dadu 7 pada pelemparan satu dadu biasa

Kunci: D

Pembahasan: Dadu biasa hanya bermata 1 sampai 6, jadi mata 7 tidak mungkin muncul: $P = 0$.

Peluang pilihan lainnya berturut-turut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, dan $\frac{3}{4}$.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Biji congklak • 33-1-03

Dimas memasukkan biji congklak ke dalam kantong: 3 kerang putih, 5 kerang cokelat, dan 2 kerang hitam. Ia mengambil satu biji tanpa melihat. Berapa peluang terambil kerang cokelat?

Jawaban:

Kunci: 0,5

Pembahasan: Banyak semua biji = $3 + 5 + 2 = 10$, dan setiap biji sama mungkin terambil.

$P(\text{cokelat}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Ruang sampel dua koin • 33-1-04

Dua koin dilempar bersamaan. Banyak anggota ruang sampelnya adalah...

- A. 2 C. 4
B. 3 D. 6

Kunci: C

Pembahasan: Tulis A untuk Angka dan G untuk Gambar: $S = \{AA, AG, GA, GG\}$, jadi ada 4 anggota.

AG dan GA berbeda karena koinnya dua (bayangkan satu koin Rp500 dan satu koin Rp1.000). Jawaban 3 ("0, 1, atau 2 Gambar") keliru karena "tepat 1 Gambar" dapat terjadi dengan dua cara.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Jumlah dua dadu • 33-2-01

Dua dadu dilempar bersamaan. Berapa peluang jumlah kedua mata dadu sama dengan 9?

Jawaban:

Kunci: 0,1111

Pembahasan: Ruang sampel berisi $6 \times 6 = 36$ pasangan yang sama mungkin.

Pasangan berjumlah 9: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), ada 4.

$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Cocok dengan trik $6 - |9 - 7| = 4$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Frekuensi harapan • 33-2-02

Sebuah tutup botol dilempar 200 kali dan mendarat telentang sebanyak 76 kali. Jika tutup botol yang sama dilempar 500 kali, kira-kira berapa kali ia akan mendarat telentang?

Jawaban: kali

Kunci: 190 kali

Pembahasan: Taksiran peluang telentang = frekuensi relatif = $\frac{76}{200} = 0,38$.

Frekuensi harapan = $500 \times 0,38 = 190$ kali. Hasil sebenarnya bisa sedikit berbeda, karena 190 adalah perkiraan.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Komplemen • 33-2-03

Pada undian doorprize 17 Agustus terdapat 250 kupon, dan 10 di antaranya berhadiah. Dimas memegang satu kupon. Peluang kupon Dimas **tidak** berhadiah adalah...

A. $\frac{24}{25}$

C. $\frac{1}{250}$

B. $\frac{1}{25}$

D. $\frac{1}{10}$

Kunci: A

Pembahasan: $P(\text{berhadiah}) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}$.

Dengan komplemen, $P(\text{tidak berhadiah}) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Diagram Venn • 33-2-04

Dari 40 siswa, 25 siswa ikut Pramuka, 18 siswa ikut PMR, dan 7 siswa ikut keduanya. Seorang siswa dipilih secara acak. Berapa peluang ia tidak ikut Pramuka maupun PMR?

Jawaban:

Kunci: 0,1

Pembahasan: Banyak siswa yang ikut paling sedikit satu kegiatan: $25 + 18 - 7 = 36$ (irisan dikurangi sekali agar tidak terhitung dua kali).

Yang tidak ikut keduanya: $40 - 36 = 4$.

$P = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Tanpa pengembalian • 33-3-01

Sebuah kotak berisi 4 bola merah dan 6 bola putih. Dua bola diambil satu per satu tanpa pengembalian. Berapa peluang kedua bola berwarna merah?

Jawaban:

Kunci: 0,1333

Pembahasan: $P(\text{merah pertama}) = \frac{4}{10}$. Setelah itu tersisa 3 merah dari 9 bola, jadi $P(\text{merah kedua} | \text{merah pertama}) = \frac{3}{9}$.

$$P(MM) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Peluang bersyarat • 33-3-02

Dua dadu dilempar. Diketahui jumlah mata dadunya 8. Berapa peluang paling sedikit satu dadu bermata 6?

A. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{18}$

B. $\frac{11}{36}$

D. $\frac{2}{5}$

Kunci: D

Pembahasan: Ruang sampel yang baru hanya berisi pasangan berjumlah 8: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), ada 5. Yang memuat mata 6: (2, 6) dan (6, 2), ada 2. Jadi $P = \frac{2}{5}$.

Pengecoh $\frac{11}{36}$ adalah peluang ada mata 6 tanpa syarat, sedangkan $\frac{1}{18} = \frac{2}{36}$ adalah peluang "ada 6 dan jumlahnya 8".

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Paling sedikit satu • 33-3-03

Peluang Dimas mencetak gol dalam satu tendangan penalti adalah 0,7, dan setiap tendangan saling bebas. Ia menendang 3 kali. Berapa peluang ia mencetak paling sedikit satu gol?

Jawaban:

Kunci: 0,973

Pembahasan: Peluang gagal dalam satu tendangan $= 1 - 0,7 = 0,3$.

Ketiga tendangan saling bebas, jadi $P(\text{gagal semua}) = 0,3^3 = 0,027$.

$P(\text{paling sedikit satu gol}) = 1 - 0,027 = 0,973$.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Nilai harapan • 33-3-04

Di bazar sekolah, sebuah roda putar dibagi menjadi 8 juring yang sama besar: 1 juring bernilai 10 poin, 3 juring bernilai 2 poin, dan 4 juring bernilai 0 poin. Berapa nilai harapan poin untuk satu kali putaran?

Jawaban: poin

Kunci: 2 poin

Pembahasan: Peluang setiap nilai: $P(10) = \frac{1}{8}$, $P(2) = \frac{3}{8}$, $P(0) = \frac{4}{8}$.

$$E = 10 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{4}{8} = \frac{10+6}{8} = 2 \text{ poin.}$$

Artinya, jika roda diputar 100 kali, total poinnya sekitar 200.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Diagram pohon • gaya IGCSE • 33-4-01

Pada hari hujan, peluang bus sekolah datang terlambat adalah 0,4. Pada hari tidak hujan, peluangnya 0,1. Peluang sebuah hari hujan adalah 0,3. **Hitung** peluang bus terlambat pada hari yang dipilih secara acak.

Jawaban:

Kunci: 0,19

Pembahasan: Jalur hujan lalu terlambat: $0,3 \times 0,4 = 0,12$.

Jalur tidak hujan lalu terlambat: $0,7 \times 0,1 = 0,07$.

Jumlahkan kedua jalur: $P(\text{terlambat}) = 0,12 + 0,07 = 0,19$.

14. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Kejadian saling bebas • gaya IGCSE • 33-4-02

Kejadian A dan B saling bebas dengan $P(A) = 0,5$ dan $P(B) = 0,4$. Nilai $P(A \cup B)$ adalah...

- A. 0,9
B. 0,7
C. 0,2
D. 0,45

Kunci: B

Pembahasan: Karena saling bebas, $P(A \cap B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$.

$P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$.

Jawaban 0,9 hanya benar jika A dan B saling lepas, dan 0,2 adalah $P(A \cap B)$, bukan $P(A \cup B)$.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Tabel peluang • gaya IGCSE • 33-4-03

Sebuah roda putar berwarna berhenti di merah dengan peluang 0,25, di biru dengan peluang 0,3, di hijau dengan peluang x , dan di kuning dengan peluang $2x$. Roda itu diputar 200 kali. **Hitung** berapa kali roda diperkirakan berhenti di kuning.

Jawaban: kali

Kunci: 60 kali

Pembahasan: $0,25 + 0,3 + x + 2x = 1 \Rightarrow 3x = 0,45 \Rightarrow x = 0,15$.

$P(\text{kuning}) = 2x = 0,3$.

Frekuensi harapan = $200 \times 0,3 = 60$ kali.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Diagram pohon tanpa pengembalian • gaya IGCSE • 33-4-04

Sebuah kantong berisi 5 permen rasa jeruk (J) dan 3 permen rasa stroberi (S). Ayu mengambil dua permen satu per satu tanpa pengembalian.

- (a) **Gambarkan** diagram pohon lengkap dengan peluang pada setiap cabang.
(b) **Hitung** peluang kedua permen memiliki rasa yang sama.
(c) **Hitung** peluang paling sedikit satu permen berasa stroberi.

Kunci/rubrik: (a) Cabang pertama: J $\frac{5}{8}$, S $\frac{3}{8}$. Setelah J: J $\frac{4}{7}$, S $\frac{3}{7}$. Setelah S: J $\frac{5}{7}$, S $\frac{2}{7}$. [2 poin]

(b) $P(JJ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$, $P(SS) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$. Jumlahnya $\frac{26}{56} = \frac{13}{28}$. [2 poin]

(c) $1 - P(JJ) = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$. [2 poin]

Pembahasan: Peluang di cabang kedua berubah karena permen tidak dikembalikan (penyebutnya menjadi 7). Untuk

(c), jalan pintas komplemen lebih cepat daripada menjumlahkan tiga jalur JS, SJ, dan SS: $\frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{36}{56}$.

Hasilnya sama.

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Aturan Bayes • gaya IB • 33-5-01

Sebuah tes cepat memberi hasil positif pada 90% orang yang mengidap suatu penyakit dan hasil negatif pada 95% orang yang sehat. Di suatu daerah, 4% penduduk mengidap penyakit itu. Seseorang dipilih secara acak dan hasil tesnya positif. Tentukan peluang orang itu benar-benar sakit.

Jawaban:

Kunci: 0,4286

Pembahasan: $P(\text{sakit} \cap +) = 0,04 \times 0,9 = 0,036$.

$P(\text{sehat} \cap +) = 0,96 \times 0,05 = 0,048$.

$P(\text{sakit} | +) = \frac{0,036}{0,036 + 0,048} = \frac{0,036}{0,084} = \frac{3}{7} \approx 0,43$.

Meskipun tesnya tampak akurat, lebih dari separuh hasil positif adalah positif palsu karena penyakitnya cukup jarang.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Variabel acak diskret • gaya IB • 33-5-02

Variabel acak diskret X memiliki fungsi peluang $P(X = x) = kx$ untuk $x = 1, 2, 3, 4$. Tentukan $E(X)$.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $k(1 + 2 + 3 + 4) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{10}$.

$E(X) = \sum x \cdot kx = k(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{30}{10} = 3$.

Masuk akal: nilai yang besar lebih mungkin muncul, jadi rata-ratanya (3) di atas nilai tengah 2,5.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Bebas atau lepas • gaya IB • 33-5-03

Diketahui $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, dan $P(A \cap B) = 0,3$. Pernyataan yang benar adalah...

A. A dan B saling bebas.

C. $P(A | B) = 0,5$

B. A dan B saling lepas.

D. $P(A \cup B) = 1,1$

Kunci: A

Pembahasan: $P(A) \cdot P(B) = 0,6 \times 0,5 = 0,3 = P(A \cap B)$, jadi A dan B saling bebas.

Tidak saling lepas karena $P(A \cap B) \neq 0$. $P(A | B) = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$, bukan 0,5. $P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$; peluang tidak mungkin melebihi 1.

Dua dadu dilempar dan D menyatakan selisih (nilai mutlak) kedua mata dadu.

(a) Buatlah tabel distribusi peluang D .

(b) Tunjukkan bahwa $E(D) = \frac{35}{18}$.

(c) Di bazar sekolah, pemain menyerahkan c kupon untuk sekali main dan menerima D kupon. Tentukan c agar permainan adil, lalu jelaskan apa yang terjadi dalam jangka panjang jika panitia menetapkan $c = 2$.

Kunci/rubrik: (a) $P(D = 0) = \frac{6}{36}$, $P(D = 1) = \frac{10}{36}$, $P(D = 2) = \frac{8}{36}$, $P(D = 3) = \frac{6}{36}$, $P(D = 4) = \frac{4}{36}$, $P(D = 5) = \frac{2}{36}$; jumlahnya $\frac{36}{36} = 1$. [2 poin]

(b) $E(D) = \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$. [2 poin]

(c) Keuntungan pemain per permainan $D - c$, nilai harapannya $\frac{35}{18} - c$. Adil jika $c = \frac{35}{18} \approx 1,94$ kupon. Jika $c = 2$, pemain rata-rata rugi $2 - \frac{35}{18} = \frac{1}{18}$ kupon per permainan, sehingga panitia rata-rata memperoleh sekitar 56 kupon dari setiap 1.000 permainan. [2 poin]

Pembahasan: Cara cepat membuat tabel (a): pada tabel 6×6 , selisih 0 ada di diagonal (6 sel), dan selisih $d \geq 1$ muncul di dua diagonal sejajar, masing-masing berisi $6 - d$ sel, sehingga totalnya $2(6 - d)$ sel.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

Dimas dan Ayu berjanji bertemu di depan Monas antara pukul 16.00 dan 17.00. Masing-masing datang pada saat acak (setiap saat dalam rentang itu sama mungkin) dan menunggu paling lama 20 menit, lalu pergi. Berapa peluang mereka bertemu?

Jawaban:

Kunci: 0,5556

Pembahasan: Ruang sampel: persegi 60×60 dengan luas 3.600. Mereka **tidak** bertemu jika $|x - y| > 20$, yaitu dua segitiga siku-siku sama kaki di pojok persegi dengan kaki $60 - 20 = 40$.

Luas kedua segitiga $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40^2 = 1.600$.

$P(\text{bertemu}) = 1 - \frac{1.600}{3.600} = \frac{2.000}{3.600} = \frac{5}{9}$.

Dua bilangan berbeda dipilih secara acak dari $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Berapa peluang jumlah kedua bilangan itu habis dibagi 3?

Jawaban:

Kunci: 0,3333

Pembahasan: Sisa 0: 3, 6, ..., 99 (33 bilangan). Sisa 1: 1, 4, ..., 100 (34 bilangan). Sisa 2: 2, 5, ..., 98 (33 bilangan). Jumlah habis dibagi 3 jika keduanya bersisa 0, yaitu $\binom{33}{2} = 528$ pasangan, atau satu bersisa 1 dan satu bersisa 2, yaitu $34 \cdot 33 = 1.122$ pasangan.

Banyak semua pasangan $\binom{100}{2} = 4.950$. Jadi $P = \frac{528 + 1.122}{4.950} = \frac{1.650}{4.950} = \frac{1}{3}$. Hasil yang rapi ini bukan kebetulan: cobalah dengan $\{1, \dots, 99\}$!

Ada 4 pintu; di balik satu pintu ada sepeda, sisanya kosong. Kamu memilih satu pintu. Pembawa acara, yang tahu letak sepeda, membuka satu pintu kosong di antara tiga pintu lainnya. Kamu lalu pindah ke salah satu dari dua pintu tertutup lainnya, dipilih secara acak. Peluang kamu mendapat sepeda adalah...

- A. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$
 B. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Kunci: C

Pembahasan: Jika pilihan pertama benar (peluang $\frac{1}{4}$), pindah pasti kalah.

Jika pilihan pertama salah (peluang $\frac{3}{4}$), sepeda berada di salah satu dari dua pintu tertutup lainnya, dan pilihan acakmu mengenainya dengan peluang $\frac{1}{2}$.

$P(\text{menang}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Ini lebih besar daripada $\frac{1}{4}$ jika tetap: pindah tetap lebih baik walaupun pilihan barunya diundi.

Anggap setahun terdiri atas 365 hari dan setiap hari sama mungkin menjadi hari ulang tahun seseorang, tidak bergantung pada orang lain.

(a) Buktikan bahwa peluang n orang ($n \leq 365$) memiliki hari ulang tahun yang semuanya berbeda adalah

$$q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

(b) Dengan ketaksamaan $1 - x \leq e^{-x}$, buktikan bahwa $q_n \leq e^{-n(n-1)/730}$.

(c) Simpulkan bahwa dalam kelompok 23 orang, peluang ada dua orang yang berulang tahun sama lebih dari $\frac{1}{2}$. (Gunakan $\ln 2 < 0,69315$.)

Kunci/rubrik: (a) Urutkan orang-orangnya. Agar semua berbeda, orang ke- $(k+1)$ harus berulang tahun pada salah satu dari $365 - k$ hari yang belum dipakai k orang sebelumnya; peluangnya $\frac{365-k}{365} = 1 - \frac{k}{365}$. Dengan aturan perkalian, $q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$. [2 poin]

(b) Untuk $0 \leq k \leq n-1 < 365$, berlaku $0 < 1 - \frac{k}{365} \leq e^{-k/365}$. Mengalikan ketaksamaan bilangan positif menghasilkan $q_n \leq e^{-(0+1+\dots+(n-1))/365} = e^{-n(n-1)/730}$. [2 poin]

(c) Untuk $n = 23$: $\frac{n(n-1)}{730} = \frac{506}{730} \approx 0,693151 > 0,69315 > \ln 2$. Jadi $q_{23} \leq e^{-506/730} < e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$, sehingga $P(\text{ada yang sama}) = 1 - q_{23} > \frac{1}{2}$. [2 poin]

Pembahasan: Nilai eksaknya $1 - q_{23} \approx 0,507$. Batas pada (b) sangat tajam: untuk $n = 23$, eksponennya hanya sekitar 0,000004 di atas $\ln 2$. Intuisinya: banyak pasangan orang $\binom{n}{2}$ tumbuh seperti n^2 , sehingga kembar muncul ketika n sekitar $\sqrt{365}$, bukan sekitar $\frac{365}{2}$.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Variabel acak diskret • 34-1-01

Manakah yang merupakan **variabel acak diskret**?

- A. Tinggi badan seorang siswa (cm)
- B. Berat bersih beras dalam satu kemasan (kg)
- C. Banyak sisi angka saat 5 koin dilempar
- D. Waktu tempuh ojek dari rumah ke sekolah (menit)

Kunci: C

Pembahasan: Variabel diskret nilainya dapat dicacah satu per satu. Banyak sisi angka hanya bisa 0, 1, 2, 3, 4, atau 5.

Tinggi, berat, dan waktu dapat bernilai desimal apa saja dalam suatu rentang, jadi termasuk variabel **kontinu**.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Tabel distribusi peluang • 34-1-02

Variabel acak X memiliki distribusi peluang $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 1) = 0,5$, dan $P(X = 2) = p$. Tidak ada nilai X yang lain. Tentukan p .

Jawaban:

Kunci: 0,3

Pembahasan: Jumlah semua peluang dalam sebuah distribusi harus 1.

$$0,2 + 0,5 + p = 1 \Rightarrow p = 0,3.$$

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Bentuk kurva normal • 34-1-03

Grafik distribusi normal berbentuk...

- A. huruf U
- B. lonceng yang simetris
- C. garis lurus yang naik
- D. tangga yang menurun

Kunci: B

Pembahasan: Kurva normal berbentuk lonceng: paling tinggi di tengah (di rata-rata μ) lalu menurun simetris ke kiri dan ke kanan. Karena itu ia sering disebut **kurva lonceng**.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Papan Galton • 34-1-04

Seratus kelereng dijatuhkan satu per satu di papan Galton. Di setiap paku, kelereng memantul ke kiri atau ke kanan dengan peluang sama. Di laci mana kelereng paling banyak terkumpul?

- A. Laci paling kiri
- B. Laci paling kanan
- C. Semua laci sama banyak
- D. Laci tengah

Kunci: D

Pembahasan: Untuk sampai ke laci paling pinggir, kelereng harus memantul ke arah yang sama di *setiap* paku: hanya ada 1 jalur.

Ke laci tengah ada paling banyak jalur (campuran kiri dan kanan yang seimbang), jadi laci tengah paling ramai dan tumpukannya membentuk lonceng.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Peluang binomial • 34-2-01

Sebuah koin dilempar 3 kali. Berapa peluang muncul tepat 2 sisi angka?

Jawaban:

Kunci: 0,375

Pembahasan: Hasil dengan tepat 2 angka: AAG, AGA, GAA, yaitu 3 dari 8 hasil yang sama mungkin.

Dengan rumus binomial: $\binom{3}{2}(0,5)^2(0,5)^1 = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Rataan binomial • 34-2-02

Di sebuah peternakan, peluang seekor ayam bertelur pada suatu hari adalah 0,8 (angka ilustrasi). Ada 50 ayam yang bertelur secara bebas satu sama lain, masing-masing paling banyak satu butir sehari. Berapa banyak telur yang **diharapkan** pada hari itu?

Jawaban: butir

Kunci: 40 butir

Pembahasan: Banyak ayam yang bertelur $X \sim B(50; 0,8)$.

Nilai harapan $E(X) = np = 50 \times 0,8 = 40$ butir.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Nilai harapan • 34-2-03

Variabel acak X memiliki distribusi $P(X = 1) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,5$, $P(X = 3) = 0,3$. Nilai harapan $E(X)$ adalah...

A. 2,1

C. 6

B. 2

D. 1

Kunci: A

Pembahasan: $E(X) = 1(0,2) + 2(0,5) + 3(0,3) = 0,2 + 1 + 0,9 = 2,1$.

Angka 2 adalah nilai tengah yang belum ditimbang dengan peluang, 6 adalah jumlah nilai-nilainya, dan 1 adalah jumlah peluangnya.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Aturan 68-95-99,7 • 34-2-04

Tinggi badan siswa kelas X di sebuah sekolah berdistribusi normal dengan rata-rata 160 cm dan simpangan baku 8 cm (data ilustrasi). Kira-kira berapa persen siswa yang tingginya antara 152 cm dan 168 cm?

A. 50%

C. 68%

B. 95%

D. 99,7%

Kunci: C

Pembahasan: $152 = 160 - 8$ dan $168 = 160 + 8$, jadi rentangnya adalah $\mu \pm \sigma$.

Menurut aturan empiris, sekitar 68% data berada dalam satu simpangan baku dari rata-rata.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Benih cabai • 34-3-01

Peluang sebutir benih cabai tumbuh adalah 0,9, dan setiap benih tumbuh secara bebas. Pak Tani menanam 5 benih. Berapa peluang **paling sedikit 4** benih tumbuh? (Tulis dalam desimal.)

Jawaban:

Kunci: 0,9185

Pembahasan: $X \sim B(5; 0,9)$.

$$P(X = 4) = {}^5_4(0,9)^4(0,1) = 5 \times 0,6561 \times 0,1 = 0,32805.$$

$$P(X = 5) = (0,9)^5 = 0,59049.$$

$$P(X \geq 4) = 0,32805 + 0,59049 = 0,91854 \approx 0,919.$$

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Membandingkan dengan skor z • 34-3-02

Nilai Matematika Dimas 78 (rata-rata kelas 70, simpangan baku 5). Nilai Fisikanya 80 (rata-rata kelas 74, simpangan baku 4). Dibandingkan dengan teman sekelasnya, di mata pelajaran mana Dimas relatif lebih unggul?

- A. Matematika, karena skor z-nya 1,6 sedangkan Fisika 1,5
- B. Fisika, karena 80 lebih besar daripada 78
- C. Fisika, karena simpangan bakunya lebih kecil
- D. Sama saja, karena keduanya di atas rata-rata

Kunci: A

Pembahasan: Matematika: $z = \frac{78 - 70}{5} = 1,6$. Fisika: $z = \frac{80 - 74}{4} = 1,5$.

Skor z Matematika lebih besar, jadi posisi Dimas di kelasnya relatif lebih tinggi pada Matematika, walaupun nilai mentahnya lebih kecil.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Beras kemasan • 34-3-03

Isi beras kemasan berlabel 5 kg berdistribusi normal dengan rata-rata 5,02 kg dan simpangan baku 0,02 kg (data ilustrasi). Berapa persen kemasan yang isinya kurang dari 5 kg? Gunakan $\Phi(1) = 0,8413$.

Jawaban: %

Kunci: 15,87 %

Pembahasan: $z = \frac{5 - 5,02}{0,02} = -1$.

$$P(X < 5) = \Phi(-1) = 1 - 0,8413 = 0,1587, \text{ yaitu sekitar } 15,87\%.$$

Kira-kira 1 dari 6 kemasan kurang dari label. Pabrik perlu menaikkan rata-rata atau memperkecil simpangan baku mesinnya.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Parameter binomial • 34-3-04

Variabel acak $X \sim B(n, p)$ memiliki rata-rata 12 dan varians 3. Tentukan n .

Jawaban:

Kunci: 16

Pembahasan: $np = 12$ dan $np(1 - p) = 3$. Bagi kedua persamaan: $1 - p = \frac{3}{12} = 0,25$, jadi $p = 0,75$.

$$n = \frac{12}{0,75} = 16. \text{ Cek: } 16 \times 0,75 \times 0,25 = 3. \checkmark$$

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Menebak pilihan ganda • gaya IGCSE • 34-4-01

Ayu menebak jawaban 10 soal pilihan ganda. Setiap soal punya 4 pilihan dengan tepat satu jawaban benar.

Hitung peluang Ayu menjawab benar tepat 3 soal. Berikan jawaban dalam 3 angka penting.

Jawaban:

Kunci: 0,25

Pembahasan: $X \sim B(10; 0,25)$.

$$P(X = 3) = {}^{10}_3(0,25)^3(0,75)^7 = 120 \times 0,015625 \times 0,13348 \dots \approx 0,250.$$

Kira-kira seperempat. Bandingkan dengan rataannya: $np = 2,5$ soal.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Tabel distribusi & nilai harapan • gaya IGCSE • 34-4-02

Distribusi peluang variabel acak X diberikan oleh $P(X = x) = k(x + 1)$ untuk $x = 0, 1, 2, 3$. **Tentukan** nilai k , lalu **hitung** $E(X)$. Tuliskan nilai $E(X)$.

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: $k(1 + 2 + 3 + 4) = 10k = 1$, jadi $k = 0,1$. Peluangnya 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

$$E(X) = 0(0,1) + 1(0,2) + 2(0,3) + 3(0,4) = 0 + 0,2 + 0,6 + 1,2 = 2.$$

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Simetri kurva normal • gaya IGCSE • 34-4-03

$X \sim N(70, \sigma^2)$ dan $P(X < 65) = 0,2$. Berapakah $P(70 < X < 75)$?

- | | |
|--------|--------|
| A. 0,2 | C. 0,8 |
| B. 0,6 | D. 0,3 |

Kunci: D

Pembahasan: Kurva normal simetris terhadap $\mu = 70$. Karena 65 dan 75 sama jauh dari 70, $P(X > 75) = P(X < 65) = 0,2$.

Luas setengah kurva di kanan 70 adalah 0,5, jadi $P(70 < X < 75) = 0,5 - 0,2 = 0,3$.

(0,6 adalah $P(65 < X < 75)$, dan 0,8 adalah $P(X > 65)$.)

Sebuah pesawat perintis memiliki 12 kursi. Maskapai menjual 13 tiket. Setiap pemegang tiket datang dengan peluang 0,85, saling bebas (angka ilustrasi). Misalkan X = banyak pemegang tiket yang datang.

- Jelaskan** mengapa X berdistribusi binomial dan tuliskan parameternya.
- Hitung** peluang ada penumpang yang tidak kebagian kursi.
- Hitung** rata-rata dan simpangan baku X .
- Maskapai menganggap risiko di atas 10% terlalu besar. Apakah menjual 13 tiket dapat diterima?

Jelaskan.

Kunci/rubrik: (a) Banyak percobaan tetap (13 pemegang tiket), setiap orang hanya datang atau tidak, peluang datang sama (0,85), dan saling bebas. Jadi $X \sim B(13; 0,85)$. [2]

(b) Ada yang tidak kebagian kursi hanya jika semua 13 orang datang: $P(X = 13) = 0,85^{13} \approx 0,121$. [2]

(c) $\mu = np = 13 \times 0,85 = 11,05$; $\sigma = \sqrt{13 \times 0,85 \times 0,15} = \sqrt{1,6575} \approx 1,29$. [2]

(d) $0,121 > 0,10$, jadi risikonya terlalu besar; sebaiknya maskapai menjual 12 tiket saja (risiko 0). [1]

Pembahasan: Kunci bagian (b): "ada yang tidak kebagian kursi" berarti yang datang lebih dari 12. Karena hanya ada 13 tiket, itu berarti tepat 13 orang datang.

Rataan 11,05 menunjukkan biasanya ada sekitar 1 kursi kosong, sehingga menjual tiket ekstra tampak menggoda, tetapi risikonya sekitar 12%.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Peluang normal • gaya IB • 34-5-01

Tinggi badan siswa SMA di sebuah kota dimodelkan dengan $X \sim N(165, 6^2)$ dalam cm (data ilustrasi).

Tentukan $P(160 < X < 175)$, dibulatkan ke 3 angka penting. Pakai GDC, atau gunakan $\Phi(1,667) \approx 0,9522$ dan $\Phi(0,833) \approx 0,7977$.

Jawaban:

Kunci: 0,75

Pembahasan: $z_1 = \frac{160 - 165}{6} \approx -0,833$ dan $z_2 = \frac{175 - 165}{6} \approx 1,667$.

$P = \Phi(1,667) - \Phi(-0,833) = 0,9522 - (1 - 0,7977) = 0,9522 - 0,2023 = 0,7499 \approx 0,750$.

Dengan GDC: $\text{normalcdf}(160, 175, 165, 6) \approx 0,74988$. Kira-kira tiga perempat siswa.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Normal invers • gaya IB • 34-5-02

Mesin pengisi beras berlabel 5 kg bekerja dengan simpangan baku 0,03 kg, dan isi kemasan berdistribusi normal. Pabrik ingin paling banyak 1% kemasan berisi kurang dari 5 kg. Tentukan rata-rata isi μ terkecil yang harus disetel, dalam kg dengan 3 desimal. Gunakan $\Phi(2,326) \approx 0,99$.

Jawaban: kg

Kunci: 5,07 kg

Pembahasan: $\Phi(-2,326) = 1 - 0,99 = 0,01$, jadi $\frac{5 - \mu}{0,03} = -2,326$.

$\mu = 5 + 2,326 \times 0,03 = 5,06978 \approx 5,070$ kg.

Mesin perlu diisi rata-rata sekitar 70 gram di atas label. Cara yang lebih hemat beras: perkecil simpangan baku mesin.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Paling sedikit satu • gaya IB • 34-5-03

Sebuah koin seimbang dilempar n kali. Nilai n terkecil agar peluang mendapat **paling sedikit satu** sisi angka lebih dari 0,999 adalah...

- A. 9
B. 10
C. 11
D. 8

Kunci: B

Pembahasan: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,5)^n > 0,999 \Rightarrow (0,5)^n < 0,001$.
 $0,5^9 \approx 0,00195$ (belum cukup), $0,5^{10} \approx 0,000977$ (sudah). Jadi $n = 10$. Ingat: $2^{10} = 1024 > 1000$.

20. Lv 5 • IB DP • Uraian • Aproksimasi normal • gaya IB • 34-5-04

Di sebuah kabupaten, 20% siswa memakai kacamata (data ilustrasi). Dipilih 100 siswa secara acak; X menyatakan banyak siswa berkacamata.

- (a) Tuliskan distribusi X , lalu hitung $E(X)$ dan simpangan bakunya.
 (b) Tunjukkan bahwa syarat aproksimasi normal terpenuhi, lalu dengan koreksi kontinuitas perkirakan $P(X \geq 25)$. Gunakan $\Phi(1,125) \approx 0,8697$.
 (c) Nilai eksak dari GDC adalah $P(X \geq 25) \approx 0,1314$. Hitung galat relatif aproksimasimu, lalu jelaskan mengapa koreksi kontinuitas diperlukan.

Kunci/rubrik: (a) $X \sim B(100; 0,2)$; $E(X) = np = 20$; $\sigma = \sqrt{100 \times 0,2 \times 0,8} = 4$. [2]

(b) $np = 20 \geq 5$ dan $n(1-p) = 80 \geq 5$. $P(X \geq 25) \approx P(Y > 24,5)$ dengan $Y \sim N(20, 4^2)$; $z = \frac{24,5 - 20}{4} = 1,125$, jadi $P \approx 1 - 0,8697 = 0,1303$. [3]

(c) Galat relatif $\approx \frac{|0,1303 - 0,1314|}{0,1314} \approx 0,8\%$. Binomial hanya bernilai bulat, sedangkan normal kontinu; batang $X = 25$ menempati selang 24,5 sampai 25,5, sehingga batas 24,5 diperlukan agar batang itu ikut terhitung. [2]

Pembahasan: Tanpa koreksi kontinuitas, $z = \frac{25 - 20}{4} = 1,25$ dan hasilnya $1 - 0,8944 = 0,1056$: galatnya sekitar 20%! Setengah satuan kecil itu ternyata sangat berpengaruh.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Linearitas: banyak run • gaya olimpiade • 34-6-01

Sebuah koin seimbang dilempar 10 kali, misalnya menghasilkan AAGAGGGAAG. Sebuah *run* adalah blok terpanjang dari hasil berurutan yang sama; contoh tadi punya 6 run: AA, G, A, GGG, AA, G. Berapa nilai harapan banyak run?

Jawaban:

Kunci: 5,5

Pembahasan: Misalkan $I_j = 1$ jika lemparan ke- j dan ke- $(j+1)$ berbeda, dan 0 jika sama ($j = 1, \dots, 9$). Banyak run $R = 1 + I_1 + \dots + I_9$.

$P(I_j = 1) = \frac{1}{2}$, jadi $E(I_j) = \frac{1}{2}$.

Dengan linearitas nilai harapan (tidak perlu saling bebas!): $E(R) = 1 + 9 \times \frac{1}{2} = 5,5$.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Pasangan ulang tahun • gaya olimpiade • 34-6-02

Di sebuah kelas ada 30 siswa. Anggap setiap siswa lahir pada salah satu dari 365 hari dengan peluang sama dan saling bebas. Berapa nilai harapan banyak **pasangan** siswa yang berulang tahun pada hari yang sama?

Jawaban: pasangan

Kunci: 1,1918 pasangan

Pembahasan: Ada $\binom{30}{2} = 435$ pasangan. Untuk satu pasangan, peluang hari ulang tahunnya sama adalah $\frac{1}{365}$. Dengan linearitas: $E = 435 \times \frac{1}{365} = \frac{87}{73} \approx 1,19$.

Lebih dari satu pasangan! Ini menjelaskan "paradoks ulang tahun" dari Bab 33: kembar tanggal lahir di satu kelas ternyata tidak langka.

23. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Bukti rata-rata & varians binomial • gaya olimpiade • 34-6-03

Misalkan $X \sim B(n, p)$ dan $q = 1 - p$.

(a) Buktikan identitas $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ untuk $1 \leq k \leq n$.

(b) Gunakan (a) dan Teorema Binomial untuk membuktikan $E(X) = np$.

(c) Dengan cara serupa, tunjukkan $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$, lalu simpulkan $\text{Var}(X) = npq$.

Kunci/rubrik: (a) $k \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$. (Cerita: memilih tim k orang lalu ketuanya = memilih ketua dulu, lalu $k-1$ anggota lain.) [2]

(b) $E(X) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$. [3]

(c) Dengan dua kali memakai (a): $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$, sehingga $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2$. Maka $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$ dan $\text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - n^2p^2 = npq$. [3]

Pembahasan: Kunci pembuktian ini adalah "menyerap" faktor k ke dalam koefisien binomial, lalu mengenali sisa jumlahnya sebagai $(p+q)^{n-1} = 1$.

Cara lain yang lebih singkat: tulis $X = I_1 + \dots + I_n$ dengan I_j indikator sukses ke- j , lalu pakai linearitas untuk rata-rata dan kebebasan untuk varians.

24. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Paritas banyak sukses • gaya olimpiade • 34-6-04

Sebuah koin tidak seimbang menghasilkan angka dengan peluang 0,2. Koin itu dilempar 5 kali. Berapa peluang banyak angka yang muncul **genap** (0, 2, atau 4)?

Jawaban:

Kunci: 0,5389

Pembahasan: Dengan $q = 0,8$ dan $p = 0,2$: $(q+p)^5 = \sum \binom{5}{k} p^k q^{5-k} = 1$ dan $(q-p)^5 = \sum (-1)^k \binom{5}{k} p^k q^{5-k}$. Jika dijumlahkan, suku dengan k ganjil saling menghapus dan suku dengan k genap muncul dua kali: $1 + (q-p)^5 = 2P(\text{genap})$.

$$P(\text{genap}) = \frac{1 + 0,6^5}{2} = \frac{1 + 0,07776}{2} = 0,53888.$$

Cek langsung: $0,8^5 + 10(0,2)^2(0,8)^3 + 5(0,2)^4(0,8) = 0,32768 + 0,2048 + 0,0064 = 0,53888$. ✓

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pernyataan • 35-1-01

Manakah kalimat berikut yang merupakan **pernyataan**?

- A. Tolong tutup jendelanya!
- B. Apakah 7 bilangan prima?
- C. 7 adalah bilangan genap.
- D. Semoga besok cerah.

Kunci: C

Pembahasan: Pernyataan adalah kalimat yang bernilai benar *atau* salah, tetapi tidak keduanya. "7 adalah bilangan genap" bernilai **salah**, tetapi tetap pernyataan karena nilai kebenarannya jelas. Perintah, pertanyaan, dan harapan tidak bisa dinilai benar atau salah, jadi bukan pernyataan.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Ingkaran kuantor • 35-1-02

Ingkaran (negasi) dari "Semua siswa memakai seragam" adalah...

- A. Semua siswa tidak memakai seragam.
- B. Ada siswa yang memakai seragam.
- C. Tidak ada siswa yang memakai seragam.
- D. Ada siswa yang tidak memakai seragam.

Kunci: D

Pembahasan: Untuk membantah "semua siswa memakai seragam", cukup ditemukan **satu** siswa yang tidak berseragam. Jadi ingkarannya: "Ada siswa yang tidak memakai seragam." Pilihan "Semua siswa tidak memakai seragam" terlalu kuat: jika separuh kelas berseragam, kalimat aslinya salah, tetapi kalimat itu juga salah.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Konjungsi • 35-1-03

Diketahui p : " $2 + 3 = 5$ " dan q : "4 adalah bilangan ganjil". Nilai kebenaran $p \wedge q$ (p dan q) adalah...

- A. benar, karena p benar
- B. salah, karena q salah
- C. benar, karena salah satunya benar
- D. tidak dapat ditentukan

Kunci: B

Pembahasan: p benar, sedangkan q salah (4 genap). Konjungsi "dan" hanya benar jika **kedua** bagiannya benar. Karena q salah, $p \wedge q$ salah. "Salah satunya benar" adalah syarat disjungsi "atau", bukan "dan".

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Konvers • 35-1-04

Konvers dari "Jika hari hujan, maka jalan basah" adalah...

- A. Jika jalan basah, maka hari hujan.
- B. Jika jalan tidak basah, maka hari tidak hujan.
- C. Jika hari tidak hujan, maka jalan tidak basah.
- D. Hari hujan dan jalan basah.

Kunci: A

Pembahasan: Konvers menukar posisi syarat dan akibat: $p \Rightarrow q$ menjadi $q \Rightarrow p$.

Jadi konversnya: "Jika jalan basah, maka hari hujan."

Perhatikan: konvers ini belum tentu benar. Jalan bisa basah karena disiram atau dilewati truk air. Pilihan kedua adalah kontraposisi, pilihan ketiga adalah invers.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Banyak baris tabel • 35-2-01

Sebuah pernyataan majemuk disusun dari empat pernyataan tunggal p, q, r, s . Berapa banyak baris tabel kebenarannya?

Jawaban: baris

Kunci: 16 baris

Pembahasan: Setiap pernyataan tunggal punya 2 kemungkinan nilai (B atau S).

Banyak kombinasi: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ baris.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Implikasi • 35-2-02

Kak Lintang berjanji, "Jika kamu juara kelas, maka Kakak mentraktirmu bakso." Dalam keadaan manakah janji itu **diingkari** (implikasinya bernilai salah)?

- A. Kamu juara kelas dan ditaraktir bakso.
- B. Kamu tidak juara kelas, tetapi tetap ditaraktir bakso.
- C. Kamu tidak juara kelas dan tidak ditaraktir bakso.
- D. Kamu juara kelas, tetapi tidak ditaraktir bakso.

Kunci: D

Pembahasan: Implikasi $p \Rightarrow q$ hanya salah jika p benar dan q salah.

Di sini: kamu juara (p benar), tetapi tidak ditaraktir (q salah). Itulah satu-satunya keadaan janji diingkari.

Jika kamu tidak juara, Kakak bebas mentraktir atau tidak; janjinya tidak dilanggar.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Kontraposisi • 35-2-03

Kontraposisi dari "Jika Dimas lulus ujian praktik, maka Dimas mendapat SIM" adalah...

- A. Jika Dimas tidak mendapat SIM, maka Dimas tidak lulus ujian praktik.
- B. Jika Dimas mendapat SIM, maka Dimas lulus ujian praktik.
- C. Jika Dimas tidak lulus ujian praktik, maka Dimas tidak mendapat SIM.
- D. Dimas lulus ujian praktik dan tidak mendapat SIM.

Kunci: A

Pembahasan: Kontraposisi dari $p \Rightarrow q$ adalah $\neg q \Rightarrow \neg p$: tukar posisinya **dan** ingkari keduanya.

$\neg q$: "Dimas tidak mendapat SIM". $\neg p$: "Dimas tidak lulus ujian praktik".

Pilihan kedua adalah konvers, pilihan ketiga invers, dan pilihan keempat ingkaran implikasi itu.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Contoh penyangkal • 35-2-04

Ayu membantah klaim "Untuk setiap bilangan asli n , $n^2 + 1$ adalah bilangan prima" dengan sebuah contoh penyangkal. Nilai n manakah yang tepat?

- A. $n = 1$
- B. $n = 2$
- C. $n = 3$
- D. $n = 4$

Kunci: C

Pembahasan: Cek satu per satu:

$n = 1$: 2, prima. $n = 2$: 5, prima. $n = 3$: $10 = 2 \times 5$, **bukan prima**. $n = 4$: 17, prima.

Jadi $n = 3$ adalah contoh penyangkal. Satu contoh saja sudah cukup untuk menggugurkan klaim "untuk setiap".

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Hukum De Morgan • 35-3-01

Ingkaran dari "Ayu membawa payung dan jas hujan" adalah...

- A. Ayu tidak membawa payung dan tidak membawa jas hujan.
- B. Ayu tidak membawa payung atau tidak membawa jas hujan.
- C. Ayu membawa payung atau jas hujan.
- D. Ayu tidak membawa payung, tetapi membawa jas hujan.

Kunci: B

Pembahasan: Misalkan p : Ayu membawa payung, q : Ayu membawa jas hujan. Pernyataannya $p \wedge q$.

Menurut De Morgan, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$: "Ayu tidak membawa payung **atau** tidak membawa jas hujan."

Masuk akal: untuk membantah "membawa keduanya", cukup ada satu yang tidak dibawa. Pilihan pertama terlalu kuat, dan pilihan keempat hanya satu dari beberapa kemungkinan.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Penarikan kesimpulan • 35-3-02

Perhatikan premis berikut.

1. Jika Ancil lapar, maka Ancil mencuri timun.
2. Jika Ancil mencuri timun, maka Pak Tani marah.
3. Pak Tani tidak marah.

Kesimpulan yang sah adalah...

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| A. Ancil lapar. | C. Pak Tani lapar. |
| B. Ancil mencuri timun. | D. Ancil tidak lapar. |

Kunci: D

Pembahasan: Premis 1 dan 2 (silogisme): jika Ancil lapar, maka Pak Tani marah ($p \Rightarrow r$).

Premis 3: Pak Tani tidak marah ($\neg r$).

Modus tollens: dari $p \Rightarrow r$ dan $\neg r$, disimpulkan $\neg p$, yaitu **Ancil tidak lapar**.

(Dari premis 2 dan 3 juga terlihat bahwa Ancil tidak mencuri timun.)

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Jumlah bilangan ganjil • 35-3-03

Telah dibuktikan dengan induksi bahwa $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Gunakan rumus itu untuk menghitung $1 + 3 + 5 + \dots + 99$.

Jawaban:

Kunci: 2.500

Pembahasan: $2n - 1 = 99 \Rightarrow n = 50$. Jadi ada 50 bilangan ganjil.

Jumlahnya $50^2 = 2500$.

Cek dengan cara Gauss: 25 pasangan $(1 + 99), (3 + 97), \dots, (49 + 51)$ masing-masing berjumlah 100, total 2500.

✓

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Prinsip sarang merpati • 35-3-04

Di sebuah kelas ada 40 siswa. Paling sedikit berapa siswa yang **pasti** lahir pada bulan yang sama?

Jawaban: siswa

Kunci: 4 siswa

Pembahasan: Andaikan setiap bulan paling banyak berisi 3 siswa. Totalnya paling banyak $12 \times 3 = 36 < 40$.

Kontradiksi!

Jadi pasti ada bulan dengan paling sedikit $\lceil 40/12 \rceil = 4$ siswa.

Angka 4 ini memang yang terbaik: 40 siswa bisa tersebar menjadi 4 bulan berisi 4 siswa dan 8 bulan berisi 3 siswa, sehingga tidak ada jaminan 5 siswa sebulan.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Tabel kebenaran • gaya IGCSE • 35-4-01

Tabel kebenaran pernyataan $(p \vee q) \Rightarrow r$ memiliki 8 baris. **Tentukan** banyak baris yang bernilai **salah**.

Jawaban: baris

Kunci: 3 baris

Pembahasan: $(p \vee q) \Rightarrow r$ salah tepat ketika $p \vee q$ benar **dan** r salah.

$p \vee q$ benar pada 3 dari 4 kombinasi (p, q) : BB, BS, SB.

Dipasangkan dengan r salah: $3 \times 1 = 3$ baris.

14. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Pernyataan setara • gaya IGCSE • 35-4-02

Pernyataan manakah yang **setara** (ekuivalen) dengan "Jika sebuah segi empat adalah persegi, maka keempat sisinya sama panjang"?

- A. Jika keempat sisi sebuah segi empat tidak sama panjang, maka segi empat itu bukan persegi.
- B. Jika keempat sisi sebuah segi empat sama panjang, maka segi empat itu persegi.
- C. Jika sebuah segi empat bukan persegi, maka keempat sisinya tidak sama panjang.
- D. Sebuah segi empat adalah persegi dan keempat sisinya tidak sama panjang.

Kunci: A

Pembahasan: Pernyataan $p \Rightarrow q$ setara dengan kontraposisinya $\neg q \Rightarrow \neg p$: pilihan pertama.

Pilihan kedua (konvers) salah: belah ketupat juga punya empat sisi sama panjang, tetapi belum tentu persegi.

Pilihan ketiga (invers) salah karena alasan yang sama. Pilihan keempat justru ingkarannya, $p \wedge \neg q$.

15. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Bukti langsung • gaya IGCSE • 35-4-03

- (a) **Tunjukkan** bahwa jumlah tiga bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi 3.
- (b) Dimas menduga: "Jumlah empat bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi 4." **Tunjukkan** dengan sebuah contoh bahwa dugaan Dimas salah.
- (c) **Tunjukkan** bahwa jumlah empat bilangan bulat berurutan selalu bersisa 2 jika dibagi 4.

Kunci/rubrik: (a) Misalkan bilangannya $n, n+1, n+2$. Jumlahnya $3n+3 = 3(n+1)$, kelipatan 3. [2 poin: pemisalan 1, faktorisasi dan kesimpulan 1]

(b) $1+2+3+4 = 10$, dan 10 tidak habis dibagi 4. [1 poin]

(c) $n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6 = 4(n+1)+2$, jadi sisa pembagiannya oleh 4 selalu 2. [2 poin: bentuk aljabar 1, kesimpulan sisa 1]

Pembahasan: Bukti langsung memakai pemisalan umum n , bukan contoh angka. Contoh angka hanya berguna untuk **membantah** (bagian b). Bagian (c) sekaligus menjelaskan *mengapa* dugaan Dimas tidak pernah benar: sisanya selalu 2, tidak pernah 0.

16. Lv 4 • IGCSE • Isian • Rumus jumlah • gaya IGCSE • 35-4-04

Diketahui $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Jika $1+2+3+\dots+n = 210$, **hitung** nilai n .

Jawaban:

Kunci: 20

Pembahasan: $\frac{n(n+1)}{2} = 210 \Rightarrow n^2+n-420=0 \Rightarrow (n+21)(n-20)=0$.

Karena n bilangan asli, $n=20$.

Cek: $20 \times 21 : 2 = 210$. ✓

17. Lv 5 • IB DP • Uraian • Induksi matematika • gaya IB • 35-5-01

Diketahui pernyataan $P(n)$: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ untuk bilangan asli n .

(a) Tunjukkan bahwa $P(1)$ benar.

(b) Dengan mengandaikan $P(k)$ benar, buktikan bahwa $P(k+1)$ benar. Tuliskan kesimpulan induksinya.

(c) Gunakan rumus tersebut untuk menghitung $11^2 + 12^2 + \dots + 20^2$.

Kunci/rubrik: (a) Ruas kiri $1^2 = 1$; ruas kanan $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Sama. [1]

(b) Andaikan $1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Maka $1^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, yaitu rumus untuk $n = k+1$. [3: memakai hipotesis 1, memfaktorkan $k+1$, bentuk akhir 1]

Kesimpulan: $P(1)$ benar dan $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, jadi menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n . [1]

(c) $\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 2870 - 385 = 2485$. [2]

Pembahasan: Kunci langkah induktif: keluarkan faktor $(k+1)$ lebih dulu, baru sederhanakan. Bentuk akhirnya harus persis $\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$. Di (c), jumlah dari 11 sampai 20 adalah jumlah sampai 20 dikurangi jumlah sampai 10. Kalimat kesimpulan wajib ditulis agar mendapat nilai penuh.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Langkah induktif keterbagian • gaya IB • 35-5-02

Untuk membuktikan dengan induksi bahwa $7^n - 1$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan asli n , langkah induktifnya menuliskan

$$7^{k+1} - 1 = 7(7^k - 1) + m.$$

Tentukan bilangan m .

Jawaban:

Kunci: 6

Pembahasan: $7(7^k - 1) = 7^{k+1} - 7$. Agar sama dengan $7^{k+1} - 1$, perlu ditambah $m = 6$.

Maknanya: jika $6 \mid 7^k - 1$ (hipotesis induksi), maka $7(7^k - 1)$ habis dibagi 6, dan $m = 6$ juga habis dibagi 6. Jadi $7^{k+1} - 1$ habis dibagi 6.

Kasus dasar: $7^1 - 1 = 6$. ✓

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Kuantor & contoh penyangkal • gaya IB • 35-5-03

Perhatikan klaim: "Untuk setiap bilangan real x , $x^2 \geq x$." Pernyataan manakah yang benar?

A. Klaim benar, karena kuadrat suatu bilangan selalu lebih besar daripada bilangan itu.

B. Klaim salah; contoh penyangkalnya $x = \frac{1}{2}$.

C. Klaim salah; contoh penyangkalnya $x = -2$.

D. Klaim benar untuk semua x kecuali $x = 0$.

Kunci: B

Pembahasan: $x = \frac{1}{2}$: $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Jadi klaim salah.

$x = -2$ bukan contoh penyangkal: $4 \geq -2$ benar. $x = 0$ juga memenuhi: $0 \geq 0$.

Sebenarnya $x^2 < x \iff x(x-1) < 0 \iff 0 < x < 1$: semua bilangan di antara 0 dan 1 adalah contoh penyangkal.

Pernyataan $2^n > n^2$ tidak benar untuk semua bilangan asli, tetapi benar untuk semua $n \geq N$ mulai dari suatu N . Tentukan nilai N **terkecil** sehingga $2^n > n^2$ benar untuk semua $n \geq N$.

Jawaban:

Kunci: 5

Pembahasan: $n = 1: 2 > 1 \checkmark$. $n = 2: 4 > 4 \times$. $n = 3: 8 > 9 \times$. $n = 4: 16 > 16 \times$. $n = 5: 32 > 25 \checkmark$.

Langkah induktif untuk $k \geq 5: 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 3k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ (memakai $k \geq 3$).

Jadi $N = 5$. Nilai $N = 1$ tidak memenuhi karena $n = 2, 3, 4$ gagal.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Bukti dengan kontradiksi • gaya olimpiade • 35-6-01

(a) Buktikan bahwa $\sqrt{6}$ irasional.

(b) Buktikan bahwa $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irasional.

Kunci/rubrik: (a) Andaikan $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan asli dan $\gcd(a, b) = 1$. Maka $a^2 = 6b^2$, jadi a^2 genap sehingga a genap; tulis $a = 2c$. Diperoleh $4c^2 = 6b^2$, yaitu $2c^2 = 3b^2$. Ruas kiri genap, jadi $3b^2$ genap; karena 3 ganjil, b^2 genap sehingga b genap. Maka a dan b sama-sama genap, bertentangan dengan $\gcd(a, b) = 1$. [3 poin: andaian 1, a genap 1, b genap dan kontradiksi 1]

(b) Andaikan $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ rasional. Kuadratkan: $r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, sehingga $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2}$. Bilangan rasional yang dikuadratkan, dikurangi 5, lalu dibagi 2 tetap rasional, jadi $\sqrt{6}$ rasional, bertentangan dengan (a). Jadi $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irasional. [3 poin: mengkuadratkan 1, mengisolasi $\sqrt{6}$ 1, kontradiksi dengan (a) 1]

Pembahasan: Pola olimpiade: ubah pertanyaan baru menjadi fakta lama. Di (b) kita tidak menyerang $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ secara langsung, tetapi menunjukkan bahwa jika ia rasional, maka $\sqrt{6}$ juga rasional. Waspada: alasan "irasional + irasional = irasional" tidak sah, sebab $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Pulau Jujur-Bohong • gaya olimpiade • 35-6-02

Di Pulau Jujur-Bohong, setiap warga adalah warga Jujur (selalu berkata benar) atau warga Bohong (selalu berbohong). Sepuluh warga duduk mengelilingi meja bundar. Setiap warga berkata, "Kedua tetanggaku adalah warga Bohong." Paling sedikit berapa warga Jujur yang duduk di meja itu?

Jawaban: warga

Kunci: 4 warga

Pembahasan: Warga Jujur: kedua tetangganya Bohong, jadi tidak ada dua warga Jujur yang duduk bersebelahan.

Warga Bohong: pernyataannya salah, jadi **paling sedikit satu** tetangganya Jujur.

Setiap warga Jujur "menjaga" dirinya dan dua tetangganya, paling banyak 3 kursi. Agar kesepuluh kursi terjaga, perlu paling sedikit $\lceil 10/3 \rceil = 4$ warga Jujur.

Susunan dengan 4 warga Jujur memang ada: J B B J B B J B J B (melingkar). Setiap J diapit dua B, dan setiap B bertetangga dengan paling sedikit satu J. Jadi jawabannya **4**.

Dari bilangan $1, 2, 3, \dots, 20$ dipilih beberapa bilangan berbeda. Paling sedikit berapa bilangan yang harus dipilih agar **pasti** ada dua bilangan terpilih yang jumlahnya 21?

Jawaban: bilangan

Kunci: 11 bilangan

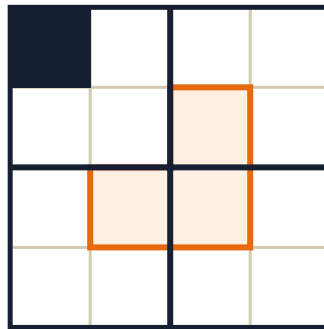
Pembahasan: Buat 10 "sarang": $\{1, 20\}, \{2, 19\}, \dots, \{10, 11\}$. Setiap sarang berjumlah 21.

Jika dipilih 11 bilangan, menurut prinsip sarang merpati dua di antaranya berada di sarang yang sama, dan jumlahnya 21.

Dengan 10 bilangan belum pasti: pilih $1, 2, \dots, 10$; jumlah terbesar dua di antaranya hanya $9 + 10 = 19$.

Jadi jawabannya **11**.

Sebuah papan berukuran $2^n \times 2^n$ petak ($n \geq 1$). Satu petak sembarang dibuang. Buktikan dengan induksi bahwa sisa papan selalu dapat ditutup sempurna (tanpa tumpang-tindih dan tanpa celah) oleh ubin berbentuk L yang terdiri atas 3 petak.



Kunci/rubrik: Kasus dasar $n = 1$: papan 2×2 tanpa satu petak tepat berbentuk satu ubin L. [1]

Hipotesis induksi: setiap papan $2^k \times 2^k$ tanpa satu petak sembarang dapat ditutup ubin L. [1]

Langkah: bagi papan $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ menjadi empat kuadran $2^k \times 2^k$. Petak yang dibuang berada di salah satu kuadran. Letakkan satu ubin L di tengah papan sehingga menutup petak pojok-tengah dari masing-masing tiga kuadran lainnya (lihat gambar). [2]

Sekarang setiap kuadran kehilangan tepat satu petak (satu karena dibuang, tiga karena tertutup ubin tengah), sehingga menurut hipotesis masing-masing dapat ditutup ubin L. [1]

Kesimpulan: menurut prinsip induksi matematika, pernyataan benar untuk semua $n \geq 1$. [1]

Pembahasan: Ide kuncinya: memecah masalah besar menjadi empat masalah kecil **yang bentuknya sama**. Ubin tengah adalah trik untuk "membuang" satu petak dari tiga kuadran yang masih utuh. Cek banyak petak: $4^n - 1$ selalu habis dibagi 3, cocok dengan luas ubin L.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Ordo matriks • 36-1-01

Matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ berordo...

A. 3×2

C. 6

B. 2×3

D. 2×2

Kunci: B

Pembahasan: Ordo ditulis **banyak baris $\times$ banyak kolom**. Matriks A punya 2 baris dan 3 kolom, jadi ordonya 2×3 . Jawaban "6" adalah banyak elemen, bukan ordo.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Membaca elemen • 36-1-02

Stok warung Bu Sari (kg) disusun sebagai matriks $S = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 15 \\ 12 & 9 & 10 \\ 30 & 24 & 27 \end{pmatrix}$ dengan baris: beras, gula, telur dan kolom: Senin, Selasa, Rabu. Berapa nilai elemen s_{32} ?

Jawaban: kg

Kunci: 24 kg

Pembahasan: s_{32} berada di baris ke-3 (telur) dan kolom ke-2 (Selasa), yaitu 24. Jadi stok telur hari Selasa 24 kg. Ingat: indeks pertama menunjuk baris, indeks kedua menunjuk kolom.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Penjumlahan matriks • 36-1-03

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dots$$

A. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Kunci: C

Pembahasan: Jumlahkan elemen yang seletak: $1 + 5 = 6$, $2 + 0 = 2$, $3 + (-1) = 2$, $4 + 2 = 6$.

Hasilnya $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Opsi pertama salah tanda pada $3 + (-1)$, dan opsi kedua adalah hasil *mengalikan* elemen seletak.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Perkalian skalar • 36-1-04

Hasil $3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ adalah...

- A. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

Kunci: D

Pembahasan: Perkalian skalar: **setiap** elemen dikali 3. $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot (-1) = -3$, $3 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 4 = 12$.

Opsi pertama hanya mengalikan satu elemen, opsi kedua malah menambahkan 3, dan opsi ketiga lupa tanda negatif.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Determinan • 36-2-01

Hitung determinan matriks $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: $\det = ad - bc = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 14 - 12 = 2$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Perkalian matriks • 36-2-02

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \dots$

- A. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

Kunci: A

Pembahasan: Baris $\times$ kolom:

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4, c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6,$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10, c_{22} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 12.$$

Opsi kedua mengalikan elemen seletak, opsi ketiga adalah hasil perkalian dengan urutan terbalik, dan opsi keempat adalah penjumlahan.

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Sandi Hill • 36-2-03

Dengan aturan $A = \mathcal{O}$, $B = 1, \dots, Z = 25$ dan kunci $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, pasangan huruf **HA** disandikan dengan menghitung $K \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, lalu mengambil sisa pembagian oleh 26. Hasil sandinya adalah...

- A. HO
B. OV
C. OH
D. GH

Kunci: C

Pembahasan: $K \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 7 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Keduanya sudah kurang dari 26. $14 = \mathcal{O}$ dan $7 = \text{H}$, jadi sandinya **OH**.

Opsi OV muncul jika pasangan huruf ditulis sebagai baris lalu dikalikan dari kiri: $\begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 14 & 21 \end{pmatrix}$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Baris × kolom • 36-2-04

Dimas membeli 2 porsi nasi uduk dan 3 gelas es teh. Harga satu porsi nasi uduk Rp8.000 dan satu gelas es teh Rp3.000. Total belanjanya adalah $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.000 \\ 3.000 \end{pmatrix}$. Berapa rupiah totalnya?

Jawaban: rupiah

Kunci: 25.000 rupiah

Pembahasan: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.000 \\ 3.000 \end{pmatrix} = 2 \cdot 8.000 + 3 \cdot 3.000 = 16.000 + 9.000 = 25.000$.

Totalnya Rp25.000. Matriks baris 1×2 dikali matriks kolom 2×1 menghasilkan matriks 1×1 , yaitu satu bilangan.

Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • SPL dengan invers • 36-3-01

Paket A berisi 3 pisang goreng dan 2 tahu isi seharga Rp11.000. Paket B berisi 1 pisang goreng dan 4 tahu isi seharga Rp12.000. Dengan menuliskan sistem ini sebagai $AX = B$ dan memakai invers matriks, tentukan harga satu tahu isi (dalam rupiah).

Jawaban: rupiah

Kunci: 2.500 rupiah

Pembahasan: Misalkan x = harga pisang goreng dan y = harga tahu isi.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.000 \\ 12.000 \end{pmatrix}$, dengan $\det A = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$.

$X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11.000 \\ 12.000 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 20.000 \\ 25.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 2.500 \end{pmatrix}$.

Harga satu tahu isi Rp2.500 (pisang goreng Rp2.000). Cek: $3 \cdot 2.000 + 2 \cdot 2.500 = 11.000 \checkmark$.

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Invers 2×2 • 36-3-02

Invers dari $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ adalah...

- A. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Kunci: B

Pembahasan: $\det = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$. Tukar a dan d , negatitkan b dan c , lalu bagi dengan 1: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Cek: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 9 & -15 + 15 \\ 6 - 6 & -9 + 10 \end{pmatrix} = I \checkmark$.

Opsi pertama lupa menegatitkan, opsi ketiga lupa menukar, opsi keempat menegatitkan semuanya.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Determinan sebagai faktor luas • 36-3-03

Sebuah segitiga dengan luas 6 cm^2 ditransformasi oleh matriks $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Berapa luas bayangannya?

Jawaban: cm^2

Kunci: 60 cm^2

Pembahasan: $\det = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$. Setiap luas dikali $|\det| = 10$, jadi luas bayangan $6 \times 10 = 60 \text{ cm}^2$.

Bentuk segitiganya berubah, tetapi luasnya selalu tepat 10 kali luas semula.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Matriks singular • 36-3-04

Tentukan nilai $k > 0$ agar matriks $\begin{pmatrix} k & 6 \\ 2 & k - 1 \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers.

Jawaban:

Kunci: 4

Pembahasan: $\det = k(k - 1) - 6 \cdot 2 = k^2 - k - 12 = (k - 4)(k + 3)$.

$\det = 0 \Rightarrow k = 4$ atau $k = -3$. Karena $k > 0$, maka $k = 4$.

Cek: $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$: baris pertama tepat 2 kali baris kedua, jadi matriks ini menggepengkan bidang.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Determinan pangkat • gaya IGCSE • 36-4-01

Diketahui $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Hitung $\det(M^2)$.

Jawaban:

Kunci: 196

Pembahasan: Cara cepat: $\det(M^2) = \det M \cdot \det M = (\det M)^2$.

$\det M = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = 12 + 2 = 14$, jadi $\det(M^2) = 14^2 = 196$.

Cara panjang: $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$, dan $\det = 98 - 98 = 0$ $\checkmark$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Elemen invers • gaya IGCSE • 36-4-02

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Tentukan A^{-1} , lalu tuliskan elemen baris 1, kolom 2 dari A^{-1} .

Jawaban:

Kunci: -1,5

Pembahasan: $\det A = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2$.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Elemen baris 1, kolom 2 adalah $-\frac{3}{2} = -1,5$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Matriks transformasi • gaya IGCSE • 36-4-03

Matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mewakili transformasi...

- A. rotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O
- B. pencerminan terhadap sumbu-y
- C. dilatasi dengan faktor -1
- D. pencerminan terhadap garis $y = x$

Kunci: D

Pembahasan: Lihat kolom-kolomnya: titik $(1, 0)$ dibawa ke $(0, 1)$ dan titik $(0, 1)$ dibawa ke $(1, 0)$. Secara umum $(x, y) \mapsto (y, x)$: kedua koordinat bertukar tempat. Itulah pencerminan terhadap garis $y = x$.

(Rotasi 90° memakai $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cermin sumbu-y memakai $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • SPL dengan invers • gaya IGCSE • 36-4-04

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Tentukan A^{-1} .

(b) Gunakan jawaban (a) untuk menyelesaikan sistem $2x + y = 7$ dan $3x + 2y = 12$.

(c) Tunjukkan bahwa jawabanmu memenuhi kedua persamaan.

Kunci/rubrik: (a) $\det A = 4 - 3 = 1$, jadi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. [2 poin: determinan 1, matriks 1]

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 12 \\ -21 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, jadi $x = 2$ dan $y = 3$. [2 poin: urutan $A^{-1}B$ 1, hasil 1]

(c) $2(2) + 3 = 7 \checkmark$ dan $3(2) + 2(3) = 12 \checkmark$. [1 poin]

Pembahasan: Kesalahan yang sering terjadi adalah menghitung BA^{-1} ; perkalian itu bahkan tidak terdefinisi karena B berordo 2×1 . Karena $\det A = 1$, inversnya berisi bilangan bulat sehingga hitungannya ringan.

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Matriks rotasi • gaya IB • 36-5-01

Titik $P(4, 2)$ dirotasi 60° berlawanan arah jarum jam terhadap titik asal dengan matriks $\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$. Tentukan koordinat- x bayangannya dalam bentuk eksak.

Jawaban:

Kunci: 0,268

Pembahasan: $x' = 4 \cos 60^\circ - 2 \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$.

Sekalian: $y' = 4 \sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} + 1 \approx 4,464$.

Cek kewajaran: rotasi tidak mengubah jarak ke O. $(2 - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + 1)^2 = (7 - 4\sqrt{3}) + (13 + 4\sqrt{3}) = 20 = 4^2 + 2^2 \checkmark$.

18. Lv 5 • IB DP • Uraian • Matriks transisi • gaya IB • 36-5-02

Di sebuah kota, setiap bulan 80% pengguna ojek pangkalan tetap memakai ojek pangkalan dan 20% pindah ke ojek daring, sedangkan 90% pengguna ojek daring tetap dan 10% pindah ke ojek pangkalan.

Bulan ini proporsinya 50% : 50%. Misalkan $s_n = \begin{pmatrix} p_n \\ d_n \end{pmatrix}$ (proporsi pangkalan, daring) dan $s_{n+1} = Ts_n$.

(a) Tuliskan matriks transisi T .

(b) Hitung proporsi setelah 1 bulan dan setelah 2 bulan.

(c) Dalam jangka panjang proporsinya mendekati keadaan tetap s dengan $Ts = s$. Tentukan s dan tafsirkan.

Kunci/rubrik: (a) $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ (setiap kolom berjumlah 1). [1]

(b) $s_1 = T \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$; $s_2 = Ts_1 = \begin{pmatrix} 0,36 + 0,055 \\ 0,09 + 0,495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,415 \\ 0,585 \end{pmatrix}$. [2]

(c) Dengan $p + d = 1$: $0,8p + 0,1(1 - p) = p \Rightarrow 0,1 = 0,3p \Rightarrow p = \frac{1}{3}$. Jadi $s = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$: dalam jangka panjang sekitar sepertiga pengguna memakai ojek pangkalan dan dua pertiga memakai ojek daring. [3: persamaan 1, nilai 1, tafsiran 1]

Pembahasan: Model ini disebut **rantai Markov**. Keadaan tetap s adalah vektor yang tidak berubah ketika dikali T .

Cek: $Ts = \begin{pmatrix} 0,8/3 + 0,2/3 \\ 0,2/3 + 1,8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \checkmark$. Menariknya, untuk matriks ini hasil jangka panjangnya sama berapa pun proporsi awalnya.

19. Lv 5 • IB DP • Isian • Sifat determinan • gaya IB • 36-5-03

Matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ memiliki $\det A = 4$. Tentukan $\det(3A^{-1})$.

Jawaban:

Kunci: 2,25

Pembahasan: $\det A = 6 - k = 4$, jadi $k = 2$ (sebenarnya nilai k tidak diperlukan!).

$\det(3A^{-1}) = 3^2 \cdot \det(A^{-1}) = 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$.

Jebakan umum: menjawab $3 \cdot \frac{1}{4}$. Padahal faktor 3 mengalikan *kedua* baris, sehingga determinan dikali 3^2 .

Transformasi T_1 adalah pencerminan terhadap sumbu- x dan T_2 adalah rotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O . Matriks tunggal untuk transformasi " T_1 dilanjutkan T_2 " adalah...

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Kunci: A

Pembahasan: T_1 bekerja lebih dulu, jadi matriksnya ditulis paling kanan:

$$M = R_{90}F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ yaitu pencerminan terhadap } y = x.$$

Opsi kedua adalah FR_{90} (urutan terbalik), opsi ketiga hanya rotasinya, dan opsi keempat adalah jumlah kedua matriks. Cek dengan titik $(1, 0)$: dicerminkan tetap $(1, 0)$, lalu diputar menjadi $(0, 1) \checkmark$.

Lv 6 • Olimpiade gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Pola pangkat matriks • gaya olimpiade • 36-6-01

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tentukan jumlah keempat elemen matriks A^{2026} .

Jawaban:

Kunci: -1

Pembahasan: $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$.

Jadi $A^6 = (-I)^2 = I$: pangkat A berulang dengan periode 6.

$$2026 = 6 \cdot 337 + 4, \text{ sehingga } A^{2026} = A^4 = A^3A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jumlah elemennya $0 - 1 + 1 - 1 = -1$. Mencari pangkat kecil yang menghasilkan $\pm I$ adalah jurus utama soal pangkat matriks.

22. Lv 6 • Olimpiade • Uraian • Teorema Cayley-Hamilton • gaya olimpiade • 36-6-02

Untuk $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

(a) Buktikan bahwa $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O$.

(b) Simpulkan: jika $a+d=0$ dan $ad-bc=1$, maka $A^2 = -I$ dan $A^4 = I$.

(c) Berikan contoh matriks ber elemen bilangan bulat yang memenuhi (b) tetapi **bukan** matriks rotasi 90° .

Kunci/rubrik: (a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$ dan $(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$. Selisihnya

$$\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -(ad-bc)I, \text{ sehingga } A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O. [3]$$

(b) Substitusi: $A^2 - 0 \cdot A + 1 \cdot I = O$, jadi $A^2 = -I$ dan $A^4 = (A^2)^2 = (-I)^2 = I$. [1]

(c) Contoh $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $a+d=0$ dan $ad-bc = -1+2=1$. Cek: $A^2 = \begin{pmatrix} 1-2 & -2+2 \\ 1-1 & -2+1 \end{pmatrix} = -I \checkmark$. [1]

Pembahasan: Identitas (a) adalah **Teorema Cayley-Hamilton** untuk matriks 2×2 . Bagian (b) dan (c) menunjukkan bahwa di dunia matriks ada banyak sekali "akar dari $-I$ ". Ini petunjuk menuju bilangan i dengan $i^2 = -1$ di Bab 37.

Barisan Fibonacci $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ memenuhi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ untuk $n \geq 1$.

Tentukan nilai $F_{2027}F_{2025} - F_{2026}^2$.

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: Untuk $n = 2026$, determinan ruas kanan adalah $F_{2027}F_{2025} - F_{2026}^2$.

Determinan ruas kiri: $\det(M^{2026}) = (\det M)^{2026} = (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1)^{2026} = (-1)^{2026} = 1$.

Jadi $F_{2027}F_{2025} - F_{2026}^2 = 1$, tanpa menghitung bilangan Fibonacci raksasa itu! Cek kecil ($n = 4$): $F_5F_3 - F_4^2 = 5 \cdot 2 - 9 = 1 = (-1)^4 \checkmark$. Ini identitas Cassini.

Ada berapa matriks 2×2 yang semua elemennya 0 atau 1 dan **mempunyai invers**?

A. 4

C. 8

B. 6

D. 10

Kunci: B

Pembahasan: Ada $2^4 = 16$ matriks. Sebuah matriks tidak punya invers jika $ad = bc$.

Hasil kali ad bernilai 1 hanya jika $a = d = 1$ (1 cara), dan bernilai 0 dalam 3 cara; begitu juga bc .

$ad = bc = 0$: $3 \cdot 3 = 9$ matriks; $ad = bc = 1$: 1 matriks. Jadi ada 10 matriks singular dan $16 - 10 = 6$ matriks yang punya invers:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Satuan imajiner • 37-1-01

Bilangan i (satuan imajiner) didefinisikan sebagai bilangan yang memenuhi...

- A. $i = -1$ C. $i^2 = 1$
 B. $i^2 = -1$ D. $i = \sqrt{1}$

Kunci: B

Pembahasan: Definisinya $i^2 = -1$. Bilangan i bukan -1 , sebab $(-1)^2 = 1$. Bilangan i tidak berada di garis bilangan real; di bidang Argand ia menunjuk tegak lurus ke atas.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Pangkat i • 37-1-02

Nilai i^3 adalah...

- A. i C. $-i$
 B. -1 D. 1

Kunci: C

Pembahasan: $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$.

Secara geometris: tiga kali seperempat putaran dari 1 berakhir di bawah, yaitu di $-i$.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Akar bilangan negatif • 37-1-03

Bentuk sederhana $\sqrt{-49}$ adalah ki dengan $k > 0$. Berapakah k ?

Jawaban:

Kunci: 7

Pembahasan: $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = 7i$, jadi $k = 7$.

Cek: $(7i)^2 = 49i^2 = -49$. ✓

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Bidang Argand • 37-1-04

Di bidang Argand, bilangan $2 + 3i$ digambarkan sebagai titik...

- A. $(2, 3)$ C. $(2, -3)$
 B. $(3, 2)$ D. $(5, 0)$

Kunci: A

Pembahasan: Bagian real (2) menjadi koordinat mendatar dan bagian imajiner (3) menjadi koordinat tegak, jadi titiknya $(2, 3)$.

Titik $(2, -3)$ adalah sekawannya, yaitu $2 - 3i$.

Lv 2 • Penjelajah SMP (Fase D)

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Penjumlahan • 37-2-01

Jika $(4 + 3i) + (2 - 7i) = a + bi$, berapakah b ?

Jawaban:

Kunci: -4**Pembahasan:** Jumlahkan bagian real dengan bagian real dan bagian imajiner dengan bagian imajiner:

$$(4 + 2) + (3 - 7)i = 6 - 4i.$$

Jadi $b = -4$ (bukan $-4i$; bagian imajiner adalah bilangan real).6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Pangkat besar i • 37-2-02Nilai i^{35} adalah...

A. 1

C. -1 B. i D. $-i$ **Kunci: D****Pembahasan:** Pangkat i berulang setiap 4 langkah. $35 = 4 \times 8 + 3$, sisa 3.

$$i^{35} = (i^4)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Perkalian • 37-2-03

Hitung $(2 + i)(3 - 2i)$ dan tuliskan dalam bentuk $a + bi$. Berapakah a ?

Jawaban:

Kunci: 8

$$\textbf{Pembahasan: } (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$$

Jadi $a = 8$ (dan $b = -1$). Suku $-2i^2$ berubah menjadi $+2$ karena $i^2 = -1$.

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Sekawan • 37-2-04

Hitung $(3 + 2i)(3 - 2i)$.

Jawaban:

Kunci: 13

$$\textbf{Pembahasan: } (3 + 2i)(3 - 2i) = 9 - 6i + 6i - 4i^2 = 9 + 4 = 13.$$

Hasil kali bilangan kompleks dengan sekawannya selalu real, yaitu $a^2 + b^2$.**Lv 3 • Pejuang SMA • TKA/UTBK**

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Pembagian • 37-3-01

Nyatakan $\frac{10}{3 + i}$ dalam bentuk $a + bi$. Berapakah b ?

Jawaban:

Kunci: -1

$$\textbf{Pembahasan: } \frac{10}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{30 - 10i}{9 + 1} = \frac{30 - 10i}{10} = 3 - i.$$

Jadi $b = -1$. Cek: $(3 - i)(3 + i) = 9 + 1 = 10$. ✓

10. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Argumen di kuadran III • 37-3-02

Argumen utama $z = -1 - i$ dalam rentang $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$ adalah...

- A. 45° C. -135°
B. 135° D. -45°

Kunci: C

Pembahasan: Titik $(-1, -1)$ berada di kuadran III. Sudut acuannya $\tan^{-1} 1 = 45^\circ$.

Di kuadran III dengan rentang argumen utama: $\theta = -(180^\circ - 45^\circ) = -135^\circ$.

Pilihan 45° adalah jebakan kalkulator: $\tan^{-1} \frac{-1}{-1}$ tidak tahu kuadran.

11. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kesamaan bilangan kompleks • 37-3-03

Bilangan real x dan y memenuhi $(x + 2i)(1 - i) = 7 + yi$. Tentukan y .

Jawaban:

Kunci: -3

Pembahasan: $(x + 2i)(1 - i) = x - xi + 2i - 2i^2 = (x + 2) + (2 - x)i$.

Bagian real: $x + 2 = 7$, jadi $x = 5$.

Bagian imajiner: $y = 2 - x = 2 - 5 = -3$.

Cek: $(5 + 2i)(1 - i) = 5 - 5i + 2i + 2 = 7 - 3i$. ✓

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Persamaan kuadrat dengan $D < 0$ • 37-3-04

Persamaan $z^2 - 4z + 13 = 0$ tidak punya akar real, tetapi punya dua akar kompleks. Tentukan bagian imajiner akar yang bagian imajinernya positif.

Jawaban:

Kunci: 3

Pembahasan: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$, jadi $\sqrt{D} = 6i$.

$$z = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Akar dengan bagian imajiner positif adalah $2 + 3i$, jadi jawabannya 3.

Kedua akar saling sekawan; ini selalu terjadi pada persamaan kuadrat berkoefisien real.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Modulus hasil kali • gaya IGCSE • 37-4-01

Diketahui $z = 1 + 2i$ dan $w = 3 - i$. **Hitung** $|zw|$. Berikan jawaban eksak atau sampai 3 angka penting.

Jawaban:

Kunci: 7,0711

Pembahasan: Cara 1: $zw = (1 + 2i)(3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$, sehingga $|zw| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$.

Cara 2 (lebih cepat): $|zw| = |z| |w| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Bentuk polar • gaya IGCSE • 37-4-02

Bilangan $z = -2 + 2i$ ditulis dalam bentuk $r \text{ cis } \theta$ dengan $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$.

(a) **Tentukan** r dalam bentuk akar.

(b) **Tentukan** θ dalam derajat.

Masukkan jawaban (b).

Jawaban: °

Kunci: 135 °

Pembahasan: (a) $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

(b) Titik $(-2, 2)$ berada di kuadran II dengan sudut acuan $\tan^{-1} \frac{2}{-2} = 45^\circ$, jadi $\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Jadi $z = 2\sqrt{2} \text{ cis } 135^\circ$.

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Perkalian dengan i • gaya IGCSE • 37-4-03

Titik $P(3, 1)$ di bidang Argand mewakili bilangan z . Titik manakah yang mewakili iz ?

A. $(1, 3)$

C. $(3, -1)$

B. $(-1, 3)$

D. $(-3, -1)$

Kunci: B

Pembahasan: $iz = i(3 + i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$, yaitu titik $(-1, 3)$.

Secara geometris, P diputar 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O . Pilihan $(1, 3)$ adalah pencerminan terhadap garis $y = x$, bukan putaran; $(3, -1)$ adalah sekawan; $(-3, -1)$ adalah $-z$.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Akar kuadrat bilangan kompleks • gaya IGCSE • 37-4-04

(a) **Tunjukkan** bahwa $(2 + i)^2 = 3 + 4i$.

(b) Dengan demikian, **tuliskan** kedua akar kuadrat dari $3 + 4i$.

(c) **Selesaikan** persamaan $z^2 - 2z - (2 + 4i) = 0$.

Kunci/rubrik: (a) $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$. [1 poin]

(b) $2 + i$ dan $-(2 + i) = -2 - i$. [1 poin]

(c) Lengkapi kuadrat: $z^2 - 2z + 1 = 3 + 4i$, yaitu $(z - 1)^2 = 3 + 4i$. [1 poin] Maka $z - 1 = \pm(2 + i)$, sehingga $z = 3 + i$ atau $z = -1 - i$. [2 poin]

Pembahasan: Kunci bagian (c) adalah melengkapi kuadrat seperti di Bab 11, lalu memakai hasil (b).

Cek $z = 3 + i$: $(3 + i)^2 - 2(3 + i) - 2 - 4i = (8 + 6i) - (6 + 2i) - 2 - 4i = 0$. ✓

Cek $z = -1 - i$: $(-1 - i)^2 = 2i$, jadi $2i - 2(-1 - i) - 2 - 4i = 2i + 2 + 2i - 2 - 4i = 0$. ✓

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Teorema De Moivre • gaya IB • 37-5-01

Gunakan Teorema De Moivre untuk menghitung $(\sqrt{3} - i)^6$.

Jawaban:

Kunci: -64

Pembahasan: $r = \sqrt{3 + 1} = 2$. Titik $(\sqrt{3}, -1)$ berada di kuadran IV dengan sudut acuan 30° , jadi $\theta = -30^\circ$.

$(\sqrt{3} - i)^6 = 2^6 \text{ cis } (-180^\circ) = 64(\cos 180^\circ - i \sin 180^\circ) = -64$.

Hasilnya real negatif: enam kali putaran -30° berakhir tepat di sumbu real negatif.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Listrik AC • gaya IB • 37-5-02

Tegangan efektif listrik rumah 220 V dipasang pada motor pompa air yang impedansinya $Z = 40 + 30j$ ohm (insinyur memakai j untuk $\sqrt{-1}$). Kuat arus efektifnya $I = \frac{V}{|Z|}$. Tentukan I dalam ampere.

Jawaban: A

Kunci: 4,4 A

Pembahasan: $|Z| = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50$ ohm.

$$I = \frac{220}{50} = 4,4 \text{ A.}$$

Argumen Z , yaitu $\tan^{-1} \frac{30}{40} \approx 36,9^\circ$, menunjukkan bahwa arus tertinggal sekitar $36,9^\circ$ dari tegangan.

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Luas segi-n akar kesatuan • gaya IB • 37-5-03

Kelima akar persamaan $z^5 = 1$ digambar di bidang Argand dan dihubungkan menjadi segi lima beraturan. Luas segi lima itu adalah...

A. $\frac{5}{2} \sin 72^\circ$

C. $\frac{5}{2} \sin 36^\circ$

B. $5 \sin 72^\circ$

D. π

Kunci: A

Pembahasan: Akar-akarnya terletak pada lingkaran satuan dengan sudut 72° di antara dua akar berurutan. Segi lima terbagi menjadi 5 segitiga dengan dua sisi 1 dan sudut apit 72° ; luas masing-masing $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 72^\circ$.

Luas total $= \frac{5}{2} \sin 72^\circ \approx 2,38$, sedikit kurang dari luas lingkaran $\pi \approx 3,14$.

20. Lv 5 • IB DP • Uraian • Pangkat $(1 + i)$ • gaya IB • 37-5-04

Misalkan $z = 1 + i$.

(a) Tuliskan z dalam bentuk $r \text{ cis } \theta$.

(b) Tunjukkan bahwa z^n bilangan real jika dan hanya jika n kelipatan 4.

(c) Tentukan bilangan asli n sehingga $z^n = -64$.

Kunci/rubrik: (a) $z = \sqrt{2} \text{ cis } 45^\circ$. [1 poin]

(b) Menurut De Moivre, $z^n = (\sqrt{2})^n \text{ cis}(45n)^\circ$. Bilangan ini real tepat ketika $\sin(45n)^\circ = 0$, yaitu ketika $45n$ kelipatan 180 , yaitu ketika n kelipatan 4. [2 poin]

(c) Modulus harus $(\sqrt{2})^n = 64 = (\sqrt{2})^{12}$, jadi $n = 12$. Cek argumen: $45 \cdot 12 = 540^\circ$, setara 180° , memang real negatif. Jadi $n = 12$. [2 poin]

Pembahasan: Bagian (c) menguji dua syarat sekaligus: modulus harus 64 dan arah harus 180° . Misalnya $n = 8$ memberi $(1 + i)^8 = 16 \text{ cis } 360^\circ = 16$; real, tetapi positif dan terlalu kecil.

Cek cepat (c): $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$, $(1 + i)^{12} = (-4)^3 = -64$. ✓

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Saringan akar kesatuan • gaya olimpiade • 37-6-01

Hitung $\binom{10}{0} + \binom{10}{3} + \binom{10}{6} + \binom{10}{9}$ dengan memakai akar pangkat tiga dari 1. (Setelah itu, cek dengan menghitung langsung.)

Jawaban:

Kunci: 341**Pembahasan:** Untuk $\omega = \text{cis } 120^\circ$: $1 + \omega^k + \omega^{2k}$ bernilai 3 jika k kelipatan 3 dan 0 jika bukan. Maka

$$\sum_{3|k} \binom{10}{k} = \frac{2^{10} + (1 + \omega)^{10} + (1 + \omega^2)^{10}}{3}.$$

Karena $1 + \omega = \text{cis } 60^\circ$ dan $1 + \omega^2 = \text{cis}(-60^\circ)$, jumlah dua suku terakhir $= 2 \cos 60^\circ = 2 \cos 240^\circ = -1$.

Hasil: $\frac{1024 - 1}{3} = 341$. Cek langsung: $1 + 120 + 210 + 10 = 341$. ✓

22. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Akar pangkat tiga dari 1 • gaya olimpiade • 37-6-02

Misalkan $\omega \neq 1$ memenuhi $\omega^3 = 1$. Nilai $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8)$ adalah...

A. 0

C. ω

B. -1

D. 1

Kunci: D**Pembahasan:** Karena $\omega^3 = 1$: $\omega^4 = \omega$ dan $\omega^8 = \omega^6 \cdot \omega^2 = \omega^2$. Jadi hasil kalinya $[(1 + \omega)(1 + \omega^2)]^2$.

$(1 + \omega)(1 + \omega^2) = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = 0 + 1 = 1$, memakai $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Hasilnya $1^2 = 1$.

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Hasil kali tali busur • gaya olimpiade • 37-6-03

Titik-titik sudut sebuah segi-12 beraturan terletak pada lingkaran berjari-jari 1. Dari satu titik sudut A , tarik ruas garis ke 11 titik sudut lainnya. Berapakah hasil kali panjang ke-11 ruas garis itu?

Jawaban:

Kunci: 12**Pembahasan:** Titik-titik sudutnya adalah akar-akar $z^{12} = 1$, yaitu $1, \omega, \dots, \omega^{11}$. Maka $z^{12} - 1 = (z - 1)(z - \omega) \cdots (z - \omega^{11})$, sehingga

$$(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{11}) = \frac{z^{12} - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{11}.$$

Substitusi $z = 1$ dan ambil modulusnya: hasil kali panjang ruas $|1 - \omega^k|$ sama dengan $1 + 1 + \cdots + 1 = 12$.

Hasil yang indah: untuk segi- n beraturan di lingkaran satuan, hasil kalinya selalu n .

- (a) Buktikan bahwa untuk $n \geq 2$, jumlah semua akar persamaan $z^n = 1$ adalah 0.
- (b) Buktikan bahwa untuk setiap sudut θ : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{360^\circ k}{n}\right) = 0$.
- (c) Jaringan listrik tiga fase memakai tiga tegangan $V \cos \theta$, $V \cos(\theta + 120^\circ)$, dan $V \cos(\theta + 240^\circ)$. Apa arti hasil (b) untuk jumlah ketiga tegangan itu?

Kunci/rubrik: (a) Misalkan $\omega = \text{cis } \frac{360^\circ}{n} \neq 1$ dan $S = 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1}$. Maka $\omega S = \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n = S$ karena $\omega^n = 1$. Jadi $(\omega - 1)S = 0$, dan karena $\omega \neq 1$, $S = 0$. [3 poin]

(b) $\sum_{k=0}^{n-1} \text{cis}\left(\theta + \frac{360^\circ k}{n}\right) = \text{cis } \theta \cdot S = 0$. Bagian real ruas kiri adalah jumlah kosinus yang diminta, dan bagian real dari 0 adalah 0. [2 poin]

(c) Dengan $n = 3$, jumlah ketiga tegangan selalu 0 pada setiap saat. [1 poin] Akibatnya, pada beban yang seimbang, arus yang kembali lewat kabel netral (hampir) nol. [1 poin]

Pembahasan: Ide kunci (a): mengalikan dengan ω hanya memutar segi- n ke dirinya sendiri, sehingga jumlahnya tidak berubah; satu-satunya bilangan yang tidak berubah ketika diputar adalah 0.

Bagian (b) adalah trik standar olimpiade: ubah jumlah kosinus menjadi bagian real dari jumlah bilangan kompleks.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Sisa pembagian • 38-1-01

Berapa sisa pembagian 47 oleh 5?

- A. 9 C. 3
B. 2 D. 7

Kunci: B

Pembahasan: $47 = 9 \cdot 5 + 2$, dan $0 \leq 2 < 5$. Jadi sisanya 2.
Angka 9 adalah hasil bagi, bukan sisa.

2. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Hari dalam seminggu • 38-1-02

Hari ini hari Senin. Hari apakah 10 hari lagi?

- A. Rabu C. Sabtu
B. Jumat D. Kamis

Kunci: D

Pembahasan: $10 = 1 \cdot 7 + 3$. Setiap 7 hari nama hari kembali ke Senin, jadi cukup maju 3 hari: Selasa, Rabu, Kamis.

3. Lv 1 • Pemula • Isian • Jam dinding • 38-1-03

Jarum jam dinding menunjuk pukul 9. Lima jam kemudian, jarum menunjuk pukul berapa? (Jawab dengan angka 1-12.)

Jawaban:

Kunci: 2

Pembahasan: $9 + 5 = 14$ dan $14 = 1 \cdot 12 + 2$. Jam dinding "melupakan" kelipatan 12, jadi jarum menunjuk pukul 2.
Dalam bahasa modular: $14 \equiv 2 \pmod{12}$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Algoritma pembagian • 38-1-04

Dua puluh tiga kue arisan dibagi rata kepada 4 orang. Manakah penulisan algoritma pembagian 23 oleh 4 yang benar?

- A. $23 = 5 \times 4 + 3$ C. $23 = 6 \times 4 - 1$
B. $23 = 4 \times 4 + 7$ D. $23 = 7 \times 3 + 2$

Kunci: A

Pembahasan: Keempat persamaan benar sebagai hitungan, tetapi algoritma pembagian mensyaratkan sisa $0 \leq r < 4$.

- $23 = 4 \times 4 + 7$: sisa 7 masih bisa dibagi lagi.
- $23 = 6 \times 4 - 1$: sisanya negatif.
- $23 = 7 \times 3 + 2$: pembaginya 3, bukan 4.

Jadi yang benar $23 = 5 \times 4 + 3$: tiap orang 5 kue, sisa 3.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Algoritma Euclid • 38-2-01

Gunakan algoritma Euclid untuk menentukan FPB(391, 299).

Jawaban:

Kunci: 23

Pembahasan: $391 = 1 \cdot 299 + 92$

$299 = 3 \cdot 92 + 23$

$92 = 4 \cdot 23 + 0$

Sisa terakhir yang bukan nol adalah **23**. Cek: $391 = 17 \cdot 23$ dan $299 = 13 \cdot 23$.

6. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Angka satuan • 38-2-02

Angka satuan dari 3^{2027} adalah...

A. 1

C. 7

B. 3

D. 9

Kunci: C

Pembahasan: Angka satuan pangkat 3 berulang: 3, 9, 7, 1, 3, 9, ... (siklus 4).

$2027 = 4 \cdot 506 + 3$, jadi 3^{2027} berada di posisi ke-3 siklus: angka satuannya **7**.

7. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Bilangan dengan sisa tertentu • 38-2-03

Tentukan bilangan bulat terkecil yang lebih besar daripada 100 dan bersisa 3 jika dibagi 7.

Jawaban:

Kunci: 101

Pembahasan: $100 = 14 \cdot 7 + 2$, jadi 100 bersisa 2. Bilangan berikutnya, 101, bersisa 3.

Cek: $101 = 14 \cdot 7 + 3$. ✓ Jawabannya **101**.

8. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Uang pas • 38-2-04

Ayu ingin membayar tepat Rp16.000 hanya dengan lembaran Rp2.000 dan Rp5.000, tanpa kembalian. Ada berapa cara?

A. 1

C. 3

B. 2

D. 4

Kunci: B

Pembahasan: Misalkan x lembar Rp2.000 dan y lembar Rp5.000: $2x + 5y = 16$ (dalam ribuan).

Karena $2x$ dan 16 genap, $5y$ harus genap, jadi y genap: $y = 0$ atau $y = 2$ ($y = 4$ sudah 20 ribu).

$y = 0 \Rightarrow x = 8$; $y = 2 \Rightarrow x = 3$. Jadi ada **2 cara**.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Sisa pangkat besar • 38-3-01

Tentukan sisa pembagian 2^{100} oleh 7.

Jawaban:

Kunci: 2**Pembahasan:** $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$. $100 = 3 \cdot 33 + 1$, jadi $2^{100} = (2^3)^{33} \cdot 2 \equiv 1^{33} \cdot 2 = 2 \pmod{7}$.

Sisanya 2.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • Kongruensi linear • 38-3-02

Setiap loyang kue berisi 17 potong. Ibu ingin memasukkan semua potongan ke kotak-kotak berisi 12 potong sehingga tersisa tepat 1 potong untuk dicicipi. Paling sedikit berapa loyang yang harus dibuat?

Jawaban: loyang

Kunci: 5 loyang**Pembahasan:** Syaratnya $17x \equiv 1 \pmod{12}$. Karena $17 \equiv 5$, cukup selesaikan $5x \equiv 1 \pmod{12}$.Coba $x = 1, 2, 3, 4, 5$: sisa $5x$ adalah 5, 10, 3, 8, 1. ✓Jadi $x = 5$ loyang: $85 = 7 \cdot 12 + 1$, tujuh kotak penuh dan sisa 1 potong.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Syarat solusi Diophantine • 38-3-03

Persamaan manakah yang **tidak** mempunyai penyelesaian bilangan bulat x, y ?

A. $6x + 9y = 21$

C. $4x + 10y = 7$

B. $5x + 7y = 1$

D. $12x + 18y = 30$

Kunci: C**Pembahasan:** Persamaan $ax + by = c$ punya solusi bulat tepat ketika $\text{FPB}(a, b) \mid c$.• $\text{FPB}(6, 9) = 3 \mid 21$ ✓ (misalnya $x = 2, y = 1$)• $\text{FPB}(5, 7) = 1 \mid 1$ ✓ ($x = 3, y = -2$)• $\text{FPB}(4, 10) = 2 \nmid 7$ ✗: ruas kiri selalu genap, ruas kanan ganjil.• $\text{FPB}(12, 18) = 6 \mid 30$ ✓ ($x = 1, y = 1$)

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Faktorial modulo • 38-3-04

Tentukan sisa pembagian $1! + 2! + 3! + \dots + 100!$ oleh 12.

Jawaban:

Kunci: 9**Pembahasan:** $4! = 24$ habis dibagi 12, dan setiap $n!$ dengan $n \geq 4$ memuat faktor $4!$, jadi juga habis dibagi 12.Yang tersisa hanya $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$.

Sisanya 9.

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • FPB dengan algoritma Euclid • gaya IGCSE • 38-4-01

Gunakan algoritma Euclid untuk **menghitung** faktor persekutuan terbesar (*highest common factor*) dari 1593 dan 1239. Tuliskan setiap langkah pembagiannya.

Jawaban:

Kunci: 177

Pembahasan: $1593 = 1 \cdot 1239 + 354$

$1239 = 3 \cdot 354 + 177$

$354 = 2 \cdot 177 + 0$

FPB = **177**. Bonus: pecahan $\frac{1239}{1593}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{7}{9}$.

14. Lv 4 • IGCSE • Isian • Digit cek ISBN • gaya IGCSE • 38-4-02

ISBN-13 sebuah buku adalah 978-623-7432-58-*d*. Digit cek (*check digit*) *d* dipilih agar jumlah berbobot $1 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 + 3 \cdot a_4 + \dots + 3 \cdot a_{12} + 1 \cdot d$ habis dibagi 10 (bobot 1 dan 3 bergantian). **Hitung** *d*.

Jawaban:

Kunci: 6

Pembahasan: Jumlah berbobot 12 angka pertama:

$9 + 21 + 8 + 18 + 2 + 9 + 7 + 12 + 3 + 6 + 5 + 24 = 124$.

Agar $124 + d$ habis dibagi 10, haruslah $d = 6$ (totalnya 130). ✓

15. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Kongruensi linear • gaya IGCSE • 38-4-03

Tentukan bilangan bulat x dengan $0 \leq x < 15$ yang memenuhi $4x \equiv 7 \pmod{15}$.

A. 2

C. 11

B. 7

D. 13

Kunci: D

Pembahasan: Cari invers 4 modulo 15: $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1$, jadi inversnya 4.

Kalikan kedua ruas dengan 4: $16x \equiv 28$, yaitu $x \equiv 28 \equiv 13 \pmod{15}$.

Cek: $4 \cdot 13 = 52 = 3 \cdot 15 + 7$. ✓ Jawabannya **13**.

16. Lv 4 • IGCSE • Uraian • Membayar dengan dua jenis uang • gaya IGCSE • 38-4-04

Ayu ingin membayar tepat Rp43.000 hanya dengan lembaran Rp2.000 dan Rp5.000, tanpa kembalian.

Misalkan ia memakai x lembar Rp2.000 dan y lembar Rp5.000.

(a) **Tuliskan** persamaan dalam x dan y (dalam ribuan rupiah).

(b) **Tunjukkan** bahwa y harus ganjil.

(c) **Tentukan** semua pasangan (x, y) yang mungkin.

(d) Cara manakah yang memakai lembaran paling sedikit?

Kunci/rubrik: (a) $2x + 5y = 43$. [1]

(b) $5y = 43 - 2x$ adalah bilangan ganjil (ganjil dikurangi genap). Jika y genap, $5y$ genap; jadi y harus ganjil. [2]

(c) $y \in \{1, 3, 5, 7\}$ ($y = 9$ sudah 45 ribu): $(19, 1)$, $(14, 3)$, $(9, 5)$, $(4, 7)$. [2]

(d) $(4, 7)$: $4 + 7 = 11$ lembar. [1]

Pembahasan: Trik paritas di (b) memangkas pencarian menjadi separuhnya. Semakin banyak lembar Rp5.000, semakin sedikit lembar yang dipakai, karena satu lembar Rp5.000 menggantikan 2,5 lembar Rp2.000.

17. Lv 5 • IB DP • Isian • Dua angka terakhir • gaya IB • 38-5-01

Tentukan dua angka terakhir dari 3^{2026} , yaitu sisa pembagiannya oleh 100.

Jawaban:

Kunci: 29

Pembahasan: $3^{10} = 59049 \equiv 49 \pmod{100}$, jadi $3^{20} \equiv 49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$.

$2026 = 20 \cdot 101 + 6$, sehingga $3^{2026} \equiv 3^6 = 729 \equiv 29 \pmod{100}$.

Dua angka terakhirnya **29**.

18. Lv 5 • IB DP • Isian • Sistem kongruensi • gaya IB • 38-5-02

Banyak kue untuk arisan berada di antara 100 dan 150. Jika dibagi rata ke 5 meja, tersisa 2 kue; jika dibagi rata ke 7 meja, tersisa 3 kue. **Modelkan** dengan dua kongruensi, lalu tentukan banyak kue.

Jawaban: kue

Kunci: 122 kue

Pembahasan: Model: $x \equiv 2 \pmod{5}$ dan $x \equiv 3 \pmod{7}$.

Bilangan yang bersisa 3 jika dibagi 7: 3, 10, 17, ...; yang pertama bersisa 2 jika dibagi 5 adalah 17.

Semua solusi: $x = 17 + 35t$ (Teorema Sisa Cina): 17, 52, 87, **122**, 157, ...

Yang berada di antara 100 dan 150 hanya 122. Cek: $122 = 24 \cdot 5 + 2 = 17 \cdot 7 + 3$. ✓

19. Lv 5 • IB DP • Pilihan ganda • Teorema Fermat kecil • gaya IB • 38-5-03

Sisa pembagian 2^{2026} oleh 13 adalah...

- | | |
|------|-------|
| A. 1 | C. 10 |
| B. 4 | D. 12 |

Kunci: C

Pembahasan: 13 prima dan tidak membagi 2, jadi menurut Teorema Fermat kecil $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

$2026 = 12 \cdot 168 + 10$, sehingga $2^{2026} \equiv 2^{10} = 1024 \pmod{13}$.

$1024 = 78 \cdot 13 + 10$, jadi sisanya **10**.

Bilangan 341 sering "menipu" uji Fermat.

(a) **Tunjukkan** bahwa $2^{10} \equiv 1 \pmod{341}$.

(b) **Simpulkan** bahwa $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$.

(c) **Tunjukkan** bahwa 341 bukan bilangan prima, lalu **jelaskan** mengapa hasil (b) tidak bertentangan dengan Teorema Fermat kecil.

(d) Dengan Teorema Fermat kecil modulo 31, **tunjukkan** bahwa $3^{340} \not\equiv 1 \pmod{341}$.

Kunci/rubrik: (a) $2^{10} = 1024 = 3 \cdot 341 + 1$. [1]

(b) $2^{340} = (2^{10})^{34} \equiv 1^{34} = 1 \pmod{341}$. [1]

(c) $341 = 11 \cdot 31$. Teorema Fermat berbentuk "jika p prima, maka $a^{p-1} \equiv 1$ "; kebalikannya tidak dijamin, jadi bilangan komposit boleh saja memenuhi $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ untuk basis tertentu. [2]

(d) Modulo 31: $3^{30} \equiv 1$ dan $340 = 30 \cdot 11 + 10$, jadi $3^{340} \equiv 3^{10} \pmod{31}$. Karena $3^5 = 243 = 7 \cdot 31 + 26 \equiv -5$, diperoleh $3^{10} \equiv 25 \not\equiv 1 \pmod{31}$. Jika $3^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, maka (karena $31 \mid 341$) juga $3^{340} \equiv 1 \pmod{31}$; kontradiksi. [2]

Pembahasan: Bilangan komposit n dengan $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ disebut *pseudoprima basis 2*; 341 adalah yang terkecil. Basis 3 berhasil membongkar penyamarannya. Uji keprimaan modern (misalnya uji Miller–Rabin) memakai ide serupa dengan banyak basis acak.

Lv 6 • Olimpiade • gaya OSN/IMO

21. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Mencacah dengan kongruensi • gaya olimpiade • 38-6-01

Ada berapa bilangan asli $n \leq 2026$ sehingga $n^2 + n + 1$ habis dibagi 7?

Jawaban:

Kunci: 579

Pembahasan: Sisa $n^2 + n + 1$ dibagi 7 hanya bergantung pada $n \pmod{7}$:

$$n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow 1, 3, 0, 6, 0, 3, 1.$$

Jadi syaratnya $n \equiv 2$ atau $n \equiv 4 \pmod{7}$.

$$n = 2, 9, \dots, 2025: \frac{2025-2}{7} + 1 = 290 \text{ bilangan.}$$

$$n = 4, 11, \dots, 2020: \frac{2020-4}{7} + 1 = 289 \text{ bilangan.}$$

Totalnya **579**.

22. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Diophantine dengan syarat positif • gaya olimpiade • 38-6-02

Banyak pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $7x + 11y = 2026$ adalah...

A. 26

C. 27

B. 25

D. 28

Kunci: A

Pembahasan: Modulo 11: $2026 \equiv 2$, jadi $7x \equiv 2 \pmod{11}$. Invers 7 modulo 11 adalah 8 ($56 = 5 \cdot 11 + 1$), sehingga $x \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$.

Tulis $x = 5 + 11t$; maka $11y = 2026 - 35 - 77t = 1991 - 77t$, jadi $y = 181 - 7t$.

Syarat $x \geq 1$: $t \geq 0$. Syarat $y \geq 1$: $7t \leq 180$, yaitu $t \leq 25$.

Jadi $t = 0, 1, \dots, 25$: ada **26** pasangan. (Pengecoh 25 lupa menghitung $t = 0$.)

Tentukan angka satuan dari $1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + \dots + 2026^{2026}$.

Jawaban:

Kunci: 1

Pembahasan: Untuk $k \geq 1$, a^{k+4} dan a^k berangka satuan sama. Karena $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, setiap n^{2026} berangka satuan sama dengan n^2 .

Angka satuan n^2 untuk n berakhiran 1, 2, ..., 9, 0: 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0; jumlahnya 45.

Dari 1 sampai 2020 ada 202 blok sepuluh: $202 \cdot 45 = 9090$, angka satuannya 0.

Sisanya, $n = 2021, \dots, 2026$, menyumbang $1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 = 31$.

Angka satuan totalnya 1.

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat n , bilangan $n^7 - n$ habis dibagi 42. Tunjukkan pula bahwa 42 adalah bilangan asli terbesar yang membagi $n^7 - n$ untuk *semua* n .

Kunci/rubrik: (1) Habis dibagi 7: menurut Teorema Fermat kecil, $n^7 \equiv n \pmod{7}$ untuk setiap bilangan bulat n . [2]

(2) Habis dibagi 6: $n^7 - n = n(n^6 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ memuat hasil kali tiga bilangan bulat berurutan $(n - 1)n(n + 1)$, yang selalu habis dibagi 2 dan 3. [2]

(3) Karena 2, 3, 7 prima yang berbeda, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ membagi $n^7 - n$. [1]

(4) Terbesar: $n = 2$ memberi $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ dan $n = 3$ memberi $2184 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$. Bilangan yang membagi keduanya harus membagi FPB(126, 2184) = 42. [1]

Pembahasan: Pola umumnya: $n^k - n$ habis dibagi setiap prima q dengan $(q - 1) \mid (k - 1)$, karena untuk $q \nmid n$ berlaku $n^{k-1} = (n^{q-1})^{(k-1)/(q-1)} \equiv 1 \pmod{q}$. Untuk $k = 7$: $q - 1 \in \{1, 2, 3, 6\}$ memberi $q \in \{2, 3, 4, 7\}$; yang prima 2, 3, 7, dan hasil kalinya 42.

Lv 1 • Pemula SD-SMP awal

1. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Prinsip sarang merpati • 39-1-01

Enam ekor merpati masuk ke lima sarang. Pernyataan manakah yang **pasti** benar?

- A. Setiap sarang berisi tepat satu merpati.
- B. Ada sarang yang berisi paling sedikit dua merpati.
- C. Ada sarang yang kosong.
- D. Ada sarang yang berisi tiga merpati.

Kunci: B

Pembahasan: Andaikan setiap sarang berisi paling banyak satu merpati. Lima sarang hanya menampung paling banyak 5 merpati, padahal ada 6. Jadi pasti ada sarang berisi paling sedikit 2 merpati.
Pilihan lain tidak *pasti* benar: susunan 2, 1, 1, 1, 1 tidak punya sarang kosong dan tidak punya sarang berisi tiga.

2. Lv 1 • Pemula • Isian • Kaus kaki dalam gelap • 39-1-02

Di dalam laci yang gelap ada banyak kaus kaki putih, hitam, dan abu-abu. Paling sedikit berapa kaus kaki yang harus kamu ambil tanpa melihat agar **pasti** mendapat dua kaus kaki yang warnanya sama?

Jawaban: kaus kaki

Kunci: 4 kaus kaki

Pembahasan: Sarangnya adalah 3 warna. Dengan 3 kaus kaki, nasib terburuk: putih, hitam, abu-abu (semuanya berbeda). Kaus kaki ke-4 pasti sewarna dengan salah satunya.
Jadi 4 kaus kaki cukup, sedangkan 3 belum cukup.

3. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • AM dan GM • 39-1-03

Rata-rata aritmetika (AM) dan rata-rata geometri (GM) dari bilangan 4 dan 9 berturut-turut adalah...

- A. 6,5 dan 6
- B. 6 dan 6,5
- C. 13 dan 36
- D. 6,5 dan 36

Kunci: A

Pembahasan: $AM = \frac{4+9}{2} = 6,5$. $GM = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$.
Benar saja, $AM \geq GM$: $6,5 \geq 6$.

4. Lv 1 • Pemula • Pilihan ganda • Domino di papan catur • 39-1-04

Sebuah domino diletakkan pada papan catur sehingga menutup tepat dua petak yang bersebelahan (berbagi sisi). Domino itu selalu menutup...

- A. dua petak hitam
- B. dua petak putih
- C. satu petak hitam dan satu petak putih
- D. dua petak yang warnanya bergantung pada letak domino

Kunci: C

Pembahasan: Pada papan catur, dua petak yang berbagi sisi selalu berbeda warna. Jadi setiap domino, mendatar atau tegak, menutup tepat satu petak hitam dan satu petak putih. Fakta kecil inilah kunci teka-teki papan catur terpotong.

5. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Sarang merpati: bulan lahir • 39-2-01

Sebuah SMP memiliki 400 siswa. Paling sedikit berapa siswa yang **pasti** lahir pada bulan yang sama?

Jawaban: siswa

Kunci: 34 siswa

Pembahasan: Merpati = 400 siswa, sarang = 12 bulan. $400 \div 12 = 33,3 \dots$, dibulatkan ke atas menjadi 34.

Alasannya: kalau setiap bulan paling banyak 33 siswa, totalnya paling banyak $12 \times 33 = 396 < 400$. Jadi ada bulan dengan paling sedikit 34 siswa.

6. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Pagar terbaik • 39-2-02

Pak Darto punya kawat 36 m untuk memagari kebun berbentuk persegi panjang. Berapa luas kebun **terbesar** yang bisa ia pagari?

Jawaban: m²

Kunci: 81 m²

Pembahasan: Keliling 36 m $\Rightarrow p + l = 18$. Menurut AM-GM, $\sqrt{pl} \leq \frac{p+l}{2} = 9$, jadi $pl \leq 81$.

Kesamaan terjadi saat $p = l = 9$: kebunnya persegi. Luas terbesar 81 m².

7. Lv 2 • Penjelajah • Pilihan ganda • Invarian paritas • 39-2-03

Di papan tertulis bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6. Setiap langkah, Ayu menghapus dua bilangan lalu menuliskan **selisih** keduanya (yang besar dikurangi yang kecil). Ia terus melakukannya sampai tersisa satu bilangan. Bilangan terakhir itu pasti...

- A. genap
- B. 0
- C. bisa genap, bisa ganjil, bergantung pada urutan
- D. ganjil

Kunci: D

Pembahasan: Perhatikan **paritas jumlah** semua bilangan di papan. Mengganti a dan b (dengan $a \geq b$) dengan $a - b$ mengubah jumlah sebesar $(a - b) - a - b = -2b$, bilangan genap. Jadi paritas jumlah tidak pernah berubah: itulah **invarian**.

Jumlah awal $1 + 2 + \dots + 6 = 21$, ganjil. Maka bilangan terakhir juga ganjil (bisa 1, 3, atau 5, tetapi tidak pernah genap).

8. Lv 2 • Penjelajah • Isian • Minimum dengan AM-GM • 39-2-04

Tentukan nilai minimum $x + \frac{25}{x}$ untuk $x > 0$.

Jawaban:

Kunci: 10

Pembahasan: AM-GM untuk x dan $\frac{25}{x}$: $x + \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{25}{x}} = 2\sqrt{25} = 10$.

Kesamaan terjadi saat $x = \frac{25}{x}$, yaitu $x = 5$: $5 + 5 = 10$. Jadi minimumnya 10.

9. Lv 3 • Pejuang • Isian • Memilih sarang yang cerdas • 39-3-01

Paling sedikit berapa bilangan yang harus dipilih dari 1, 2, 3, ..., 20 agar **pasti** ada dua bilangan terpilih yang selisihnya tepat 5?

Jawaban: bilangan

Kunci: 11 bilangan

Pembahasan: Buat 10 sarang berisi pasangan berselisih 5: {1, 6}, {2, 7}, {3, 8}, {4, 9}, {5, 10}, {11, 16}, {12, 17}, {13, 18}, {14, 19}, {15, 20}. Kesepuluh sarang mencakup semua bilangan 1–20. Memilih 11 bilangan $\Rightarrow$ dua di antaranya sesarang $\Rightarrow$ selisihnya 5.

Sepuluh bilangan belum cukup: pilihan {1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15} tidak memuat dua bilangan berselisih 5. Jadi jawabannya 11.

10. Lv 3 • Pejuang • Isian • AM-GM berbobot • 39-3-02

Bilangan positif x dan y memenuhi $xy = 36$. Tentukan nilai minimum $4x + 9y$.

Jawaban:

Kunci: 72

Pembahasan: $4x + 9y \geq 2\sqrt{4x \cdot 9y} = 2\sqrt{36xy} = 2\sqrt{36 \cdot 36} = 72$.

Kesamaan terjadi saat $4x = 9y$. Bersama $xy = 36$ didapat $x = 9$ dan $y = 4$: $36 + 36 = 72 \checkmark$.

11. Lv 3 • Pejuang • Pilihan ganda • Pewarnaan papan 5×5 • 39-3-03

Papan 5×5 diwarnai seperti papan catur sehingga keempat pojoknya hitam. Satu petak dibuang, lalu 24 petak sisanya hendak ditutup dengan 12 domino. Pernyataan yang benar adalah...

- A. Petak mana pun boleh dibuang.
- B. Hanya petak tengah yang boleh dibuang.
- C. Petak yang dibuang harus petak hitam.
- D. Petak yang dibuang harus petak putih.

Kunci: C

Pembahasan: Papan 5×5 punya 13 petak hitam dan 12 petak putih. Setiap domino menutup 1 hitam + 1 putih, jadi 12 domino butuh tepat 12 hitam dan 12 putih. Maka yang dibuang **harus** petak hitam. Membuang petak putih menyisakan 13 hitam dan 11 putih: mustahil.

Petak hitam mana pun memang berhasil. Contohnya petak tengah: sisanya terbagi menjadi empat persegi panjang 2×3 berbentuk kincir angin, masing-masing ditutup 3 domino. Pojok pun boleh, jadi pilihan "hanya petak tengah" salah.

12. Lv 3 • Pejuang • Isian • Bekerja mundur: ambil biji • 39-3-04

Dimas dan Ayu bermain dengan 53 biji congklak. Mereka bergiliran mengambil 1, 2, 3, atau 4 biji. Pemain yang mengambil biji terakhir menang. Dimas mendapat giliran pertama. Berapa biji yang harus Dimas ambil pada langkah pertamanya agar ia pasti menang?

Jawaban: biji

Kunci: 3 biji

Pembahasan: Bekerja mundur. Dengan 1–4 biji di giliranmu, ambil semuanya: menang. Dengan 5 biji, apa pun yang kamu ambil, lawan mendapat 1–4 biji dan menang. Jadi 5 adalah **posisi kalah**.

Polanya: kelipatan 5 adalah posisi kalah bagi yang mendapat giliran. Strategi menang: selalu sisakan kelipatan 5 untuk lawan. Jika lawan mengambil k biji, kamu mengambil $5 - k$.

$53 = 5 \times 10 + 3$, jadi Dimas mengambil **3** biji dan menyisakan 50.

Lv 4 • IGCSE gaya Cambridge IGCSE

13. Lv 4 • IGCSE • Isian • Kandang menempel tembok • gaya IGCSE • 39-4-01

Pak Joko membuat kandang ayam berbentuk persegi panjang yang menempel pada tembok rumah, sehingga pagar hanya dipasang pada tiga sisi. Panjang pagar yang tersedia 60 m. **Hitung** luas maksimum kandang.

Jawaban: m²

Kunci: 450 m²

Pembahasan: Misalkan dua sisi yang tegak lurus tembok masing-masing x dan sisi sejajar tembok y . Maka $2x + y = 60$ dan luas $L = xy = \frac{1}{2}(2x)(y)$.

AM-GM: $(2x)(y) \leq \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = 30^2 = 900$, jadi $L \leq 450$.

Kesamaan saat $2x = y = 30$: $x = 15$ m dan $y = 30$ m. Luas maksimum 450 m². Kandanganya *bukan* persegi, karena tembok menggantikan satu sisi pagar.

14. Lv 4 • IGCSE • Pilihan ganda • Cauchy-Schwarz • gaya IGCSE • 39-4-02

Bilangan real a dan b memenuhi $a^2 + b^2 = 10$. **Tentukan** nilai maksimum $a + 3b$.

A. 10

C. 13

B. $\sqrt{10}$

D. 30

Kunci: A

Pembahasan: Cauchy-Schwarz: $(1 \cdot a + 3 \cdot b)^2 \leq (1^2 + 3^2)(a^2 + b^2) = 10 \cdot 10 = 100$, jadi $a + 3b \leq 10$.

Kesamaan saat (a, b) sebanding dengan $(1, 3)$: $a = 1$, $b = 3$. Cek: $1^2 + 3^2 = 10 \checkmark$ dan $a + 3b = 1 + 9 = 10 \checkmark$.

15. Lv 4 • IGCSE • Isian • Sarang merpati: skor kuis • gaya IGCSE • 39-4-03

Dalam sebuah kuis, 30 siswa memperoleh skor bilangan bulat dari 0 sampai 10. **Tentukan** bilangan terbesar m sehingga dapat dipastikan ada m siswa yang skornya sama.

Jawaban: siswa

Kunci: 3 siswa

Pembahasan: Ada 11 kemungkinan skor (0, 1, ..., 10), bukan 10! $\lceil 30/11 \rceil = \lceil 2,72... \rceil = 3$.

Empat tidak bisa dijamin: delapan skor masing-masing dimiliki 3 siswa dan tiga skor lain masing-masing dimiliki 2 siswa ($8 \times 3 + 3 \times 2 = 30$). Tidak ada skor yang dimiliki 4 siswa. Jadi $m = 3$.

- (a) **Tunjukkan** bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$ untuk semua bilangan real a dan b .
- (b) Dengan memisalkan $a = \sqrt{x}$ dan $b = \sqrt{y}$, **tunjukkan** bahwa $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ untuk $x, y \geq 0$, lalu **nyatakan** kapan kesamaan terjadi.
- (c) **Gunakan** hasil (b) untuk menunjukkan bahwa di antara semua persegi panjang dengan luas 49 cm^2 , persegi memiliki keliling terkecil. **Tuliskan** keliling terkecil itu.

Kunci/rubrik: (a) $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, karena kuadrat bilangan real tidak pernah negatif. [2 poin]

(b) Substitusi memberi $x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y} = 2\sqrt{xy}$; bagi kedua ruas dengan 2. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, yaitu $x = y$. [2 poin]

(c) Misalkan sisinya p dan l dengan $pl = 49$. Keliling $K = 2(p + l) \geq 2 \cdot 2\sqrt{pl} = 4\sqrt{49} = 28$. Kesamaan saat $p = l = 7$, yaitu persegi. Keliling terkecil 28 cm. [3 poin]

Pembahasan: Seluruh ketaksamaan AM-GM dua bilangan bersandar pada satu fakta sederhana: **kuadrat tidak pernah negatif**. Bagian (c) adalah kebalikan soal pagar: luas dibuat tetap, keliling diminimumkan. Jawabannya sama-sama persegi.

Lv 5 • IB DP gaya IB Mathematics

Sebuah usaha keripik di Malang memesan kardus tanpa tutup beralas persegi dengan volume 32.000 cm^3 . Agar hemat, luas bahan kardus (alas + empat sisi tegak) harus sekecil mungkin. Misalkan sisi alas $x \text{ cm}$ dan tinggi $h \text{ cm}$. Tentukan luas bahan minimum.

Jawaban: cm^2

Kunci: 4.800 cm^2

Pembahasan: $x^2 h = 32000 \Rightarrow h = \frac{32000}{x^2}$. Luas $L = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{128000}{x}$.

Pecah suku kedua: $L = x^2 + \frac{64000}{x} + \frac{64000}{x}$. AM-GM tiga bilangan:

$$L \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{64000}{x} \cdot \frac{64000}{x}} = 3\sqrt[3]{64000^2} = 3 \times 1600 = 4800.$$

Kesamaan saat $x^2 = \frac{64000}{x} \Rightarrow x^3 = 64000 \Rightarrow x = 40 \text{ cm}$ dan $h = 20 \text{ cm}$. Cek: $1600 + 4 \cdot 40 \cdot 20 = 4800 \checkmark$. Dengan turunan (Bab 29) hasilnya sama.

Sebuah kelas berisi 25 siswa.

- Tunjukkan bahwa pasti ada paling sedikit 3 siswa yang lahir pada bulan yang sama.
- Berapa banyak siswa paling sedikit yang diperlukan agar *pasti* ada 5 siswa yang lahir pada bulan yang sama? Jelaskan.
- Anggap setiap bulan sama peluangnya dan bulan lahir antarsiswa saling bebas. Tiga siswa dipilih. Hitung peluang ketiganya lahir pada bulan yang berbeda-beda.
- Jelaskan perbedaan makna jawaban (a) dan (c).

Kunci/rubrik: (a) Andaikan setiap bulan paling banyak 2 siswa. Totalnya paling banyak $12 \times 2 = 24 < 25$, kontradiksi. [2 poin]

(b) Dengan 48 siswa, setiap bulan bisa berisi tepat 4 siswa, jadi belum pasti. Dengan 49 siswa: $\lceil 49/12 \rceil = 5$. Jawabannya 49 siswa. [2 poin]

(c) $\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} = \frac{1320}{1728} = \frac{55}{72} \approx 0,764$. [2 poin]

(d) Jawaban (a) adalah **kepastian** yang berlaku untuk kelas mana pun; jawaban (c) adalah **kemungkinan**, yaitu frekuensi relatif dalam banyak percobaan. [1 poin]

Pembahasan: Sarang merpati menjawab "apakah *pasti*?", sedangkan peluang (Bab 33) menjawab "seberapa *mungkin*?". Rumus umum untuk (b): agar pasti ada r siswa yang lahir pada bulan yang sama, diperlukan $12(r - 1) + 1$ siswa.

Bilangan real x, y, z memenuhi $x + 2y + 2z = 12$. Tentukan nilai minimum $x^2 + y^2 + z^2$.

Jawaban:

Kunci: 16

Pembahasan: $144 = (x + 2y + 2z)^2 \leq (1 + 4 + 4)(x^2 + y^2 + z^2) = 9(x^2 + y^2 + z^2)$, jadi $x^2 + y^2 + z^2 \geq 16$.

Kesamaan saat $(x, y, z) = k(1, 2, 2)$: $9k = 12$, $k = \frac{4}{3}$. Titik $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3})$ memberi $\frac{16+64+64}{9} = 16 \checkmark$.

Makna geometrisnya: jarak titik asal ke bidang $x + 2y + 2z = 12$ adalah $\frac{12}{3} = 4$, dan kuadratnya 16.

Sebuah bidak "kuda maju" berada di titik $(0, 0)$. Setiap langkah ia berpindah dari (x, y) ke $(x + 1, y + 2)$ atau ke $(x + 2, y + 1)$. Titik manakah yang **dapat** dicapainya?

- | | |
|-----------|-----------|
| A. (5, 5) | C. (2, 2) |
| B. (4, 7) | D. (6, 9) |

Kunci: D

Pembahasan: Invarian: setiap langkah menambah $x + y$ dengan 3, jadi $x + y$ selalu kelipatan 3.

(5, 5) memberi 10, (4, 7) memberi 11, (2, 2) memberi 4: bukan kelipatan 3, mustahil. (6, 9) memberi 15 $\checkmark$.

Invarian hanya menyaring; kita masih perlu menunjukkan caranya. Dengan a langkah $(1, 2)$ dan b langkah $(2, 1)$: $a + 2b = 6$ dan $2a + b = 9$ memberi $a = 4$, $b = 1$. Jadi (6, 9) benar-benar tercapai.

21. Lv 6 • Olimpiade • Pilihan ganda • Sarang merpati geometri • gaya olimpiade • 39-6-01

Paling sedikit berapa titik yang harus diletakkan di dalam atau pada tepi sebuah persegi bersisi 3 agar **pasti** ada dua titik yang jaraknya tidak lebih dari $\sqrt{2}$?

- A. 9
B. 10
C. 5
D. 17

Kunci: B

Pembahasan: Bagi persegi menjadi 9 persegi kecil bersisi 1. Dua titik di dalam satu persegi kecil berjarak paling jauh sepanjang diagonalnya, $\sqrt{2}$. Dengan 10 titik, sarang merpati menjamin ada dua titik di persegi kecil yang sama. Sembilan titik belum cukup: letakkan titik-titik pada kisi 3×3 dengan koordinat $\{0; 1,5; 3\} \times \{0; 1,5; 3\}$. Jarak terdekatnya $1,5 > \sqrt{2} \approx 1,414$. Jadi jawabannya 10.

22. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Lemma Titu • gaya olimpiade • 39-6-02

Bilangan real positif x dan y memenuhi $x + y = 1$. Tentukan nilai minimum $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$.

Jawaban:

Kunci: 9

Pembahasan: Bentuk Engel (lemma Titu) dari Cauchy-Schwarz: $\frac{1^2}{x} + \frac{2^2}{y} \geq \frac{(1+2)^2}{x+y} = \frac{9}{1} = 9$.

Kesamaan saat $\frac{1}{x} = \frac{2}{y}$, yaitu $y = 2x$. Dengan $x + y = 1$: $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. Cek: $3 + 6 = 9 \checkmark$.

Jebakan: AM-GM langsung $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{4}{xy}}$ tidak memberi angka tetap, karena xy masih berubah-ubah.

23. Lv 6 • Olimpiade • Isian • Invarian hasil kali • gaya olimpiade • 39-6-03

Di papan tertulis 100 bilangan: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$. Setiap langkah, dua bilangan a dan b dihapus lalu diganti dengan $a + b + ab$. Setelah 99 langkah tersisa satu bilangan. Berapakah bilangan itu?

Jawaban:

Kunci: 100

Pembahasan: Karena $(a + b + ab) + 1 = (a + 1)(b + 1)$, hasil kali semua $(x + 1)$ untuk bilangan x di papan tidak pernah berubah: **invarian**.

Nilai awalnya teleskopik: $(1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{100}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{101}{100} = 101$.

Bilangan terakhir x memenuhi $x + 1 = 101$, jadi $x = 100$, apa pun urutan langkahnya.

- (a) Buktikan bahwa dari sembarang 5 bilangan bulat, selalu dapat dipilih 3 bilangan yang jumlahnya habis dibagi 3.
- (b) Tunjukkan dengan contoh bahwa pernyataan itu tidak berlaku untuk 4 bilangan bulat.

Kunci/rubrik: (a) Kelompokkan kelima bilangan menurut sisa pembagiannya oleh 3; ada tiga sarang: sisa 0, 1, dan 2. [1 poin]

Kasus 1: ketiga sisa muncul. Ambil satu bilangan dari setiap sarang; jumlah sisanya $0 + 1 + 2 = 3$, jadi jumlah ketiga bilangan habis dibagi 3. [2 poin]

Kasus 2: paling banyak dua sisa yang muncul. Lima bilangan di paling banyak dua sarang $\Rightarrow$ ada sarang berisi paling sedikit $\lceil 5/2 \rceil = 3$ bilangan. Tiga bilangan bersisa sama r berjumlah dengan sisa $3r \equiv 0 \pmod{3}$. [2 poin]

Kedua kasus mencakup semua kemungkinan, jadi pernyataan terbukti. [1 poin]

(b) Contoh: 3, 6, 1, 4 (sisanya 0, 0, 1, 1). Jumlah tiga bilangan mana pun adalah 10, 13, 8, atau 11; tidak ada yang habis dibagi 3. [1 poin]

Pembahasan: Dua senjata dipakai sekaligus: **pemisahan kasus** dan **prinsip sarang merpati**. Hasil ini adalah kasus kecil dari teorema Erdős–Ginzburg–Ziv (1961): dari $2n - 1$ bilangan bulat, selalu ada n bilangan yang jumlahnya habis dibagi n . Untuk $n = 3$: dari 5 bilangan, pilih 3.